3ο Σετ Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα

1η Άσκηση

Ένα σύστημα με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$ περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- Να βρεθεί η $H(s)$ και να βρεθούν οι πόλοι του συστήματος, δηλαδή οι τιμές του s όπου δεν ορίζεται η $H(s)$
- Βάσει των πόλων, να βρείτε τις πιθανές περιοχές σύγκλισης και για κάθε περιοχή σύγκλισης να βρεθεί η $h(t)$.

Λύση

- Όπως στον Fourier έτσι και εδώ έστω ότι έχομε μια διαφορική εξίσωση η οποία έχει την μορφή $\displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = \sum_{n=1}^{N} b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ και αναπαριστά ένα σύστημα εισόδου $x(t)$ και εξόδου $y(t)$. Τότε η η $H(s) = \dfrac{\sum_{n=1}^{N} b_n s^n}{\sum_{n=1}^{M} a_n s^n}$. Άρα $H(s) = \dfrac{s}{s^2+6s+5}$
- $H(s) = \dfrac{s}{s^2+6s+5} \Rightarrow H(s) = \dfrac{s}{(s+5)(s+1)}$. Τα σημεία που μηδενίζεται ο παρωνομαστής και δεν ορίζεται η $H(s)$ ονομάζονται πόλοι. Τα σημεία αυτά είναι το -5 και το -1. Ορίζουν 3 περιοχές:
  - Έστω $\mathcal{R}e > -1$ $H(s) = \dfrac{s}{s^2+6s+5} \Rightarrow H(s) = \dfrac{s}{(s+5)(s+1)} = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{5}{4}\dfrac{1}{s+5}$. Ο μετασχηματισμος $\frac{1}{s+1}$ αντιστοιχεί στα σήματα $e^{-t}u(t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] > -1$ και $-e^{-t}u(-t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] < -1$. Ομοίως ο μετασχηματισμος $\frac{1}{s+5}$ αντιστοιχεί στα σήματα $e^{-5t}u(t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] > -5$ και $-e^{-5t}u(-t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] < -5$. Επιλέγονται τα σήματα των οποίων οι περιοχές σύγκλισης επικαλύπτεται με την περιοχή σύγκλισης που μελετάμε. Εδώ δεδομένης της περιοχής σύγκλισης $\mathcal{R}e > -1$ επιλέγονται τα σήματα $e^{-5t}u(t)$ και $e^{-t}u(t)$, οπότε $h(t) = -\dfrac{1}{4}e^{-t}u(t) + \dfrac{5}{4}e^{-5t}u(t)$

– Έστω $-5 < \mathcal{R}e < -1$ Επιλέγονται τα σήματα των οποίων οι περιοχές σύγκλισης επικαλύπτεται με την περιοχή σύγκλισης που μελετάμε. Εδώ δεδομένης της περιοχής σύγκλισης $\mathcal{R}e > -1$ επιλέγονται τα σήματα $e^{-5t}u(t)$ και $-e^{-t}u(-t)$, οπότε $h(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(-t) + \frac{5}{4}e^{-5t}u(t)$

– Έστω $\mathcal{R}e < -5$ Επιλέγονται τα σήματα των οποίων οι περιοχές σύγκλισης επικαλύπτεται με την περιοχή σύγκλισης που μελετάμε. Εδώ δεδομένης της περιοχής σύγκλισης $\mathcal{R}e > -1$ επιλέγονται τα σήματα $-e^{-5t}u(-t)$ και $-e^{-t}u(-t)$, οπότε $h(t) = \frac{1}{4}e^{-t}u(-t) - \frac{5}{4}e^{-5t}u(-t)$

2η Άσκηση

Σας δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \frac{2s}{s^2+4}$$

οποίος έχει περιοχή συγκλίσεως $R = \{s: \ Re[s] > 0\}$Να βρείτε τους μετασχηματισμούς Laplaceτων παρακάτω σημάτων καθώς και τις αντίστοιχες περιοχές συγκλίσεως:

- $x(4t)$
- $x(t+2)$
- $x(t) * \frac{dx(t)}{dt}$
- $e^{-0.5t}x(t)$
- $3tx(t)$
- $\int_0^t x(2u)du$

Υπόδειξη: Εξυπακούεται ότι για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Λαπλαςε πρέπει να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες.

Λύση 2ης άσκησης

- $\mathcal{L}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{b}\right), \ R_{new} = \{s: \ Re[s] > s_0/b\} \Rightarrow \mathcal{L}\{x(4t)\} = \frac{1}{|4|}X\left(\frac{s}{4}\right), \ R_{new} = \{s: \ Re[s] > 0/4\}$
- $\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = e^{-st_0}X(s) \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t+4)\} = \mathcal{L}\{x(t-(-4))\} = e^{4s}X(s) \Rightarrow$, με ίδια περιοχή σύγκλισης
- $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = s^1 X(s)$, με ίδια περιοχή σύγκλισης
- $\mathcal{L}\{x(t)e^{s_0 t}\} = X(s-s_0), \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t)e^{-0.5t}\} = X(s-(-0.5))$ με περιοχή σύγκλισης ίση με $R_{new} = \{s: \ Re[s] > \sigma_0 + s_0\} = \{s: \ Re[s] > 0 + (-0.5)\} == \{s: \ Re[s] > -0.5\}$
- $\mathcal{L}\{(-t)^n x(t)\} = \frac{d^n X(s)}{ds^n} \Rightarrow \mathcal{L}\{3tx(t)\} = \mathcal{L}\{-3(-t)^1 x(t)\} = -3\frac{dX(s)}{ds}$, με ίδια περιοχή σύγκλισης.

- $\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\xi)d\xi\right\} = \frac{1}{s}X(s)$. Έστω $y(t) = x(2t) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{2}X\left(\frac{s}{2}\right)$ Άρα $\mathcal{L}\left\{\int_{\infty}^{t} x(2u)du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_{\infty}^{t} y(u)du\right\} = \frac{1}{s}Y(s) = \frac{1}{2s}X\left(\frac{s}{2}\right)$ με περιοχή σύγκλισης $R_{new} = R \cap \{s : \mathcal{R}e[s] > 0\}$