

## 2ο Σετ Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα

### 1η Άσκηση

1. Να υπολογιστούν οι εκθετικοί και οι τριγωνομετρικοί συντελεστές Fourier των παρακάτω σημάτων:

$$\begin{aligned} \bullet x(t) &= \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases} \\ \bullet x(t) &= 2^{-|t|}, \quad -1 < t < 1 \end{aligned}$$

2. Να υπολογιστεί η μέση ισχύς των σημάτων.

### Λύση 1ης ασκήσεως

#### 1ο Ερώτημα

Αρχικά θα ασχοληθούμε με το σήμα  $x(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 2 \end{cases}$ , το οποίο έχει περίοδο  $T = 2$ , οπότε η βασική του συχνότητα είναι  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$ . Οι εκθετικοί συντελεστές Fourier είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \bullet a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^2 x(t) dt = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 e^{-t} dt + \int_1^2 0 dt \right] = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t} dt = \frac{1}{2} [-e^{-t}]_0^1 = \frac{1}{2} [-e^{-1} - (-e^{-0})] = \\ & \frac{1}{2} [1 - e^{-1}] \\ \bullet a_k &= \frac{1}{T} \int_0^2 x(t) e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 e^{-t} e^{-jk\pi t} dt + \int_1^2 0 \cdot e^{-jk\pi t} dt \right] = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-(1+jk\pi)t} dt = \\ & \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{1+jk\pi} e^{-(1+jk\pi)t} \right]_0^1 = \frac{1}{2(1+jk\pi)} [-e^{-(1+jk\pi)} - (-e^{-0})] = \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 - e^{-1} e^{-jk\pi}] = \\ & \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 - e^{-1}(\cos k\pi + j \sin k\pi)] = \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 - e^{-1}((-1)^k + j0)] = \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 - (-1)^k e^{-1}] = \\ & \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] = \begin{cases} \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 - e^{-1}], & k \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 + e^{-1}], & k \text{ περιττός} \end{cases} \end{aligned}$$

Για να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί συντελεστές του τριγωνομετρικού αναπτύγματος Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) + c_k \sin(k\omega_0 t)$$

αν είναι γνωστοί οι εκθετικοί συντελεστές  $a_k$ , καταφεύγουμε στην ακόλουθη σχέση:

$$a_k e^{jk\omega_0 t} = a_k (\cos k\omega_0 t + j \sin k\omega_0 t)$$

$$a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = a_{-k} (\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις 2 αυτές σχέσεις προκύπτει ότι

$$a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t)(a_k + a_{-k}) + j(a_k - a_{-k}) \sin(k\omega_0 t) \quad k = 1, 2, \dots$$

Από το δεξιό μέρος της τελευταίας σχέσης προκύπτουν οι συντελεστές της τριγωνομετρικής σειράς

$$b_k = a_k + a_{-k}, \quad c_k = j(a_k - a_{-k})$$

$$\text{Άρα } b_k = a_k + a_{-k} = \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] + \frac{1}{2(1-jk\pi)} [1 + (-1)^{-k+1} e^{-1}] \xrightarrow{(-1)^k = (-1)^{-k}}$$

$$b_k = \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] + \frac{1}{2(1-jk\pi)} [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] = [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \left[ \frac{1}{2(1+jk\pi)} + \frac{1}{2(1-jk\pi)} \right] =$$

$$[1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \frac{(1-jk\pi) + (1+jk\pi)}{2(1+jk\pi)(1-jk\pi)} = [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \frac{2}{2(1^2 + (k\pi)^2)} = [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \frac{1}{1^2 + (k\pi)^2}.$$

$$\text{Ομοίως βρίσκουμε ότι } c_k = j(a_k - a_{-k}) = j \left( \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] - \frac{1}{2(1-jk\pi)} [1 + (-1)^{-k+1} e^{-1}] \right) =$$

$$j(a_k - a_{-k}) = j \left( \frac{1}{2(1+jk\pi)} [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] - \frac{1}{2(1-jk\pi)} [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \right) = j [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}]$$

$$\left( \frac{1}{2(1+jk\pi)} - \frac{1}{2(1-jk\pi)} \right) = j [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \frac{(1-jk\pi) - (1+jk\pi)}{2(1+jk\pi)(1-jk\pi)} = j [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \frac{-2jk\pi}{2(1^2 + (k\pi)^2)} =$$

$$[1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \frac{-j^2 k\pi}{1^2 + (k\pi)^2} = [1 + (-1)^{k+1} e^{-1}] \frac{k\pi}{1^2 + (k\pi)^2}$$

Αντίστοιχα για το 2ο σήμα, το οποίο έχει περίοδο  $T = 2$  με βασική συχνότητα  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , οι εκθετικοί συντελεστές Fourier είναι οι εξής:

$$\bullet a_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 x(t) dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 2^t dt + \int_0^1 2^{-t} dt \right] = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 2^t dt + \frac{1}{2} \int_0^1 2^{-t} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{2^t}{\ln 2} \right]_{-1}^0 +$$

$$\frac{1}{2} \left[ -\frac{2^{-t}}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{2^0}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{2^{-1}}{\ln 2} + \frac{2^{-0}}{\ln 2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2} - \frac{1/2}{\ln 2} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1/2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \right] =$$

$$\frac{1/2}{2 \ln 2} + \frac{1/2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2 \ln 2}$$

$$\bullet a_k = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 x(t) e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 2^t e^{-jk\pi t} dt + \int_0^1 2^{-t} e^{-jk\pi t} dt \right] = \frac{1}{2} \left[ \int_{-1}^0 e^{t \ln 2} e^{-jk\pi t} dt + \int_0^1 e^{-t \ln 2} e^{-jk\pi t} dt \right] =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{t \ln 2} e^{-jk\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t \ln 2} e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{t(\ln 2 - jk\pi)} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t(\ln 2 + jk\pi)} dt =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{e^{t(\ln 2 - jk\pi)}}{\ln 2 - jk\pi} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-t(\ln 2 + jk\pi)}}{\ln 2 + jk\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{0(\ln 2 - jk\pi)}}{\ln 2 - jk\pi} - \frac{e^{-(\ln 2 - jk\pi)}}{\ln 2 - jk\pi} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-(\ln 2 + jk\pi)}}{\ln 2 + jk\pi} - \left( -\frac{e^{-0(\ln 2 + jk\pi)}}{\ln 2 + jk\pi} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2 - jk\pi} - \frac{e^{-\ln 2} e^{jk\pi}}{\ln 2 - jk\pi} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\ln 2} e^{-jk\pi}}{\ln 2 + jk\pi} + \frac{1}{\ln 2 + jk\pi} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2 - jk\pi} - \frac{e^{-\ln 2} (\cos(k\pi) + j \sin(k\pi))}{\ln 2 - jk\pi} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\ln 2}(\cos(k\pi) - j \sin(k\pi))}{\ln 2 + jk\pi} + \frac{1}{\ln 2 + jk\pi} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2 - jk\pi} - \frac{e^{-\ln 2} \cos(k\pi)}{\ln 2 - jk\pi} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\ln 2} \cos(k\pi)}{\ln 2 + jk\pi} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\ln 2 + jk\pi} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2 - jk\pi} - \frac{e^{-\ln 2}(-1)^k}{\ln 2 - jk\pi} \right] + \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\ln 2}(-1)^k}{\ln 2 + jk\pi} + \frac{1}{\ln 2 + jk\pi} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2 - jk\pi} + \frac{1}{\ln 2 + jk\pi} \right] + \\
& \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{-\ln 2}(-1)^k}{\ln 2 + jk\pi} - \frac{e^{-\ln 2}(-1)^k}{\ln 2 - jk\pi} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2 - jk\pi} + \frac{1}{\ln 2 + jk\pi} \right] - \frac{e^{-\ln 2}(-1)^k}{2} \left[ \frac{1}{\ln 2 + jk\pi} + \frac{1}{\ln 2 - jk\pi} \right] = \\
& \frac{1}{2} \left[ \frac{(\ln 2 + jk\pi) + (\ln 2 - jk\pi)}{(\ln 2 - jk\pi)(\ln 2 + jk\pi)} \right] - \frac{e^{-\ln 2}(-1)^k}{2} \left[ \frac{(\ln 2 - jk\pi) + (\ln 2 + jk\pi)}{(\ln 2 - jk\pi)(\ln 2 + jk\pi)} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{2 \ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} \right] - \\
& \frac{e^{-\ln 2}(-1)^k}{2} \left[ \frac{2 \ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} \right] = \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} - e^{-\ln 2}(-1)^k \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} = \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} [1 - e^{-\ln 2}(-1)^k] = \\
& \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} [1 - e^{\ln 2^{-1}}(-1)^k] = \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} [1 - 2^{-1}(-1)^k] = \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} \left[ 1 - \frac{1}{2}(-1)^k \right] = \\
& \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2}, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2}, & k \text{ περιττός} \end{cases}
\end{aligned}$$

Το σήμα είναι άρτιο ( $x(-t) = 2^{-|t|} = 2^{-|t|=x(t)}$ ), οπότε οι τριγωνομετρικοί συντελεστές  $c_k$  των ημιτόνων θα ισούνται με μηδέν και οι τριγωνομετρικοί συντελεστές  $c_k$  των συνημιτόνων θα ισούνται

$$\begin{aligned}
b_k = a_k + a_{-k} &= \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} + \frac{3}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (-k\pi)^2}, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (-k\pi)^2}, & k \text{ περιττός} \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} + \frac{3}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2}, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2}, & k \text{ περιττός} \end{cases} = \\
& \begin{cases} \frac{3 \ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2}, & k \text{ άρτιος} \\ \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2}, & k \text{ περιττός} \end{cases}
\end{aligned}$$

2ο Ερώτημα

$$\begin{aligned}
& \text{Του πρώτου σήματος η ολική μέση ισχύς, βάσει του θεωρήματος Parseval είναι } P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \\
& |a_0|^2 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} |a_k|^2 = \left| \frac{1}{2} [1 - e^{-1}] \right|^2 + \sum_{k \text{ άρτιος}} \left| \frac{1}{2(1 + jk\pi)} [1 - e^{-1}] \right|^2 + \sum_{k \text{ περιττός}} \left| \frac{1}{2(1 + jk\pi)} [1 + e^{-1}] \right|^2 = \\
& \frac{1}{4} [1 - e^{-1}]^2 + \frac{1}{4} [1 - e^{-1}]^2 \sum_{k \text{ άρτιος}} \left| \frac{1}{1 + jk\pi} \right|^2 + \frac{1}{4} [1 + e^{-1}]^2 \sum_{k \text{ περιττός}} \left| \frac{1}{1 + jk\pi} \right|^2 = \frac{1}{4} [1 - e^{-1}]^2 + \\
& \frac{1}{4} [1 - e^{-1}]^2 \sum_{k \text{ άρτιος}} \frac{1}{1^2 + (k\pi)^2} + \frac{1}{4} [1 + e^{-1}]^2 \sum_{k \text{ περιττός}} \frac{1}{1^2 + (k\pi)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Του δεύτερου σήματος η ολική μέση ισχύς, βάσει του θεωρήματος Parseval είναι } P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \\
& |a_0|^2 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} |a_k|^2 = \left| \frac{1}{2 \ln 2} \right|^2 + \sum_{k \text{ άρτιος}} \left| \frac{3}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} \right|^2 + \sum_{k \text{ περιττός}} \left| \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{(\ln 2)^2 + (k\pi)^2} \right|^2 = \\
& \frac{1}{4(\ln 2)^2} + \frac{9}{4} \sum_{k \text{ άρτιος}} \frac{(\ln 2)^2}{[(\ln 2)^2 + (k\pi)^2]^2} + \frac{1}{4} \sum_{k \text{ περιττός}} \frac{(\ln 2)^2}{[(\ln 2)^2 + (k\pi)^2]^2}
\end{aligned}$$

## 2η Άσκηση

Έστω περιοδικό σήμα  $x(t)$  το οποίο έχει συντελεστές *Fourier*:

$$a_k = \frac{1 - \cos(\pi k)}{(\pi k)^2}$$

1. Είναι σήμα άρτιο, περιττό ή τίποτα εκ των δυο;
2. Ποιά είναι η μέση τιμή του σήματος αν αυτή ορίζεται ως  $\frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) dt$ ;

### Λύση 2ης ασκήσεως

1ο Ερώτημα

$$a_{-k} = \frac{1 - \cos(\pi(-k))}{(\pi(-k))^2} = \frac{1 - \cos(\pi(k))}{(\pi k)^2} = a_k. \text{ Βάσει αυτού ισχύει, } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} =$$
$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k e^{-jk\omega_0 t} + a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} \xrightarrow{a_{-k}=a_k} x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t}) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot$$
$$2 \cos(k\omega_0 t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) \Rightarrow x(-t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(-k\omega_0 t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) =$$
$$x(t). \text{ Άρα το σήμα είναι άρτιο.}$$

2ο Ερώτημα

Η μέση τιμή του σήματος είναι  $\frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) dt$  η οποία είναι η τιμή του συντελεστή *Fourier*  $a_0$ . Άρα

$$\text{η μέση τιμή είναι } a_0 = \lim_{k \rightarrow 0} a_k = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\pi k)}{(\pi k)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Del Hospital}} a_0 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(\pi k))'}{((\pi k)^2)'} =$$
$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\pi \sin(\pi k)}{2(\pi k)(\pi k)'} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\pi \sin(\pi k)}{2\pi^2 k} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi k)}{\pi k} \xrightarrow{z=\pi k} a_0 = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

## 3η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι παρακάτω συνελίξεις βάσει του μετασχηματισμού *Fourier* :

1.  $y(t) = [e^{-at}u(t)] * [e^{-t-b}u(t-b)]$
2.  $y(t) = \text{sinc}(at) * \text{sinc}(at), a > 0$

### Λύση 3ης ασκήσεως

1ο ερώτημα

$$y(t) = [e^{-at}u(t)] * [e^{-t-b}u(t-b)] \Rightarrow Y(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} \cdot \mathcal{F}\{e^{-t-b}u(t-b)\}.$$

Ισχύει  $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega}$ ,  $a > 0$ . Για το 2ο σήμα ισχύει  $e^{-t-b}u(t-b) = e^{-t+b-2b}u(t-b) = e^{-2b}e^{-t+b}u(t-b) = e^{-2b}e^{-(t-b)}u(t-b)$ , όπου  $e^{-(t-b)}u(t-b)$  είναι το κατά  $b$  χρονικές μονάδες ολισθημένο σήμα  $e^{-t}u(t)$ . Βάσει θεωρίας, ισχύει  $x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-jt_0\omega}X(\omega)$ , οπότε ισχύει  $\mathcal{F}\{e^{-t-b}u(t-b)\} = \mathcal{F}\{e^{-2b}e^{-(t-b)}u(t-b)\} = e^{-2b}\mathcal{F}\{e^{-(t-b)}u(t-b)\} = e^{-2b}e^{-jb\omega}\frac{1}{1+j\omega}$ .

Άρα  $Y(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}e^{-2b}e^{-jb\omega}\frac{1}{1+j\omega} = e^{-2b}e^{-jb\omega}\frac{1}{(1+j\omega)(a+j\omega)}$ . Η ποσότητα  $\frac{1}{(1+j\omega)(a+j\omega)}$  μπορεί να σπάσει σε άθροισμα απλούστερων κλασμάτων της ακόλουθης μορφής:

$$\frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{1+j\omega}$$

Προκύπτει ότι  $\frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{1+j\omega} = \frac{1}{(1+j\omega)(a+j\omega)} \Rightarrow \frac{A(1+j\omega) + B(a+j\omega)}{(1+j\omega)(a+j\omega)} = \frac{1}{(1+j\omega)(a+j\omega)} \Rightarrow \frac{j\omega(A+B) + A + Ba}{(1+j\omega)(a+j\omega)} = \frac{1}{(1+j\omega)(a+j\omega)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A+Ba=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A+Ba=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A-Aa=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A=\frac{1}{1-a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{1-a} \\ A=\frac{1}{1-a} \end{cases} \Rightarrow Y(\omega) = e^{-2b}e^{-jb\omega} \left( \frac{A}{a+j\omega} + \frac{B}{1+j\omega} \right) = e^{-2b}e^{-jb\omega} \left( \frac{1}{1-a} \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{1-a} \frac{1}{1+j\omega} \right) = \frac{e^{-2b}}{1-a} \left( e^{-jb\omega} \frac{1}{a+j\omega} \right) - \frac{e^{-2b}}{1-a} \left( e^{-jb\omega} \frac{1}{1+j\omega} \right)$ .

Χρησιμοποιώντας την προαναφερθείσα ιδιότητα της ολίσθησης στον χρόνο, προκύπτει ότι

$$y(t) = \frac{e^{-2b}}{1-a} e^{-a(t-b)}u(t-b) - \frac{e^{-2b}}{1-a} e^{-(t-b)}u(t-b)$$

2ο ερώτημα

$$y(t) = \text{sinc}(at) * \text{sinc}(at) \Rightarrow Y(\omega) = \mathcal{F}\{\text{sinc}(at)\} \cdot \mathcal{F}\{\text{sinc}(at)\} = (\mathcal{F}\{\text{sinc}(at)\})^2$$

Βάσει της θεωρίας του δυϊσμού που είχαμε δει στις διαλέξεις είδαμε ότι ισχύει  $\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ , οπότε, βάσει της ιδιότητας της κλιμακώσεως στον χρόνο θα ισχύει  $\text{sinc}(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$ .

$$\begin{aligned} \text{Άρα } Y(\omega) &= \left( \frac{1}{|a|}\Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \right)^2 = \frac{1}{|a|^2} \left( \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \right)^2. \text{ Όμως ισχύει ότι } \left( \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \right)^2 = \begin{cases} 1^2, & \left| \frac{\omega}{2\pi a} \right| < 0.5 \\ 0^2, & \left| \frac{\omega}{2\pi a} \right| > 0.5 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 1, & \left| \frac{\omega}{2\pi a} \right| < 0.5 \\ 0, & \left| \frac{\omega}{2\pi a} \right| > 0.5 \end{cases} = \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right), \text{ οπότε ισχύει } Y(\omega) = \frac{1}{|a|^2} \left( \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \right)^2 = \frac{1}{|a|^2} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) = \frac{1}{|a|} \left( \frac{1}{|a|} \Pi\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\{\text{sinc}(at)\} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{|a|} \text{sinc}(at) \end{aligned}$$

4η Άσκηση

Να βρεθούν τα αρχικά σήματα που αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier :

- $X(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$
- $X(\omega) = -\omega^2$

Υπόδειξη:  $j^2 = -1$

Λύση 4ης ασκήσεως

1ο Ερώτημα

Ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)dt = x(t_0)$$

Βάσει του παραπάνω προκύπτει ότι  $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$

2ο Ερώτημα

Βάσει της ιδιότητας της παραγωγιστής στον χρόνο προκύπτει ότι, αν

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(\omega)$$

τότε ισχύει

$$\frac{dx}{dt} \xleftrightarrow{L} (j\omega)X(\omega)$$

Αυτό μπορεί να γενικευτεί για  $n$ -οστή παράγωγο στον χρόνο

$$\frac{d^n x}{dt^n} \xleftrightarrow{L} (j\omega)^n X(\omega)$$

Εδώ ισχύει  $X(\omega) = -\omega^2 = -1 \cdot \omega^2 = (j\omega)^2 \cdot 1$ . Άρα το σήμα  $x(t)$  είναι ένα σήμα το οποίο είναι η 2η παράγωγος ενός σήματος με μετασχηματισμό Fourier ίσο με 1. Το μόνο σήμα το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier ίσο με 1 είναι το  $\delta(t)$ . Άρα  $x(t) = \delta''(t)$ .

5η Άσκηση

1. Αν σε ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = j\omega$$

εισαχθεί σήμα

$$x(t) = 1 + \cos(t) + \sin(3t)$$

τότε ποιά θα είναι η έξοδος του;

2. Έστω ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(\omega) = \frac{-j\omega - 1}{-\omega^2 + 2j\omega + 1}$$

Βρείτε, την διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το σύστημα αυτό.

## Λύση 5ης ασκήσεως

### 1ο Ερώτημα

Έστω  $X(\omega)$  ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου  $x(t)$ . Τότε

$$y(t) = h(t) * x(t) \iff Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = (j\omega)X(\omega)$$

Όμως υπάρχει η ιδιότητα της παραγώγισης

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(\omega) \Rightarrow \frac{dx}{dt} \xleftrightarrow{L} (j\omega)X(\omega)$$

Βάσει αυτής, προκύπτει ότι  $Y(\omega) = (j\omega)X(\omega) \Rightarrow y(t) = x'(t) = (1 + \cos(t) + \sin(3t))' = (1)' + (\cos(t))' + (\sin(3t))' = 0 + (-\sin(t) + \cos(3t) \cdot (3t)') = -\sin(t) + 3\cos(3t)$

### 2ο Ερώτημα

Από θεωρίας είναι γνωστό ότι βάσει της διαφορικής εξίσωσης, προκύπτει η απόκριση συχνότητας και αντιστρόφως:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x}{dt^k} \iff H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

Δεδομένου ότι η απόκριση συχνότητας είναι

$$H(\omega) = \frac{-j\omega - 1}{-\omega^2 + 2j\omega + 1} = \frac{-(j\omega)^1 - (j\omega)^0}{(j\omega)^2 + 2(j\omega)^1 + (j\omega)^0}$$

τότε, χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει ΓΧΑ με την δεδομένη απόκριση συχνότητας είναι

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y(t) = -\frac{dx}{dt} - x(t)$$