Σειρές-Έλεγχος Συγκλίσεως

Σειρές

- Σειρά είναι οποιαδήποτε ποσότητα της μορφής:

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu$$

- Στην περίπτωση που $\nu \to \infty$, τότε η σειρά είναι άπειρη και συμβολίζεται ως εξής:

$$a_0 + a_1 + \cdots \text{ ή } \sum_{i=0}^{\infty} a_i$$

Παραδείγματα Σειρών

- Γεωμετρικής σειρά: Μια γεωμετρική σειρά είναι μια σειρά που ο κάθε όρος της προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το προηγούμενο με μια σταθερά.
- Ένα απλό παράδειγμα γεωμετρικής σειράς είναι η $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{\nu}}+\cdots$
- Αρμονική σειρά: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$
- Εναλλασσόμενου προσήμου: $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\cdots+(-1)^{\nu}\alpha_{\nu}+\cdots$
- Τηλεσκοπικές σειρές: Είναι της μορφής $\sum_{i=0}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι συγκλίνει αν $\lim_{n\to} b_n = L$.

Σύγκλιση-Απόκλιση

- Μια σειρά συγκλίνει αν το άθροισμα των άπειρων στοιχείων της είναι πραγματικός αριθμός.
- Αν τείνει στο $\pm\infty$, τότε λέμε ότι αποκλίνει

Απόλυτη Σύγκλιση

- Μία σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$ συγκλίνει.
- Σημείωση: Αν μία σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε η σειρά συγκλίνει.
- Αν δεν συγκλίνει απόλυτα, είναι δυνατόν να συγκλίνει.
- Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η σειρά, *υπό συνθήκη*, συγκλίνει.

Μέθοδοι ελέγχου απόκλισης/σύγκλισης

- Παρακάτω είναι οι πιο κοινές και γνωστές μέθοδοι ελέγχου σύγκλισης/απόκλισης σειρών.
  - Ν-οστός όρος
  - Άμεση Σύγκριση
  - Κλασματικός Έλεγχος
  - Έλεγχος ρίζας
  - Έλεγχος ολοκληρώματος

Ν-οστός όρος

- Αν $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu \neq 0$, τότε η σειρά αποκλίνει.
- Στην περίπτωση που είναι 0. δεν μπορούμε να αποφανθούμε.
- Παράδειγμα η αρμονική σειρά όπου ισχύει $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$, αλλά παρακάτω θα δούμε ότι αποκλίνει.

Παράδειγμα

- Έστω $a_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$. Τότε $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu+1}{\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{\nu} = 1 \neq 0$.
- Άρα αυτή η σειρά αποκλίνει.
- Μπορούμε να το συμπεράνομε από το γεγονός ότι όλοι οι όροι που προστίθενται είναι θετικοί, με αποτέλεσμα να αυξάνεται το άθοισμα επ’ άπειρον.

Κλασματικός Έλεγχος

- Έστω $\mathrm{L} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$.
- Αν $\mathrm{L} < 1$, τότε συγκλίνει απόλυτα.
- Αν $\mathrm{L} > 1$, τότε αποκλίνει.
- Αν $\mathrm{L} = 1$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα

- Παράδειγμα, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{e^{\nu}}$. Ισχύει $\mathrm{L} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\frac{\nu+1}{e^{\nu+1}}}{\frac{\nu}{e^{\nu}}} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu+1}{\nu e} = \frac{1}{e} < 1$
- Παράδειγμα, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu}}{\nu}$. Ισχύει $\mathrm{L} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\frac{e^{\nu+1}}{\nu+1}}{\frac{e^{\nu}}{\nu}} = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu e}{\nu+1} = e > 1$

Παράδειγμα Αναποφασιστικότητας

- Παράδειγμα 1ο : $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$. Ισχύει $\mathrm{L} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\frac{1}{\nu+1}}{\frac{1}{\nu}} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\nu}{\nu+1} = 1$. Αποκλίνει.
- Παράδειγμα 2ο : $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$. Ισχύει $\mathrm{L} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{\frac{1}{(\nu+1)^2}}{\frac{1}{\nu^2}} = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^2 = 1$. Συγκλίνει.

Έλεγχος ρίζας

- Έστω $\mathrm{L} = \lim_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{a_\nu}$.
- Αν $\mathrm{L} < 1$, τότε συγκλίνει απόλυτα.
- Αν $\mathrm{L} > 1$, τότε αποκλίνει.
- Αν $\mathrm{L} = 1$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.
- Γενικότερα, είναι ισχυρότερο κριτήριο του κλασματικού ελέγχου.

Παράδειγμα

- Παράδειγμα, $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^\nu}{\nu^9}$. Ισχύει $\mathrm{L}=\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{a_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{\frac{2^\nu}{\nu^9}}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{\sqrt[\nu]{2^\nu}}{\sqrt[\nu]{\nu^9}}=\frac{\sqrt[\nu]{2^\nu}}{\left(\nu^{\frac{1}{\nu}}\right)^9}=2>1$
- Παράδειγμα, $1+1+0.5+0.5+0.25+0.25+\cdots$. Ισχύει $\mathrm{L}=\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{a_\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{0.5^\nu}=0.5<1$
- Αν χρησιμοποιηθεί ο κλασματικός έλεγχος, δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει.

Έλεγχος ολοκληρώματος

- Έστω συνάρτηση $f(x)$: $f(\nu) = a\_\nu$ με την $f(x)$ να είναι γνησίως φθίνουσα.
- Αν $\int_{\mathrm{N}}^{\infty} f(x)dx < \infty$, τότε συγκλίνει, αλλιώς αποκλίνει

Παράδειγμα

- Στην περίπτωση της αρμονικής σειράς $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, έχομε $f(x) = \frac{1}{x}$.
- Τότε, $\int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{x}} dx = [\ln x\,]_1^\infty = \lim_{x\to\infty} \ln x \; - \ln 1 = \infty$. Άρα η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Άμεση Σύγκριση

- Αν υπάρχει σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ η οποία συγκλίνει απόλυτα τέτοια ώστε να ισχύει $|a_\nu| \leq C|b_\nu|$ για αρκούντως μεγάλο ν, τότε η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ συγκλίνει.
- Αν υπάρχει σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ η οποία αποκλίνει τέτοια ώστε να ισχύει $|a_\nu| \geq |b_\nu|$ για αρκούντως μεγάλο ν, τότε η σειρά $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ αποκλίνει.

Παράδειγμα

- Έστω $\alpha_\nu = \frac{1}{e^\nu \log \nu}$. Θέλω να βρω αν η σειρά $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει.
- Διαλέγω την $b_\nu = \frac{1}{e^\nu}$, η οποία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \frac{1}{e} < 1$, οπότε $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ συγκλίνει απόλυτα.
- Συγκρίνω $\alpha_\nu < Cb_\nu \Rightarrow \frac{1}{e^\nu \log \nu} < \frac{C}{e^\nu} \Rightarrow \frac{1}{e^\nu} \cdot \frac{1}{\log \nu} < \frac{C}{e^\nu} \Rightarrow \frac{1}{\log \nu} < C \Rightarrow$

  $1 < C \log \nu$, το οποίο ισχύει για αρκετά μεγάλο ν και $C > 0$.
- Άρα, η $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει απόλυτα.

Παράδειγματα

- Βρείτε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν οι αποκλίνουν και γιατι. Σε περίπτωση σύγκλισης, να βρεθεί το άθροισμα των σειρών.
  - $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{4^{\nu}}+\cdots$
  - $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{\nu}+\cdots$
  - $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{\nu}{\nu+1}+\cdots$
  - $\ln 2+\ln\sqrt{2}+\ln\sqrt[3]{2}+\ln\sqrt[4]{2}+\cdots+\ln\sqrt[\nu]{2}+\cdots$
  - $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2^{\nu-1}}{3^{\nu}}$
  - $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{3^{\nu}}$

Παράδειγμα 1ο

- $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^{\nu}} + \cdots$
- Είναι γεωμετρικη πρόοδος διότι $\alpha_{\nu} = \frac{1}{4^{\nu}}$ και $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu}} = \frac{\frac{1}{4^{\nu+1}}}{\frac{1}{4^{\nu}}} = \frac{4^{\nu}}{4^{\nu+1}} = \frac{1}{4} < 1.$
- Αφού ο λόγος είναι μικρότερος του, συγκλίνει στο $\frac{\alpha_0}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Παράδειγμα 2ο

- $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{\nu} + \cdots$
- Πρόκειται για μια ιδιάζουσα περίπτωση γεωμετρικής προόδου.
- $\alpha_{\nu} = (-1)^{\nu}$ και $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu}} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{(-1)^{\nu}} = -1$.
- Αν και δεν τείνει στο $\pm\infty$, το άθροισμα θα κυμαίνεται πάντα μεταξύ του 0 και 2.

Παράδειγμα 3ο

- $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{\nu}{\nu+1} + \cdots$
- Βασιζόμαστε στην άμεση σύγκριση.
- Ισχύει $\frac{\nu}{\nu+1} > \frac{1}{\nu+1}, \forall \nu \in \mathbb{N}$.
- Η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu+1}$ ουσιαστικά είναι η αρμονική ακολουθία.
- Αφού αυτή αποκλίνει άρα και το ζητούμενο άθροισμα αποκλίνει

Παράδειγμα 4ο

- $\ln 2 + \ln\sqrt{2} + \ln\sqrt[3]{2} + \ln\sqrt[4]{2} + \cdots + \ln\sqrt[\nu]{2} + \cdots$
- $\alpha_\nu = \ln\sqrt[\nu]{2} \Rightarrow \alpha_\nu = \ln 2^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}\ln 2$
- Άρα $\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\sqrt[\nu]{2} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\ln 2 = \ln 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$.
- Το άθροισμα αυτό τείνει στο άπειρο διότι πολλαπλασιάζεται το $\ln 2$ που είναι θετικός αριθμός με το $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ που είναι το άθροισμα της αρμονικής ακολουθίας.

Για σπίτι

- $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^{\nu-1}}{3^{\nu}}$
- $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{3^{\nu}}$

Για σπίτι-Χρήση κριτηρίου ολοκλήρωσης

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p > 1$

Για σπίτι-Χρήση κλασματικού κριτηρίου

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$