Ανασκόπηση στην Ολοκλήρωση και τις μεθόδους της

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

Τί είναι η παράγωγος μιας συναρτήσεως

- Παράγωγος μίας συναρτήσεως είναι η ποσότητα που υπολογίζεται βάσει της παρακάτω εξισώσεως:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$

Τί είναι η παράγωγος μιας συναρτήσεως

- Παράγωγος μίας συναρτήσεως είναι η ποσότητα που υπολογίζεται βάσει της παρακάτω εξισώσεως:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$
- Στην πράξη, είναι ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους.

Τί είναι η παράγωγος μιας συναρτήσεως

- Παράγωγος μίας συναρτήσεως είναι η ποσότητα που υπολογίζεται βάσει της παρακάτω εξισώσεως:
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1}$$
- Στην πράξη, είναι ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους.
- Αν η $f(x)$ ορίζει απόσταση που διανύεται και x είναι ο χρόνος, τότε η παράγωγος θα ορίζει την ταχύτητα.

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0,\ c \in \mathbb{R}$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0, \;\; c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = px^{p-1}, \;\; p \in \mathbb{R}$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0, \ c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = px^{p-1}, \ p \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0, \;\; c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = px^{p-1}, \;\; p \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \alpha^x \Rightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0, \;\; c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = px^{p-1}, \;\; p \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \alpha^x \Rightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$
- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0,\ c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = px^{p-1},\ p \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \alpha^x \Rightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$
- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0,\ c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = px^{p-1},\ p \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \alpha^x \Rightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$
- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

Παράγωγοι Βασικών συναρτήσεων

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0, \;\; c \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^p \Rightarrow f'(x) = px^{p-1}, \;\; p \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \alpha^x \Rightarrow f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$
- $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Ιδιότητες Παραγωγισης

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες Παραγωγισης

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Ιδιότητες Παραγωγισης

- $(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x),\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \forall x : g(x)\neq 0$

Ιδιότητες Παραγωγισης

- $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \forall x : g(x) \neq 0$
- Αν $h(x) = f(g(x))$, τότε $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Ολοκλήρωση

- Πρόκειται για την αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης.

Ολοκλήρωση

- Πρόκειται για την αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης.
- Δεδομένης μιας συνάρτησης $f(x)$, αναζητούμε την $F(x)$, ονόματι παράγουσα, για την οποία ισχύει:

$$F'(x) = f(x) \tag{2}$$

Είδη ολοκληρωμάτων

- Υπάρχουν 2 ειδών ολοκληρώματα:

Είδη ολοκληρωμάτων

- Υπάρχουν 2 ειδών ολοκληρώματα:
  - Αόριστο ολοκλήρωμα: $\int f(x)dx$. Το αόριστο ολοκλήρωμα δίνει την μορφή της παράγουσας συναρτήσεως.

Είδη ολοκληρωμάτων

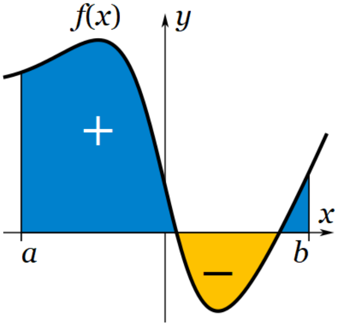
- Υπάρχουν 2 ειδών ολοκληρώματα:
  - Αόριστο ολοκλήρωμα: $\int f(x)dx$. Το αόριστο ολοκλήρωμα δίνει την μορφή της παράγουσας συναρτήσεως.
  - Ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_a^b f(x)dx$. Τα ολοκληρώματα μπορούν να ερμηνευθούν ως η προσημασμένη περιοχή της περιοχής στο επίπεδο που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση μιας δεδομένης συνάρτησης μεταξύ δύο σημείων στην πραγματική ευθεία.

Είδη ολοκληρωμάτων

- Υπάρχουν 2 ειδών ολοκληρώματα:
  - Αόριστο ολοκλήρωμα: $\int f(x)dx$. Το αόριστο ολοκλήρωμα δίνει την μορφή της παράγουσας συναρτήσεως.
  - Ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_a^b f(x)dx$. Τα ολοκληρώματα μπορούν να ερμηνευθούν ως η προσημασμένη περιοχή της περιοχής στο επίπεδο που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση μιας δεδομένης συνάρτησης μεταξύ δύο σημείων στην πραγματική ευθεία.

Είδη ολοκληρωμάτων

- Υπάρχουν 2 ειδών ολοκληρώματα:
  - Αόριστο ολοκλήρωμα: $\int f(x)dx$. Το αόριστο ολοκλήρωμα δίνει την μορφή της παράγουσας συναρτήσεως.
  - Ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_a^b f(x)dx$. Τα ολοκληρώματα μπορούν να ερμηνευθούν ως η προσημασμένη περιοχή της περιοχής στο επίπεδο που οριοθετείται από τη γραφική παράσταση μιας δεδομένης συνάρτησης μεταξύ δύο σημείων στην πραγματική ευθεία.



Βασικό Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

- Έστω $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.

Βασικό Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

- Έστω $f(x), \;\; x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.
- Αν $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$, τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Βασικό Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

- Έστω $f(x),\ x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$.
- Αν $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$, τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

- Έστω $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Βασικό Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού

- Έστω $f(x), \; x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$.
- Αν $F(x)$ παράγουσα της $f(x)$, τότε ισχύει:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

- Έστω $G(x) = \int_a^x f(t)dt$.
- Τότε, ισχύει $G'(x) = f(x)$.

Βασικές Ιδιότητες Ολοκλήρωσης

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \; a < b < c$

Βασικές Ιδιότητες Ολοκλήρωσης

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,\ a < b < c$
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)dx$

Βασικές Ιδιότητες Ολοκλήρωσης

- $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \; a < b < c$
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

- Αντικατάσταση

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

- Αντικατάσταση
- Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

- Αντικατάσταση
- Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου
- Τριγωνομετρική αντικατάσταση

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

- Αντικατάσταση
- Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου
- Τριγωνομετρική αντικατάσταση
- Κατά μέρη ολοκλήρωση

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

- Αντικατάσταση
- Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου
- Τριγωνομετρική αντικατάσταση
- Κατά μέρη ολοκλήρωση
- Ρητές συναρτήσεις

Τεχνικές Ολοκλήρωσης

- Αντικατάσταση
- Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου
- Τριγωνομετρική αντικατάσταση
- Κατά μέρη ολοκλήρωση
- Ρητές συναρτήσεις
- Αριθμητική ολοκλήρωση

Αντικατάσταση

- Στην ολοκλήρωση ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \qquad (4)$$

Αντικατάσταση

- Στην ολοκλήρωση ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4}$$

- Αν υποπτευόμαστε ότι μια δεδομένη συνάρτηση είναι η παράγωγος μιας άλλης μέσω του κανόνα της αλυσίδας, αφήνουμε το u να υποδηλώσει έναν πιθανό υποψήφιο για την εσωτερική συνάρτηση.

Αντικατάσταση

- Στην ολοκλήρωση ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4}$$

- Αν υποπτευόμαστε ότι μια δεδομένη συνάρτηση είναι η παράγωγος μιας άλλης μέσω του κανόνα της αλυσίδας, αφήνουμε το u να υποδηλώσει έναν πιθανό υποψήφιο για την εσωτερική συνάρτηση.
- Στη συνέχεια μεταφράζουμε τη δεδομένη συνάρτηση έτσι ώστε να γράφεται εξ ολοκλήρου ως u, χωρίς να παραμένει x στην έκφραση.

Αντικατάσταση

- Στην ολοκλήρωση ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4}$$

- Αν υποπτευόμαστε ότι μια δεδομένη συνάρτηση είναι η παράγωγος μιας άλλης μέσω του κανόνα της αλυσίδας, αφήνουμε το u να υποδηλώσει έναν πιθανό υποψήφιο για την εσωτερική συνάρτηση.
- Στη συνέχεια μεταφράζουμε τη δεδομένη συνάρτηση έτσι ώστε να γράφεται εξ ολοκλήρου ως u, χωρίς να παραμένει x στην έκφραση.
- Εάν μπορούμε να ενσωματώσουμε αυτή τη νέα συνάρτηση του u, τότε η παράγουσα της αρχικής συνάρτησης προκύπτει αντικαθιστώντας το u με την ισοδύναμη έκφραση που έχει το x.

Αντικατάσταση

- Στην ολοκλήρωση ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{4}$$

- Αν υποπτευόμαστε ότι μια δεδομένη συνάρτηση είναι η παράγωγος μιας άλλης μέσω του κανόνα της αλυσίδας, αφήνουμε το u να υποδηλώσει έναν πιθανό υποψήφιο για την εσωτερική συνάρτηση.
- Στη συνέχεια μεταφράζουμε τη δεδομένη συνάρτηση έτσι ώστε να γράφεται εξ ολοκλήρου ως u, χωρίς να παραμένει x στην έκφραση.
- Εάν μπορούμε να ενσωματώσουμε αυτή τη νέα συνάρτηση του u, τότε η παράγουσα της αρχικής συνάρτησης προκύπτει αντικαθιστώντας το u με την ισοδύναμη έκφραση που έχει το x.
- Στην περίπτωση υπολογισμού ενός ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, αλλάζουν και τα όρια του ολοκληρώματος αντικαθιστώντας τα $x_1,\ x_2$ αντίστοιχα με $u_1 = u(x_1),\ u_2 = u(x_2)$

Παράδειγμα

- Έστω σήμα $x(t) = e^{-|t|}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργειά του.

Παράδειγμα

- Έστω σήμα $x(t) = e^{-|t|}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργειά του.
- Εξ ορισμού του σήματος, προκύπτει ότι:

$$|x(t)|^2 = \left(|e^{-|t|}|\right)^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Παράδειγμα

- Έστω σήμα $x(t) = e^{-|t|}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργειά του.
- Εξ ορισμού του σήματος, προκύπτει ότι:

$$|x(t)|^2 = \left(|e^{-|t|}|\right)^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

- Άρα η ενέργεια του σήματος είναι
$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} |x(t)|^2 dt + \int_{0}^{\infty} |x(t)|^2 dt =$

Παράδειγμα

- Έστω σήμα $x(t) = e^{-|t|}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργειά του.
- Εξ ορισμού του σήματος, προκύπτει ότι:

$$|x(t)|^2 = \left(|e^{-|t|}|\right)^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

- Άρα η ενέργεια του σήματος είναι
$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} |x(t)|^2 dt + \int_{0}^{\infty} |x(t)|^2 dt =$

Παράδειγμα

- Έστω σήμα $x(t) = e^{-|t|}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργειά του.
- Εξ ορισμού του σήματος, προκύπτει ότι:

$$|x(t)|^2 = \left(|e^{-|t|}|\right)^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

- Άρα η ενέργεια του σήματος είναι
$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} |x(t)|^2 dt + \int_{0}^{\infty} |x(t)|^2 dt =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt$
- Για το 1ο ολοκλήρωμα Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{2}$.Ομοίως, για το 2ο ολοκλήρωμα θέτω
$w = -2t \Rightarrow dw = d(-2t) = -2dt \Rightarrow dt = -\dfrac{dw}{2}$.Αντίστοιχα αλλάζω τα όρια των ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα

- Έστω σήμα $x(t) = e^{-|t|}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργειά του.
- Εξ ορισμού του σήματος, προκύπτει ότι:

$$|x(t)|^2 = \left(|e^{-|t|}|\right)^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

- Άρα η ενέργεια του σήματος είναι
$E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} |x(t)|^2 dt + \int_{0}^{\infty} |x(t)|^2 dt =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt$
- Για το 1ο ολοκλήρωμα Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \dfrac{du}{2}$.Ομοίως, για το 2ο ολοκλήρωμα θέτω
$w = -2t \Rightarrow dw = d(-2t) = -2dt \Rightarrow dt = -\dfrac{dw}{2}$.Αντίστοιχα αλλάζω τα όρια των ολοκληρωμάτων.
- Αντικαθιστώντας στο κάθε ολοκλήρωμα προκύπτει ότι
$E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{u} \frac{du}{2} + \int_{0}^{-\infty} e^{w} \left(-\frac{dw}{2}\right)$

Παράδειγμα

- Έστω σήμα $x(t) = e^{-|t|}$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργειά του.
- Εξ ορισμού του σήματος, προκύπτει ότι:

$$|x(t)|^2 = \left(|e^{-|t|}|\right)^2 = e^{-2|t|} = \begin{cases} e^{2t}, & t < 0 \\ e^{-2t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

- Άρα η ενέργεια του σήματος είναι
$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} |x(t)|^2 dt + \int_{0}^{\infty} |x(t)|^2 dt =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt$
- Για το 1ο ολοκλήρωμα Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$.Ομοίως, για το 2ο ολοκλήρωμα θέτω
$w = -2t \Rightarrow dw = d(-2t) = -2dt \Rightarrow dt = -\frac{dw}{2}$.Αντίστοιχα αλλάζω τα όρια των ολοκληρωμάτων.
- Αντικαθιστώντας στο κάθε ολοκλήρωμα προκύπτει ότι
$E_x = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{u} \frac{du}{2} + \int_{0}^{-\infty} e^{w} \left(-\frac{dw}{2}\right)$
- Στην περίπτωση

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας στο κάθε ολοκλήρωμα προκύπτει ότι
$$E_x = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{u}\frac{du}{2} + \int_{0}^{-\infty} e^{w}\left(-\frac{dw}{2}\right) =$$

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας στο κάθε ολοκλήρωμα προκύπτει ότι
$$E_x = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{u}\frac{du}{2} + \int_{0}^{-\infty} e^{w}\left(-\frac{dw}{2}\right) =$$

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας στο κάθε ολοκλήρωμα προκύπτει ότι
$$E_x = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{u} \frac{du}{2} + \int_{0}^{-\infty} e^{w} \left(-\frac{dw}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{u} du - \int_{0}^{-\infty} e^{w} dw\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{u} du + \int_{-\infty}^{0} e^{w} dw\right) =$$

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας στο κάθε ολοκλήρωμα προκύπτει ότι

$$E_x = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{u}\frac{du}{2} + \int_{0}^{-\infty} e^{w}\left(-\frac{dw}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{u}du - \int_{0}^{-\infty} e^{w}dw\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{u}du + \int_{-\infty}^{0} e^{w}dw\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left[e^{u}\right]_{-\infty}^{0} + \left[e^{w}\right]_{-\infty}^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(\left[e^{0} - \lim_{u\to-\infty} e^{u}\right] + \left[e^{0} - \lim_{w\to-\infty} e^{w}\right]\right) =$$

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Αντικαθιστώντας στο κάθε ολοκλήρωμα προκύπτει ότι

$$E_x = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{u}\frac{du}{2} + \int_{0}^{-\infty} e^{w}\left(-\frac{dw}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{u}du - \int_{0}^{-\infty} e^{w}dw\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{u}du + \int_{-\infty}^{0} e^{w}dw\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left[e^{u}\right]_{-\infty}^{0} + \left[e^{w}\right]_{-\infty}^{0}\right) = \frac{1}{2}\left(\left[e^{0} - \lim_{u\to-\infty} e^{u}\right] + \left[e^{0} - \lim_{w\to-\infty} e^{w}\right]\right) =$$
$$= \frac{1}{2}([1-0]+[1-0]) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1 < \infty$$

- Στην περίπτωση, το σήμα μας είναι σήμα ενέργειας.

Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου

- Εδώ χρησιμοποιούμε ιδιότητες τριγωνομετρίας πχ.

Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου

- Εδώ χρησιμοποιούμε ιδιότητες τριγωνομετρίας πχ.
  - $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου

- Εδώ χρησιμοποιούμε ιδιότητες τριγωνομετρίας πχ.
  - $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
  - $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Δυνάμεις ημιτόνου/συνημιτόνου

- Εδώ χρησιμοποιούμε ιδιότητες τριγωνομετρίας πχ.
  - $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
  - $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
  - $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$
$= \frac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right) dt.$
- Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$. Αντίστοιχα αλλάζουν τα όρια.

$$u1 = u(-\pi) = 2(-\pi) = -2\pi,\ u2 = u(\pi) = 2\pi \tag{6}$$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$
$= \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt$.
- Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$. Αντίστοιχα αλλάζουν τα όρια.

$$u1 = u(-\pi) = 2(-\pi) = -2\pi,\ u2 = u(\pi) = 2\pi \tag{6}$$

- Αντικαθιστώντας στο αρχικό ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι
$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{1}{T}\int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{1-\cos u}{2}\right) \frac{du}{2} =$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$
$= \frac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right) dt.$
- Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$. Αντίστοιχα αλλάζουν τα όρια.

$$u1 = u(-\pi) = 2(-\pi) = -2\pi,\ u2 = u(\pi) = 2\pi \tag{6}$$

- Αντικαθιστώντας στο αρχικό ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι
$P_x = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{u_1}^{u_2} \left(\dfrac{1-\cos u}{2}\right) \dfrac{du}{2} =$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$
$= \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt.$
- Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$. Αντίστοιχα αλλάζουν τα όρια.

$$u1 = u(-\pi) = 2(-\pi) = -2\pi, \; u2 = u(\pi) = 2\pi \tag{6}$$

- Αντικαθιστώντας στο αρχικό ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι
$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{1}{T}\int_{u_1}^{u_2}\left(\frac{1-\cos u}{2}\right)\frac{du}{2} =$
$\frac{1}{4T}\int_{-2\pi}^{2\pi}(1-\cos u)\, du = \frac{1}{4T}\left[\int_{-2\pi}^{2\pi} 1du + \int_{-2\pi}^{2\pi} -\cos u du\right] =$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$
$= \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt.$
- Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$. Αντίστοιχα αλλάζουν τα όρια.

$$u1 = u(-\pi) = 2(-\pi) = -2\pi,\ u2 = u(\pi) = 2\pi \tag{6}$$

- Αντικαθιστώντας στο αρχικό ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι
$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{1}{T}\int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{1-\cos u}{2}\right) \frac{du}{2} =$
$\frac{1}{4T}\int_{-2\pi}^{2\pi} (1-\cos u)\, du = \frac{1}{4T}\left[\int_{-2\pi}^{2\pi} 1 du + \int_{-2\pi}^{2\pi} -\cos u du\right] =$
$\frac{1}{4T}\left[[u]_{-2\pi}^{2\pi} - [\sin u]_{-2\pi}^{2\pi}\right] = \frac{1}{4T}\left[(2\pi - (-2\pi)) - (\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)))\right] =$

Παράδειγμα

- $x(t) = \sin(t)$. Ζητείται να υπολογιστεί η μέση ισχύς P_x.
- Το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο $T = 2\pi$, οπότε, $P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt =$
$= \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt.$
- Θέτω $u = 2t \Rightarrow du = d(2t) = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$. Αντίστοιχα αλλάζουν τα όρια.

$$u1 = u(-\pi) = 2(-\pi) = -2\pi,\ u2 = u(\pi) = 2\pi \tag{6}$$

- Αντικαθιστώντας στο αρχικό ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι
$P_x = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{1}{T}\int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{1-\cos u}{2}\right) \frac{du}{2} =$
$\frac{1}{4T}\int_{-2\pi}^{2\pi} (1-\cos u)\, du = \frac{1}{4T}\left[\int_{-2\pi}^{2\pi} 1 du + \int_{-2\pi}^{2\pi} -\cos u du\right] =$
$\frac{1}{4T}\left[[u]_{-2\pi}^{2\pi} - [\sin u]_{-2\pi}^{2\pi}\right] = \frac{1}{4T}[(2\pi - (-2\pi)) - (\sin(2\pi) - \sin(-2\pi)))] =$
$\frac{1}{4T}(4\pi - (0-0)) = \frac{1}{4\cdot 2\pi}\cdot 4\pi = \frac{1}{2} < \infty.$
- Άρα το σήμα είναι σήμα ισχύος.

Τριγωνομετρική αντικατάσταση

- Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι μερικές φορές βοηθάει η αντικατάσταση μιας υποέκφρασης μιας συνάρτησης από μια μεμονωμένη μεταβλητή.

Τριγωνομετρική αντικατάσταση

- Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι μερικές φορές βοηθάει η αντικατάσταση μιας υποέκφρασης μιας συνάρτησης από μια μεμονωμένη μεταβλητή.
- Περιστασιακά μπορεί να βοηθήσει η αντικατάσταση της αρχικής μεταβλητής με κάτι πιο περίπλοκο.

Τριγωνομετρική αντικατάσταση

- Μέχρι στιγμής έχουμε δει ότι μερικές φορές βοηθάει η αντικατάσταση μιας υποέκφρασης μιας συνάρτησης από μια μεμονωμένη μεταβλητή.
- Περιστασιακά μπορεί να βοηθήσει η αντικατάσταση της αρχικής μεταβλητής με κάτι πιο περίπλοκο.
- Αυτό φαίνεται σαν μια ¨αντίστροφη' αντικατάσταση, αλλά στην πραγματικότητα δεν διαφέρει κατ΄ αρχήν από τη συνηθισμένη αντικατάσταση.

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1 - x^2} dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
  $$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$
$$\int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$
$$\int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
- Άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με:

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$
$$\int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
- Άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με:

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
  $$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$
  $$\int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
- Άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με: $= \int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du = \int \cos u \cos u du =$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$
$$\int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
- Άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με: $= \int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du = \int \cos u \cos u du =$
$$= \int \cos^2 u du = \int \left(\frac{1+\cos(2u)}{2}\right) du =$$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du =$$
$$\int \sqrt{\cos^2 u} \cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
- Άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με: $= \int \sqrt{\cos^2 u} \cos u du = \int \cos u \cos u du =$
$$= \int \cos^2 u du = \int \left(\frac{1+\cos(2u)}{2} \right) du =$$
$$= \int \frac{1}{2} du + \int \frac{\cos(2u)}{2} du \overset{y=2u}{\underset{dy=2du}{=}}$$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$
$$\int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
- Άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με: $= \int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du = \int \cos u \cos u du =$
$$= \int \cos^2 u du = \int \left(\frac{1+\cos(2u)}{2}\right) du =$$
$$= \int \frac{1}{2}du + \int \frac{\cos(2u)}{2}du \overset{y=2u}{\underset{dy=2du}{=}}$$
$$= \frac{u}{2} + \int \frac{\cos y}{2}\frac{dy}{2} = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\int \cos y dy =$$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{1-x^2}dx$
- Θέτοντας $x = \sin u \Rightarrow dx = d(\sin u) = \cos u du$ και αντικαθιστώντας στην αρχική παράσταση, προκύπτει:
$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u du =$$
$$\int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du =$$
- Για $\cos u > 0$ ισχύει $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$.
- Άρα το ολοκλήρωμα είναι ίσο με: $= \int \sqrt{\cos^2 u}\cos u du = \int \cos u \cos u du =$
$$= \int \cos^2 u du = \int \left(\frac{1+\cos(2u)}{2}\right) du =$$
$$= \int \frac{1}{2}du + \int \frac{\cos(2u)}{2}du \underset{\text{dy=2du}}{\overset{\text{y=2u}}{=}}$$
$$= \frac{u}{2} + \int \frac{\cos y}{2}\frac{dy}{2} = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\int \cos y dy =$$
$$= \left[\frac{u}{2}\right] + \left[\frac{1}{4}\sin y\right] = \frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin(2u) + C \underset{\text{u=arcsin x}}{\overset{\text{x=sin u}}{=}} \frac{\arcsin x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C$$

Κατά μέρη ολοκλήρωση

- Γνωρίζομε από τις παραγώγους ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Κατά μέρη ολοκλήρωση

- Γνωρίζομε από τις παραγώγους ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Αυτό μπορεί να γραφεί και ως $f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))$

Κατά μέρη ολοκλήρωση

- Γνωρίζομε από τις παραγώγους ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Αυτό μπορεί να γραφεί και ως $f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))$
- Λύνοντας ως προς τον 1ο όρο του δεξιού μέρους της παραπάνω ισότητας, προκύπτει ότι:

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \tag{7}$$

Κατά μέρη ολοκλήρωση

- Γνωρίζομε από τις παραγώγους ότι $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Αυτό μπορεί να γραφεί και ως $f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))$
- Λύνοντας ως προς τον 1ο όρο του δεξιού μέρους της παραπάνω ισότητας, προκύπτει ότι:

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \tag{7}$$

- Αν μια προς ολοκλήρωση συνάρτηση $h(x)$ ισούται με $f'(x)g(x)$, τότε ισχύει το ολοκλήρωμά της μπορεί να γραφεί στην παραπάνω μορφή όπου το ολοκλήρωμα $\int f(x)g'(x)$, μπορεί να είναι ευκολότερο

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$.

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$.
- $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx =$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int xe^x dx$.
- $\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx =$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int xe^x dx$.
- $\displaystyle\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)' e^x dx =$
  $\displaystyle xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$

Ρητές συναρτήσεις

- Ρητές συναρτησεις είναι οι συναρτήσεις της ακόλουθης μορφής:

$$\frac{f(x)}{g(x)},\ \forall x : g(x) \neq 0 \tag{8}$$

όπου οι συναρτήσεις $f(x),\ g(x)$ είναι πολυωνυμικές.

Ρητές συναρτήσεις

- Ρητές συναρτησεις είναι οι συναρτήσεις της ακόλουθης μορφής:

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x : g(x) \neq 0 \tag{8}$$

  όπου οι συναρτήσεις $f(x), \ g(x)$ είναι πολυωνυμικές.
- Σε αυτήν την περίπτωση μετατρέπουμε το ¨σύνθετο' κλάσμα σε άθροισμα ¨μερικών κλασμάτων' που είναι ολοκληρώσιμα.

Ρητές συναρτήσεις

- Ρητές συναρτησεις είναι οι συναρτήσεις της ακόλουθης μορφής:

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x : g(x) \neq 0 \tag{8}$$

όπου οι συναρτήσεις $f(x), \ g(x)$ είναι πολυωνυμικές.

- Σε αυτήν την περίπτωση μετατρέπουμε το ¨σύνθετο' κλάσμα σε άθροισμα ¨μερικών κλασμάτων' που είναι ολοκληρώσιμα.
- Η απλούστερη περίπτωση είναι ο παρωνομαστής να έχει την μορφή $(ax + b)^n$

Ρητές συναρτήσεις

- Ρητές συναρτησεις είναι οι συναρτήσεις της ακόλουθης μορφής:

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x : g(x) \neq 0 \tag{8}$$

  όπου οι συναρτήσεις $f(x), \ g(x)$ είναι πολυωνυμικές.

- Σε αυτήν την περίπτωση μετατρέπουμε το ¨σύνθετο’ κλάσμα σε άθροισμα ¨μερικών κλασμάτων’ που είναι ολοκληρώσιμα.
- Η απλούστερη περίπτωση είναι ο παρωνομαστής να έχει την μορφή $(ax + b)^n$
- Τότε, η αντικατάσταση $u = ax + b$ θα λειτουργεί πάντα.

Ρητές συναρτήσεις

- Ρητές συναρτησεις είναι οι συναρτήσεις της ακόλουθης μορφής:

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x : g(x) \neq 0 \tag{8}$$

όπου οι συναρτήσεις $f(x), \ g(x)$ είναι πολυωνυμικές.

- Σε αυτήν την περίπτωση μετατρέπουμε το ¨σύνθετο' κλάσμα σε άθροισμα ¨μερικών κλασμάτων' που είναι ολοκληρώσιμα.
- Η απλούστερη περίπτωση είναι ο παρωνομαστής να έχει την μορφή $(ax+b)^n$
- Τότε, η αντικατάσταση $u = ax + b$ θα λειτουργεί πάντα.
- Ο παρονομαστής γίνεται u^n , και κάθε x στον αριθμητή αντικαθίσταται από $\dfrac{u-b}{a}$ και $dx = \dfrac{du}{a}$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$
- Πρέπει να μετατραπεί το αρχικό κλάσμα σε ένα άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{9}$$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$
- Πρέπει να μετατραπεί το αρχικό κλάσμα σε ένα άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{9}$$

- $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$
- Πρέπει να μετατραπεί το αρχικό κλάσμα σε ένα άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{9}$$

- $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$
- Πρέπει να μετατραπεί το αρχικό κλάσμα σε ένα άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{9}$$

- $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
  $\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$
- Πρέπει να μετατραπεί το αρχικό κλάσμα σε ένα άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{9}$$

- $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
$\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
$\frac{Ax+A}{(x-1)(x+1)} + \frac{Bx-B)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$
- Πρέπει να μετατραπεί το αρχικό κλάσμα σε ένα άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{9}$$

- $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
$\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
$\frac{Ax+A}{(x-1)(x+1)} + \frac{Bx-B)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
$\frac{(A+B)x+(A-B)))}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow (A+B)x+(A-B) = 3x$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \frac{3x}{x^2-1}dx$
- $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{3x}{(x+1)(x-1)}dx$
- Πρέπει να μετατραπεί το αρχικό κλάσμα σε ένα άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} \tag{9}$$

- $\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
  $\frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
  $\frac{Ax+A}{(x-1)(x+1)} + \frac{Bx-B)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow$
  $\frac{(A+B)x+(A-B)))}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow (A+B)x+(A-B) = 3x$
  $A+B = 3\kappa\alpha\iota\ A-B=0$
- Λύνοντας το σύστημα, προσθέτοντας κατα μέλη τις 2 εξισώσεις, προκύπτει ότι $A=B=1.5$, οπότε $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{1.5}{x-1}dx + \int \frac{1.5}{x+1}dx$

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Λύνοντας το σύστημα, προσθέτοντας κατα μέλη τις 2 εξισώσεις, προκύπτει ότι $A = B = 1.5$, οπότε $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{1.5}{x-1}dx + \int \frac{1.5}{x+1}dx$.

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Λύνοντας το σύστημα, προσθέτοντας κατα μέλη τις 2 εξισώσεις, προκύπτει ότι $A = B = 1.5$, οπότε $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{1.5}{x-1}dx + \int \frac{1.5}{x+1}dx$.
- Θέτοντας $u = x-1,\ w = x+1 \Rightarrow du = d(x-1) = dx,\ dw = d(x+1) = dx$, αντικαθίστανται οι ποσότητες $x-1, x+1, dx$ στο εκάστοτε ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι:

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Λύνοντας το σύστημα, προσθέτοντας κατα μέλη τις 2 εξισώσεις, προκύπτει ότι $A = B = 1.5$, οπότε $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{1.5}{x-1}dx + \int \frac{1.5}{x+1}dx$.
- Θέτοντας $u = x - 1,\ w = x + 1 \Rightarrow du = d(x-1) = dx,\ dw = d(x+1) = dx$, αντικαθίστανται οι ποσότητες $x - 1, x + 1, dx$ στο εκάστοτε ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι:

Παράδειγμα (Συνέχεια)

- Λύνοντας το σύστημα, προσθέτοντας κατα μέλη τις 2 εξισώσεις, προκύπτει ότι $A = B = 1.5$, οπότε $\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{1.5}{x-1}dx + \int \frac{1.5}{x+1}dx.$
- Θέτοντας $u = x-1,\ w = x+1 \Rightarrow du = d(x-1) = dx,\ dw = d(x+1) = dx$, αντικαθίστανται οι ποσότητες $x-1, x+1, dx$ στο εκάστοτε ολοκλήρωμα, προκύπτει ότι:
$$\int \frac{3x}{x^2-1}dx = \int \frac{1.5}{u}du + \int \frac{1.5}{w}dw = \int 1.5\frac{1}{u}du + 1.5\int \frac{1}{w}dw =$$
$$1.5\ln|u| + 1.5\ln|w| + C = 1.5\ln|x-1| + 1.5\ln|x+1| + C = 1.5\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης
  - Μέθοδος του Simpson.

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης
  - Μέθοδος του Simpson.
  - Μέθοδος Τραπεζίου.

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης
  - Μέθοδος του Simpson.
  - Μέθοδος Τραπεζίου.
- Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για την πραγματοποίηση αριθμητικής ολοκλήρωσης, σε αντίθεση με την αναλυτική ολοκλήρωση με την εύρεση του αντιπαράγωγου:

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης
  - Μέθοδος του Simpson.
  - Μέθοδος Τραπεζίου.
- Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για την πραγματοποίηση αριθμητικής ολοκλήρωσης, σε αντίθεση με την αναλυτική ολοκλήρωση με την εύρεση του αντιπαράγωγου:
  - Το ολοκλήρωμα $f(x)$ μπορεί να είναι γνωστό μόνο σε ορισμένα σημεία, πχ με δειγματοληψία. Ορισμένα ενσωματωμένα συστήματα και άλλες εφαρμογές υπολογιστή ενδέχεται να χρειάζονται αριθμητική ολοκλήρωση για αυτόν τον λόγο.

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης
  - Μέθοδος του Simpson.
  - Μέθοδος Τραπεζίου.
- Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για την πραγματοποίηση αριθμητικής ολοκλήρωσης, σε αντίθεση με την αναλυτική ολοκλήρωση με την εύρεση του αντιπαράγωγου:
  - Το ολοκλήρωμα $f(x)$ μπορεί να είναι γνωστό μόνο σε ορισμένα σημεία, πχ με δειγματοληψία. Ορισμένα ενσωματωμένα συστήματα και άλλες εφαρμογές υπολογιστή ενδέχεται να χρειάζονται αριθμητική ολοκλήρωση για αυτόν τον λόγο.
  - Ένας τύπος για το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι γνωστός, αλλά μπορεί να είναι δύσκολη ή αδύνατη η εύρεση μιας παράγουσας η οποία είναι στοιχειώδης συνάρτηση. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης
  - Μέθοδος του Simpson.
  - Μέθοδος Τραπεζίου.
- Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για την πραγματοποίηση αριθμητικής ολοκλήρωσης, σε αντίθεση με την αναλυτική ολοκλήρωση με την εύρεση του αντιπαράγωγου:
  - Το ολοκλήρωμα $f(x)$ μπορεί να είναι γνωστό μόνο σε ορισμένα σημεία, πχ με δειγματοληψία. Ορισμένα ενσωματωμένα συστήματα και άλλες εφαρμογές υπολογιστή ενδέχεται να χρειάζονται αριθμητική ολοκλήρωση για αυτόν τον λόγο.
  - Ένας τύπος για το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι γνωστός, αλλά μπορεί να είναι δύσκολη ή αδύνατη η εύρεση μιας παράγουσας η οποία είναι στοιχειώδης συνάρτηση. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.
  - Μπορεί να είναι δυνατό να βρεθεί μία παράγουσα συμβολικά, αλλά μπορεί να είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε μια αριθμητική προσέγγιση παρά να υπολογίσουμε την παράγουσα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει εάν η παράγουσα δίνεται ως άπειρη σειρά ή γινόμενο ή εάν η αξιολόγησή του απαιτεί μια ειδική συνάρτηση που δεν διατίθεται.

Αριθμητική ολοκλήρωση

- Πρόκειται για μία σειρά αριθμητκών υπολογιστικών μεθόδων οι οποίες υπολογίζουν προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης
  - Μέθοδος του Simpson.
  - Μέθοδος Τραπεζίου.
- Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για την πραγματοποίηση αριθμητικής ολοκλήρωσης, σε αντίθεση με την αναλυτική ολοκλήρωση με την εύρεση του αντιπαράγωγου:
  - Το ολοκλήρωμα $f(x)$ μπορεί να είναι γνωστό μόνο σε ορισμένα σημεία, πχ με δειγματοληψία. Ορισμένα ενσωματωμένα συστήματα και άλλες εφαρμογές υπολογιστή ενδέχεται να χρειάζονται αριθμητική ολοκλήρωση για αυτόν τον λόγο.
  - Ένας τύπος για το ολοκλήρωμα μπορεί να είναι γνωστός, αλλά μπορεί να είναι δύσκολη ή αδύνατη η εύρεση μιας παράγουσας η οποία είναι στοιχειώδης συνάρτηση. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$.
  - Μπορεί να είναι δυνατό να βρεθεί μία παράγουσα συμβολικά, αλλά μπορεί να είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε μια αριθμητική προσέγγιση παρά να υπολογίσουμε την παράγουσα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει εάν η παράγουσα δίνεται ως άπειρη σειρά ή γινόμενο ή εάν η αξιολόγησή του απαιτεί μια ειδική συνάρτηση που δεν διατίθεται.
- Περισσότερα στην Αριθμητική Ανάλυση

Περισσότερα Παραδείγματα

- https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/chapter07.html

Περισσότερα Παραδείγματα

- https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/chapter07.html
- http://www.buders.com/UNIVERSITE/Universite_Dersleri/Math101/Arsiv/integral_sorulari_ve_cozumleri.pdf

Περισσότερα Παραδείγματα

- https://www.whitman.edu/mathematics/calculus_online/chapter07.html
- http://www.buders.com/UNIVERSITE/Universite_Dersleri/Math101/Arsiv/integral_sorulari_ve_cozumleri.pdf
-