2ο Σετ Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα

1η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι παρακάτω συνελίξεις:

- $y(t) = x(t) * h(t)$ όπου $x(t) = e^{-|t|},\ h(t) = \cos(t)$
- $y(t) = x(t) * h(t)$ όπου $x(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}u(t),\ h(t) = 2e^{-2t}u(t)$

Λύση 1ης άσκησης

Ερώτημα 1ο

Αναλυτικός τρόπος: $y(t) = x(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\cos(t-\tau)d\tau \xRightarrow{\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{|\tau|+j(t-\tau)}d\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{|\tau|-j(t-\tau)}d\tau =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\tau+j(t-\tau)}d\tau + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau+j(t-\tau)}d\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\tau-j(t-\tau)}d\tau + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau-j(t-\tau)}d\tau =$$
$$\frac{e^{jt}}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\tau-j\tau}d\tau + \frac{e^{jt}}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau-j\tau}d\tau + \frac{e^{-jt}}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{\tau+j\tau}d\tau + \frac{e^{-jt}}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-\tau+j\tau}d\tau =$$
$$\frac{e^{jt}}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(1-j)\tau}d\tau + \frac{e^{jt}}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-(1+j)\tau}d\tau + \frac{e^{-jt}}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(1+j)\tau}d\tau + \frac{e^{-jt}}{2}\int_{0}^{\infty} e^{(-1+j)\tau}d\tau =$$
$$\frac{e^{jt}}{2}\left[\frac{e^{(1-j)\tau}}{1-j}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{e^{jt}}{2}\left[\frac{e^{-(1+j)\tau}}{-(1+j)}\right]_{0}^{\infty} + \frac{e^{-jt}}{2}\left[\frac{e^{(1+j)\tau}}{1+j}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-jt}}{2}\left[\frac{e^{(-1+j)\tau}}{-1+j}\right]_{0}^{\infty} =$$
$$\frac{e^{jt}}{2}\left[\frac{e^{(1-j)0}}{1-j} - \lim_{\tau\to-\infty}\frac{e^{(1-j)\tau}}{1-j}\right] + \frac{e^{jt}}{2}\left[\lim_{\tau\to\infty}\frac{e^{-(1+j)\tau}}{-(1+j)} - \frac{e^{-(1+j)0}}{-(1+j)}\right] + \frac{e^{-jt}}{2}\left[\frac{e^{(1+j)0}}{1+j} - \lim_{\tau\to\infty}\frac{e^{(1+j)\tau}}{1+j}\right] +$$
$$\frac{e^{-jt}}{2}\left[\lim_{\tau\to\infty}\frac{e^{(-1+j)\tau}}{-1+j} - \frac{e^{(-1+j)0}}{-1+j}\right] = \frac{e^{jt}}{2}\left[\frac{1}{1-j} - 0\right] + \frac{e^{jt}}{2}\left[0 - \frac{1}{-(1+j)}\right] + \frac{e^{-jt}}{2}\left[\frac{1}{1+j} - 0\right] +$$
$$\frac{e^{-jt}}{2}\left[0 - \frac{1}{-1+j}\right] = \frac{e^{jt}}{2(1-j)} + \frac{e^{jt}}{2(1+j)} + \frac{e^{-jt}}{2(1+j)} + \frac{e^{-jt}}{2(1-j)} = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2(1-j)} + \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2(1+j)} =$$
$$\frac{\cos t}{1-j} + \frac{\cos t}{1+j} = \frac{\cos t(1+j)+\cos t(1-j)}{1-j^2} = \frac{\cos t + j\cos t + \cos t - j\cos t}{1-(-1)} = \frac{2\cos t}{2} = \cos t$$

Άλλη λύση είναι η εξής: $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}\pi\left[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right] \Rightarrow$
$y(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2}{1+\omega^2}\pi\left[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\right]e^{j\omega t}d\omega =$
$\dfrac{1}{2\pi}\left[\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2}{1+\omega^2}\pi\delta(\omega-1)e^{j\omega t}d\omega + \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2}{1+\omega^2}\pi\delta(\omega+1)e^{j\omega t}d\omega\right] =$
$\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2\pi e^{j\omega t}}{1+\omega^2}\delta(\omega-1)d\omega + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2\pi e^{j\omega t}}{1+\omega^2}\delta(\omega+1)d\omega =$
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{j\omega t}}{1+\omega^2}\delta(\omega-1)d\omega + \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{j\omega t}}{1+\omega^2}\delta(\omega+1)d\omega$
Μετά χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\infty} \delta(\omega-\omega_0)f(\omega)d\omega = f(\omega_0)$ στην ισότητα που προκύπτει. Άρα
$y(t) = \dfrac{e^{j\cdot 1\cdot t}}{1+1^2} + \dfrac{e^{j\cdot(-1)\cdot t}}{1+(-1)^2} = \dfrac{e^{jt}}{2} + \dfrac{e^{-jt}}{2} = \dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} = \cos t$

Ερώτημα 2ο

$y(t) = x(t)*h(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-3\tau}u(\tau)2e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau}u(\tau)e^{-2(t-\tau)}u(t-$
$\tau)d\tau = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau+2\tau}u(\tau)e^{-2t}u(t-\tau)d\tau = e^{-2t}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$ (1)
Για $\tau > 0$, ισχύει $u(\tau) = 1$, αλλιώς $u(\tau) = 0$, οπότε από (1) προκύπτει ότι $y(t) = e^{-2t}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\tau}\cdot 1\cdot$
$u(t-\tau)d\tau = e^{-2t}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\tau}u(t-\tau)d\tau.$
Για να ισχύει $u(t-\tau) = 1$, πρέπει $t-\tau > 0 \Rightarrow t > \tau$. Δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα γίνεται στις θετικές τιμές του τ, τότε για κάθε $t < 0$ θα ισχύει $t-\tau < 0$, οπότε η προς ολοκλήρωση ποσότητα $u(t-\tau)$ ισούται με 0 οπότε και το ολοκλήρωμα θα ισούται με 0. Άρα για $t < 0$, θα ισχύει $y(t) = 0$.
Για θετικά t θα ισχύει ότι $u(t-\tau) = 1 \Rightarrow t-\tau > 0 \Rightarrow t > \tau$, οπότε $y(t) = e^{-2t}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\tau}u(t-$
$\tau)d\tau = e^{-2t}\displaystyle\int_0^{t} e^{-\tau}\cdot 1 d\tau + e^{-2t}\displaystyle\int_t^{\infty} e^{-\tau}\cdot 0 d\tau = e^{-2t}\displaystyle\int_0^{t} e^{-\tau}d\tau = e^{-2t}\left[-e^{-\tau}\right]_0^t e^{-2t}\left[-e^{-t}+e^0\right] =$
$e^{-2t}\left[-e^{-t}+1\right] = -e^{-2t-t} + e^{-2t} = e^{-2t} - e^{-3t}$
Συνοψίζοντας, προκύπτει ότι $y(t) = \begin{cases} e^{-2t}-e^{-3t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} = \left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(t)$
Άλλη λύση είναι η εξής: $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3+j\omega}\right]\left[2\dfrac{1}{2+j\omega}\right] =$
$\dfrac{1}{(3+j\omega)(2+j\omega)} = \dfrac{A}{2+j\omega} + \dfrac{B}{3+j\omega} = \dfrac{A(3+j\omega)+B(2+j\omega)}{(3+j\omega)(2+j\omega)} = \dfrac{A(3+j\omega)+B(2+j\omega)}{(3+j\omega)(2+j\omega)} =$
$\dfrac{3A+Aj\omega+2B+Bj\omega}{(3+j\omega)(2+j\omega)} = \dfrac{3A+2B+j\omega(A+B)}{(3+j\omega)(2+j\omega)}$
Προκύπτει ότι για να σπάσει το αρχικό σύνθετο κλάσμα σε απλούστερα κλάσματα πρέπει να ισχύει
$3A+2B+j\omega(A+B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3A+2B = 1 \\ A+B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A+2B = 1 \\ B = -A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A-2A = 1 \\ B = -A \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-A=-1 \end{cases} \Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}-\frac{1}{3+j\omega} \Rightarrow y(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-3t}u(t)=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(t)$$

2η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Fourier των παρακάτω σημάτων:

- $x(t)=2^{-|t|}$
- $x(t)=\begin{cases} t+1,\ -1\leq t<0 \\ -t+1,\ 0\leq t<1 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases}$

Υπόδειξη: $\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$

Λύση 2ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

Πρώτος τρόπος: $x(t)=e=2^{|t|} \Rightarrow x(t)=\begin{cases} 2^{-t},\ t\geq 0 \\ 2^{t},\ t<0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}2^{-|t|}e^{-j\omega t}dt=$ $\int_{-\infty}^{0}2^{t}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}2^{-t}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t\ln 2}e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-t\ln 2}e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{t\ln 2-j\omega t}dt+$ $\int_{0}^{\infty}e^{-t\ln 2-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{(\ln 2-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{(-\ln 2-j\omega)t}dt \xRightarrow{\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+c} X(\omega)=\left[\frac{e^{(\ln 2-j\omega)t}}{\ln 2-j\omega}\right]_{-\infty}^{0}+$ $\left[\frac{e^{(-\ln 2-j\omega)t}}{-\ln 2-j\omega}\right]_{0}^{\infty}=\left[\frac{e^{(\ln 2-j\omega)0}}{\ln 2-j\omega}-\lim_{t\to infty}\frac{e^{(\ln 2-j\omega)t}}{\ln 2-j\omega}\right]+\left[\lim_{t\to\infty}\frac{e^{(-\ln 2-j\omega)t}}{-\ln 2-j\omega}-\frac{e^{(-\ln 2-j\omega)0}}{-\ln 2-j\omega}\right]=\left[\frac{e^{0}}{\ln 2-j\omega}-0\right]+$ $\left[0+\frac{e^{0}}{\ln 2+j\omega}\right]=\frac{1}{\ln 2-j\omega}+\frac{1}{\ln 2+j\omega}=\frac{\ln 2+j\omega+\ln 2-j\omega}{(\ln 2)^2-j^2\omega^2}=\frac{2\ln 2}{(\ln 2)^2+\omega^2}$

Ερώτημα 2ο

$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}(t+1)e^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}(-t+1)e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}te^{-j\omega t}dt+\int_{-1}^{0}e^{-j\omega t}dt-$ $\int_{0}^{1}te^{-j\omega t}dt+\int_{0}^{1}e^{-j\omega t}dt=\int_{-1}^{0}te^{-j\omega t}dt+\int_{-1}^{1}e^{-j\omega t}dt-\int_{0}^{1}te^{-j\omega t}dt\ (1)$

Ας βρούμε τώρα το ολοκλήρωμα $\int te^{at}dt$.

$\int te^{at}dt=\frac{1}{a}\int ate^{at}dt=\frac{1}{a}\int t\left(e^{at}\right)'dt=\frac{1}{a}\left[te^{at}-\int t'e^{at}dt\right]=\frac{1}{a}\left[te^{at}-\int e^{at}dt\right]=\frac{1}{a}\left[te^{at}-\frac{1}{a}e^{at}\right]\ (2)$

$(1)\xRightarrow{(2)} X(\omega)=\frac{1}{-j\omega}\left[te^{-j\omega t}-\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{-j\omega}\left[te^{-j\omega t}-\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\right]_{0}^{1}=$ $-\frac{1}{j\omega}\left[te^{-j\omega t}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{j\omega}\left[te^{-j\omega t}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\right]_{0}^{1}=-\frac{1}{j\omega}\left[\frac{1}{j\omega}-\left(-e^{j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{j\omega}\right)\right]+$

$\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega}-e^{j\omega}\right]+\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}-\frac{1}{j\omega}\right]=-\frac{1}{j^2\omega^2}-\frac{1}{j\omega}e^{j\omega}+\frac{1}{j^2\omega^2}e^{j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}-\frac{1}{j\omega}e^{j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}+\frac{1}{j^2\omega^2}e^{-j\omega}-\frac{1}{j^2\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{j\omega}e^{j\omega}+\frac{1}{j^2\omega^2}e^{j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}-\frac{1}{j\omega}e^{j\omega}+\frac{1}{j\omega}e^{-j\omega}+\frac{1}{j^2\omega^2}e^{-j\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{2}{\omega^2}+\frac{2}{j\omega}\left(e^{-j\omega}-e^{j\omega}\right)+\frac{1}{j^2\omega^2}\left(e^{j\omega}+e^{-j\omega}\right)=\frac{2}{\omega^2}+\frac{2}{j\omega}\left(-2j\sin\omega\right)+\frac{1}{j^2\omega^2}2\cos\omega=\frac{2}{\omega^2}-\frac{4}{\omega}\sin\omega-\frac{2}{\omega^2}\cos\omega$

3η Άσκηση

Να υπολογιστεί η ολική μέση ισχύς του σήματος $x(t)$ αν:

- οι συντελεστες Fourier του εκθετικού σήματος είναι $\alpha_0=1,\ \alpha_k=2^{-|k|}$
- $x(t)=\cos(t)-2\sin(t)$

Υπόδειξη: Από θεωρίας είναι γνωστό ότι $b\cos(\phi)+c\sin(\phi)=A\cos(\phi+\theta)$, όπου $A=\sqrt{b^2+c^2},\ \theta=-\tan^{-1}\frac{c}{b}$

Ερώτημα 1ο

Από ταυτότητα του Parseval ισχύει ότι $P_x=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2\Rightarrow P_x=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(2^{-|k|}\right)^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{-2|k|}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(2^2\right)^{-|k|}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}4^{-|k|}=\sum_{k=-\infty}^{-1}4^k+a_0+\sum_{k=1}^{\infty}4^{-k}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^k}+\dots\right)+1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^k}+\dots\right)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+1+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}+1+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

Ερώτημα 2ο

Από την υπόδειξη προκύπτει ότι $x(t)=\cos(t)-2\sin(t)=\sqrt{1^2+(-2)^2}\cos(t+\theta)=\sqrt{5}\cos(t+\theta)$, όπου $\theta=-\arctan\left(\frac{-2}{1}\right)=\arctan 2$. Βρίσκομε την περίοδο T για την οποία πρέπει να ισχύει:

$$x(t+T)=x(t),\ t\in\mathbb{R}$$

$x(t+T)=x(t)\Rightarrow\sqrt{5}\cos(t+T+\theta)=\sqrt{5}\cos(t+\theta)\Rightarrow\cos(t+T+\theta)=\cos(t+\theta)\Rightarrow t+T+\theta=2\kappa\pi+t+\theta\Rightarrow T=2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbb{Z}^+\xRightarrow{\kappa=1}T=2\pi$.

Άρα $P_x=\frac{1}{T}\int_0^T|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sqrt{5}\cos(t+\theta)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}5\cos(t+\theta)^2dt=\frac{5}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t+\theta)^2dt=\frac{5}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2(t+\theta))}{2}dt=\frac{5}{4\pi}\int_0^{2\pi}dt+\frac{5}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2t+2\theta)dt=\frac{5}{4\pi}\left[t\right]_0^{2\pi}+\frac{5}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2t+2\theta)\right]_0^{2\pi}=\frac{5}{4\pi}\left[2\pi-0\right]+\frac{5}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2\cdot2\pi+2\theta)-\frac{1}{2}\sin(2\cdot0+2\theta)\right]=\frac{10\pi}{4\pi}+\frac{5}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(4\pi+2\theta)-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]=\frac{5}{2}+\frac{5}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]=\frac{5}{2}$

4η Άσκηση

Να βρεθούν τα αρχικά σήματα που αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier :

- $X(\omega) = \delta(\omega)$
- $X(\omega) = \begin{cases} j\omega, \ |\omega| < 2 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases}$

Υπόδειξη: Από θεωρίας είναι γνωστό ότι $x(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

Ερώτημα 1ο

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega \xRightarrow[=f(\omega_0)]{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0)f(\omega)d\omega} x(t) = \frac{1}{2\pi}e^{j\cdot 0\cdot t} = \frac{1}{2\pi}e^{0} = \frac{1}{2\pi}$$

Ερώτημα 2ο

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} j\omega e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi t}\int_{-2}^{2} jt\omega e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi t}\int_{-2}^{2}\omega(jt\omega)' e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi t}\int_{-2}^{2}\omega\left(e^{j\omega t}\right)' d\omega = \frac{1}{2\pi t}\left\{\left[\omega e^{j\omega t}\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}\omega' e^{j\omega t}d\omega\right\} = \frac{1}{2\pi t}\left\{\left[\omega e^{j\omega t}\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} e^{j\omega t}d\omega\right\} = \frac{1}{2\pi t}\left\{\left[\omega e^{j\omega t}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-2}^{2}\right\} = \frac{1}{2\pi t}\left\{\left[2e^{j2t} - (-2)e^{-j2t}\right] - \left[\frac{e^{j2t}}{jt} - \frac{e^{-j2t}}{jt}\right]\right\} = \frac{2(e^{j2t} + e^{-j2t})}{2\pi t} - \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j\pi t^2} = \frac{2\cdot 2\cos 2t}{2\pi t} - \frac{sin2t}{\pi t^2} = \frac{2t\cos 2t - \sin 2t}{\pi t^2}$$