1ο Σετ Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα

1η Άσκηση

Να υπολογίσετε την περίοδο των παρακάτω σημάτων:

- $x(t) = \sin^2(2t+3)$
- $x(t) = |\sin(t)\cos(t)|$

Λύση 1ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

$$x(t) = \sin^2(2t+3) \xRightarrow[=\frac{1-\cos 2x}{2}]{\sin^2 x=} x(t) = \frac{1-\cos 2(2t+3)}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1-\cos(4t+6)}{2}$$

Για την εύρεση της περιόδου T, ξεκινάμε βάσει του ζητούμενου

$$x(t+T) = x(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow \frac{1-\cos(4(t+T)+6)}{2} = \frac{1-\cos(4t+6)}{2} \Rightarrow \frac{1-\cos(4t+4T+6)}{2} = \frac{1-\cos(4t+6)}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{\cos(4t+4T+6)}{2} = \frac{1}{2}-\frac{\cos(4t+6)}{2} \Rightarrow -\frac{\cos(4t+4T+6)}{2} = -\frac{\cos(4t+6)}{2} \Rightarrow \frac{\cos(4t+4T+6)}{2} = \frac{\cos(4t+6)}{2} \Rightarrow \cos(4t+4T+6) = \cos(4t+6) \Rightarrow 4t+4T+6 = 2\kappa\pi+4t+6,\ \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4T = 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z} \xRightarrow{\kappa=1} 4T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

Ερώτημα 2ο

$$x(t) = |\sin(t)\cos(t)| \xRightarrow{\sin 2x = 2\sin x\cos x} x(t) = \left|\frac{\sin 2t}{2}\right| \Rightarrow x(t) = \frac{|\sin 2t|}{2}$$

Για την εύρεση της περιόδου T, ξεκινάμε βάσει του ζητούμενου

$$x(t+T) = x(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

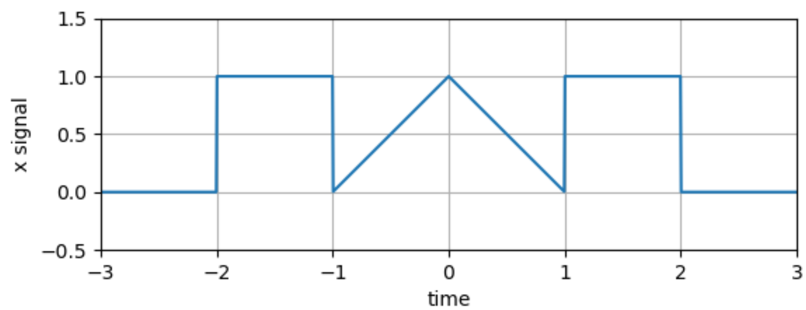
$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow \frac{|\sin 2(t+T)|}{2} = \frac{|\sin 2t|}{2} \Rightarrow |\sin 2(t+T)| = |\sin 2t| \Rightarrow \sin 2(t+T) = \begin{cases} \sin 2t \\ -\sin 2t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sin(2t+2T) = \begin{cases} \sin 2t \\ \sin(-2t) \end{cases} \Rightarrow 2t+2T = \begin{cases} 2\kappa\pi+2t \\ 2\kappa\pi+\pi-(-2t) \end{cases} \Rightarrow 2t+2T = \begin{cases} 2\kappa\pi+2t \\ 2\kappa\pi+\pi+2t \end{cases} \Rightarrow$$

$2T = \begin{cases} 2\kappa\pi \\ 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \xRightarrow[\text{2η περίπτωση:}\kappa=0]{\text{1η περίπτωση:}\kappa=1} 2T = \begin{cases} 2\pi \\ \pi \end{cases} \Rightarrow T = \begin{cases} \pi \\ \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Εμείς επιλέγομε τον μικρότερο αριθμό, οπότε η περίοδος του δεδομένου σήματος είναι $T = \dfrac{\pi}{2}$.

2η Άσκηση

Δεδομένης της παρακάτω γραφικής παράστασης, σχεδιάστε τα σήματα $x(-2t),\ x\left(\dfrac{t}{3}\right),\ x\left(\dfrac{t+2}{4}\right)$



Λύση 2ης Άσκησης

Το αρχικό σήμα είναι άθροισμα των κάτωθι σημάτων:

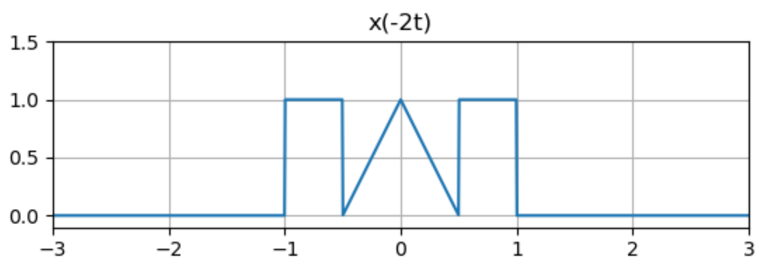
- Ενός ορθογώνιου παλμού στο $[-2, -1]$
- Ενός τριγωνικού παλμού στο $[-2, -1]$
- Ενός ορθογώνιου παλμού στο $[1, 2]$

$$x(t) = \begin{cases} 1,\ -2 < t < -1 \\ 1 + t,\ -1 \le t \le 0 \\ 1 - t,\ 0 < t \le 1 \\ 1,\ 1 < t < 2 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

Ερώτημα 1ο

Αντικαθιστώντας στο αρχικό σήμα όπου t με $-2t$, προκύπτει $x(t) = \begin{cases} 1, \ -2 < t < -1 \\ 1+t, \ -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, \ 0 < t \leq 1 \\ 1, \ 1 < t < 2 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \xRightarrow{x \leftarrow -2t}$

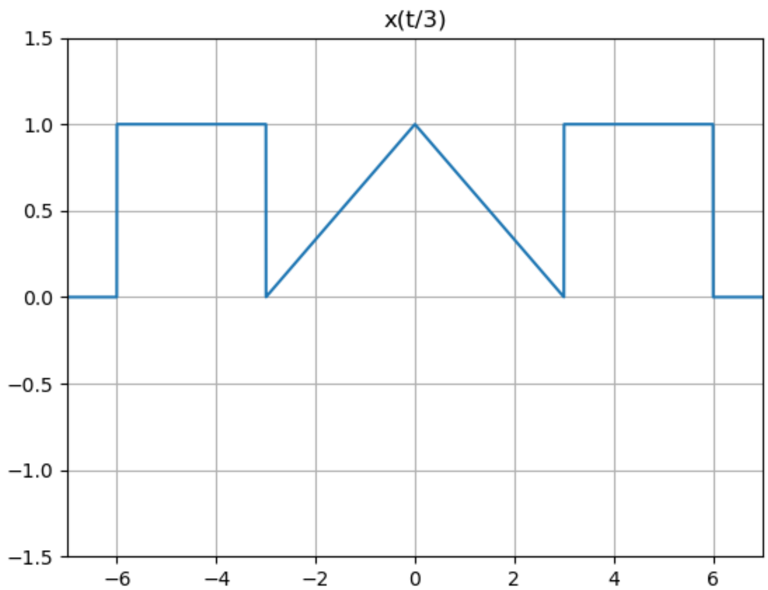
$$x(-2t) = \begin{cases} 1, \ -2 < -2t < -1 \\ 1-(-2t), \ -1 \leq -2t \leq 0 \\ 1+(-2t), \ 0 < -2t \leq 1 \\ 1, \ 1 < -2t < 2 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x(-2t) = \begin{cases} 1, \ 1 < 2t < 2 \\ 1+2t, \ 0 \leq 2t \leq 1 \\ 1-2t, \ -1 \leq 2t \leq 0 \\ 1, \ -2 < 2t < -1 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x(-2t) = \begin{cases} 1, \ \frac{1}{2} < t < 1 \\ 1+2t, \ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1-2t, \ -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ 1, \ -1 < t < -\frac{1}{2} \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$$



Ερώτημα 2ο

Αντικαθιστώντας στο αρχικό σήμα όπου t με $\frac{t}{3}$, προκύπτει $x(t) = \begin{cases} 1,\ -2 < t < -1 \\ 1+t,\ -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t,\ 0 < t \leq 1 \\ 1,\ 1 < t < 2 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases} \xRightarrow{x \leftarrow -2t}$

$$x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 1,\ -2 < \frac{t}{3} < -1 \\ 1+\frac{t}{3},\ -1 \leq \frac{t}{3} \leq 0 \\ 1-\frac{t}{3},\ 0 < \frac{t}{3} \leq 1 \\ 1,\ 1 < \frac{t}{3} < 2 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{t}{3}\right) = \begin{cases} 1,\ -6 < t < -3 \\ 1+\frac{t}{3},\ -3 \leq t \leq 0 \\ 1-\frac{t}{3},\ 0 < t \leq 3 \\ 1,\ 3 < t < 6 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

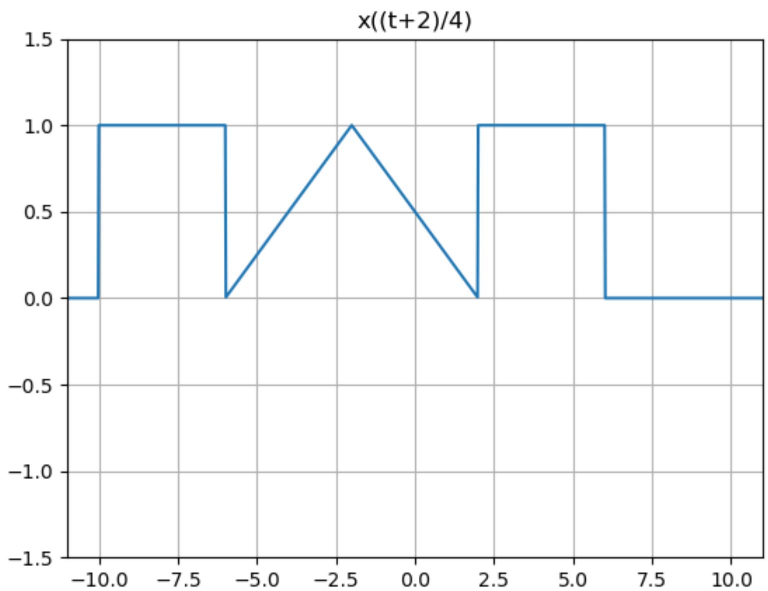


Ερώτημα 3ο

Αντικαθιστώντας στο αρχικό σήμα όπου t με $\frac{t+2}{4}$, προκύπτει $x(t) = \begin{cases} 1, & -2 < t < -1 \\ 1+t, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t, & 0 < t \leq 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \xRightarrow{x \leftarrow \frac{t+2}{4}}$

$$x\left(\frac{t+2}{4}\right) = \begin{cases} 1, & -2 < \frac{t+2}{4} < -1 \\ 1+\frac{t+2}{4}, & -1 \leq \frac{t+2}{4} \leq 0 \\ 1-\frac{t}{3}, & 0 < \frac{t+2}{4} \leq 1 \\ 1, & 1 < \frac{t+2}{4} < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{t+2}{4}\right) = \begin{cases} 1, & -8 < t+2 < -4 \\ 1+\frac{t+2}{4}, & -4 \leq t+2 \leq 0 \\ 1-\frac{t}{3}, & 0 < t+2 \leq 4 \\ 1, & 4 < t+2 < 8 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{t+2}{4}\right) =$$

$$\begin{cases} 1, & -10 < t < -6 \\ 1+\frac{t+2}{4}, & -6 \leq t \leq -2 \\ 1-\frac{t}{3}, & -2 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t+2 < 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



3η Άσκηση

Να βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος:

- $x(t) = 3, \ -\infty < t < \infty$
- $x(t) = tu(t)$
- $x(n) = \dfrac{\sqrt{\ln n}}{n}, \ n \geq 1$
- $x(n) = \dfrac{\sqrt{\ln n}}{2^n}, \ n \geq 1$

Λύση 3ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |3|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} 9dt \Rightarrow E_x = [9t]_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow E_x = \lim_{x\to\infty} 9t - \lim_{x\to-\infty} 9t = \infty + \infty = \infty$, οπότε δεν είναι σήμα ενέργειας.

$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |3|^2 dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} 9dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [9t]_{-T}^{T} \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [9T - 9(-T)] \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [9T + 9T] \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} 18T = 9 < \infty$, οπότε το σήμα είναι ισχύος.

Ερώτημα 2ο

$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |tu(t)|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{0}^{\infty} t^2 dt \Rightarrow E_x = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\infty} \Rightarrow E_x = \lim_{x\to\infty} \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{3} = \infty - 0 = \infty$, οπότε δεν είναι σήμα ενέργειας.

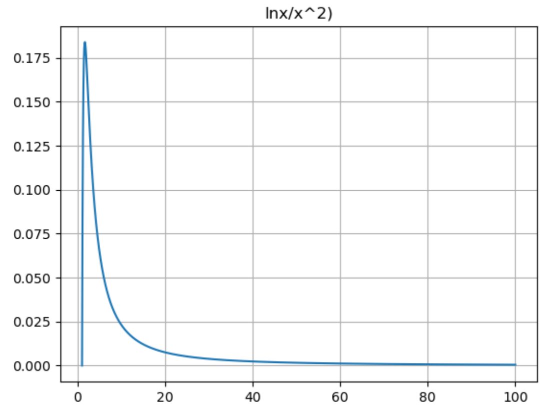
$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |tu(t)|^2 dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} t^2 dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T} \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{T^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \frac{T^3}{3} \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{T^2}{6} = \infty$, οπότε το σήμα δεν είναι ισχύος.

Ερώτημα 3ο

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \Rightarrow E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sqrt{\ln n}}{n}\right|^2 \Rightarrow E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Αν μελετήσομε την συνεχή συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, θα δούμε ότι η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη.

Έχει ένα μέγιστο στο σημείο όπου $f'(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x (x^2)'}{(x^2)^2} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4} = 0 \Rightarrow \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = 0 \Rightarrow \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = 0 \xRightarrow{x \neq 0} \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 - 2\ln x = 0 \Rightarrow$



$2\ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} \approx 1.6487212707.$

Βάσει του τελευταίου ευρήματος, για $n \geq 2$ οι όροι της σειράς είναι φθίνοντες. Επίσης ισχύει $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln 1}{1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$. Άρα, αφού οι όροι της σειράς είναι θετικοί και φθίνοντες, αρκεί να χρησιμοποιήσω το κριτήριο της ολοκληρώσεως.

$\displaystyle A = \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx \Rightarrow A = \int_2^{\infty} \ln x x^{-2} dx \Rightarrow A = \int_2^{\infty} \ln x \left(-x^{-1}\right)' dx \Rightarrow A = \left[-\ln x x^{-1}\right]_2^{\infty} - \int_2^{\infty} (\ln x)' \left(-x^{-1}\right) dx \Rightarrow A = \left[\lim_{x\to\infty} -\ln x x^{-1} - (-\ln 2 \cdot 2^{-1})\right] + \int_2^{\infty} x^{-1}\left(x^{-1}\right) dx \Rightarrow A = \left[\lim_{x\to\infty} -\frac{\ln x}{x} + \ln 2 \cdot 2^{-1}\right] + \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow A = \left[\lim_{x\to\infty} -\frac{\ln x}{x} + \ln 2 \cdot 2^{-1}\right] + \left[-\frac{1}{x}\right]_2^{\infty} \Rightarrow A = \left[\lim_{x\to\infty} -\frac{(\ln x)'}{x'} + \ln 2 \cdot 2^{-1}\right] + \left[\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \Rightarrow A = \left[\lim_{x\to\infty} -\frac{\frac{1}{x}}{1} + \ln 2 \cdot 2^{-1}\right] + \left[0 + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow A = \left[\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} + \ln 2 \cdot \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2} \Rightarrow A = \left[0 + \ln 2 \cdot \frac{1}{2}\right] + \left[0 + \frac{1}{2}\right] \Rightarrow A = \ln 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$, οπότε $0 < A < \infty$ άρα αφού είναι πεπερασμένο, τότε και η αρχική σειρά θα συγκλίνει, οπότε το σήμα είναι ενέργειας.

Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της συγκρίσεως: Έστω ότι $\displaystyle a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$, η οποία συγκλίνει καθότι ισχύει $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει για κάθε $p > 1$. Επίσης γνωρίζομε ότι $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \overset{Del H\hat{o}pital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)'}{(\sqrt{n})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$. Άρα θα ισχύει εν γένει ότι $\displaystyle \ln \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{\ln}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.5}}$. Αφού η ποσότητα στο δεξιό μέρος της ανισότητας συγκλίνει, τότε θα συγκλίνει και το αριστερό μέρος, το οποίο είναι η ενέργεια του σήματός μας. Αφού το σήμα λοιπόν έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε είναι σήμα ενέργειας.

Ερώτημα 4ο

$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sqrt{\ln n}}{2^n} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^{2n}} = \frac{\ln 1}{2^1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^{2n}} = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^{2n}}.$

Ισχύει $2^n > n,\ \forall n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 < \left(\frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2^{2n}} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{\ln n}{2^{2n}} < \frac{\ln n}{n^2},\ \forall n \geq 2.$

Άρα κάθε $n-$οστός όρος της σειράς του τρέχοντος ερωτήματος θα είναι μικρότερος του αντίστοιχου $n-$οστού όρου της σειράς του προηγούμενο ερωτήματος:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^{2n}} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

Αφού η σειρά του δεξιού μέλους της παραπάνω ανισότητος (η ενέργεια του σήματος προηγούμενου ερωτήματος) είναι πεπερασμένη, τότε η αριστερή σειρά (η ενέργεια του σήματος τρέχοντος ερωτήματος) θα είναι με την σειρά της πεπερασμένη, οπότε θα είναι σήμα ενέργειας.

4η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι παρακάτω συνελίξεις των συναρτήσεων:

- $x(t) = \Pi(\nu t),\ h(t) = \Pi\left(\frac{t}{\nu}\right),\ \nu \in \mathbb{N}$
- $x(n) = a^n u(n),\ h(n) = b^n u(n)$

Λύση 4ης Άσκησης

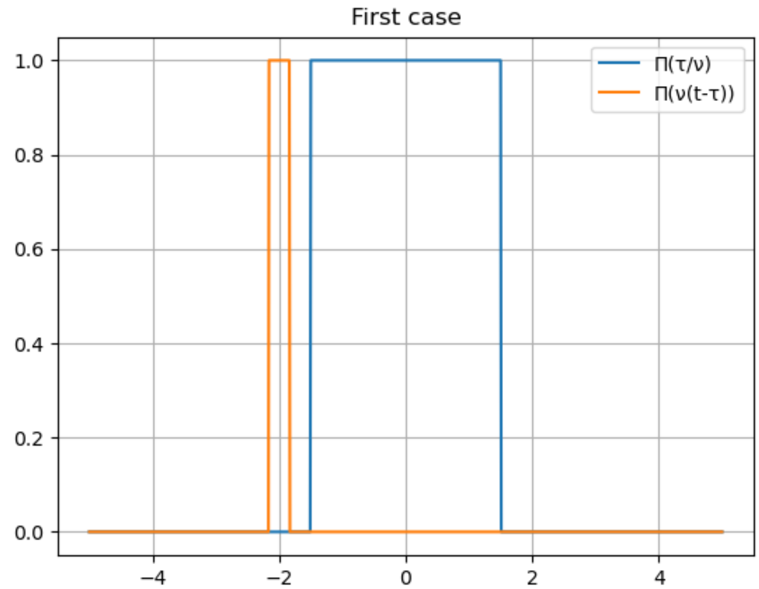
Ερώτημα 1ο

$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Pi(\nu(t-\tau))d\tau \xRightarrow[\Pi\left(\frac{\tau}{\nu}\right)=0,\ |t|>\frac{\nu}{2}]{\Pi\left(\frac{\tau}{\nu}\right)=1,\ |t|<\frac{\nu}{2}}$

$y(t) = \int_{-\frac{\nu}{2}}^{\frac{\nu}{2}} \Pi(\nu(t-\tau))d\tau \xRightarrow[dz=-\nu d\tau]{z=\nu(t-\tau)} y(t) = \int_{\nu t+\frac{\nu^2}{2}}^{\nu t-\frac{\nu^2}{2}} \Pi(z)\left(-\frac{dz}{\nu}\right) \Rightarrow y(t) = \frac{1}{\nu}\int_{\nu t-\frac{\nu^2}{2}}^{\nu t+\frac{\nu^2}{2}} \Pi(z)dz$

Υπάρχουν 5 περιπτώσεις:

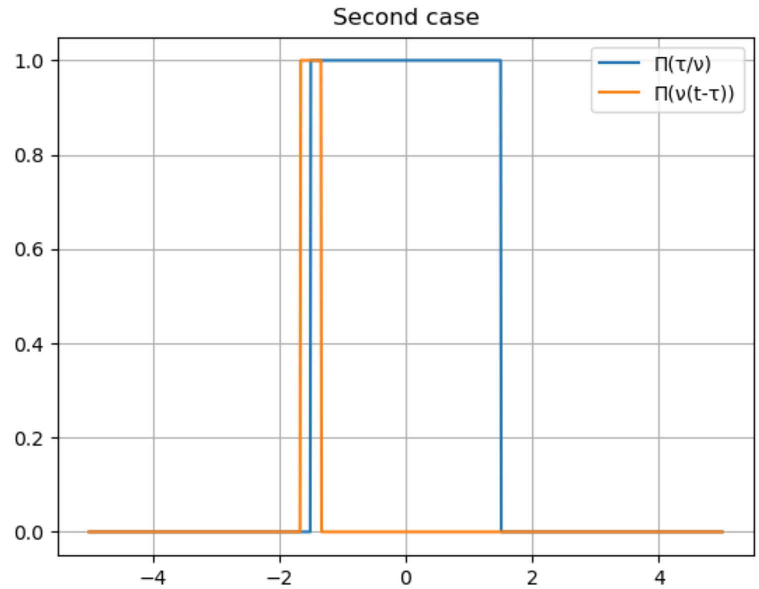
1. $\nu t + \frac{\nu^2}{2} < -\frac{1}{2}$ (Εικ. 1). Σε αυτήν την περίπτωση, θα ισχύει $\nu t - \frac{\nu^2}{2} < \nu t + \frac{\nu^2}{2} \Rightarrow \nu t - \frac{\nu^2}{2} < -\frac{1}{2}$, οπότε, σε όλο το διάστημα $[\nu t - \frac{\nu^2}{2}, \nu t + \frac{\nu^2}{2}]$, θα ισχύει $\Pi(z) = 0$, οπότε και το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με 0. Οι τιμές για τις οποίες ισχύει $\nu t + \frac{\nu^2}{2} < -\frac{1}{2}$, προκύπτουν λύνοντας την ανισότητα:
   $\nu t + \frac{\nu^2}{2} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \nu t < -\frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{2} \Rightarrow t < -\frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2}$



Σχήμα 1: 1η περίπτωση

2. Για να είμαστε στην δεύτερη περίπτωση (Εικ.2) πρέπει να ισχύει $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \nu t + \frac{\nu^2}{2} \\ \nu t - \frac{\nu^2}{2} \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{2} \leq \nu t \\ \nu t \leq -\frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} -\frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2} \leq t \\ t \leq -\frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \end{cases}$.

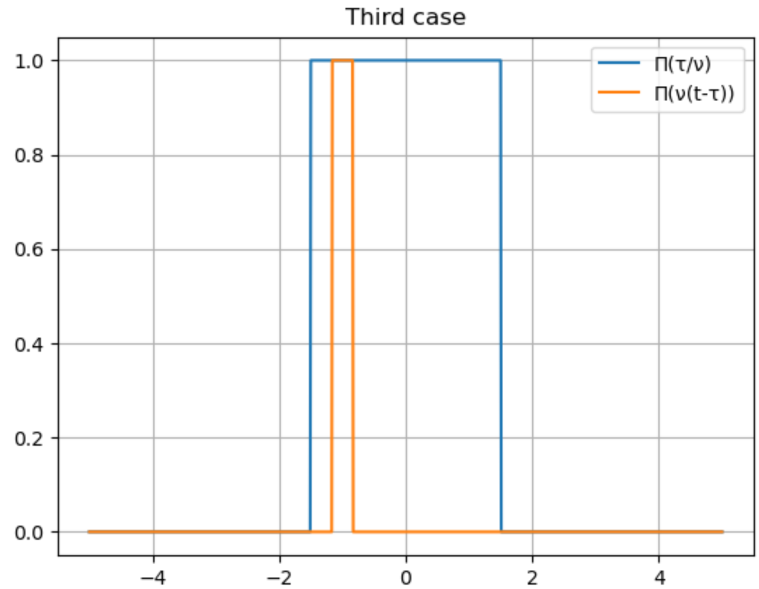
   Τότε, ισχύει $y(t) = \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} \Pi(z) dz \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{-\frac{1}{2}} 0 dz + \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} 1 dz \Rightarrow y(t) =$ $\dfrac{1}{\nu} [z]_{-\frac{1}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} = \dfrac{1}{\nu} \left[\nu t + \dfrac{\nu^2}{2} - \left(-\dfrac{1}{2} \right) \right] = \dfrac{1}{\nu} \left[\nu t + \dfrac{\nu^2}{2} + \dfrac{1}{2} \right] = t + \dfrac{\nu}{2} + \dfrac{1}{2\nu}$



Σχήμα 2: 2η περίπτωση

3. Σε αυτήν την περίπτωση (Εικ. 3), ισχύει $\begin{cases} \nu t - \frac{\nu^2}{2} < -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < \nu t + \frac{\nu^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu t < -\frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{2} < \nu t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < -\frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \\ \frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2} < t \end{cases} \Rightarrow$

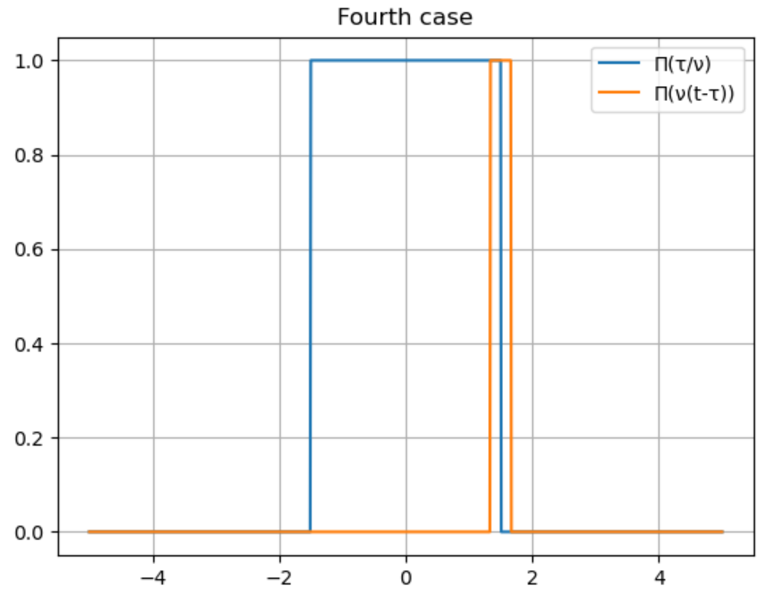
Τότε $y(t) = \frac{1}{\nu}\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} \Pi(z)dz = \frac{1}{\nu}\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{-\frac{1}{2}} 0dz + \frac{1}{\nu}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1dz + \frac{1}{\nu}\int_{\frac{1}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} 0dz = \frac{1}{\nu}\left[z\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{\nu}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\nu} \cdot 1 = \frac{1}{\nu}$



Σχήμα 3: 3η περίπτωση

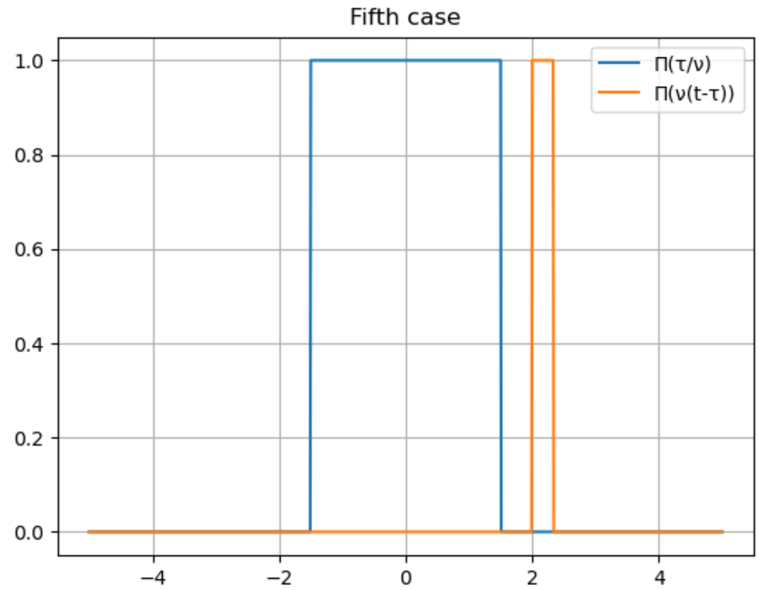
4. Στην τέταρτη περίπτωση (Εικ. 4), θα πρέπει να ισχύει $\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \nu t + \frac{\nu^2}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \nu t - \frac{\nu^2}{2} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\nu^2}{2} \leq \nu t \\ -\frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{2} \leq \nu t \leq \frac{1}{2} + \frac{\nu^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2} \leq t \\ -\frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \leq t \leq \frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2} \leq t \\ \max(-\frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2}) \leq t \leq \frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{2\nu} + \dfrac{\nu}{2} \leq t \leq \dfrac{1}{2\nu} + \dfrac{\nu}{2}$.

Τότε, ισχύει $y(t) = \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} \Pi(z) dz \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dz + \dfrac{1}{\nu} \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} 0 dz \Rightarrow y(t) =$ $\dfrac{1}{\nu} [z]_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\nu} \left[\dfrac{1}{2} - \left(\nu t - \dfrac{\nu^2}{2} \right) \right] = \dfrac{1}{\nu} \left[\dfrac{1}{2} - \nu t + \dfrac{\nu^2}{2} \right] = -t + \dfrac{\nu}{2} + \dfrac{1}{2\nu}$



Σχήμα 4: 4η περίπτωση

5. Στην 5η περίπτωση (Εικ.5) ισχύει $\nu t - \dfrac{\nu^2}{2} > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \nu t > \dfrac{1}{2} + \dfrac{\nu^2}{2} \Rightarrow t > \dfrac{1}{2\nu} + \dfrac{\nu}{2}$. Σε αυτήν την περίπτωση, σε όλο το διάστημα που ορίζεται από τα άκρα του ολοκληρώματος, θα ισχύει $\Pi(z) = 0 \Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} \Pi(z)dz = y(t) = \dfrac{1}{\nu}\displaystyle\int_{\nu t - \frac{\nu^2}{2}}^{\nu t + \frac{\nu^2}{2}} 0 dz = 0$



Σχήμα 5: 5η περίπτωση

Συνοψίζοντας, προκύπτει ότι:

$$y(t) = \begin{cases} 0,\ t \leq -\frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2} \\ t + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2\nu},\ -\frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \\ \frac{1}{\nu},\ \frac{1}{2\nu} - \frac{\nu}{2} \leq t \leq -\frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \\ -t + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2\nu},\ -\frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \leq t \leq \frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \\ 0,\ t > \frac{1}{2\nu} + \frac{\nu}{2} \end{cases}$$

Ερώτημα 2ο

$y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k) b^{n-k} u(n-k) \xRightarrow[u(k)=0,\ \forall k<0]{u(k)=1,\ \forall k\geq 0}$
$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k b^{n-k} u(n-k)$.

Αν $n < 0$, τότε $n - k < 0,\ \forall k \geq 0$, οπότε θα ισχύει $u(n-k) = 0$. Άρα $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k b^{n-k} u(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k b^{n-k} \cdot 0 = 0$.

Για $n \geq 0$ θα ισχύει, $y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k b^{n-k} u(n-k) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \cdot 1 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \Rightarrow$
$y(n) = b^n \sum_{k=0}^{n} a^k b^{-k} \Rightarrow y(n) = b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k = b^n \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}}$.

Συνοψίζοντας, ισχύει $y(n) = \begin{cases} b^n \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}}, \ n \geq 0 \\ 0, \ n < 0 \end{cases} = b^n \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}} u(n)$

5η Άσκηση

Να μελετηθούν τα παρακάτω συστήματα και να αποφανθείτε αν είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά, και δυναμικά.

1. $y(t) = 4x(2t+1)$
2. $y(t) = -x(t-1) + 5$
3. $y(t) = x^2(t)$

Λύση 5ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

Το σύστημά μας περιγράφεται από την σχέση $y(t) = T\{x(2t+1)\} = 4x(2t+1)$

- Γραμμικότητα: Έστω $x_1(t),\ x_2(t)$ σήματα εισόδου και $y_1 = 4x_1(2t+1),\ y_2 = 4x_2(2t+1)$ οι αντίστοιχες έξοδοι του δεδομένου συστήματος. Αν έχομε σήμα $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε η έξοδος θα είναι $y(t) = 4x(2t+1) = 4(\alpha x_1(2t+1) + \beta x_2(2t+1)) \Rightarrow y(t) = \alpha 4x_1(2t+1) + \beta 4x_2(2t+1) \Rightarrow y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, οπότε το σύστημά μας είναι γραμμικό.

- Χρονικά αναλλοίωτο: έστω ότι ολισθαίνεται η είσοδος $x(2t+1)$ κατά t_0 χρονικές μονάδες, οπότε $T\{x(2t+1-t_0)\} = 4x(2t+1-t_0)$. Όμως, ισχύει $y(t-t_0) = T\{x(2(t-t_0)+1)\} = 4x(2(t-t_0)+1) \neq 4x(2t+1-t_0)$, οπότε η ολίσθηση στην έσοδο δεν προκαλεί ίση ολίσθηση στην έξοδο. Άρα δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο.

- Αιτιατό δεν είναι διότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου δεν εξαρτάται ούτε από παρελθούσα ούτε τωρινή τιμή της εξόδου.

- Δυναμικό είναι διότι δεν χρησιμοποιείται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται η μελλοντική τιμή της εισόδου.

Ερώτημα 2ο

Το σύστημά μας περιγράφεται από την σχέση $y(t) = T\{x(t-1)\} = -x(t-1) + 5$

- Γραμμικότητα: Έστω $x_1(t),\ x_2(t)$ σήματα εισόδου και $y_1 = -x_1(t-1)+5,\ y_2 = -x_2(t-1)+5$ οι αντίστοιχες έξοδοι του δεδομένου συστήματος. Αν έχομε σήμα $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε η έξοδος θα είναι $y(t) = -x_(t-1) + 5 = -(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) + 5 \Rightarrow y(t) = -\alpha x_1(t-1) - \beta x_2(t-1) + 5 \neq \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$, οπότε το σύστημά μας δεν είναι γραμμικό.

- Χρονικά αναλλοίωτο: έστω ότι ολισθαίνεται η είσοδος $x(t-1)$ κατά t_0 χρονικές μονάδες, οπότε $T\{x(t-1-t_0)\} = -x(t-1-t_0)+5$. Όμως, ισχύει $y(t-t_0) = T\{x((t-t_0)+1)\} = -x(t-t_0+1)+5$, οπότε η ολίσθηση στην έσοδο προκαλεί ίση ολίσθηση στην έξοδο. Άρα είναι χρονικά αναλλοίωτο.

- Αιτιατό είναι διότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου εξαρτάται από παρελθούσα τιμή της εξόδου.

- Δυναμικό είναι διότι δεν χρησιμοποιείται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται μία παρελθοντική τιμή της εισόδου.

Ερώτημα 3ο

Το σύστημά μας περιγράφεται από την σχέση $y(t) = T\{x(t)\} = x^2(t)$

- Γραμμικότητα: Έστω $x_1(t),\ x_2(t)$ σήματα εισόδου και $y_1 = x_1^2(t),\ y_2 = 4x_2^2(t)$ οι αντίστοιχες έξοδοι του δεδομένου συστήματος. Αν έχομε σήμα $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε η έξοδος θα είναι $y(t) = x^2(t) = (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))^2 \Rightarrow y(t) = \alpha a^2 x_1^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) + b^2 x_2^2(t) \neq ay_1(t) + by_2(t)$. Άρα δεν είναι γραμμικό.

- Χρονικά αναλλοίωτο: έστω ότι ολισθαίνεται η είσοδος $x(t)$ κατά t_0 χρονικές μονάδες, οπότε $T\{x(t-t_0)\} = x^2(t-t_0)$. Επίσης, ισχύει $y(t-t_0) = T\{x(t-t_0)\} = x^2(t-t_0)$, οπότε η ολίσθηση στην έσοδο προκαλεί ίση ολίσθηση στην έξοδο. Άρα είναι χρονικά αναλλοίωτο.

- Αιτιατό είναι διότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου εξαρτάται τωρινή τιμή της εξόδου.

- Δυναμικό δεν είναι διότι χρησιμοποιείται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος.