Στοιχειώδη σήματα και εφαρμογές

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

1. Ασκήσεις

Άσκηση 1η

- Να βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιττά, άρτια ή τίποτε εκ αυτών.

Άσκηση 1η

- Να βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιττά, άρτια ή τίποτε εκ αυτών.
  1. $x(t) = t^3$

Άσκηση 1η

- Να βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιττά, άρτια ή τίποτε εκ αυτών.
  1. $x(t) = t^3$
  2. $x(t) = 1 + \sin(2\pi t)$

Άσκηση 1η

- Να βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι περιττά, άρτια ή τίποτε εκ αυτών.
    1. $x(t) = t^3$
    2. $x(t) = 1 + \sin(2\pi t)$
    3. $x(t) = \frac{1}{8}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right)$

Λύση

1. $x(t) = t^3 \Rightarrow x(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -x(t)$. Άρα είναι περιττό σήμα.

Λύση

1. $x(t) = t^3 \Rightarrow x(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -x(t)$. Άρα είναι περιττό σήμα.
2. $x(t) = 1 + \sin(2\pi t) \Rightarrow x(-t) = 1 + \sin(2\pi(-t)) = 1 + \sin(-2\pi t) = 1 - \sin(2\pi t)$. Αυτή η ποσότητα είναι διάφορη των $x(t)$, $-x(t)$, οπότε δεν είναι τίποτε εκ των 2.

Λύση

1. $x(t) = t^3 \Rightarrow x(-t) = (-t)^3 = -t^3 = -x(t)$. Άρα είναι περιττό σήμα.
2. $x(t) = 1 + \sin(2\pi t) \Rightarrow x(-t) = 1 + \sin(2\pi(-t)) = 1 + \sin(-2\pi t) = 1 - \sin(2\pi t)$. Αυτή η ποσότητα είναι διάφορη των $x(t)$, $-x(t)$, οπότε δεν είναι τίποτε εκ των 2.
3. $x(t) = \frac{1}{8}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) \Rightarrow x(-t) = \frac{1}{8}\left(e^{j(-t)} + e^{-j(-t)}\right) = \frac{1}{8}\left(e^{-jt} + e^{jt}\right) = x(t)$. Άρα είναι άρτιο σήμα.

Άσκηση 2η

- Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

Άσκηση 2η

- Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:
  1. $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3}$

Άσκηση 2η

- Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:
  1. $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)\sin(\pi t)dt$

Άσκηση 2η

- Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:
  1. $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3}$
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)\sin(\pi t)dt$
  3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3)(t^2+3)dt$

Άσκηση 2η

- Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:
  1. $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3}$
  2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)\sin(\pi t)dt$
  3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3)(t^2+3)dt$
  4. $\dfrac{\sin(\alpha t)\delta(t)}{t}$

Άσκηση 2η

- Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις:
  1. $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3}$
  2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)\sin(\pi t)dt$
  3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3)(t^2+3)dt$
  4. $\dfrac{\sin(\alpha t)\delta(t)}{t}$
- Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι σήμα ενέργειας, ισχύος ή τίποτα εκ των 2; Η συνάρτηση $u(t)-u(10-t)$;

Λύση 1ου ερωτήματος

- $$\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} \xRightarrow[\delta(t+1)=0 \forall t: t+1\neq 0]{t=-1} = \frac{(1+t^4)}{t^4+3} = \frac{(1+(-1)^4)}{(-1)^4+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $$\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} \xRightarrow[\delta(t+1)=0\forall t:t+1\neq 0]{t=-1} = \frac{(1+t^4)}{t^4+3} = \frac{(1+(-1)^4)}{(-1)^4+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} \xRightarrow[\delta(t+1)=0 \forall t: t+1\neq 0]{t=-1} = \dfrac{(1+t^4)}{t^4+3} = \dfrac{(1+(-1)^4)}{(-1)^4+3} = \dfrac{1+1}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

  Άρα, $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} = \dfrac{1}{2}\delta(t+1)$
- Γνωστό από θεωρία ότι:

Λύση 1ου ερωτήματος

- $$\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} \xRightarrow[\delta(t+1)=0 \forall t: t+1\neq 0]{t=-1} = \frac{(1+t^4)}{t^4+3} = \frac{(1+(-1)^4)}{(-1)^4+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

  Άρα, $\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} = \frac{1}{2}\delta(t+1)$
- Γνωστό από θεωρία ότι:

Λύση 1ου ερωτήματος

- $$\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} \xRightarrow[\delta(t+1)=0 \forall t: t+1\neq 0]{t=-1} = \frac{(1+t^4)}{t^4+3} = \frac{(1+(-1)^4)}{(-1)^4+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

  Άρα, $\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} = \frac{1}{2}\delta(t+1)$
- Γνωστό από θεωρία ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \qquad (1)$$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $$\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} \xrightarrow[\delta(t+1)=0\forall t:t+1\neq 0]{t=-1} = \frac{(1+t^4)}{t^4+3} = \frac{(1+(-1)^4)}{(-1)^4+3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

  Άρα, $\frac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} = \frac{1}{2}\delta(t+1)$
- Γνωστό από θεωρία ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \qquad (1)$$

  Άρα $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)\sin(\pi t)dt = \sin(\pi 3) = \sin(2\pi+\pi) = \sin(\pi) = 0$
- Ομοίως
  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3)(t^2+3)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-(-3))(t^2+3)dt = ((-3)^2+3) = 9+3 = 12$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} \xRightarrow[\delta(t+1)=0 \forall t: t+1\neq 0]{t=-1} = \dfrac{(1+t^4)}{t^4+3} = \dfrac{(1+(-1)^4)}{(-1)^4+3} = \dfrac{1+1}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

  Άρα, $\dfrac{(1+t^4)\delta(t+1)}{t^4+3} = \dfrac{1}{2}\delta(t+1)$
- Γνωστό από θεωρία ότι:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \tag{1}$$

  Άρα $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)\sin(\pi t)dt = \sin(\pi 3) = \sin(2\pi+\pi) = \sin(\pi) = 0$
- Ομοίως

  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+3)(t^2+3)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-(-3))(t^2+3)dt = ((-3)^2+3) = 9+3 = 12$
- $\dfrac{\sin(\alpha t)\delta(t)}{t} \xRightarrow{\delta(t)=0, \forall t\neq 0} \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \alpha t}{t} = \alpha \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin \alpha t}{\alpha t} = \alpha \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = \alpha \cdot 1 = \alpha \Rightarrow$

  $\dfrac{\sin(\alpha t)\delta(t)}{t} = \alpha\delta(t)$

Λύση 2ου ερωτήματος: Α' μέρος

- Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι σήμα ενέργειας, ισχύος ή τίποτα εκ των 2· Η συνάρτηση $u(t) - u(10 - t)$·

Λύση 2ου ερωτήματος: Α′ μέρος

- Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι σήμα ενέργειας, ισχύος ή τίποτα εκ των 2· Η συνάρτηση $u(t) - u(10 - t)$·

  1. $P_u = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} 0 dt + \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1 dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος: Α' μέρος

- Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι σήμα ενέργειας, ισχύος ή τίποτα εκ των 2· Η συνάρτηση $u(t) - u(10 - t)$·

  1. $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} 0dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος: Α΄ μέρος

- Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι σήμα ενέργειας, ισχύος ή τίποτα εκ των 2· Η συνάρτηση $u(t) - u(10 - t)$·

  1. $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} 0dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [T - 0] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$. Άρα είναι σήμα ισχύος.

Λύση 2ου ερωτήματος: Α΄ μέρος

- Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι σήμα ενέργειας, ισχύος ή τίποτα εκ των 2· Η συνάρτηση $u(t) - u(10 - t)$·

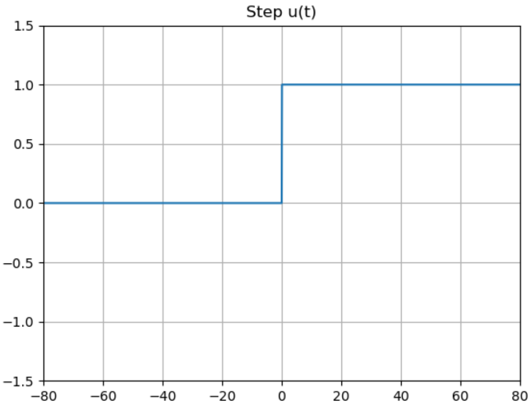
  1. $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} 0dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1dt =$ $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [T - 0] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$. Άρα είναι σήμα ισχύος. Όμως $E_u = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{0} 0dt + \lim_{T\to\infty} \int_0^T 1dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος: Α′ μέρος

- Η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι σήμα ενέργειας, ισχύος ή τίποτα εκ των 2· Η συνάρτηση $u(t) - u(10 - t)$·

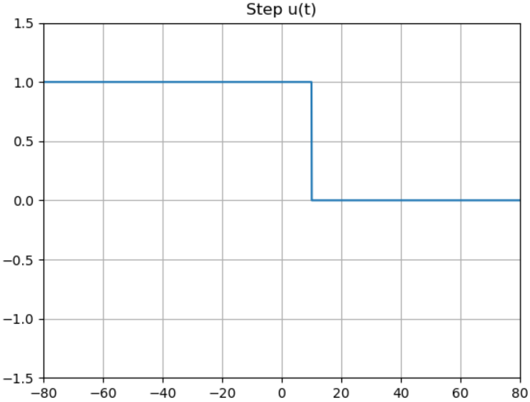
  1. $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} 0 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 1 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_0^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [T - 0] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{1}{2}$. Άρα είναι σήμα ισχύος. Όμως $E_u = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |u(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{0} 0 dt + \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} 1 dt = \lim_{T\to\infty} [t]_0^T = \lim_{T\to\infty} [T - 0] = \lim_{T\to\infty} T = \infty$. Άρα είναι δεν σήμα ενέργειας.

Λύση 2ου ερωτήματος: Β' μέρος



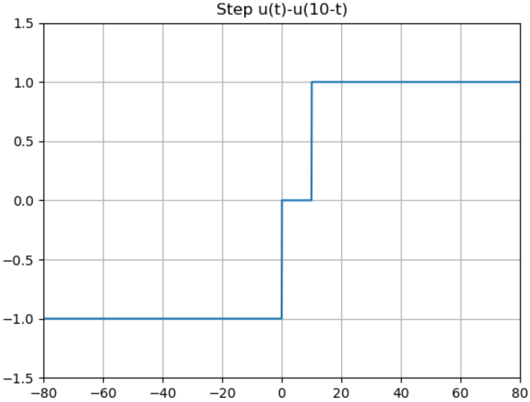
Σχήμα: Βηματική συνάρτηση $u(t)$

Λύση 2ου ερωτήματος: Β′ μέρος



Σχήμα: Βηματική συνάρτηση $u(10 - t)$

Λύση 2ου ερωτήματος: Β′ μέρος



Σχήμα: Βηματική συνάρτηση $u(10 - t)$

Λύση 2ου ερωτήματος: Β΄ μέρος

- Άρα $f(t) = u(t) - u(10 - t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

Λύση 2ου ερωτήματος: Β′ μέρος

- Άρα $f(t) = u(t) - u(10-t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$
- $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt =$
$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} (-1)^2 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{10} 0 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{10}^{T} 1^2 dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος: Β′ μέρος

- Άρα $f(t) = u(t) - u(10 - t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$
- $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt =$
$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} (-1)^2 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{10} 0 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{10}^{T} 1^2 dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος: Β′ μέρος

- Άρα $f(t) = u(t) - u(10-t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$

- $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt =$
$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} (-1)^2 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{10} 0 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{10}^{T} 1^2 dt =$
$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_{-T}^{0} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_{10}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [0 - (-T) + T - 10] =$
$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot (2T - 10) = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1$. Άρα είναι σήμα ισχύος.

Λύση 2ου ερωτήματος: Β′ μέρος

- Άρα $f(t) = u(t) - u(10 - t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & 0 \le t < 1 \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$

- $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt =$
  $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} (-1)^2 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{10} 0dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{10}^{T} 1^2 dt =$
  $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_{-T}^{0} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_{10}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [0 - (-T) + T - 10] =$
  $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot (2T - 10) = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1.$ Άρα είναι σήμα ισχύος.
  Όμως $E_u = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt =$
  $\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{0} (-1)^2 dt + \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{10} 0dt + \lim_{T\to\infty} \int_{10}^{T} 1^2 dt =$

Λύση 2ου ερωτήματος: Β' μέρος

- Άρα $f(t) = u(t) - u(10-t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$
- $P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt =$
  $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{0} (-1)^2 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{10} 0 dt + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{10}^{T} 1^2 dt =$
  $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_{-T}^{0} + \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [t]_{10}^{T} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [0 - (-T) + T - 10] =$
  $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot (2T - 10) = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1$. Άρα είναι σήμα ισχύος.
  Όμως $E_u = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt =$
  $\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{0} (-1)^2 dt + \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{10} 0 dt + \lim_{T\to\infty} \int_{10}^{T} 1^2 dt =$
  $\lim_{T\to\infty} [t]_{-T}^{0} + \lim_{T\to\infty} [t]_{10}^{T} = \lim_{T\to\infty} [0 - (-T) + T - 10] = \lim_{T\to\infty} (2T - 10) = \infty$. Άρα είναι δεν σήμα ενέργειας.

Άσκηση 3η

- Σχεδιάστε το σήμα $x(t) = 2\cos(\pi t)\Pi(t-1)$

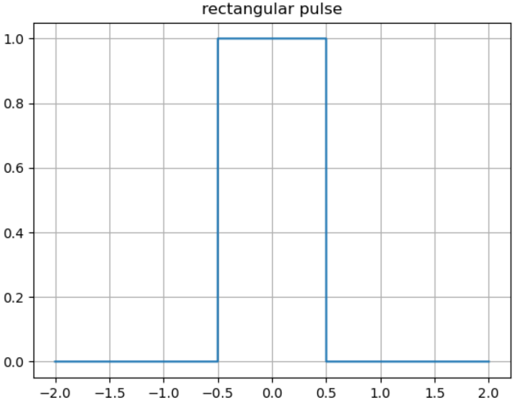
Άσκηση 3η

- Σχεδιάστε το σήμα $x(t) = 2\cos(\pi t)\Pi(t-1)$
- Υπολογίστε και σχεδιάστε τη γενικευμένη παράγωγο του σήματος $x(t)$

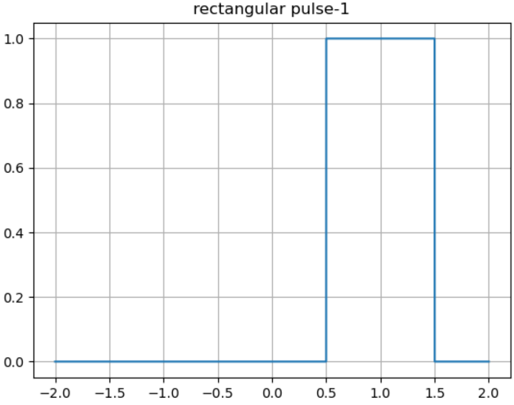
Άσκηση 3η

- Σχεδιάστε το σήμα $x(t) = 2\cos(\pi t)\Pi(t-1)$
- Υπολογίστε και σχεδιάστε τη γενικευμένη παράγωγο του σήματος $x(t)$
- ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αξιοποιήστε τη γραφή του τετραγωνικού παλμού με χρήση δυο βηματικών συναρτήσεων.

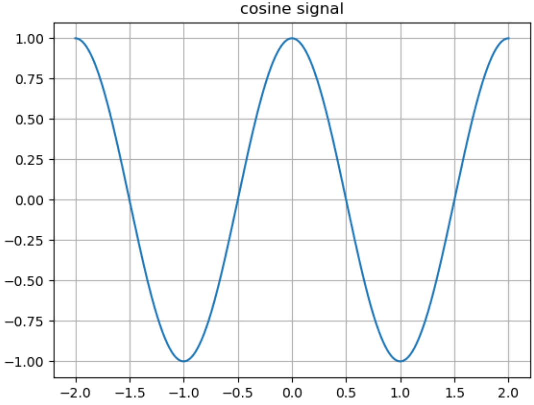
Λύση 1ου μέρους: Ορθογώνιος Παλμός $\Pi(t)$



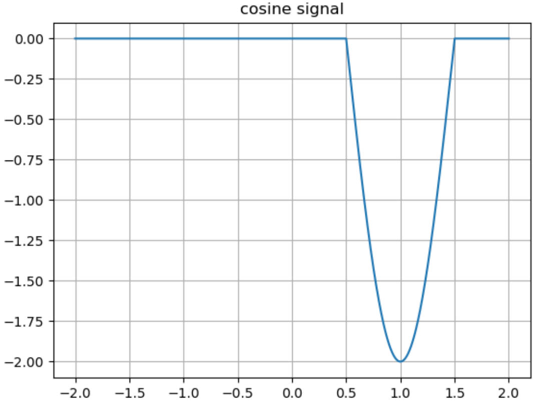
Λύση 1ου μέρους: Ολισθμένος προς τα δεξιά $\Pi(t-1)$



Λύση 1ου μέρους: Συνημιτονοειδές σήμα $\cos(\pi t)$



Λύση 1ου μέρους: Σύνθετο σήμα $2\cos(\pi t)\Pi(t-1)$



Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t-1+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t - 1 + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - 1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t-1+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
$\Pi(t-1) = u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow (\Pi(t-1))' =$
$\left(u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow (\Pi(t-1))' = \left(u\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)' - \left(u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t-1+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
$\Pi(t-1) = u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow (\Pi(t-1))' =$
$\left(u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow (\Pi(t-1))' = \left(u\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)' - \left(u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow$
$(\Pi(t-1))' = u'\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)' - u'\left(t-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{3}{2}\right)' \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t-1+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
  $\Pi(t-1) = u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow (\Pi(t-1))' =$
  $\left(u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow (\Pi(t-1))' = \left(u\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)' - \left(u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow$
  $(\Pi(t-1))' = u'\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)' - u'\left(t-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{3}{2}\right)' \Rightarrow$
  $(\Pi(t-1))' = \delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\cdot 1 = \delta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$
- $(\cos(\pi t)) = \cos'(\pi t)(\pi t)' = -\sin(\pi t)\pi = -\pi\sin(\pi t)$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t - 1 + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - 1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t - 1 + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - 1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t-1+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
$\Pi(t-1) = u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow (\Pi(t-1))' =$
$\left(u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow (\Pi(t-1))' = \left(u\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)' - \left(u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t-1+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
  $\Pi(t-1) = u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow (\Pi(t-1))' =$
  $\left(u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow (\Pi(t-1))' = \left(u\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)' - \left(u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow$
  $(\Pi(t-1))' = u'\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)' - u'\left(t-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{3}{2}\right)' \Rightarrow$

Λύση 2ου μέρους

- $\Pi(t) = u\left(t+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Pi(t-1) = u\left(t-1+\frac{1}{2}\right) - u\left(t-1-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
$\Pi(t-1) = u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow (\Pi(t-1))' =$
$\left(u\left(t-\frac{1}{2}\right) - u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow (\Pi(t-1))' = \left(u\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)' - \left(u\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)' \Rightarrow$
$(\Pi(t-1))' = u'\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)' - u'\left(t-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(t-\frac{3}{2}\right)' \Rightarrow$
$(\Pi(t-1))' = \delta\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right)\cdot 1 = \delta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$
- $(\cos(\pi t)) = \cos'(\pi t)(\pi t)' = -\sin(\pi t)\pi = -\pi\sin(\pi t)$

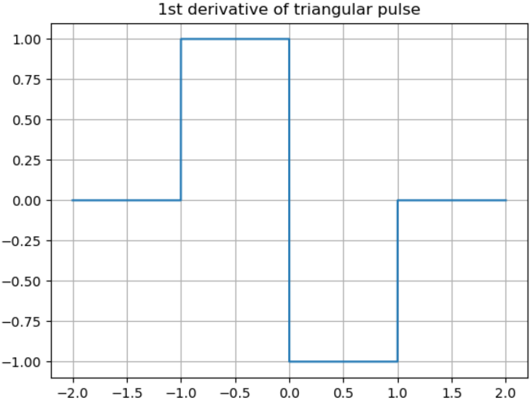
Άσκηση 4η

- Αναπαραστήστε την 1η και 2η παράγωγο του τριγωνικού παλμού
$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1, \ -1 \leq t < 0 \\ -t+1, \ 0 \leq t < 1 \\ 0, \ t < -1 \kappa\alpha\iota \ t > 1 \end{cases} .$$

Λύση

- $\Lambda(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t < 0 \\ -t+1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t < -1 \kappa\alpha\iota\ t > 1 \end{cases} \Rightarrow \Lambda'(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 0 \\ -1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t < -1 \kappa\alpha\iota\ t > 1 \end{cases}$.

Λύση



Σχήμα: Ουσιαστικά πρόκειται για το άθροισμα 2 τετραγωνικών παλμών:$\Pi(t+0.5),\ -\Pi(t-0.5)$

Λύση

- $\Pi(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u((t+0.5)+0.5) - u((t+0.5) - 0.5)$ *και* $-\Pi(t-0.5) = u((t-0.5)+0.5) - u((t-0.5)-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u(t+1) - u(t)$ *και* $-\Pi(t-0.5) = u(t) - u(t-1)$

Λύση

- $\Pi(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u((t+0.5)+0.5) - u((t+0.5)-0.5)$ *και* $-\Pi(t-0.5) = u((t-0.5)+0.5) - u((t-0.5)-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u(t+1) - u(t)$ *και* $-\Pi(t-0.5) = u(t) - u(t-1)$
- Άρα η παράγωγος του τριγωνικού παλμού θα είναι ίση με $\Lambda'(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) = u(t+1) - u(t) - (u(t) - u(t-1)) = u(t+1) - u(t) - u(t) + u(t-1) = u(t) - 2u(t) + u(t-1)$.

Λύση

- $\Pi(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u((t+0.5)+0.5) - u((t+0.5) - 0.5)$ και $-\Pi(t-0.5) = u((t-0.5)+0.5) - u((t-0.5)-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u(t+1) - u(t)$ και $-\Pi(t-0.5) = u(t) - u(t-1)$
- Άρα η παράγωγος του τριγωνικού παλμού θα είναι ίση με $\Lambda'(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) = u(t+1) - u(t) - (u(t) - u(t-1)) = u(t+1) - u(t) - u(t) + u(t-1) = u(t) - 2u(t) + u(t-1)$.
- Η 2η παράγωγος του τριγωνικού παλμού είναι $\Lambda''(t) = (u(t+1) - 2u(t) + u(t-1))' = (u(t+1))' - 2\,(u(t))' + (u(t-1))' =$

Λύση

- $\Pi(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u((t+0.5)+0.5) - u((t+0.5) - 0.5)$ $\kappa\alpha\iota$ $- \Pi(t-0.5) = u((t-0.5)+0.5) - u((t-0.5)-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u(t+1) - u(t)$ $\kappa\alpha\iota$ $- \Pi(t-0.5) = u(t) - u(t-1)$
- Άρα η παράγωγος του τριγωνικού παλμού θα είναι ίση με $\Lambda'(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) = u(t+1) - u(t) - (u(t) - u(t-1)) = u(t+1) - u(t) - u(t) + u(t-1) = u(t) - 2u(t) + u(t-1)$.
- Η 2η παράγωγος του τριγωνικού παλμού είναι $\Lambda''(t) = (u(t+1) - 2u(t) + u(t-1))' = (u(t+1))' - 2\,(u(t))' + (u(t-1))' =$

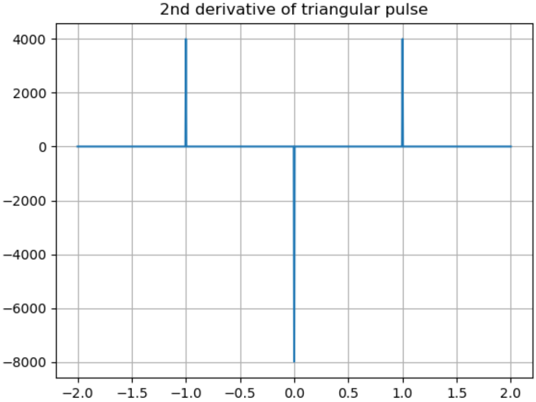
Λύση

- $\Pi(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u((t+0.5)+0.5) - u((t+0.5) - 0.5)$ $\kappa\alpha\iota$ $-\Pi(t-0.5) = u((t-0.5)+0.5) - u((t-0.5)-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u(t+1) - u(t)$ $\kappa\alpha\iota$ $-\Pi(t-0.5) = u(t) - u(t-1)$
- Άρα η παράγωγος του τριγωνικού παλμού θα είναι ίση με $\Lambda'(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) = u(t+1) - u(t) - (u(t) - u(t-1)) = u(t+1) - u(t) - u(t) + u(t-1) = u(t) - 2u(t) + u(t-1)$.
- Η 2η παράγωγος του τριγωνικού παλμού είναι $\Lambda''(t) = (u(t+1) - 2u(t) + u(t-1))' = (u(t+1))' - 2\,(u(t))' + (u(t-1))' = u'(t+1)\,(t+1)' - 2u'(t)' + u'(t-1)(t-1)' = u'(t+1) - 2u'(t) + u'(t-1)$

Λύση

- $\Pi(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u((t+0.5)+0.5) - u((t+0.5) - 0.5)$ και $-\Pi(t-0.5) = u((t-0.5)+0.5) - u((t-0.5)-0.5) \Rightarrow \Pi(t+0.5) = u(t+1) - u(t)$ και $-\Pi(t-0.5) = u(t) - u(t-1)$
- Άρα η παράγωγος του τριγωνικού παλμού θα είναι ίση με $\Lambda'(t) = \Pi(t+0.5) - \Pi(t-0.5) = u(t+1) - u(t) - (u(t) - u(t-1)) = u(t+1) - u(t) - u(t) + u(t-1) = u(t) - 2u(t) + u(t-1)$.
- Η 2η παράγωγος του τριγωνικού παλμού είναι $\Lambda''(t) = (u(t+1) - 2u(t) + u(t-1))' = (u(t+1))' - 2\,(u(t))' + (u(t-1))' = u'(t+1)\,(t+1)' - 2u'(t)' + u'(t-1)(t-1)' = u'(t+1) - 2u'(t) + u'(t-1)$ $= \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$

Λύση



Σχήμα: Προσέγγιση της 2ης παραγώγου