Στοιχειώδη σήματα και εφαρμογές

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

1. Ασκήσεις

Άσκηση 1η

- Έστω $x(n)$ ένα περιττό διακριτό σήμα.

Άσκηση 1η

- Έστω $x(n)$ ένα περιττό διακριτό σήμα.
- Να αποδείξετε ότι:

Άσκηση 1η

- Έστω $x(n)$ ένα περιττό διακριτό σήμα.
- Να αποδείξετε ότι:
    - $x(0) = 0$

Άσκηση 1η

- Έστω $x(n)$ ένα περιττό διακριτό σήμα.
- Να αποδείξετε ότι:
  - $x(0) = 0$
  - Να αποδείξετε ότι Το άθροισμα των τιμών του ισούται με μηδέν.

Λύση

- Δεδομένου ότι το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(-n) = -x(n) \Rightarrow x(-n) + x(n) = 0 \xRightarrow{n=0} x(-0) + x(0) = 0 \Rightarrow x(0) + x(0) = 0 \Rightarrow 2x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$

Λύση

- Δεδομένου ότι το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(-n) = -x(n) \Rightarrow x(-n) + x(n) = 0 \xRightarrow{n=0} x(-0) + x(0) = 0 \Rightarrow x(0) + x(0) = 0 \Rightarrow 2x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$
- $\sum_{n=-N}^{N} x(n) = x(-N) + x(-(N-1)) + \cdots + x(-1) + x(0) + x(1) \cdots + x(N-1) + x(N) =$

Λύση

- Δεδομένου ότι το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(-n) = -x(n) \Rightarrow x(-n) + x(n) = 0 \xRightarrow{n=0} x(-0) + x(0) = 0 \Rightarrow x(0) + x(0) = 0 \Rightarrow 2x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$
- $\displaystyle\sum_{n=-N}^{N} x(n) = x(-N)+x(-(N-1))+\cdots+x(-1)+x(0)+x(1)\cdots+x(N-1)+x(N) =$

Λύση

- Δεδομένου ότι το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(-n) = -x(n) \Rightarrow x(-n) + x(n) = 0 \xrightarrow{n=0} x(-0) + x(0) = 0 \Rightarrow x(0) + x(0) = 0 \Rightarrow 2x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$
- $\sum_{n=-N}^{N} x(n) = x(-N)+x(-(N-1))+\cdots+x(-1)+x(0)+x(1)\cdots+x(N-1)+x(N) =$
$= -x(N) - x(N-1) - \cdots - x(1) + x(0) + x(1) \cdots + x(N-1) + x(N).$

Λύση

- Δεδομένου ότι το σήμα είναι περιττό, ισχύει $x(-n) = -x(n) \Rightarrow x(-n) + x(n) = 0 \xRightarrow{n=0} x(-0) + x(0) = 0 \Rightarrow x(0) + x(0) = 0 \Rightarrow 2x(0) = 0 \Rightarrow x(0) = 0$
- $\sum_{n=-N}^{N} x(n) = x(-N) + x(-(N-1)) + \cdots + x(-1) + x(0) + x(1) \cdots + x(N-1) + x(N) =$
  $= -x(N) - x(N-1) - \cdots - x(1) + x(0) + x(1) \cdots + x(N-1) + x(N).$
  Κάθε $x(i),\ i = 1, 2, \ldots, N-1, N$ αναιρείται από το αντίστοιχο $-x(i)$. Αυτό, συν τω ότι $x(0) = 0$, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το παραπάνω άθροισμα κάνει 0.

Άσκηση 2η

- Να δειχθεί ότι το σήμα $x(t) = \sin^2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$ είναι περιοδικό.

Λύση

- $x(t) = \sin^2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{1 - \cos\left(2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$

Λύση

- $x(t) = \sin^2\left(2t - \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$
- Αρκεί να αποδειχθεί αν υπάρχει $T \in \mathbb{R} : T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t+T) = t(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Λύση

- $x(t) = \sin^2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{1 - \cos\left(2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$
- Αρκεί να αποδειχθεί αν υπάρχει $T \in \mathbb{R} : T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t+T) = t(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t+T) = x(t) \Rightarrow \frac{1 - \cos\left(4(t+T) - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$

Λύση

- $x(t) = \sin^2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$
- Αρκεί να αποδειχθεί αν υπάρχει $T \in \mathbb{R} : T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t + T) = t(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t + T) = x(t) \Rightarrow \dfrac{1 - \cos\left(4(t + T) - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$

Λύση

- $x(t) = \sin^2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$
- Αρκεί να αποδειχθεί αν υπάρχει $T \in \mathbb{R} : T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t+T) = t(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t+T) = x(t) \Rightarrow \dfrac{1 - \cos\left(4(t+T) - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$
  $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\left(4t + 4T - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$

Λύση

- $x(t) = \sin^2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x(t) = \frac{1-\cos\left(2\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} \Rightarrow x(t) = \frac{1-\cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)}{2}$
- Αρκεί να αποδειχθεί αν υπάρχει $T \in \mathbb{R} : T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t+T) = t(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t+T) = x(t) \Rightarrow \frac{1-\cos\left(4(t+T)-\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1-\cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$
  $\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(4t+4T-\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$
  $-\frac{\cos\left(4t+4T-\frac{\pi}{3}\right)}{2} = -\frac{\cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow \frac{\cos\left(4t+4T-\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\cos\left(4t-\frac{\pi}{3}\right)}{2}$

Λύση

- $x(t) = \sin^2\left(2t - \dfrac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(2\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)\right)}{2} \Rightarrow x(t) = \dfrac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$
- Αρκεί να αποδειχθεί αν υπάρχει $T \in \mathbb{R} : T > 0$ τέτοιο ώστε $x(t+T) = t(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
- $x(t+T) = x(t) \Rightarrow \dfrac{1 - \cos\left(4(t+T) - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{1 - \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$
  $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\left(4t + 4T - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow$
  $-\dfrac{\cos\left(4t + 4T - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = -\dfrac{\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Rightarrow \dfrac{\cos\left(4t + 4T - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = \dfrac{\cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$
  $\Rightarrow 4t + 4T - \dfrac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + 4t - \dfrac{\pi}{3},\ \kappa \in \mathbb{Z} \xRightarrow{\kappa=1} 4T = 2\pi \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{2}$

Άσκηση 3η

- Ποιο εκ των κάτωθι σημάτων είναι περιοδικό·

Άσκηση 3η

- Ποιο εκ των κάτωθι σημάτων είναι περιοδικό·
  - $x(n) = \sin(2n)$

Άσκηση 3η

- Ποιο εκ των κάτωθι σημάτων είναι περιοδικό·
  - $x(n) = \sin(2n)$
  - $x(n) = \sin(2\pi n)$

Λύση

Δεδομένου ότι τα 2 σήματα είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή $n \in \mathbb{Z}$, για να είναι περιοδικά πρέπει η περίοδος $T > 0$ να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)) = \sin(2n) \Rightarrow 2(n+T) = 2\kappa\pi + 2n \xrightarrow{\kappa=1}$

Λύση

Δεδομένου ότι τα 2 σήματα είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή $n \in \mathbb{Z}$, για να είναι περιοδικά πρέπει η περίοδος $T > 0$ να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)) = \sin(2n) \Rightarrow 2(n+T) = 2\kappa\pi + 2n \xRightarrow{\kappa=1}$

Λύση

Δεδομένου ότι τα 2 σήματα είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή $n \in \mathbb{Z}$, για να είναι περιοδικά πρέπει η περίοδος $T > 0$ να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)) = \sin(2n) \Rightarrow 2(n+T) = 2\kappa\pi + 2n \xRightarrow{\kappa=1}$ $2n + 2T = 2\pi + 2n \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi \notin \mathbb{Z}$.

Λύση

Δεδομένου ότι τα 2 σήματα είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή $n \in \mathbb{Z}$, για να είναι περιοδικά πρέπει η περίοδος $T > 0$ να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)) = \sin(2n) \Rightarrow 2(n+T) = 2\kappa\pi + 2n \xRightarrow{\kappa=1}$ $2n + 2T = 2\pi + 2n \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi \notin \mathbb{Z}$.
  Άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)\pi) = \sin(2n\pi) \Rightarrow 2(n+T)\pi = 2\kappa\pi + 2n\pi \xRightarrow{\kappa=1}$

Λύση

Δεδομένου ότι τα 2 σήματα είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή $n \in \mathbb{Z}$, για να είναι περιοδικά πρέπει η περίοδος $T > 0$ να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)) = \sin(2n) \Rightarrow 2(n+T) = 2\kappa\pi + 2n \xRightarrow{\kappa=1}$ $2n + 2T = 2\pi + 2n \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi \notin \mathbb{Z}$.
  Άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)\pi) = \sin(2n\pi) \Rightarrow 2(n+T)\pi = 2\kappa\pi + 2n\pi \xRightarrow{\kappa=1}$

Λύση

Δεδομένου ότι τα 2 σήματα είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή $n \in \mathbb{Z}$, για να είναι περιοδικά πρέπει η περίοδος $T > 0$ να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)) = \sin(2n) \Rightarrow 2(n+T) = 2\kappa\pi + 2n \xRightarrow{\kappa=1}$ $2n + 2T = 2\pi + 2n \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi \notin \mathbb{Z}$.
  Άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)\pi) = \sin(2n\pi) \Rightarrow 2(n+T)\pi = 2\kappa\pi + 2n\pi \xRightarrow{\kappa=1}$ $\pi(2n+2T) = \pi(2+2n) \Rightarrow 2n+2T = 2n+2 \Rightarrow 2T = 2 \Rightarrow T = 1 \in \mathbb{Z}$.

Λύση

Δεδομένου ότι τα 2 σήματα είναι διακριτού χρόνου, δηλαδή $n \in \mathbb{Z}$, για να είναι περιοδικά πρέπει η περίοδος $T > 0$ να ανήκει στο $\mathbb{Z}$.

- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)) = \sin(2n) \Rightarrow 2(n+T) = 2\kappa\pi + 2n \xRightarrow{\kappa=1}$ $2n + 2T = 2\pi + 2n \Rightarrow 2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi \notin \mathbb{Z}$.
  Άρα το σήμα δεν είναι περιοδικό.
- $x(n+T) = x(n) \Rightarrow \sin(2(n+T)\pi) = \sin(2n\pi) \Rightarrow 2(n+T)\pi = 2\kappa\pi + 2n\pi \xRightarrow{\kappa=1}$ $\pi(2n+2T) = \pi(2+2n) \Rightarrow 2n+2T = 2n+2 \Rightarrow 2T = 2 \Rightarrow T = 1 \in \mathbb{Z}$.
  Άρα το σήμα είναι περιοδικό.

Ασκηση 4η

- Έστω ένα σήμα το οποίο είναι της μορφής:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}}, & n \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

όπου $p > \dfrac{1}{2}$.

Ασκηση 4η

- Έστω ένα σήμα το οποίο είναι της μορφής:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}}, & n \geq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

  όπου $p > \dfrac{1}{2}$.

- Δείξτε ότι το σήμα είναι ενεργειακό.

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2 + 1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2 + 1 > n \Rightarrow$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2 + 1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2 + 1 > n \Rightarrow$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2 + 1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2 + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2 + 1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2 + 1 > n \Rightarrow$ $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow$ $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx =$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx =$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx = \int_1^{\infty} x^{-2p} dx =$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx = \int_1^{\infty} x^{-2p} dx = \left[\frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} \right]_1^{\infty} dx =$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow$ $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx = \int_1^{\infty} x^{-2p} dx = \left[\frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} \right]_1^{\infty} dx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} - \frac{1^{-2p+1}}{-2p+1} dx =$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow$ $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx = \int_1^{\infty} x^{-2p} dx = \left[\frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} \right]_1^{\infty} dx = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} - \frac{1^{-2p+1}}{-2p+1} dx =$ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{(-2p+1)x^{2p-1}} + \frac{1^{-2p+1}}{2p-1} dx =$

Λύση

- $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{p}{2}}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^p}$
- Για να αποφανθούμε αν είναι το σήμα μας ενεργειακό ή όχι, πρέπει να βρούμε αν η ποσότητα E_x συγκλίνει σε κάποιον αριθμό ή όχι.
- Γνωρίζομε ότι $n^2+1 > n$. Από ανισότητος, προκύπτει ότι $n^2+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{(n^2+1)^p} < \frac{1}{(n^2)^p} = \frac{1}{n^{2p}}$.
- Άρα αρκεί να δείξω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει.
- Οι όροι της τελευταίας σειράς $\frac{1}{n^{2p}}$ προκύπτουν από την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^{2p}}$, $x \geq 1$, η οποία είναι θετική και φθίνουσα.
- Αυτό την καθιστά κατάλληλη για την χρήση του κριτηρίου της ολοκληρώσεως.
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2p}} dx = \int_1^{\infty} x^{-2p} dx = \left[\frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} \right]_1^{\infty} dx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-2p+1}}{-2p+1} - \frac{1^{-2p+1}}{-2p+1} dx = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(-2p+1)x^{2p-1}} + \frac{1^{-2p+1}}{2p-1} dx = 0 + \frac{1}{2p-1} = \frac{1}{2p-1}$
- Επειδή $p > \frac{1}{2} \Rightarrow 2p > 1 \Rightarrow 2p-1 > 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ συκλίνει σε έναν θετικό αριθμό, οπότε και η αρχική σειρά συγκλίνει άρα το σήμα μας είναι ενεργειακό.

Άσκηση 5η

- Να βρεθεί αν το ολοκήρωμα $\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ για διάφορες τιμές του p.

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\ln 3}^{\infty} \xrightarrow[p-1>0]{p>1}$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^\infty =$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\ln 3}^\infty \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1) z^{p-1}} \right]_{\ln 3}^\infty ==$
    $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{(-p+1) z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} =$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xRightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^\infty ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} = 0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} =$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
    - $p > 1 \Rightarrow$
      $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^{\infty} == \lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} =0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
    - $p = 1 \Rightarrow$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^{\infty} ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} =0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^{\infty} ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} = 0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-1} dz =$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
    - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^\infty ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} = 0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
    - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-1} dz = [\ln |z|]_{\ln 3}^\infty =$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^\infty ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} = 0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-1} dz = [\ln |z|]_{\ln 3}^\infty = \lim_{z\to\infty} \ln |z| - \ln |\ln 3| = \infty$
  - $p < 1 \Rightarrow$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1} \right]_{\ln 3}^{\infty} \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} \right]_{\ln 3}^{\infty} ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} = 0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-1} dz = [\ln |z|]_{\ln 3}^{\infty} = \lim_{z\to\infty} \ln |z| - \ln |\ln 3| = \infty$
  - $p < 1 \Rightarrow$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xRightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^{\infty} ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} = 0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-1} dz = [\ln |z|]_{\ln 3}^{\infty} = \lim_{z\to\infty} \ln |z| - \ln |\ln 3| = \infty$
  - $p < 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xRightarrow[-p+1>0]{p<1}$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^{\infty} ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} = 0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-1} dz = [\ln |z|]_{\ln 3}^{\infty} = \lim_{z\to\infty} \ln |z| - \ln |\ln 3| = \infty$
  - $p < 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xrightarrow[-p+1>0]{p<1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz =$

Λύση

- $I = \int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xRightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^{\infty} ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} =0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-1} dz =[\ln |z|]_{\ln 3}^{\infty} = \lim_{z\to\infty} \ln |z| - \ln |\ln 3| = \infty$
  - $p < 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^{\infty} \xRightarrow[-p+1>0]{p<1} \int_{\ln 3}^{\infty} z^{-p} dz ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{z^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\ln(3)^{-p+1}}{-p+1} =$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p} \frac{1}{x} dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xRightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^\infty ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} =0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-1} dz =[\ln |z|]_{\ln 3}^\infty = \lim_{z\to\infty} \ln |z| - \ln |\ln 3| = \infty$
  - $p < 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xRightarrow[-p+1>0]{p<1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p} dz ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{z^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\ln(3)^{-p+1}}{-p+1} =\infty + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} =$

Λύση

- $I = \int_3^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}dx = \int_3^\infty (\ln x)^{-p}\frac{1}{x}dx.$
- Θέτω $z = \ln x \Rightarrow dz = d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$, οποτε αλλάζουν και τα όρια: $3 \to \ln 3$ και $\infty \to \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$
- Εδώ έχομε 3 περιπτώσεις:
  - $p > 1 \Rightarrow$
    $I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p}dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xrightarrow[p-1>0]{p>1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p}dz = \left[\frac{1}{(-p+1)z^{p-1}}\right]_{\ln 3}^\infty ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(-p+1)z^{p-1}} - \frac{1}{(-p+1)(\ln 3)^{p-1}} =0 + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} = \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}}$
  - $p = 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-1}dz =[\ln|z|]_{\ln 3}^\infty = \lim_{z\to\infty} \ln|z| - \ln|\ln 3| = \infty$
  - $p < 1 \Rightarrow I = \int_{\ln 3}^\infty z^{-p}dz = \left[\frac{z^{-p+1}}{-p+1}\right]_{\ln 3}^\infty \xrightarrow[-p+1>0]{p<1} \int_{\ln 3}^\infty z^{-p}dz ==$
    $\lim_{z\to\infty} \frac{z^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\ln(3)^{-p+1}}{-p+1} =\infty + \frac{1}{(p-1)(\ln 3)^{p-1}} =\infty$

Άσκηση 6η

- Να δειχθεί ότι το σήμα $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t)$ είναι σήμα ενέργειας και να υπολογιστεί η ενέργειά του.

Λύση 1ου ερωτήματος

Για να αποδειχθεί ότι ένα συνεχές σήμα $x(t)$ είναι ενέργειας, μπορεί να γίνουν τα εξής:

- Να υπολογιστεί κετευθείαν η ενέργεια του. Στην περίπτωση αυτή βρίσκονται τα ζητούμενα μας κατευεθείαν.

Λύση 1ου ερωτήματος

Για να αποδειχθεί ότι ένα συνεχές σήμα $x(t)$ είναι ενέργειας, μπορεί να γίνουν τα εξής:

- Να υπολογιστεί κετευθείαν η ενέργεια του. Στην περίπτωση αυτή βρίσκονται τα ζητούμενα μας κατευεθείαν.
- Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει σήμα $y(t):\ |x(t)| < |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$. Αν το $y(t)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Από την άλλη, αν υπάρχει σήμα $y(t):\ |x(t)| > |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να μην έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ δεν θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Αυτή η μέθοδος είναι ιδανική αν ζητείται μόνο το 1ο ζητούμενο, αλλά απαιτεί λίγη μαθηματικής ευρηματικότητα.

Λύση 1ου ερωτήματος

Για να αποδειχθεί ότι ένα συνεχές σήμα $x(t)$ είναι ενέργειας, μπορεί να γίνουν τα εξής:

- Να υπολογιστεί κετευθείαν η ενέργεια του. Στην περίπτωση αυτή βρίσκονται τα ζητούμενα μας κατευεθείαν.
- Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει σήμα $y(t): \ |x(t)| < |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$. Αν το $y(t)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Από την άλλη, αν υπάρχει σήμα $y(t): \ |x(t)| > |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να μην έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ δεν θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Αυτή η μέθοδος είναι ιδανική αν ζητείται μόνο το 1ο ζητούμενο, αλλά απαιτεί λίγη μαθηματικής ευρηματικότητα.
- Εδώ θα επιλέχθηκε η 2η μέθοδος.

Λύση 1ου ερωτήματος

Για να αποδειχθεί ότι ένα συνεχές σήμα $x(t)$ είναι ενέργειας, μπορεί να γίνουν τα εξής:

- Να υπολογιστεί κετευθείαν η ενέργεια του. Στην περίπτωση αυτή βρίσκονται τα ζητούμενα μας κατευεθείαν.
- Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει σήμα $y(t): |x(t)| < |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$. Αν το $y(t)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Από την άλλη, αν υπάρχει σήμα $y(t): |x(t)| > |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να μην έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ δεν θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Αυτή η μέθοδος είναι ιδανική αν ζητείται μόνο το 1ο ζητούμενο, αλλά απαιτεί λίγη μαθηματικής ευρηματικότητα.
- Εδώ θα επιλέχθηκε η 2η μέθοδος.
- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t)\cdot 1, & t > 0 \\ e^{-t}\cos(t)\cdot 0, & t < 0 \end{cases}$

Λύση 1ου ερωτήματος

Για να αποδειχθεί ότι ένα συνεχές σήμα $x(t)$ είναι ενέργειας, μπορεί να γίνουν τα εξής:

- Να υπολογστεί κετευθείαν η ενέργεια του. Στην περίπτωση αυτή βρίσκονται τα ζητούμενα μας κατευεθείαν.
- Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει σήμα $y(t): \ |x(t)| < |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$. Αν το $y(t)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Από την άλλη, αν υπάρχει σήμα $y(t): \ |x(t)| > |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να μην έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ δεν θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Αυτή η μέθοδος είναι ιδανική αν ζητείται μόνο το 1ο ζητούμενο, αλλά απαιτεί λίγη μαθηματικής ευρηματικότητα.
- Εδώ θα επιλέχθηκε η 2η μέθοδος.
- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t)\cdot 1, & t > 0 \\ e^{-t}\cos(t)\cdot 0, & t < 0 \end{cases}$

Λύση 1ου ερωτήματος

Για να αποδειχθεί ότι ένα συνεχές σήμα $x(t)$ είναι ενέργειας, μπορεί να γίνουν τα εξής:

- Να υπολογστεί κετευθείαν η ενέργεια του. Στην περίπτωση αυτή βρίσκονται τα ζητούμενα μας κατευεθείαν.
- Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει σήμα $y(t): \ |x(t)| < |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$. Αν το $y(t)$ έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Από την άλλη, αν υπάρχει σήμα $y(t): \ |x(t)| > |y(t)|, \forall t \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε να μην έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε και το $x(t)$ δεν θα έχει πεπερασμένη ενέργεια. Αυτή η μέθοδος είναι ιδανική αν ζητείται μόνο το 1ο ζητούμενο, αλλά απαιτεί λίγη μαθηματικής ευρηματικότητα.
- Εδώ θα επιλέχθηκε η 2η μέθοδος.
- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t)\cdot 1, & t > 0 \\ e^{-t}\cos(t)\cdot 0, & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:
  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dx = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dx =$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:
  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dx = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dx =$
  $= \int_0^{\infty} (e^{-2t}) \cos^2(t) dx$
- Ισχύει όμως $-1 \leq \cos t \leq 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2 t \leq 1^2 \xRightarrow{\cdot e^{-2t}} e^{-2t}\cos^2 t \leq e^{-2t} \cdot 1$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dx = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dx =$$
$= \int_0^\infty (e^{-2t})\cos^2(t)dx$
- Ισχύει όμως $-1 \leq \cos t \leq 1,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2 t \leq 1^2 \xRightarrow{\cdot e^{-2t}} e^{-2t}\cos^2 t \leq e^{-2t} \cdot 1$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:
  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dx = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dx =$
  $= \int_0^{\infty} (e^{-2t}) \cos^2(t) dx$
- Ισχύει όμως $-1 \le \cos t \le 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2 t \le 1^2 \xrightarrow{\cdot e^{-2t}} e^{-2t}\cos^2 t \le e^{-2t} \cdot 1$
  $\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \xrightarrow[dt=-\frac{du}{2}]{u=-2t} \int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le \int_{-2\cdot 0}^{-2\cdot\infty} e^u \left(-\frac{du}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:
$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dx = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dx =$
$= \int_0^{\infty} (e^{-2t}) \cos^2(t) dx$

- Ισχύει όμως $-1 \le \cos t \le 1, \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2 t \le 1^2 \xRightarrow{\cdot e^{-2t}} e^{-2t}\cos^2 t \le e^{-2t} \cdot 1$
$\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \xRightarrow[dt=-\frac{du}{2}]{u=-2t} \int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le \int_{-2\cdot 0}^{-2\cdot\infty} e^u \left(-\frac{du}{2}\right) \Rightarrow$
$\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-\infty}^{0} \Rightarrow$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $x(t) = e^{-t}\cos(t)u(t) = \begin{cases} e^{-t}\cos(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, οπότε μας ενδιαφέρει το ολοκλήρωμα:
$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dx + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dx = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dx =$
$= \int_0^{\infty} (e^{-2t}) \cos^2(t) dx$
- Ισχύει όμως $-1 \le \cos t \le 1,\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2 t \le 1^2 \xRightarrow{\cdot e^{-2t}} e^{-2t}\cos^2 t \le e^{-2t} \cdot 1$
$\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \xRightarrow[dt=-\frac{du}{2}]{u=-2t} \int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le \int_{-2\cdot 0}^{-2\cdot\infty} e^u \left(-\frac{du}{2}\right) \Rightarrow$
$\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-\infty}^{0} \Rightarrow$
$\int_0^{\infty} e^{-2t}\cos^2 t dt \le \frac{1}{2}(e^0 - \lim_{u\to-\infty} e^u) = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2} < \infty.$
- Αφού το δεύτερο σήμα έχει πεπερασμένη ενέργεια, άρα θα έχει και το πρώτο πεπερασμένη ενέργεια, οπότε είναι σήμα ενέργειας.

Λύση 2ου ερωτήματος

- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dt =$
  $= \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} \cos 2t dt.$
- Από το προηγούμενο ερώτημα είχαμε βρει ότι:
  $\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dt =$
$= \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt.$
- Από το προηγούμενο ερώτημα είχαμε βρει ότι:
$\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Θέτω $I = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt \xRightarrow[dt=-\frac{du}{2}]{u=-2t} I = \int_{-2\cdot 0}^{-2\cdot\infty} e^{u}\cos(-u)\left(-\frac{du}{2}\right) \xRightarrow{\cos(-u)=\cos(u)}$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dt =$
$= \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt.$
- Από το προηγούμενο ερώτημα είχαμε βρει ότι:
$\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Θέτω $I = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt \xrightarrow[dt=-\frac{du}{2}]{u=-2t} I = \int_{-2\cdot 0}^{-2\cdot\infty} e^{u}\cos(-u)\left(-\frac{du}{2}\right) \xrightarrow{\cos(-u)=\cos(u)}$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dt =$
$= \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt.$
- Από το προηγούμενο ερώτημα είχαμε βρει ότι:
$\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Θέτω $I = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt \xrightarrow[dt=-\frac{du}{2}]{u=-2t} I = \int_{-2\cdot 0}^{-2\cdot\infty} e^{u}\cos(-u)\left(-\frac{du}{2}\right) \xrightarrow{\cos(-u)=\cos(u)}$
$I = -\frac{1}{2}\int_{0}^{-\infty} e^{u}\cos(u) du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{u}\cos(u) du \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (e^{u})'\cos(u) du$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} 0^2 dt + \int_{0}^{\infty} |e^{-t}\cos(t)|^2 dt = \int_{0}^{\infty} (e^{-t})^2 \cos^2(t) dt =$
  $= \int_{0}^{\infty} e^{-2t} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt.$
- Από το προηγούμενο ερώτημα είχαμε βρει ότι:
  $\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Θέτω $I = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\cos 2t dt \xRightarrow[dt=-\frac{du}{2}]{u=-2t} I = \int_{-2\cdot 0}^{-2\cdot\infty} e^{u}\cos(-u)\left(-\frac{du}{2}\right) \xRightarrow{\cos(-u)=\cos(u)}$
  $I = -\frac{1}{2}\int_{0}^{-\infty} e^{u}\cos(u) du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{u}\cos(u) du \Rightarrow I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (e^{u})' \cos(u) du$
  $\Rightarrow I = \frac{1}{2}\left[\left[e^{u}\cos u\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{u}(\cos(u))' du\right] =$
  $\frac{1}{2}\left[\left[e^{u}\cos u\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^{u}(-\sin(u)) du\right] =$
  $\frac{1}{2}\left[\left[e^{u}\cos u\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} e^{u}\sin(u) du\right] \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $I = \frac{1}{2}\left[e^0 \cos 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \cos u + \int_{-\infty}^{0} (e^u)' \sin(u) du\right] \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $I = \frac{1}{2}\left[e^0 \cos 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \cos u + \int_{-\infty}^{0} (e^u)' \sin(u) du\right] \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $I = \frac{1}{2}\left[e^0 \cos 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \cos u + \int_{-\infty}^{0} (e^u)' \sin(u) du\right] \Rightarrow$

  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^u \sin u\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^u (\sin(u))' du\right] \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $I = \frac{1}{2}\left[e^0 \cos 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \cos u + \int_{-\infty}^{0} (e^u)' \sin(u) du\right] \Rightarrow$

  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^u \sin u\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^u (\sin(u))' du\right] \Rightarrow$

  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^0 \sin 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \sin u\right] - \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du\right] \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $$I = \frac{1}{2}\left[e^0 \cos 0 - \lim_{u\to -\infty} e^u \cos u + \int_{-\infty}^{0} (e^u)' \sin(u) du\right] \Rightarrow$$
  $$I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^u \sin u\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^u (\sin(u))' du\right] \Rightarrow$$
  $$I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^0 \sin 0 - \lim_{u\to -\infty} e^u \sin u\right] - \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du\right] \Rightarrow$$
  $$I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + [0 - 0] - \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du\right] \Rightarrow$$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $I = \frac{1}{2}\left[e^0 \cos 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \cos u + \int_{-\infty}^{0} (e^u)' \sin(u) du\right] \Rightarrow$
  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^u \sin u\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^u (\sin(u))' du\right] \Rightarrow$
  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^0 \sin 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \sin u\right] - \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du\right] \Rightarrow$
  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + [0 - 0] - \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du\right] \Rightarrow I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $I = \frac{1}{2}\left[e^0 \cos 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \cos u + \int_{-\infty}^{0} (e^u)' \sin(u) du\right] \Rightarrow$
  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^u \sin u\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^u (\sin(u))' du\right] \Rightarrow$
  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + \left[e^0 \sin 0 - \lim_{u \to -\infty} e^u \sin u\right] - \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du\right] \Rightarrow$
  $I = \frac{1}{2}\left[1 - 0 + [0 - 0] - \int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du\right] \Rightarrow I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^u \cos u du \Rightarrow$
  $I = \frac{1}{2} - I \Rightarrow 2I = \frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{4}$
- Άρα $E_x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} I = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$