

Λύσεις της 1ης Σειράς Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα

1η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του εκθετικού αναπτύγματος Fourier για τα παρακάτω περιοδικά σήματα:

- $x(t) = \cos^2(t)$
- $x(t) = |\sin(\pi t)|$

Υπόδειξη: $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

Λύση 1ης Άσκησης

Για την εύρεση των συντελεστών Fourier χρειάζεται πρώτα να βρεθεί η περίοδος T του σήματος. Έπειτα, χρειάζεται να υπολογιστεί η θεμελιώδης συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Βάσει των δύο αυτών παραμέτρων υπολογίζονται οι συντελεστές Fourier.

1ο ερώτημα

Αρχικά υπολογίζεται η περίοδος T , για την οποία πρέπει να ισχύει:

$$x(t+T) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Παρακάτω προσπαθούμε να βρούμε την περίοδο.

$$\begin{aligned} x(t+T) = x(t) &\Rightarrow \cos^2(t+T) = \cos^2(t) \xrightarrow{\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}} \frac{1 + \cos(2(t+T))}{2} = \frac{1 + \cos(2t)}{2} \Rightarrow \\ 1 + \cos(2(t+T)) &= 1 + \cos(2t) \Rightarrow \cos(2(t+T)) = \cos(2t) \Rightarrow 2t + 2T = 2\kappa\pi + 2t, \kappa \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2T = \\ 2\kappa\pi &\Rightarrow T = \kappa\pi \xrightarrow{\kappa=1} T = \pi. \end{aligned}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(t) dt \xrightarrow{\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}, T=\pi} \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) dt \Rightarrow \\ \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)}{2} dt \xrightarrow{\int \cos(\alpha t) dt = \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}} \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{t}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi/2}{2} - \frac{-\pi/2}{2} \right] &+ \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(2\pi/2)}{2} - \frac{\sin(-2\pi/2)}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\pi)}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} + \end{aligned}$$

$$[0 - 0] \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} \pi/2 = \frac{1}{2}$$

Μένει να βρεθεί το $\alpha_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \xrightarrow[T=\pi]{\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}} \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2} \right) e^{-jn\omega_0 t} dt \Rightarrow$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn\omega_0 t} dt \xrightarrow{\int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + c} \alpha_n = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{jn\omega_0} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{e^{-jn2(\pi/2)}}{jn2} - \left(-\frac{e^{-jn2(-\pi/2)}}{jn2} \right) \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn2t} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{e^{-jn\pi}}{jn2} + \frac{e^{jn\pi}}{jn2} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn2t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi) - j \sin(n\pi)}{jn2} + \frac{\cos(n\pi) + j \sin(n\pi)}{jn2} \right] +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn2t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi) - j0}{jn2} + \frac{\cos(n\pi) + j0}{jn2} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn2t} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n\pi)}{jn2} + \frac{\cos(n\pi)}{jn2} \right] + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn2t} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn2t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2t) e^{-jn2t} dt$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Για το τελευταίο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε την μέθοδο ολοκλήρωσης κατά μέλη:

$$I = \int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \cos(bx) dx = \frac{1}{a} \left[e^{ax} \cos(bx) - \int e^{ax} (\cos(bx))' dx \right] =$$

$$\frac{1}{a} \left[e^{ax} \cos(bx) - b \int e^{ax} (-\sin(bx)) dx \right] = \frac{1}{a} \left[e^{ax} \cos(bx) + b \int e^{ax} \sin(bx) dx \right] \quad (1)$$

Αντίστοιχα ισχύει: $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a} \int (e^{ax})' \sin(bx) dx = \frac{1}{a} \left[e^{ax} \sin(bx) - \int e^{ax} (\sin(bx))' dx \right] =$

$$\frac{1}{a} \left[e^{ax} \sin(bx) - b \int e^{ax} \cos(bx) dx \right] = \frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos(bx) dx \xrightarrow{I = \int e^{ax} \cos(bx) dx} \int e^{ax} \sin(bx) dx =$$

$$\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2), προκύπτει ότι $I = \left[e^{ax} \cos(bx) + b \int e^{ax} \sin(bx) dx \right] = \frac{1}{a} \left[e^{ax} \cos(bx) + b \int e^{ax} \sin(bx) dx \right] =$

$$\frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) + \frac{b}{a} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b}{a} I \right] \Rightarrow I = \frac{1}{a} e^{ax} \cos(bx) +$$

$$\frac{b}{a^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{b^2}{a^2} I \Rightarrow I \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) = e^{ax} \left[\frac{a}{a^2} \cos(bx) + \frac{b}{a^2} \sin(bx) \right] \Rightarrow I \frac{a^2 + b^2}{a^2} = e^{ax} \left[\frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2} \right] \Rightarrow$$

$$I = e^{ax} \left[\frac{a \cos(bx) + b \sin(bx)}{a^2 + b^2} \right] + C$$

Θέτοντας $a = -j2n$, $b = 2$ στο I ώστε να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα για τον συντελεστή α_n , προκύπτει ότι $I = \left[e^{-j2nt} \left[\frac{(-j2n) \cos(2t) + 2 \sin(2t)}{(-j2n)^2 + 2^2} \right] \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left[e^{-j2n\pi/2} \left[\frac{(-j2n) \cos(2(\pi/2)) + 2 \sin(2(\pi/2))}{(-j2n)^2 + 2^2} \right] \right]$

$$- \left[e^{-j2n(-\pi/2)} \left[\frac{(-j2n) \cos(2(-\pi/2)) + 2 \sin(2(-\pi/2))}{(-j2n)^2 + 2^2} \right] \right] \Rightarrow I = \left[e^{-jn(2\pi)/2} \left[\frac{(-j2n) \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{4 - (2n)^2} \right] \right] -$$

$$\left[e^{-jn(2(-\pi/2))} \left[\frac{(-j2n) \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{4 - (2n)^2} \right] \right] \Rightarrow I = \frac{j2n}{4 - (2n)^2} [e^{-jn\pi} - e^{jn\pi}] = \frac{-j2n}{4 - (2n)^2} [e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}] =$$

$$\frac{-j2n}{4-(n2)^2} \sin(n\pi) \cdot 2j = \frac{-j^2 4n \sin(n\pi)}{4-4n^2} \xrightarrow{j^2=-1} I = \frac{4n \sin(n\pi)}{4-4n^2} = \frac{n \sin(n\pi)}{1-n^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \alpha_n &= \frac{1}{2\pi} I = \frac{1}{2\pi} \frac{n \sin(n\pi)}{1-n^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{n \cdot 0}{1-n^2} = 0, \forall n \neq \pm 1. \text{ Για } n = 1, \text{ ισχύει } \alpha_1 = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \frac{n \sin(n\pi)}{1-n^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \frac{n \sin(n\pi)}{1-n^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Del Hospital}} \alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \frac{(n \sin(n\pi))'}{(1-n^2)'} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \frac{\sin(n\pi) + \pi n \cos(n\pi)}{-2n} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(\pi) + \pi \cos(\pi)}{2n} = \frac{1}{2\pi} \frac{0 + \pi(-1)}{2} = \frac{1}{4\pi} \pi = \frac{1}{4}. \text{ Ομοίως, προκύπτει ότι } \alpha_{-1} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2ο Ερώτημα

Αρχικά υπολογίζεται η περίοδος T για την οποία ισχύει:

$$x(t+T) = x(t)$$

$$\begin{aligned} x(t+T) = x(t) &\Rightarrow |\sin(\pi(t+T))| = |\sin(\pi t)| \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi(t+T)) = \sin(\pi t) \\ \sin(\pi(t+T)) = -\sin(\pi t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi(t+T)) = \sin(\pi t) \\ \sin(\pi(t+T)) = \sin(-\pi t) \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} \pi(t+T) = 2\kappa\pi + \pi t \\ \pi(t+T) = 2\kappa\pi + \pi - (-\pi t) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \pi t + \pi T = 2\kappa\pi + \pi t \\ \pi t + \pi T = 2\kappa\pi + \pi + \pi t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi T = 2\kappa\pi \\ \pi T = 2\kappa\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 2\kappa \\ T = 2\kappa + 1 \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Στον άνω κλάδο, η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει η τιμή T είναι $T = 2$ για $\kappa = 1$, ενώ η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει στον κάτω κλάδο είναι $T = 1$ για $\kappa = 0$, οπότε η περίοδος είναι $T = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{T} \int_0^1 x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^1 |\sin(\pi t)| dt = \int_0^1 \sin(\pi t) dt \xrightarrow{\int \sin(at) dt = -\frac{\cos(at)}{a}} \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right]_0^1 = -\frac{\cos(\pi)}{\pi} - \\ &\left(-\frac{\cos(\pi \cdot 0)}{\pi} \right) = -\frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{Τώρα μένει να βρεθεί ο συντελεστής } \alpha_n = \frac{1}{T} \int_0^1 x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_0^1 |\sin(\pi t)| e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^1 \sin(\pi t) e^{-jn2\pi t} dt.$$

Με τον ίδιο τρόπο που βρέθηκε το ολοκλήρωμα $I = \int e^{ax} \cos(bx) dx$, ενεργούμε και σε αυτήν την περίπτωση και αποδεικνύεται ότι $\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin(bx) + a \cos(bx))$.

$$\begin{aligned} \text{Θέτοντας } a = -jn2\pi, b = \pi, \text{ προκύπτει ότι } \alpha_n &= \left[\frac{e^{-jn2\pi x}}{(-jn2\pi)^2 + \pi^2} (\pi \sin(\pi x) - jn2\pi \cos(\pi x)) \right]_0^1 = \\ \frac{1}{(-jn2\pi)^2 + \pi^2} [e^{-jn2\pi} (\pi \sin(\pi) - jn2\pi \cos(\pi))] &= \frac{1}{-4n^2\pi^2 + \pi^2} [e^{-jn2\pi} (\pi \sin(\pi) - jn2\pi \cos(\pi)) \\ - e^0 (\pi \sin(0) - jn2\pi \cos(0))] &= \frac{1}{-4n^2\pi^2 + \pi^2} [\cos(-2n\pi)(0 - jn2\pi(-1)) - (0 - jn2\pi)] = \frac{1}{-4n^2\pi^2 + \pi^2} (jn2\pi + \\ j2n\pi) &= \frac{j4n\pi}{-4n^2\pi^2 + \pi^2} = \frac{j4n}{-4n^2\pi + \pi} \end{aligned}$$

2η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier του τριγωνικού αναπτύγματος για τα παρακάτω περιοδικά σήματα:

- $x(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t \leq 0 \\ 2t, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$
- $x(t) = \cos^4(t)$

Υπόδειξη: $\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

Λύση 2ης άσκησης

1ο Ερώτημα

Η περίοδος είναι $T = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Άρα $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 0 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 2t dt = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} [t^2]_0^1 = \frac{1}{2} [1^2 - 0^2] = \frac{1}{2} [1 - 0] = \frac{1}{2}$.

Τώρα μένει να βρεθούν οι συντελεστές $b_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$, $c_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \int_{-1}^0 0 \cos(n\omega_0 t) dt + \int_0^1 2t \cos(n\omega_0 t) dt = 0 + \int_0^1 2t \cos(n\omega_0 t) dt =$$

$$\frac{2}{2} \int_0^1 2t \cos(n\omega_0 t) dt \xrightarrow[\omega_0 = \pi]{\cos(at) = \frac{1}{a} (\sin(at))'} b_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^1 t (\sin(n\pi t))' dt = \frac{2}{n\pi} \left\{ [t \sin(n\pi t)]_0^1 - \int_0^1 (t)' \sin(n\pi t) dt \right\} =$$

$$\frac{2}{n\pi} \left\{ [1 \sin(n\pi) - 0 \sin(n\pi 0)] - \int_0^1 \sin(n\pi t) dt \right\} = \frac{2}{n\pi} \left\{ [0 - 0] - \left[-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 \right\} = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi t)]_0^1 =$$

$$\frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi) - \cos(0)] = \frac{2}{n^2 \pi^2} [\cos(n\pi) - 1] = \begin{cases} -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & n = 2k + 1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

Με τον ίδιο τρόπο λειτουργούμε και στην περίπτωση του συντελεστή c_n και συμπεραίνεται ότι $c_n = \frac{2}{T} \int_{-1}^1 x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{2} \int_{-1}^0 0 \sin(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{2} \int_0^1 2t \sin(n\omega_0 t) dt = 0 + \int_0^1 2t \sin(n\omega_0 t) dt =$

$$2 \int_0^1 t \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\xrightarrow[\omega_0 = \pi]{\sin(at) = -\frac{1}{a} (\cos(at))'} c_n = -\frac{2}{n\pi} \int_0^1 t (\cos(n\pi t))' dt = -\frac{2}{n\pi} \left\{ [t \cos(n\pi t)]_0^1 - \int_0^1 (t)' \cos(n\pi t) dt \right\} =$$

$$-\frac{2}{n\pi} \left\{ [1 \cos(n\pi) - 0 \cos(n\pi 0)] - \int_0^1 \cos(n\pi t) dt \right\} = -\frac{2}{n\pi} \left\{ [(-1)^n - 0] - \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 \right\}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \left[(-1)^n - \left(\frac{\sin(n\pi 1)}{n\pi} - \frac{\sin(n\pi 0)}{n\pi} \right) \right] = -\frac{2}{n\pi} [(-1)^n - (0 - 0)] = -\frac{2}{n\pi} \cdot (-1)^n = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n\pi}$$

2ο Ερώτημα

$$x(t) = \cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t}{4} = \frac{1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2}}{4} = \frac{\frac{2 + 4 \cos 2t + 1 + \cos 4t}{2}}{4} = \frac{3 + 4 \cos 2t + \cos 4t}{8}.$$

Τώρα θα βρούμε την περίοδο T για την οποία θα ισχύει:

$$x(t + T) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

$$x(t + T) = x(t), \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{3 + 4 \cos 2(t + T) + \cos 4(t + T)}{8} = \frac{3 + 4 \cos 2t + \cos 4t}{8} \Rightarrow \frac{3}{8} + \frac{4 \cos 2(t + T) + \cos 4(t + T)}{8} = \frac{3}{8} + \frac{4 \cos 2t + \cos 4t}{8}.$$

Για να ισχύει η τελευταία ισότητα για κάθε $t \in \mathbb{R}$, πρέπει να ισχύει $\cos 2(t + T) = \cos 2t$, $\cos 4(t + T) = \cos 4t \Rightarrow \begin{cases} 2(t + T) = 2t + 2\kappa\pi \\ 4(t + T) = 4t + 2\tau\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + T = t + \kappa\pi \\ t + T = t + \frac{\tau\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = \kappa\pi \\ T = \frac{\tau\pi}{2} \end{cases}$

Άρα η περίοδος είναι $T = \pi \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2$.

$$\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3 + 4 \cos 2t + \cos 4t}{8} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3}{8} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4 \cos 2t}{8} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos 4t}{8} dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{3t}{8} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2 \sin 2t}{8} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 4t}{32} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{3(\pi/2)}{8} - \frac{3(-\pi/2)}{8} \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2 \sin 2(\pi/2)}{8} - \frac{2 \sin 2(-\pi/2)}{8} \right] + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 4(\pi/2)}{32} - \frac{\sin 4(-\pi/2)}{32} \right] = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3\pi}{16} + \frac{3\pi}{16} \right) + \frac{1}{\pi} (0 - 0) + \frac{1}{\pi} (0 - 0) = \frac{1}{\pi} \frac{3\pi}{8} = \frac{3}{8}.$$

Τώρα μένει να βρεθούν οι συντελεστές $b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$, $c_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$.

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3 + 4 \cos 2t + \cos 4t}{8} \right] \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{\pi} \frac{3}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{2}{\pi} \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 4t \cos(n\omega_0 t) dt \xrightarrow{= \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))} b_n = \frac{3}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(n\omega_0 t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} [\cos(n\omega_0 t + 2t) + \cos(n\omega_0 t - 2t)] dt + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} [\cos(n\omega_0 t + 4t) + \cos(n\omega_0 t - 4t)] dt \xrightarrow{\omega_0=2} b_n = \frac{3}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2nt) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[(2n+2)t] dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[(2n-2)t] dt + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[(2n+4)t] dt + \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos[(2n-4)t] dt \xrightarrow{\int \cos at dt = \frac{\sin at}{a}} b_n = \frac{3}{4\pi} \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(2n+2)t]}{2n+2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(2n-2)t]}{2n-2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\sin[(2n+4)t]}{2n+4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\sin[(2n-4)t]}{2n-4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0, n \neq \pm 1, \pm 2.$$

Στην περίπτωση που $n = \pm 1, \pm 2$, υπολογίζεται το όριο όταν $n \rightarrow \pm 1, \pm 2$. Π.χ. στην περίπτωση $b_1 =$

$$\lim_{n \rightarrow 1} \frac{3}{4\pi} \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(2n+2)t]}{2n+2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[(2n-2)t]}{2n-2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\sin[(2n+4)t]}{2n+4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$\frac{1}{8\pi} \left[\frac{\sin[(2n-4)t]}{2n-4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{4\pi} \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin[4t]}{4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{\sin[(2n-2)t]}{2n-2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$\frac{1}{8\pi} \left[\frac{\sin[6t]}{6} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\sin[(-2)t]}{-2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2}. \quad \text{Όλοι οι όροι, πλην του } \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{\sin[(2n-2)t]}{2n-2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2},$$

μηδενίζονται, οπότε ισχύει $b_1 = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{\sin[(2n-2)t]}{2n-2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{(\sin[(2n-2)t])'}{(2n-2)'} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{t \cos[(2n-2)t]}{2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{(\pi/2) \cos[(2n-2)\pi/2] - (-\pi/2) \cos[(2n-2)(-\pi/2)]}{2} \right] =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[\frac{(\pi/2) \cdot 1 - (-\pi/2) \cdot 1}{2} \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{(\pi/2) \cdot 1 + (\pi/2) \cdot 1}{2} \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}. \quad \text{Με τον ίδιο τρόπο}$$

βρίσκονται οι συντελεστές $b_{-1} = \frac{1}{4}, b_{\pm 2} = \frac{1}{16}$

Ομοίως, $c_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{3 + 4 \cos 2t + \cos 4t}{8} \right] \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{3}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(n\omega_0 t) dt +$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t \sin(n\omega_0 t) dt + \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 4t \sin(n\omega_0 t) dt \xrightarrow[\substack{\sin a \cos b = \\ = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))}]{=} c_n = \frac{3}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(n\omega_0 t) dt +$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} [\sin(n\omega_0 t + 2t) + \sin(n\omega_0 t - 2t)] dt + \frac{1}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} [\sin(n\omega_0 t + 4t) + \sin(n\omega_0 t - 4t)] dt \xrightarrow{\omega_0=2} =$$

$$c_n = \frac{3}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(2nt) dt + \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin[(2n+2)t] dt + \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin[(2n-2)t] dt + \frac{1}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin[(2n+4)t] dt +$$

$$\frac{1}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin[(2n-4)t] dt \xrightarrow{\int \sin at dt = -\frac{\cos at}{a}} c_n = \frac{3}{8} \left[-\frac{\cos(2nt)}{2n} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{4} \left[-\frac{\cos[(2n+2)t]}{2n+2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} +$$

$$\frac{1}{4} \left[-\frac{\cos[(2n-2)t]}{2n-2} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{16} \left[-\frac{\cos[(2n+4)t]}{2n+4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{16} \left[-\frac{\cos[(2n-4)t]}{2n-4} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0.$$

3η Άσκηση

Να βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος:

- $x(t) = \sqrt{t}e^{-t}, t > 0$
- $x(t) = \sqrt{\frac{1}{t}} \cos t$
- $x(n) = \frac{1}{n^3}, n \geq 1$
- $x(n) = \frac{\cos n}{n^{3/2}}, n \geq 1$

Υπόδειξη: Κάθε σήμα $x(t)$ είναι συνεχές και κάθε $x(n)$ είναι διακριτό. Στα μεν συνεχή χρησιμοποιούμε τα ολοκληρώματα για τον υπολογισμό ισχύος/ενέργειας, στα δε διακριτά χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα αθροίσματα και ελέγχουμε μέσω των τέχνικων σύγκλισης/απόκλισης σειρών αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

Λύση 3ης Άσκησης

Σημείωση: Αν και δεν αναφέρεται στην θεωρία, στην πραγματικότητα ισχύει ότι ένα σήμα μπορεί να είναι ή μόνο σήμα ενέργειας ή μόνο σήμα ισχύος· δεν μπορεί να είναι και τα 2.

1ο ερώτημα

$$\begin{aligned}
 E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} |\sqrt{t}e^{-t}|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_0^{\infty} te^{-2t} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} t(-2)e^{-2t} dt \xrightarrow{(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t}} \\
 E_x &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} t(e^{-2t})' dt \Rightarrow E_x = -\frac{1}{2} \left[[te^{-2t}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} t'e^{-2t} dt \right] \Rightarrow E_x = -\frac{1}{2} \left[\left[\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-2t} - 0 \cdot e^{-2 \cdot 0} \right] - \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \right] \Rightarrow \\
 E_x &= -\frac{1}{2} \left[[0 - 0] - \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \right] \Rightarrow E_x = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \Rightarrow E_x = \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^{\infty} \Rightarrow E_x = -\frac{1}{4} [e^{-2t}]_0^{\infty} \Rightarrow \\
 E_x &= -\frac{1}{4} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-2t} - e^{-2 \cdot 0} \right] \Rightarrow E_x = -\frac{1}{4} [0 - 1] \Rightarrow E_x = -\frac{1}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

2ο ερώτημα

Δεν θα αποδειχθεί, διότι η δυσκολία είναι πέρα των απαιτήσεων του μαθήματος.

3ο ερώτημα

$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) \Rightarrow E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right)^2 \Rightarrow E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$. Το άθροισμα είναι μεγαλύτερο του μηδενός, δεδομένου ότι όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι θετικοί. Για να δούμε αν συγκλίνει το άθροισμα ή όχι, χρησιμοποιώ κάποια μέθοδο συγκλίσεως/αποκλίσεως σειρών. Εδώ, η ποσότητα $\frac{1}{n^6}$ είναι η τιμή της συναρτήσεως $f(x) = \frac{1}{x^6}$, όπου x είναι ίσος με τον φυσικό αριθμό n . Επίσης, η $f(x) = \frac{1}{x^6}$ είναι θετική και φθίνουσα, οπότε χρησιμοποιώ την μέθοδο της ολοκλήρωσης.

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^6} dx = \int_1^{\infty} x^{-6} dx \xrightarrow{\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c} \int_1^{\infty} f(x) dx = \left[\frac{1}{-6+1} x^{-6+1} \right]_1^{\infty} = \\
 &= \left[-\frac{1}{5} x^{-5} \right]_1^{\infty} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{5} x^{-5} - \left(-\frac{1}{5} 1^{-5} \right) \right] = 0 - \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5} < \infty. \text{ Άρα το σήμα είναι σήμα} \\
 &\text{ενέργειας.}
 \end{aligned}$$

4ο ερώτημα

$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) \Rightarrow E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n^{3/2}}\right)^2 \Rightarrow E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^3}$. Είναι γνωστό ότι $|\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{x=n} |\cos n| \leq 1 \xrightarrow{\cos^2 n = |\cos n|^2} 0 \leq \cos^2 n \leq 1 \xrightarrow{\cdot \frac{1}{n^3}} 0 \leq \frac{\cos^2 n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$, οπότε το άθροισμα είναι μεγαλύτερο του μηδενός, δεδομένου ότι όλοι οι όροι του αθροίσματος είναι θετικοί. Για να δούμε αν συγκλίνει το άθροισμα ή όχι, χρησιμοποιώ κάποια μέθοδο συγκλίσεως/αποκλίσεως σειρών. Αφού ισχύει $\frac{\cos^2 n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$, τότε θα ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Αρκεί να δείξω ότι το δεξιό άθροισμα

της ανισότητας ισχύει.

Και εδώ, η ποσότητα $\frac{1}{n^3}$ είναι η τιμή της συναρτήσεως $f(x) = \frac{1}{x^3}$, όπου x είναι ίσος με τον φυσικό αριθμό n . Επίσης, η $f(x) = \frac{1}{x^3}$ είναι θετική και φθίνουσα, οπότε χρησιμοποιώ την μέθοδο της ολοκλήρωσης.

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx = \int_1^{\infty} x^{-3}dx \xrightarrow{f x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c} \int_1^{\infty} f(x)dx = \left[\frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \right]_1^{\infty} = \left[-\frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^{\infty} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} x^{-2} - \left(-\frac{1}{2} 1^{-2} \right) \right] = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} < \infty. \text{ Άρα το δεξιό άθροισμα της ανισότητας συγκλίνει, οπότε και το άθροισμα στα αριστερά συγκλίνει. Συνεπώς, } x(n) \text{ είναι σήμα ενέργειας.}$$