

# 4.004 Σήματα και Συστήματα

Εβδομάδα 7 - Μετασχηματισμός Fourier

CTFT  $\rightarrow$  φάση  $\rightarrow$  BW  $\rightarrow$  RC  $\rightarrow$  W08

Ιωάννης Στεφανής

---

# Ποια ερωτήματα θα απαντήσουμε στο W07;

## Ενότητα 1-2: φάσORES & παλμοί

1. Πότε χρησιμοποιώ FT αντί για FS;
2. Τι είναι παλμός;
3. Τι είδη παλμών συναντώ;
4. Τι είναι φάσoras  $e^{(j\omega t)}$ ;
5. Τι είναι το  $X(\omega)$ ;
6. Γιατί συνάρτηση και όχι λίστα;
7. Πότε  $X(\omega)$  είναι μιγαδικό;

## Ενότητα 3-5: ανάλυση $X(\omega)$

8. Γιατί υπάρχουν αρνητικές συχνότητες;
9. Πότε το φάσμα είναι συμμετρικό;
10. Τι σημαίνει  $|X|$ ,  $\angle X$ ,  $|X|^2$ ;
11. Τι είναι band;
12. Τι είναι bandwidth;
13. Πώς αλλάζει το φάσμα με σχήμα παλμού;
14. Τι κάνει η μετατόπιση στη φάση;

## Ενότητα 6-7: ιδιότητες & RC

15. Ποιες ιδιότητες FT είναι γενικές;
16. Τι είναι  $u(t)$  και ενεργά όρια;
17. CTFT αιτιατής εκθετικής;
18. Τι είναι  $H(\omega)$ ;
19. Γιατί  $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$ ;
20. Πώς μπαίνει το RC ως φίλτρο;
21. Πώς γέφυρα CTFT προς FFT;

### ΣΤΟΧΟΣ

Σημειώστε ποια ερωτήματα δεν ξέρετε ακόμη

### ΧΑΡΤΗΣ

Κάθε ερώτημα ένα slide / ενότητα παρακάτω

### ΕΛΕΓΧΟΣ

Επιστρέφουμε στα ερωτήματα στη ΣΥΝΟΨΗ

Επιλογή εργαλείου: τι κοιτάμε πρώτα

Το δοθέν σήμα είναι περιοδικό; Συνεχές ή διακριτό; Έχει πεπερασμένη ενέργεια;

Είδος σήματος	Εργαλείο	Παραδείγματα
Περιοδικό συνεχές	FS $(\alpha_k)$	$\cos(\omega_0 t)$ , παλμοσειρά
Απεριοδικό συνεχές, ενέργεια	CTFT $X(\omega)$	rect, Gaussian, exp causal
Διακριτό άπειρο	DTFT $X(e^{j\omega})$	δείγματα ιδανικά
Διακριτό πεπερασμένο N	DFT $X[k]$	πραγματικός υπολογιστής
Συστήματα LTI	$H(\omega)$ ή $H(z)$	rc, φίλτρα

# Τι παίρνω από την W06;

Στη W06 δουλέψαμε με περιοδικά σήματα και FS. Τώρα γενικεύουμε.

## W06 - Fourier Series (περιοδικά)

- Σήματα περιοδικά με περίοδο  $T_0$
- Ορθοκανονικότητα:  $\int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = T_0 \delta_{km}$
- Συντελεστές  $a_k = (1/T_0) \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$
- Hermitian:  $a_{-k} = a_k^*$  για real signal
- Parseval:  $P = \sum |a_k|^2$
- Διακριτές γραμμές στο πεδίο συχνότητας

$T_0 \rightarrow \infty$

## W07 - CTFT (απεριοδικά, ενέργεια)

- Σήματα ενέργειας (παλμοί, decay)
- Όριο όταν  $T_0 \rightarrow \infty$ :  
 $a_k \rightarrow 0$ , αλλά  $T_0 \cdot a_k \rightarrow X(\omega)$
- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
- Hermitian:  $X(-\omega) = X^*(\omega)$  για real
- Parseval:  $E = (1/2\pi) \int |X(\omega)|^2 d\omega$
- Συνεχής καμπύλη στο πεδίο συχνότητας

Όριο  $T_0 \rightarrow \infty$

Σ γίνεται  $\int$

$a_k \rightarrow X(\omega)$

Διακριτό γίνεται συνεχές

Όλα τα υπόλοιπα

Hermitian, Parseval ισχύουν

Τι κάνει το CTFT διαφορετικό από FS/DTFT/DFT - και πότε χρησιμοποιούμε το καθένα.

FS · CTFT · DTFT · DFT - 4 εργαλεία, 4 πεδία ορισμού

### ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ

Ξεκινάμε από αυτό που ήδη ξέρουμε από W06. Η Σειρά Fourier περιγράφει περιοδικά σήματα με αρμονικές. Στο W07 κρατάμε την ίδια ιδέα, αλλά περνάμε σε έναν μοναδικό μη περιοδικό παλμό και σε συνεχές φάσμα.

### ΕΞΗΓΗΣΗ

Το CTFT είναι η γραμμή του W07: μη περιοδικό συνεχές σήμα → X(ω). Η διαφορά δεν είναι αισθητική. Στη FS έχεις λίστα ακ. Στο CTFT έχεις συνάρτηση X(ω) σε συνεχή άξονα συχνότητας.

Εργαλείο	Σήμα x(t)	Φάσμα	Πώς το διαβάζω	Εβδομάδα
FS	περιοδικό x(t)	ακ	stem σε k ή kω <sub>0</sub>	W06
CTFT	απεριοδικό x(t)	X(ω)	συνεχές plot σε ω [rad/s]	W07
DTFT	διακριτό άπειρο x[n]	X(e <sup>jω</sup> )	συνεχές plot σε ω	Θεωρία
DFT/FFT	N δείγματα	X[k]	stem σε bins ή f [Hz]	W08

Στο W07 δεν διαβάζουμε αρμονικές k — διαβάζουμε συνεχή ω και φασματική πυκνότητα X(ω).

### ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

FS: άξονας x k ή kω<sub>0</sub>. CTFT: άξονας x ω [rad/s]. DFT: άξονας x bin k ή f [Hz].

### ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη γράψεις "αρμονικές" σε CTFT διάγραμμα. Η σωστή λέξη είναι "συχνότητες ω".

### ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: W06 FS. Μετά: η αποστολή του W07 σε ένα ενιαίο σενάριο.

# Γιατί δεν βλέπω πια μόνο $1 + 0.7\cos(\omega_0 t) + 0.4\cos(2\omega_0 t)$ ;

## W06 (περιοδικά)

Παράδειγμα σήματος:

$$x(t) = 1 + 0.7\cos(\omega_0 t) + 0.4\cos(2\omega_0 t)$$

Έχει σταθερή περίοδο  $T_0$ .

Επιτρεπτές συχνότητες μόνο  $k\omega_0$ .

Φάσμα: λίστα συντελεστών  $a_k$ .

Εργαλείο: Fourier Series (FS).

Plot: stems σε  $k = 0, 1, 2, \dots$

## W07 (μη περιοδικά)

Παράδειγμα σήματος:

$$x(t) = \text{rect}(t/T), \text{ Gaussian, causal exponential}$$

Δεν υπάρχει  $T_0$ .

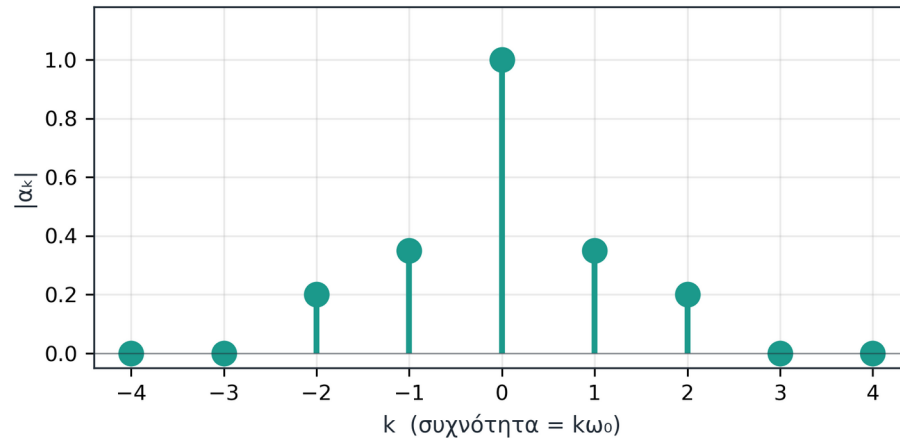
Επιτρεπτές συχνότητες: όλες  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Φάσμα: συνάρτηση  $X(\omega)$ .

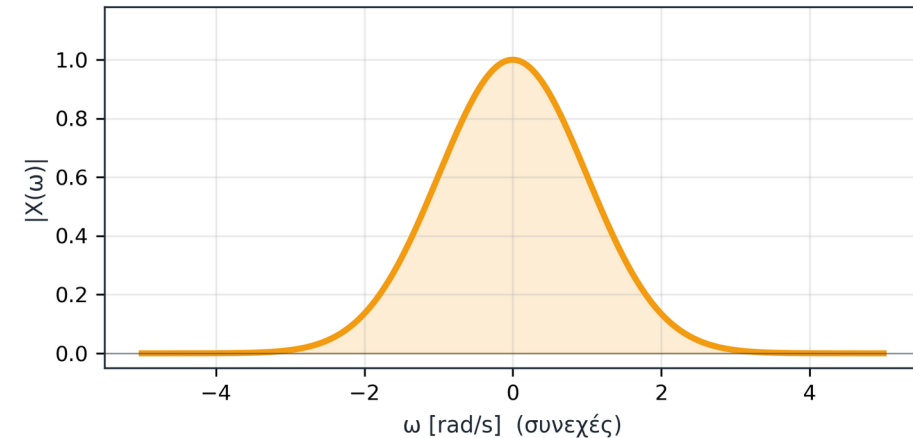
Εργαλείο: CTFT.

Plot: συνεχής καμπύλη πάνω σε  $\omega$ .

FS — διακριτές γραμμές στα  $k\omega_0$



CTFT — συνεχής καμπύλη πάνω σε  $\omega$



### ΟΡΙΣΜΟΣ

FS = διακριτές γραμμές. FT = συνεχές φάσμα.

### ΕΛΕΓΧΟΣ

$1+\cos+\cos$  ποιο εργαλείο; FS, γραμμές  $k\omega_0$ .

ΓΕΦΥΡΑ από  $a_k$  σε  $X(\omega)$  όταν  $T_0 \rightarrow \infty$ .

# Τι είναι παλμός στο W07;

W06

$x(t)$

$X(\omega)$

**φ/BW**

RC

FFT

Τρέχον σήμα:  $x(t) = \text{rect}(t/T)$

Τι είναι παλμός για το W07 - μονός, μη περιοδικός, ορισμένη διάρκεια.

Σήμα ενέργειας:  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$  • Σήμα ισχύος: μέση ισχύς πεπερασμένη, ενέργεια άπειρη

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Στο W07, παλμός σημαίνει συνήθως σήμα ενέργειας που είναι χρονικά εντοπισμένο. Δεν χρειάζεται να έχει αυστηρά πεπερασμένη υποστήριξη:  $\text{rect}$  έχει, γκαουσιανή και αιτιατή εκθετική δεν έχουν, αλλά φθίνουν γρήγορα.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Πρόβλεψη: το  $\cos(\omega t)$  είναι σήμα ενέργειας; Γιατί ναι ή γιατί όχι;

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Όχι - έχει άπειρη ενέργεια (η ολοκλήρωση δεν συγκλίνει). Η διάκριση «ενέργεια vs ισχύς» μάς προφυλάσσει από λάθος χρήση CTFT και ορισμό εύρους ζώνης.

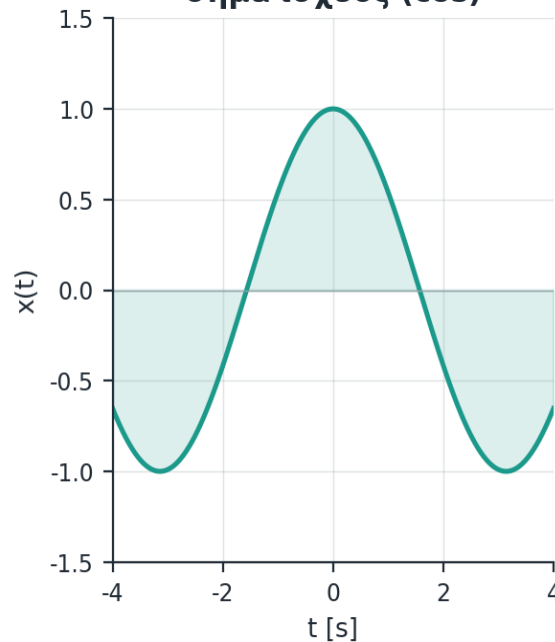
**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Ταξινομήσε τρία σήματα:  $\text{rect}$ ,  $\cos$ ,  $e^{-t}u(t)$ . Ποιο έχει πεπερασμένη ενέργεια; (Απ:  $\text{rect}$  και  $\exp$  causal — όχι το  $\cos$ )

**ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

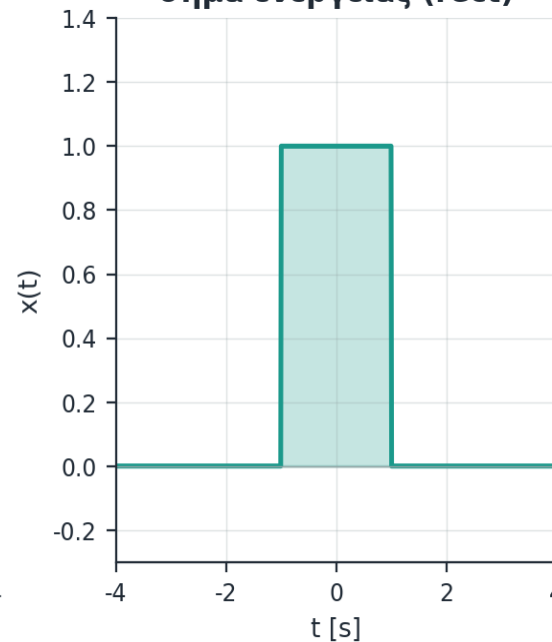
$t$  [s],  $x(t)$  [U]. Δεν συγκρίνουμε ακόμη φάσματα - εδώ μόνο ταξινομούμε σήματα.

σήμα ισχύος (cos)



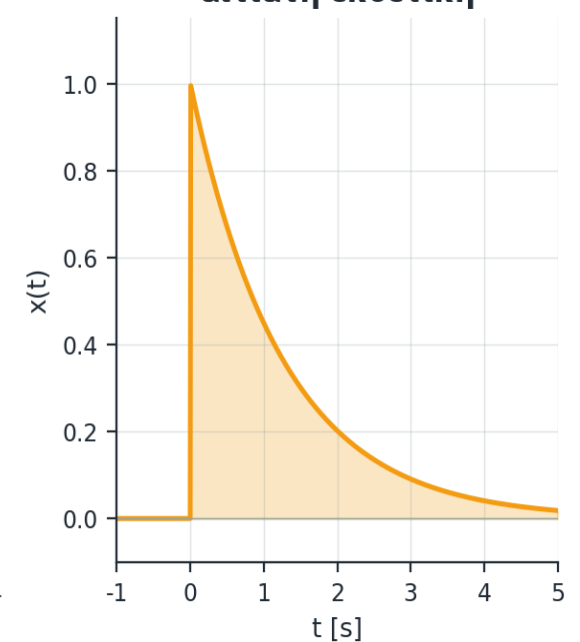
περιοδικό — άπειρη ενέργεια

σήμα ενέργειας (rect)



πεπερασμένη υποστήριξη

αιτιατή εκθετική



πρακτική διάρκεια  $\approx 1/a$

Τι βλέπουμε: τρεις «παλμοί» - περιοδικός  $\cos$  (σήμα ισχύος, άπειρη ενέργεια),  $\text{rect}$  (πεπερασμένη υποστήριξη), αιτιατή εκθετική (άπειρη αλλά γρήγορα φθίνουσα).

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Η διάκριση «ενέργεια vs ισχύς» μάς προφυλάσσει από λάθος χρήση CTFT και ορισμό εύρους ζώνης.

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: φάση και Hermitian. Μετά: παλμοσειρά W06 vs μονός παλμός W07.

# Είδη παλμών: τέσσερις βασικές οικογένειες

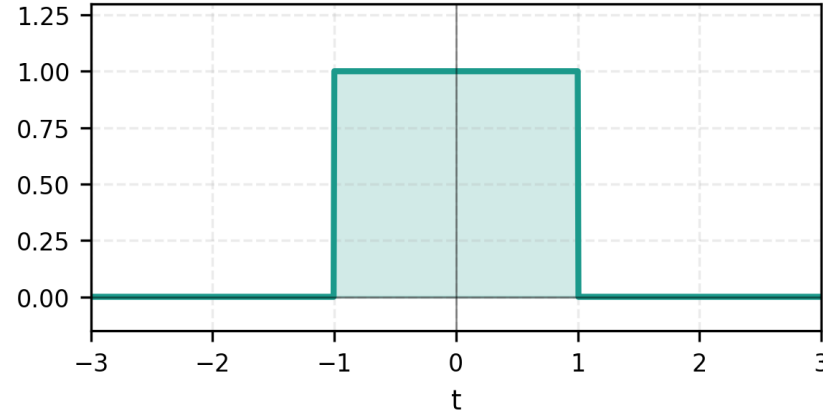
## Τι έχουν κοινό

- Όλοι είναι σήματα ενέργειας
- Πέφτουν στο 0 όταν  $|t| \rightarrow \infty$
- Δέχονται κανονικό CTFT

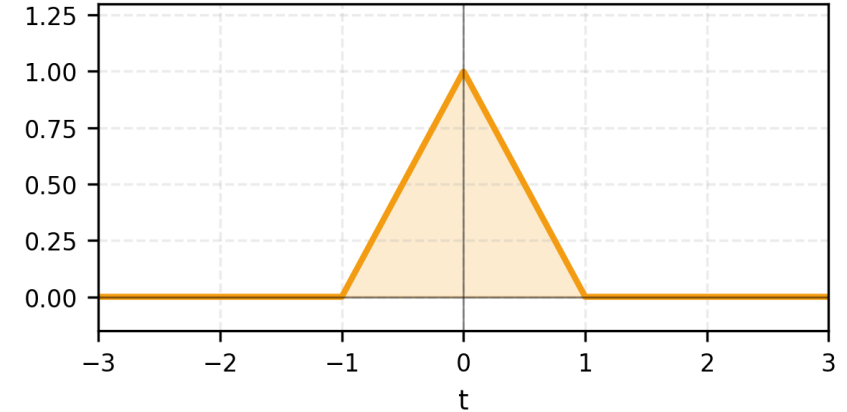
## Διαφέρουν σε:

- ταχύτητα μετάβασης
- ομαλότητα
- ύπαρξη μηδενικών στο φάσμα

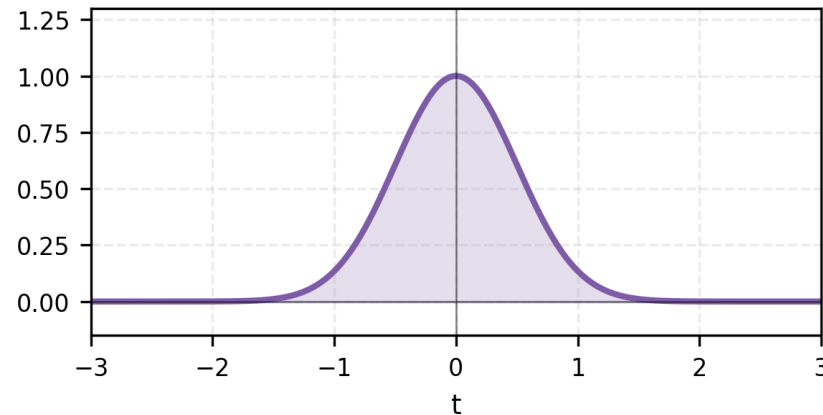
Ορθογώνιος (rect)



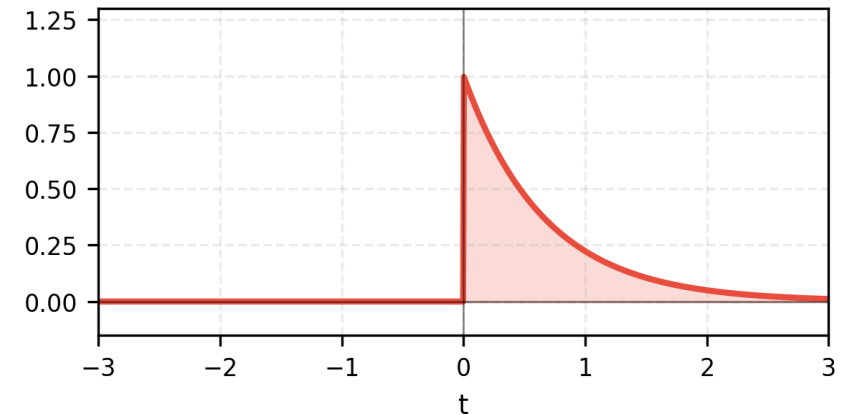
Τριγωνικός (tri)



Gaussian



Αιτιατή εκθετική  $e^{-at}u(t)$



rect

Πιο απλός, αλλά έχει ασυνέχειες με πλευρικούς λοβούς στο φάσμα

4.004 Σήματα και Συστήματα

triangular

Ομαλότερος,  $\text{sinc}^2$  spectrum

Gaussian

Ομαλή παντού, χωρίς μηδενικά στο φάσμα

exp causal

Ξεκινά στο  $t=0$ , σβήνει

## Τι είναι το $X(\omega)$ ;

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{(-j\omega t)} dt$$

### Μιγαδική συνάρτηση

Το  $X(\omega)$  είναι μιγαδικός αριθμός για κάθε  $\omega$ .  
Έχει μέτρο  $|X(\omega)|$  και φάση  $\angle X(\omega)$ .

### Συνεχής όχι διακριτή

Το  $\omega$  είναι συνεχής μεταβλητή στο  $\mathbb{R}$ .  
Όχι "FFT bin" - δεν υπάρχει  $N$  ή  $\Delta\omega$ .

### Πυκνότητα όχι αρμονική

Αν  $x(t)$  σε  $V$ , τότε  $X(\omega)$  σε  $V \cdot s$ .  
Ολοκληρώνεις σε  $\omega$  για να πάρεις ποσό.

### Έννοια

Για κάθε  $\omega$  μετρά πόσο ταιριάζει το  $x(t)$   
με τον φάσσορα  $e^{(j\omega t)}$ .

### ΟΡΙΣΜΟΣ

$X(\omega) =$  ολοκλήρωμα του  $x(t) \cdot e^{(-j\omega t)}$  πάνω σε όλον τον χρόνο.

### ΠΡΟΣΟΧΗ

Δεν είναι FFT bin.  $\omega$  συνεχής, όχι ακέραιος δείκτης.

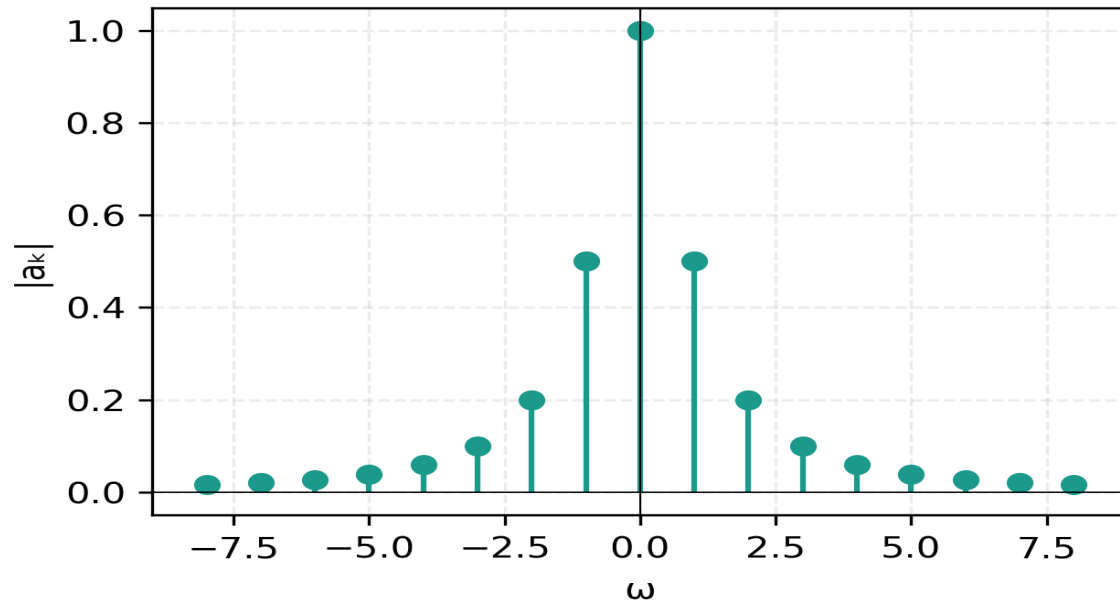
ΓΕΦΥΡΑ Επόμενα: μονάδες, μέτρο/φάση, Hermitian.

# Γιατί το $X(\omega)$ είναι συνάρτηση και όχι λίστα;

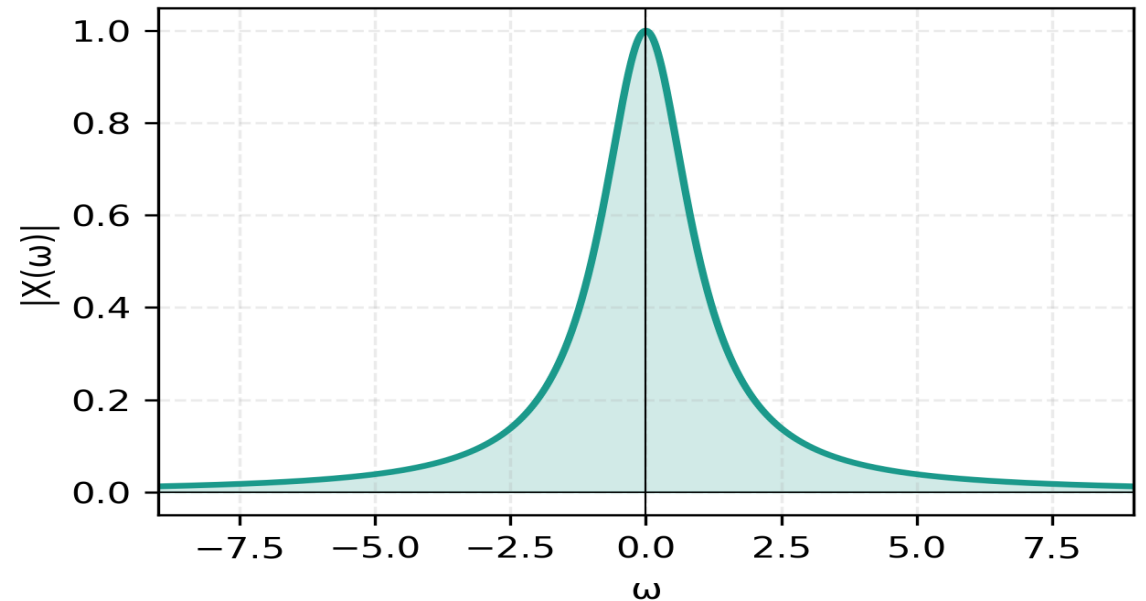
## Βασική διαφορά

Στα FS υπάρχει  $\omega_0$  και μετράμε σε  $k \cdot \omega_0$  (διακριτή λίστα  $a_k$ ). Στα CTFT δεν υπάρχει "πιο μικρή συχνότητα":  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $X(\omega)$  ορίζεται παντού.

FS: διακριτές γραμμές μόνο στα  $k \cdot \omega_0$



CTFT: συνεχής καμπύλη σε όλα τα  $\omega$



Στο FS  
 $a_k$  μόνο σε  $k \cdot \omega_0$

Στο CTFT  
 $X(\omega)$  για κάθε  $\omega$

Γιατί  
Όταν  $T_0 \rightarrow \infty$ , το  $\omega_0 \rightarrow 0$

## Ενότητα 2

# Από αρμονικές σε συνεχές $X(\omega)$

Μιγαδικό φάσμα, αρνητικές συχνότητες, Hermitian συμμετρία

Ξέρω ήδη

ότι το  $X(\omega)$  είναι μιγαδική συνάρτηση σε συνεχή  $\omega$

Τώρα ανοίγει

πώς διαβάζω  $|X|$ ,  $\angle X$ ,  $|X|^2$ . γιατί το πραγματικό  $x$  δίνει Hermitian  $X$

Στο τέλος μπορώ

να σχεδιάσω σωστά τα 2 panels του φάσματος

## Ορισμός (Euler):

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

Δύο βασικές εικόνες σε αυτή τη διαφάνεια:

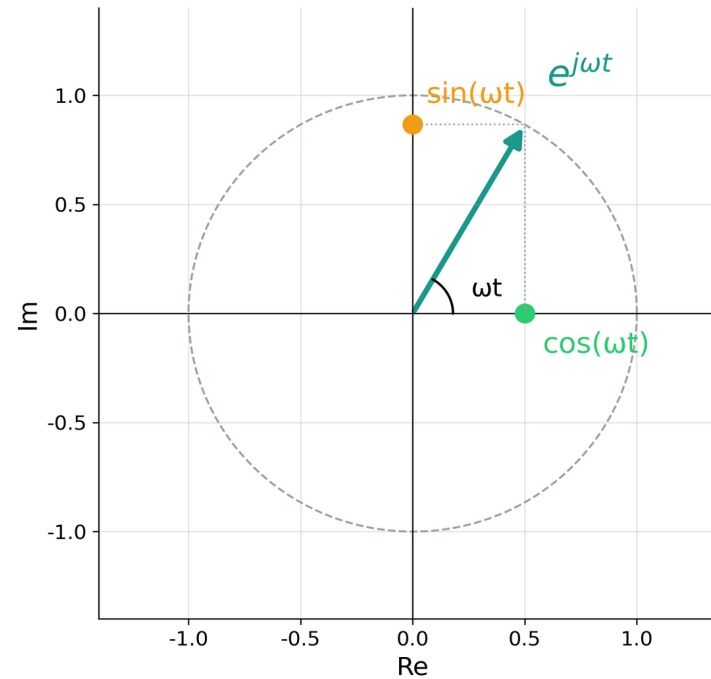
- Αριστερά: φάσορας = βέλος μήκους 1, γωνία  $\omega t$ .
- Δεξιά:  $\cos = \frac{1}{2} \cdot e^{+j\omega t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega t}$  — δύο αντίθετοι φάσορες.

Λεπτομέρειες (περιστροφή, αρνητική  $\omega$ , Hermitian) στα σ14-σ17.

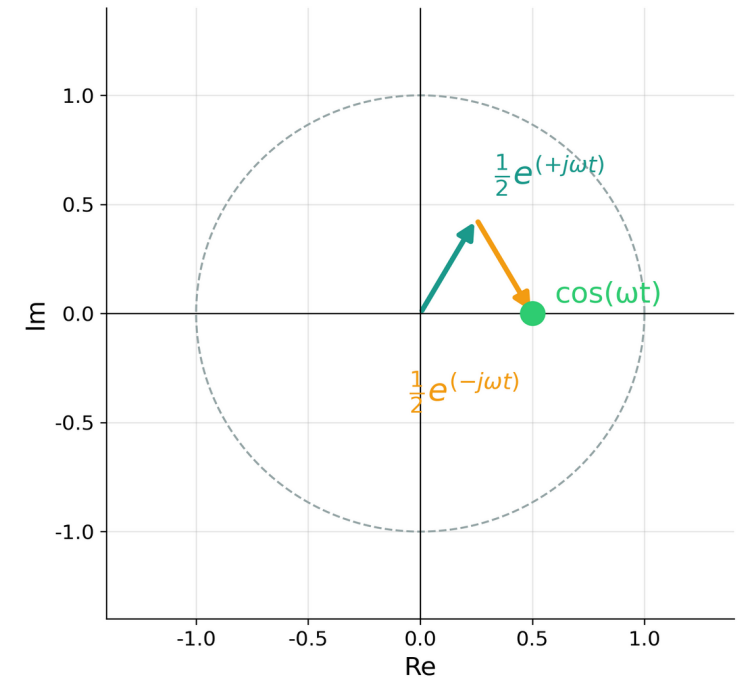
## Φάσορες: 2 βασικές εικόνες (πρόλογος)

## Φάσορες: 2 βασικές εικόνες

Φάσορας = περιστρεφόμενο βέλος μήκους 1



$\cos = \frac{1}{2} \cdot e^{+j\omega t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega t}$  (Im ακυρώνεται)



ΟΡΙΣΜΟΣ | Ο φάσορας είναι περιστρεφόμενο μιγαδικό βέλος μήκους 1.

$\cos = 2$  ΦΑΣΟΡΕΣ |  $\cos(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot e^{+j\omega t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega t}$  — Im ακυρώνεται.

ΓΕΦΥΡΑ | Στο CTFT το  $X(\omega)$  δείχνει πόσο ταιριάζει το  $x(t)$  με κάθε  $e^{+j\omega t}$ .

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t) \cdot \text{μήκος} = 1, \text{ γωνία στον χρόνο} = \omega t \text{ rad} \cdot \omega = 2\pi f$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Φάσορας = περιστρεφόμενο μιγαδικό βέλος μήκους 1 στο επίπεδο Re/Im.  
 •  $\omega > 0$ : αντιωρολογιακή (CCW) περιστροφή  
 •  $\omega < 0$ : ωρολογιακή (CW) περιστροφή  
 •  $\omega = 2\pi \text{ rad/s} \Leftrightarrow 1 \text{ πλήρης περιστροφή ανά δευτερόλεπτο (} f = 1 \text{ Hz)}$

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Αν  $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$  και  $T = 1 \text{ s}$ , πόσες πλήρεις περιστροφές κάνει το  $e^{j\omega t}$  σε 2 s;  
 (Απ: 2 περιστροφές — γωνία  $4\pi \text{ rad.}$ )

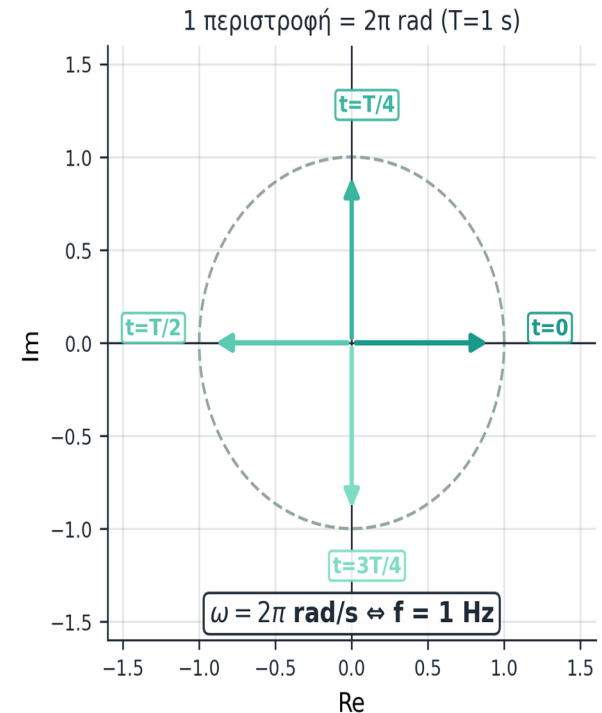
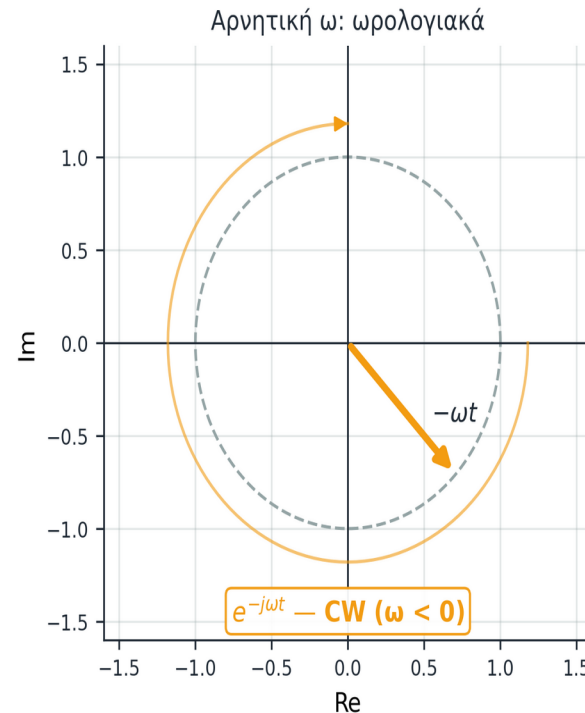
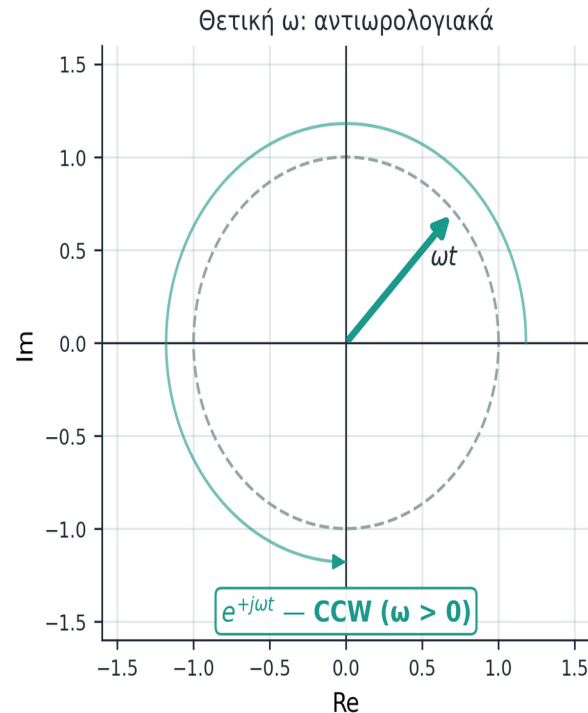
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Σε χρόνο  $t$ , ο  $e^{j\omega t}$  δείχνει στη γωνία  $\omega t \text{ rad}$ . Όταν  $\omega t = 2\pi$ , μία πλήρης περιστροφή.  
 Σχέση  $f \leftrightarrow \omega$ :  $\omega = 2\pi f$ . Αρνητική  $\omega =$  αντίθετη φορά περιστροφής (όχι αρνητικός χρόνος).

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Σε ποια γωνία είναι ο  $e^{j\omega t}$  με  $\omega = \pi \text{ rad/s}$  τη στιγμή  $t = 0.5 \text{ s}$ ;  
 (Απ:  $\omega t = \pi/2$  — δείχνει προς  $+j$ .)

## Ο φάσορας $e^{\pm j\omega t}$ ως περιστρεφόμενο διάνυσμα



Αριστερά:  $\omega > 0$  (CCW). Μέσο:  $\omega < 0$  (CW). Δεξιά: 4 στιγμιότυπα σε μία περίοδο  $T = 2\pi/\omega$ .

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

Re/Im αδιάστατο. Γωνία =  $\omega t$  [rad]. Μήκος = 1.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Αρνητική  $\omega =$  αντίθετη φορά περιστροφής (όχι αρνητικός χρόνος).

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: ορισμός  $X(\omega)$ . Μετά:  $\cos$  ως 2 φάσορες ( $\sigma_{15} \rightarrow \sigma_{16}$ ).

$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} \cdot e^{+j\omega t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega t}$  · 2 φάσορες μήκους  $\frac{1}{2}$  με αντίθετη φορά · Im ακυρώνεται, μένει  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos(\omega t)$  στον Re άξονα

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Κάθε πραγματικό cos γράφεται ως άθροισμα 2 μιγαδικών φασόρων που στρέφονται αντίθετα, με μήκος  $\frac{1}{2}$  ο καθένας.  
 • Re-μέρη: ίδια  $\rightarrow \frac{1}{2}\cos + \frac{1}{2}\cos = \cos(\omega t)$   
 • Im-μέρη: αντίθετα  $\rightarrow$  ακυρώνονται (αυτή είναι η αρνητική ω).

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Σε  $\omega t = \pi$ , ποια είναι η τιμή του  $\frac{1}{2} \cdot e^{+j\omega t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega t}$ ;  
 (Απ:  $\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = -1 = \cos(\pi)$ . ✓)

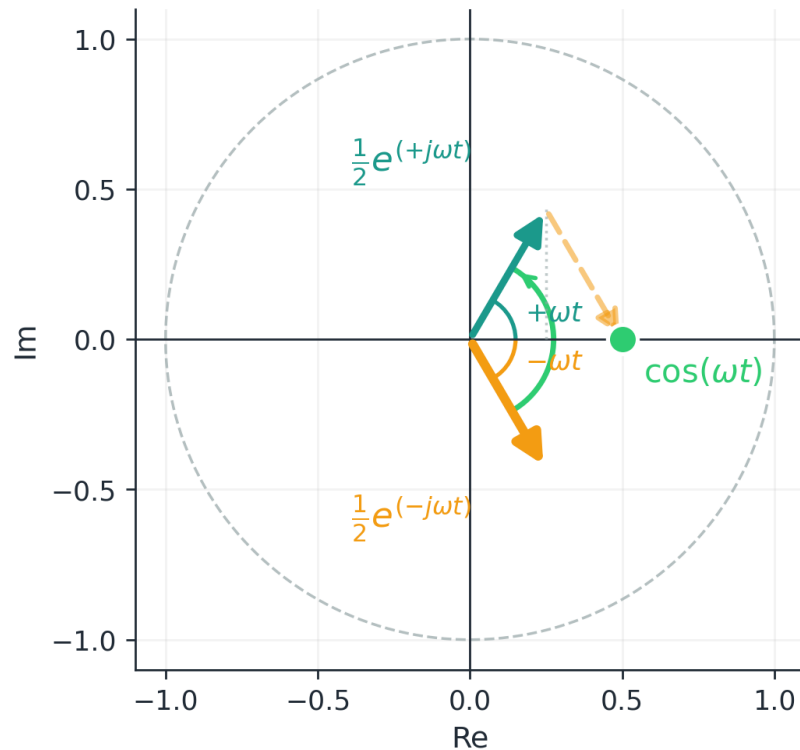
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Στο μιγαδικό επίπεδο:  $\frac{1}{2} \cdot e^{+j\omega t}$  και  $\frac{1}{2} \cdot e^{-j\omega t}$  είναι κατοπτρικά ως προς τον Re άξονα.  
 Im-συνιστώσες αντίθετες  $\rightarrow 0$ . Re-συνιστώσες ίδιες  $\rightarrow$  άθροισμα =  $\cos(\omega t)$ .

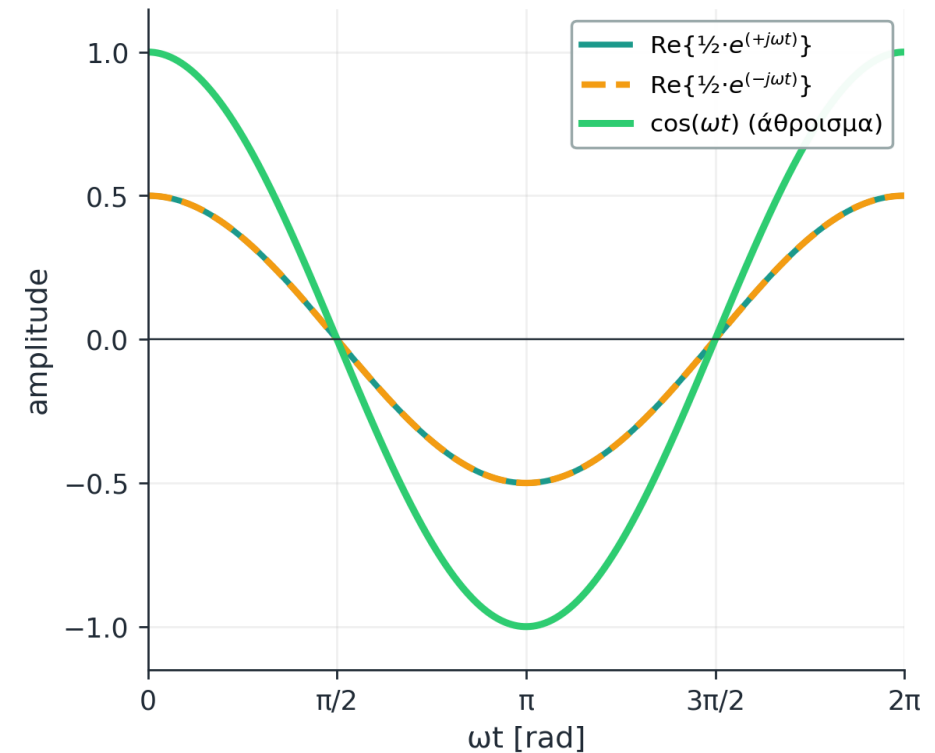
**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Γράψε το  $\sin(\omega t)$  ως 2 φάσορες (Απ:  $\sin(\omega t) = (1/2j) \cdot [e^{+j\omega t} - e^{-j\omega t}]$  — αντισυμμετρικό περί  $\omega=0$ .)

Στιγμιότυπο:  $\omega t = \pi/3$  · head-to-tail =  $\cos(\omega t)$



Τα 2 Re-μέρη ταυτίζονται  $\rightarrow$  άθροισμα =  $\cos(\omega t)$



Αριστερά: στιγμιότυπο 2 φασόρων μήκους  $\frac{1}{2}$  — head-to-tail δίνει σημείο στον Re άξονα =  $\cos(\omega t)$ . Δεξιά: τα Re-μέρη και των δύο φασόρων ταυτίζονται και αθροίζουν σε  $\cos$ .

**ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

Re/Im αδιάστατο. Μήκος φασόρα =  $\frac{1}{2}$ . Γωνίες  $\pm\omega t$  rad. Im συνιστώσες ΠΑΝΤΑ ακυρώνονται για πραγματικά σήματα — αυτή είναι η Hermitian συμμετρία.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: περιστρεφόμενος φάσορας (σ15). Μετά: φάσμα του  $\cos = 2$  Dirac (σ17).

$\cos(\omega_0 t) \rightleftharpoons \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$  · 2 Dirac στις θέσεις  $\pm \omega_0$  · κάθε φάσoras  $\frac{1}{2} \cdot e^{(\pm j\omega_0 t)} \leftrightarrow \pi \cdot \delta(\omega \mp \omega_0)$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Αν  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \cdot e^{(+j\omega_0 t)} + \frac{1}{2} \cdot e^{(-j\omega_0 t)}$ , τότε στο πεδίο συχνοτήτων κάθε φάσoras  $\frac{1}{2} \cdot e^{(\pm j\omega_0 t)}$  δίνει ένα Dirac βάρους  $\pi$  στη συχνότητα  $\pm \omega_0$ .

Άρα:  $\cos(\omega_0 t) \rightleftharpoons \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιες θέσεις του  $\omega$  βάζεις Dirac για  $x(t) = \cos(2t)$ ;  
(Απ: στα  $\omega = +2$  και  $\omega = -2$ .)

## ΕΞΗΓΗΣΗ

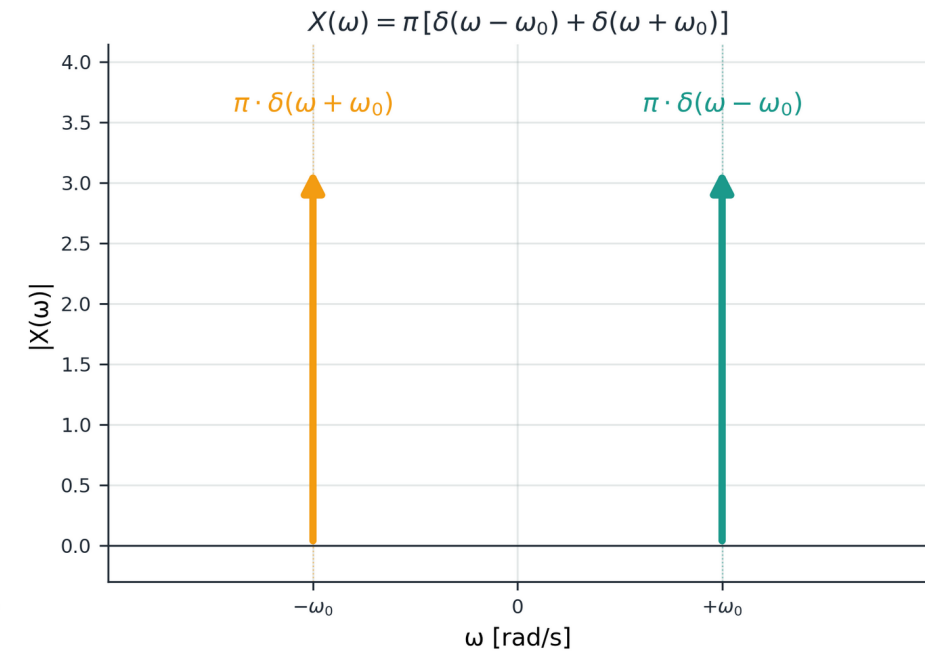
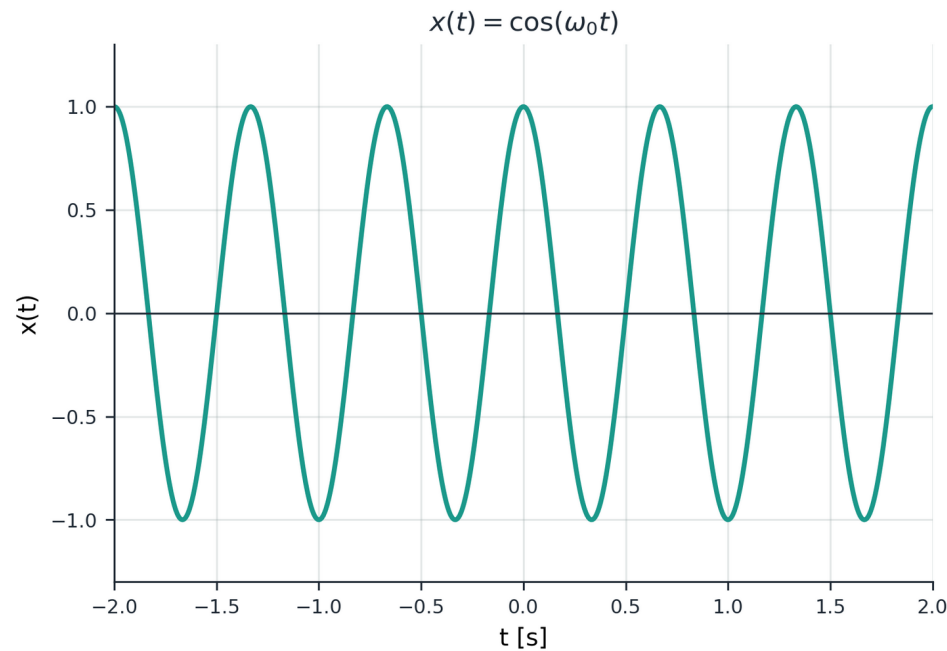
Γιατί δύο δέλτα στο cos:

- $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \cdot e^{(+j\omega_0 t)} + \frac{1}{2} \cdot e^{(-j\omega_0 t)}$  [Euler]
- $F[e^{(jat)}] = 2\pi \cdot \delta(\omega - a)$  [θεμελιώδες ζεύγος]
- $F[\cos(\omega_0 t)] = \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega + \omega_0)$

Σημείωση: Dirac δεν έχει «ύψος» — έχει εμβαδόν = βάρος (εδώ  $\pi$ ).

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πόσοι Dirac απαιτούνται για ένα γνήσιο πραγματικό cos;  
(Απ: 2 — στις θέσεις  $\pm \omega_0$ , αντισυμμετρικές περί  $\omega = 0$ .)

Από φάσORES στο φάσμα του cos: 2 Dirac στα  $\pm \omega_0$ 

Αριστερά:  $\cos(\omega_0 t)$  στον χρόνο (περιοδικό, μη φραγμένης ενέργειας). Δεξιά: 2 Dirac βάρους  $\pi$  στις θέσεις  $\pm \omega_0$  — το φάσμα του cos.

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$t$  [s],  $x(t)$  [U]. Φάσμα:  $\omega$  [rad/s],  $X(\omega)$  σε «μονάδες Dirac» ( $\pi$ ).

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Το cos είναι περιοδικό — άπειρη ενέργεια — γι' αυτό  $X(\omega)$  έχει Dirac, όχι πραγματική συνάρτηση.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: cos = 2 φάσORES (σ16). Μετά: Hermitian συμμετρία (σ18).

Για κάθε πραγματικό σήμα  $x(t)$ , το CTFT έχει Hermitian συμμετρία:  $X(-\omega) = X^*(\omega)$

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad (\text{ζυγή/άρτια}) \quad \angle X(-\omega) = -\angle X(\omega) \quad (\text{μονή/περιττή})$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Όταν  $x(t)$  είναι πραγματικό, η μιγαδική συζυγία στον χρόνο γίνεται αναστροφή  $\omega$  στο φάσμα. Αυτό λέγεται Hermitian συμμετρία.

Το γενικό αποτέλεσμα:  $X(-\omega) = X^*(\omega)$  — άρα  $|X|$  άρτια και  $\angle X$  περιττή.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν  $|X(2)| = 0.45$ , τι περιμένεις για το  $|X(-2)|$ ;  
(Απ: 0.45 — ίδια τιμή λόγω Hermitian.)

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Από τον ορισμό  $X(\omega) = \int x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ :  
 $X(-\omega) = \int x(t) \cdot e^{+j\omega t} dt$ . Αν  $x(t)$  πραγματικό, το ολοκλήρωμα είναι ο μιγαδικός συζυγής του  $X(\omega)$ .  
Συνέπεια: αρκεί να δείξεις μόνο το «μισό» φάσμα ( $\omega \geq 0$ ) — το άλλο μισό προκύπτει από συμμετρία.

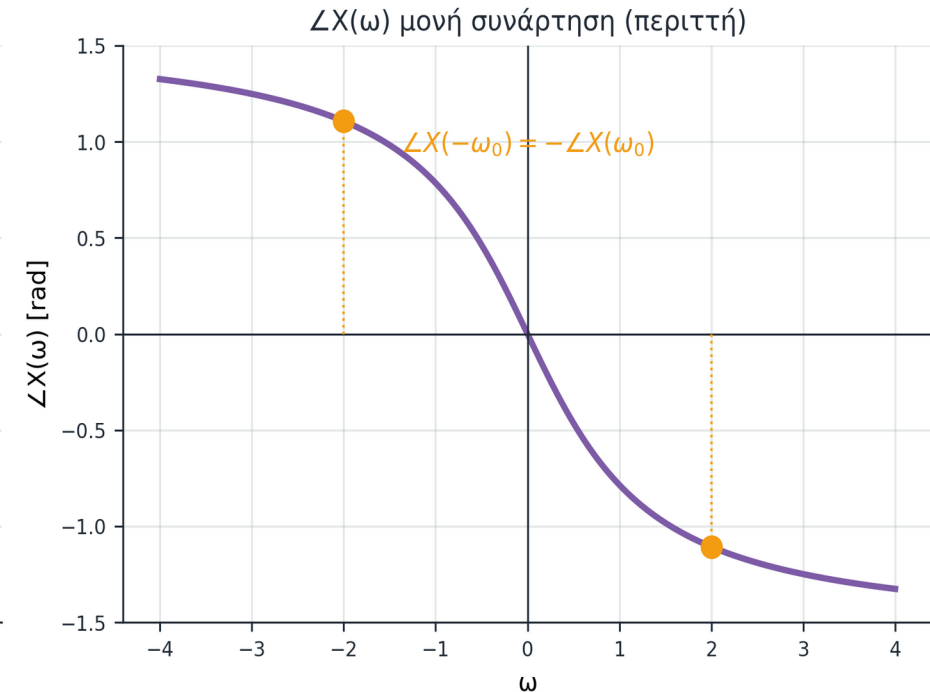
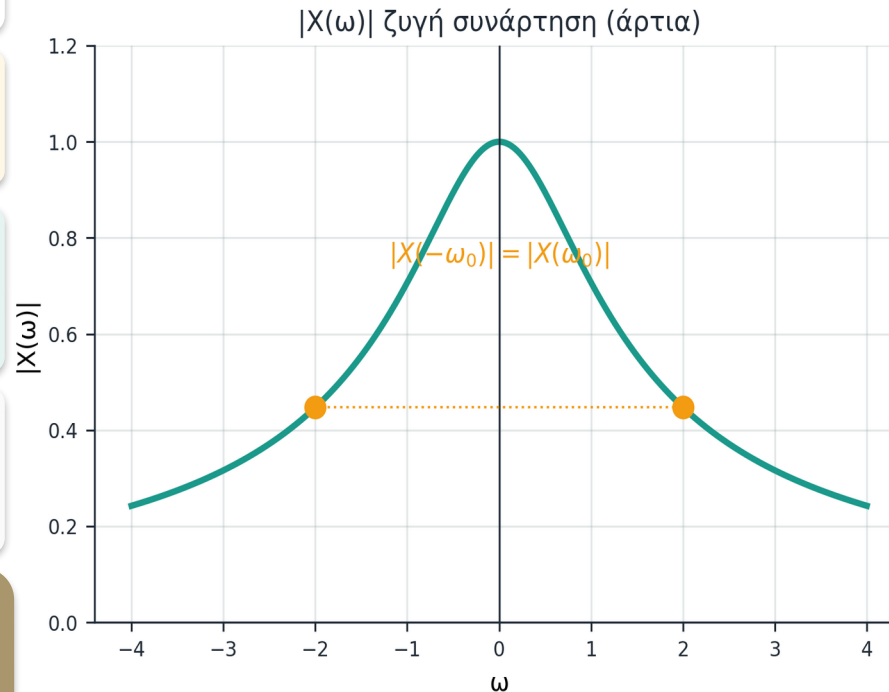
## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Έστω  $\angle X(3) = -\pi/4$ . Πόσο είναι το  $\angle X(-3)$ ;  
(Απ:  $+\pi/4$  — η φάση είναι μονή.)

## ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ

Η συνεχής φάση εδώ ΕΙΝΑΙ ΕΙΔΙΚΟ χαρακτηριστικό του σήματος (causal expr).  
Για άρτιο πραγματικό σήμα: φάση μόνο 0 ή  $\pi$ .  
Γενικός κανόνας είναι η Hermitian — όχι «συνεχής φάση».

Hermitian συμμετρία:  $x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow X(-\omega) = X^*(\omega)$



Αριστερά:  $|X(\omega)|$  άρτια — κατοπτρική περί  $\omega=0$ . Δεξιά:  $\angle X(\omega)$  περιττή — αντισυμμετρική περί  $\omega=0$ .

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  [rad/s] και στις δύο πλευρές.  $|X|$  [U·s].  $\angle X$  [rad].

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Hermitian ισχύει ΜΟΝΟ για πραγματικά  $x(t)$ . Για μιγαδικά,  
 $X(-\omega) \neq X^*(\omega)$  γενικά.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: φάσμα του  $\cos(\sigma 17)$ . Μετά: μέτρο και φάση πραγματικών σημάτων.

Το ίδιο φυσικό γεγονός εμφανίζεται διακριτά στη FS και συνεχώς στο CTFT

$$x(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow a_{-k} = a_k^* \quad \text{και} \quad X(-\omega) = X^*(\omega)$$

Hermitian: όταν x(t) είναι πραγματικό → Re άρτιο, Im περιττό (ίδιο σε FS και CTFT)

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Hermitian = συμμετρία συζυγών. Re άρτιο, Im περιττό. Εμφανίζεται όταν το σήμα είναι πραγματικό.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Αν x(t) είναι πραγματικό περιοδικό, τι ισχύει για τα a<sub>k</sub>;  
(Απ: a<sub>-k</sub>=a<sub>k</sub>\*)

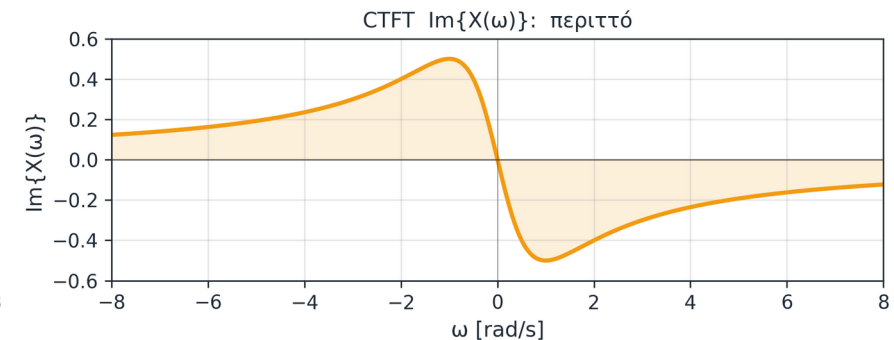
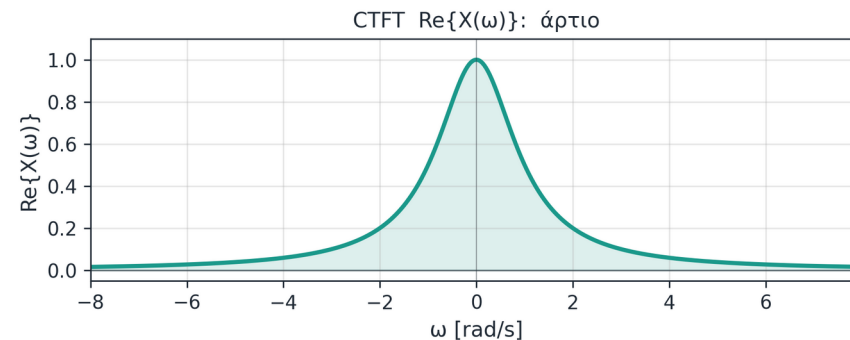
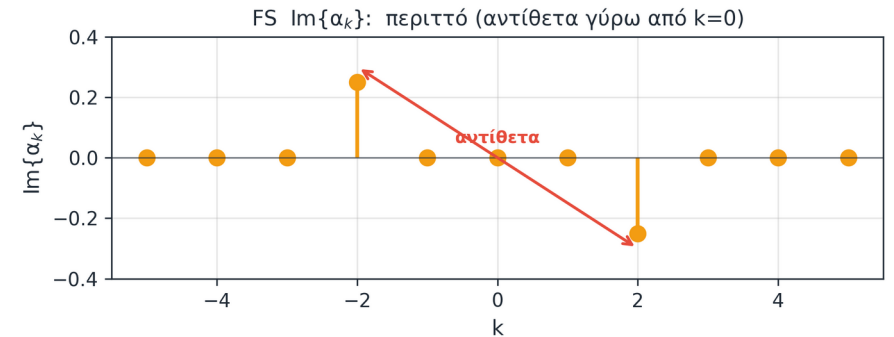
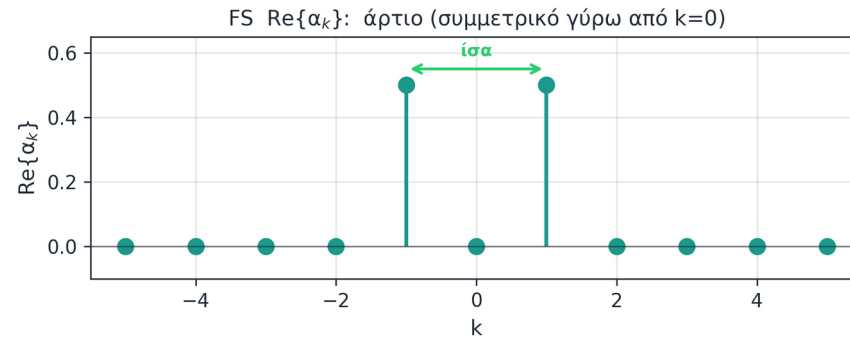
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

FS: a<sub>-k</sub>=a<sub>k</sub>\*. CTFT: X(-ω)=X\*(ω).

Παράδειγμα x(t)=e<sup>-t</sup>u(t) είναι πραγματικό → ισχύει.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Αν x(t) μιγαδικό (π.χ. e<sup>j3t</sup>), Hermitian σπάει — γιατί;  
F[e<sup>j3t</sup>] = 2π·δ(ω-3) → ΕΝΑΣ Dirac στο ω=+3  
Αρα X(-ω)=0 αλλά X\*(ω)≠0 → X(-ω)≠X\*(ω).  
(Συχνοτική μετατόπιση: e<sup>jat</sup> → φάσμα κατά +a.)



Πάνω σειρά: FS συντελεστές (διακριτό k). Κάτω σειρά: CTFT (συνεχές ω). Αριστερή στήλη: άρτιο Re. Δεξιά στήλη: περιττό Im. Η ίδια συμμετρία εμφανίζεται σε δύο

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: δ(t), 1, cos(ω<sub>0</sub>t), rect, e<sup>-at</sup>u(t)

Πέντε σημαντικά ζεύγη που πρέπει να ξέρεις \* είναι τα building blocks του CTFT

Πώς ζωγραφίζουμε: Dirac → βέλος με ύψος = βάρος (όχι «πραγματικό» ύψος — η Dirac έχει εμβαδόν)  
 Σταθερά «1» (σε t ή ω) → άπειρη ενέργεια: μαθηματικά εργαλεία, όχι σήματα ενέργειας

$$\delta(t) \approx 1 \cdot 1 \approx 2\pi \cdot \delta(\omega) \cdot \cos(\omega_0 t) \approx \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \cdot \text{rect} \approx \text{sinc} \cdot e^{-at}u(t) \approx 1/(a+j\omega)$$

## Πέντε θεμελιώδη ζεύγη CTFT

### ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Πέντε σήματα-σταθμοί. Τα υπόλοιπα που θα δούμε δομούνται από αυτά με χρονικές μετατοπίσεις, κλιμακώσεις και αθροίσματα.

### ΠΡΟΒΛΕΨΗ

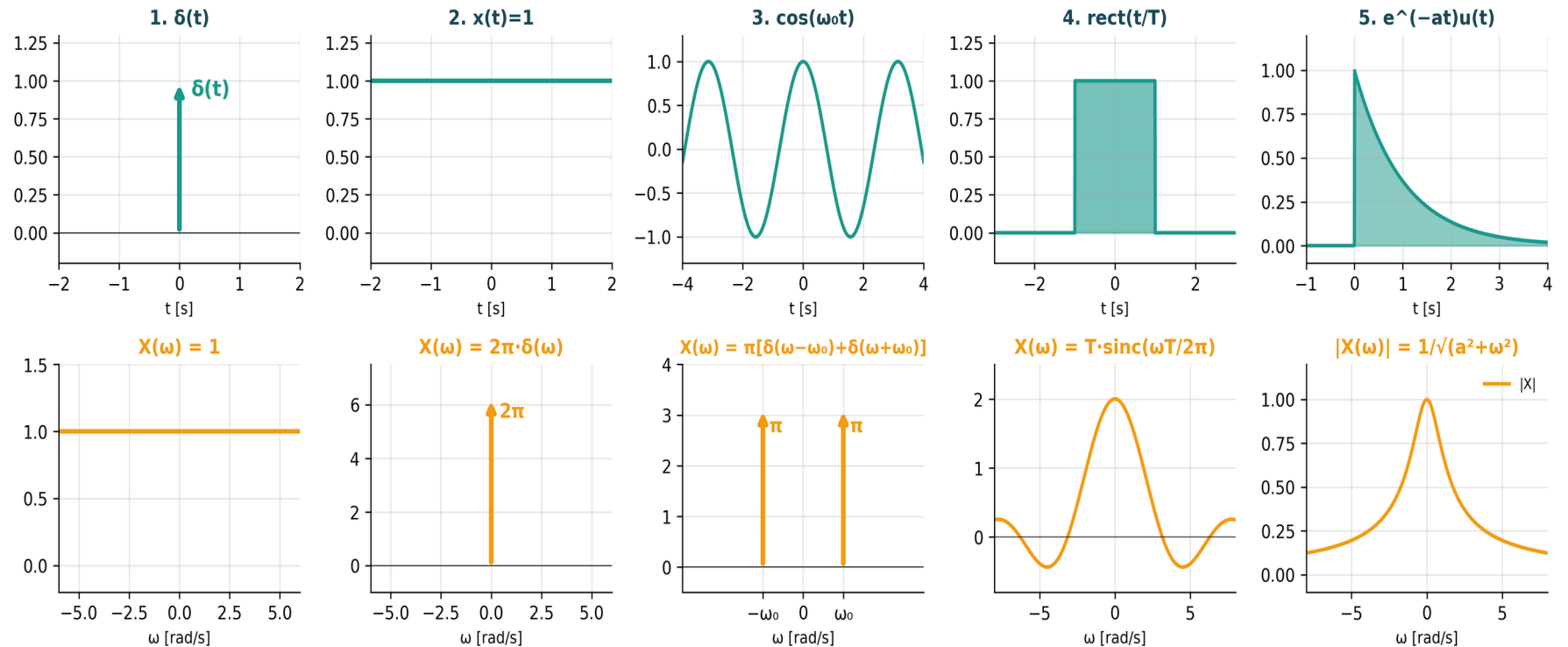
Αν x(t)=δ(t-2), τι θα είναι X(ω);  
 (Απ: 1·e<sup>-j2ω</sup>) — μέτρο 1, φάση -2ω

### ΕΞΗΓΗΣΗ

δ ↔ 1 (ορισμός). 1 ↔ 2πδ (συμμετρία). cos ↔ 2 diracs (φάσορες). rect ↔ sinc (πεπερασμένο). e<sup>-at</sup>u(t) ↔ 1/(a+jω) (αιτιατό). Αυτό είναι το λεξιλόγιο.

### ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γράψε το X(ω) για x(t)=3·cos(5t).  
 (Απ: 3π[δ(ω-5)+δ(ω+5)])



Επάνω: σήματα στον χρόνο. Κάτω: μετασχηματισμοί τους στη συχνότητα. Δες πώς το «περιορισμένο σε χρόνο» γίνεται «εκτεταμένο σε ω» και αντίστροφα.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

t [s] vs ω [rad/s]. Dirac σχεδιάζονται ως arrows. Για cos: δείκτες ±ω<sub>0</sub>. Τα cos/sin/1 δεν έχουν "κανονικό" FT — απαιτούν Dirac. Αλλά τα ζεύγη ισχύουν. Πριν: ορισμός X(ω). Μετά: διαβάζω |X|, ∠X.

## 3 αναγνώσεις του ίδιου X(ω): μέτρο, φάση, φασματική κατανομή ενέργειας

$|X(\omega)|$  = πόσο ·  $\angle X(\omega)$  = πού ·  $|X(\omega)|^2$  = ενέργεια ανά συχνότητα

### ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Κάθε plot απαντά σε διαφορετική ερώτηση. Το  $|X|$  δείχνει σχήμα φάσματος. Η  $\angle X$  χρονική ευθυγράμμιση. Το  $|X|^2$  ενεργειακή κατανομή (αυτό μετράει το BW). Η φάση εδώ εμφανίζεται «παλμοσειρά» (πηδάει  $0 \leftrightarrow \pi$ ) επειδή το  $\text{sinc}(\omega T/2\pi)$  αλλάζει πρόσημο στα μηδενικά του.

### ΕΡΩΤΗΣΗ

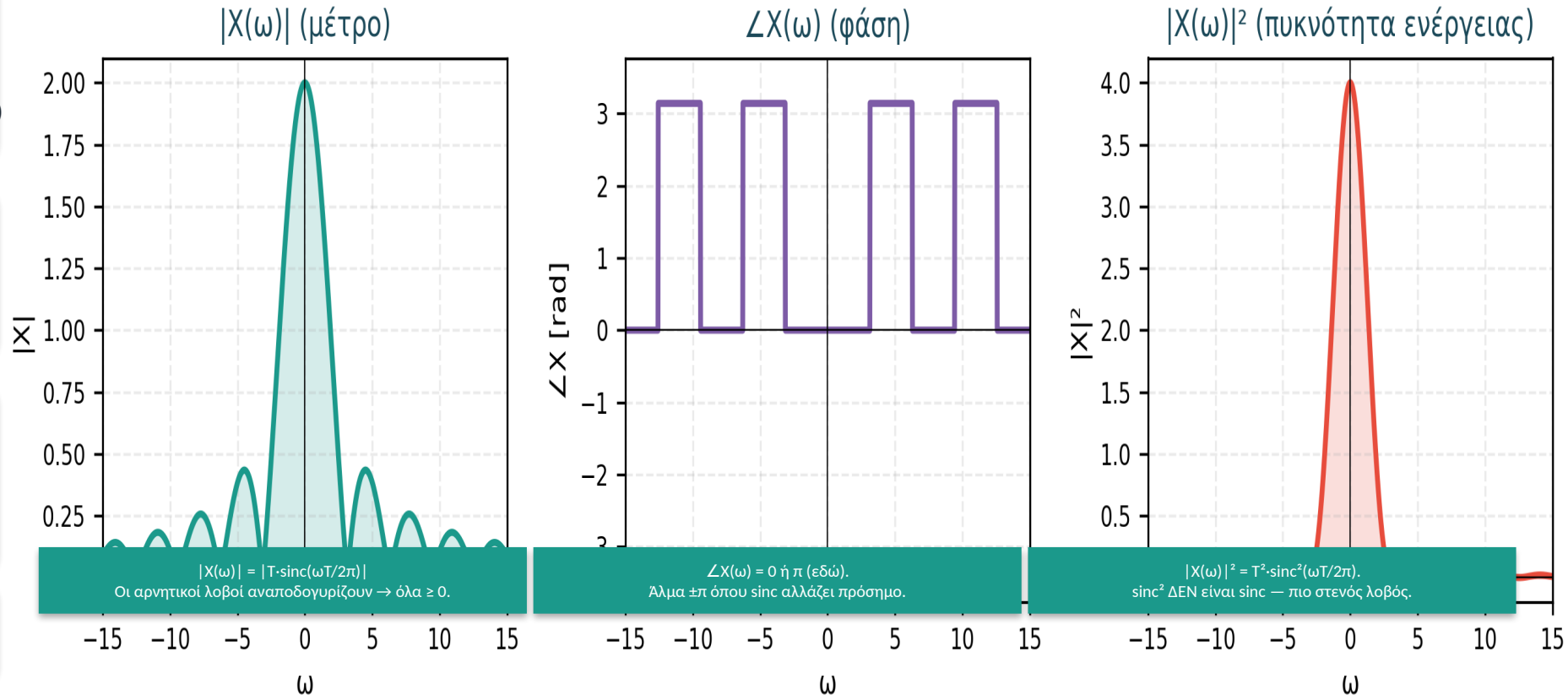
Αν διπλασιάσεις πλάτος σήματος, πώς αλλάζει το  $|X|$ ; Το  $|X|^2$ ;

### ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$|X|$ : γραμμικά διπλάσιο.  $|X|^2$ : τετραπλάσιο (γραμμικότητα CTFT, τετράγωνο για ενέργεια). Η φάση δεν επηρεάζεται από πλάτος.

### ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γιατί χρειαζόμαστε και τα 3;  
(Απ: συμπληρωματική πληροφορία χαρακτηρισμού.)



3 panels: μέτρο, φάση, ενεργειακή πυκνότητα — για το ίδιο σήμα.

# Διαφορετικός παλμός → διαφορετική μορφή φάσματος

Σχήμα στον χρόνο καθορίζει σχήμα στη συχνότητα — και αντίστροφα

rect → sinc · Gaussian → Gaussian · e<sup>(-at)</sup>u(t) → 1/(a+jω)

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Δεν υπάρχει "ένα φάσμα" για όλους τους παλμούς. Ομαλότητα στον χρόνο → γρήγορη απόσβεση στη συχνότητα. Ασυνέχειες → πλατύ φάσμα με λοβούς.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Ποιος έχει πιο "καθαρό" φάσμα: rect ή Gaussian; (Απ: Gaussian.)

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Το rect έχει ασυνέχειες στο ±T/2 → απαιτεί ψηλότερες συχνότητες για να αναπαρασταθεί → πλευρικοί λοβοί. Η Gaussian είναι C<sup>∞</sup> → το φάσμα της φθίνει εκθετικά χωρίς λοβούς.

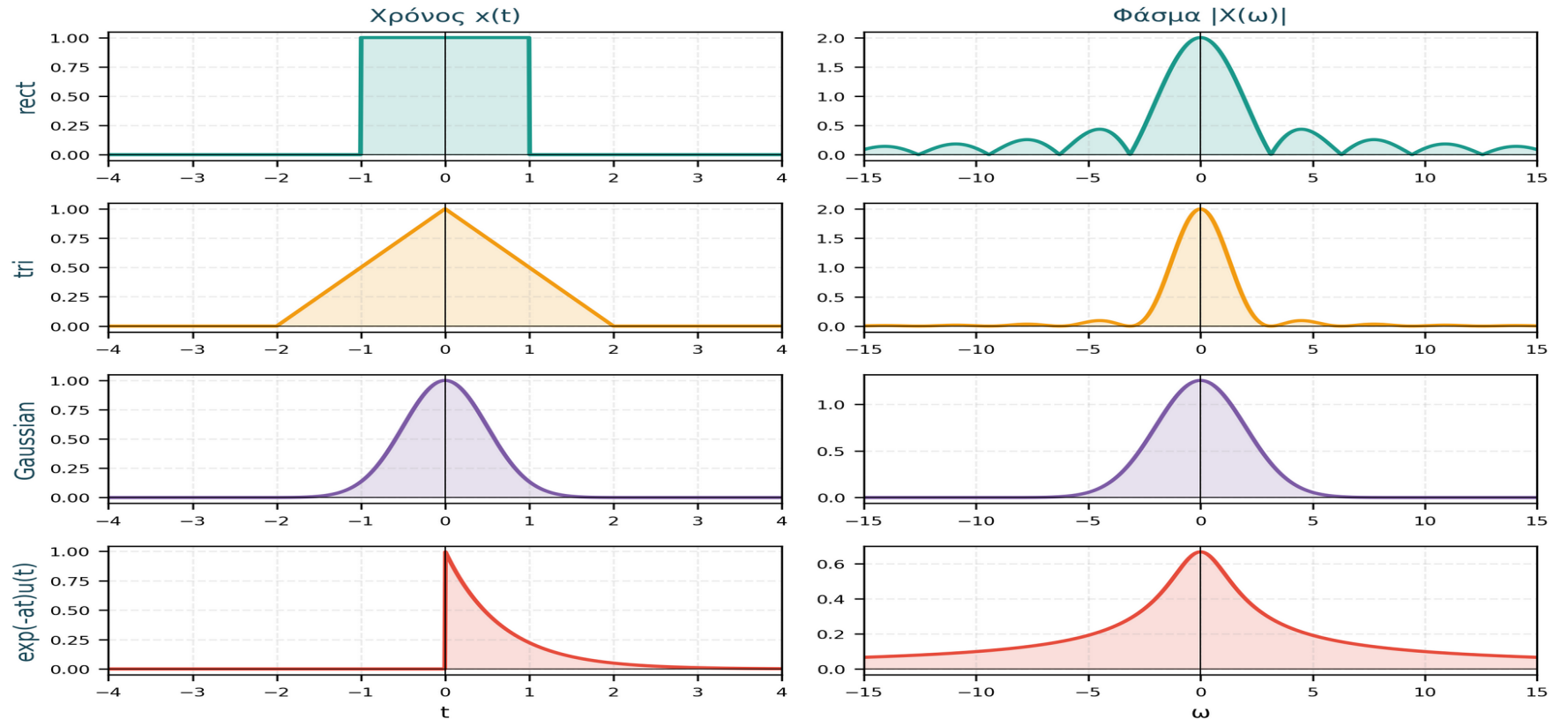
Σημείωση Hermitian: |X(-ω)| = |X(ω)| (άρτιο μέτρο, αυτό βλέπουμε) αλλά ∠X(-ω) = -∠X(ω) (περιττή φάση, αόρατη εδώ). Ασύμμετρο-στον-χρόνο σήμα → συμμετρικό |X(ω)| + περιττή φάση.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Πες ποιος παλμός θα έχει ταχύτερα φθίνον φάσμα: rect ή Gaussian;

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

Πάνω σειρά: t [s], x(t) [V]. Κάτω σειρά: ω [rad/s], |X| [V·s].



3 παλμοί, 3 διαφορετικά φάσματα. Σχήμα-σε-σχίμα αντιστοιχία.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

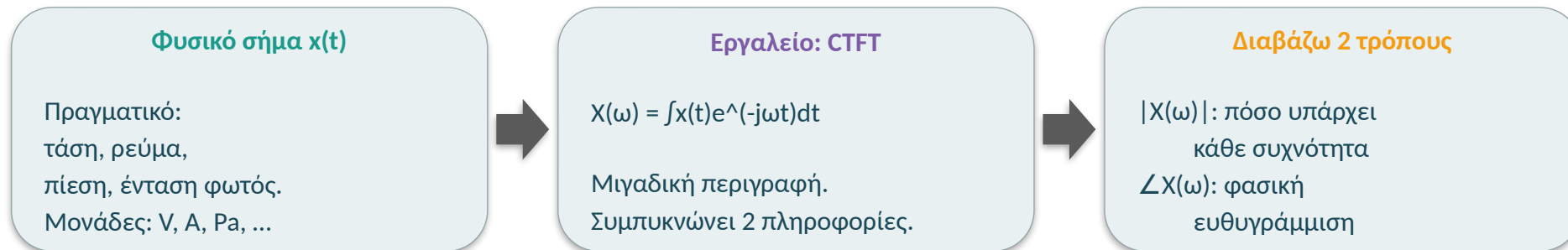
Plot = |X(ω)|. Το πραγματικό X(ω) του rect εναλλάσσει πρόσημο στους λοβούς (βλ. φάση σ50).

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: 3 αναγνώσεις. Μετά: Hermitian επιβολή για πραγματικά σήματα.

# Δουλεύουμε μόνο με μιγαδικά; Όχι - είναι εργαλείο

Τρέχον σήμα: x(t) πραγματικό, X(ω) μιγαδικό



## Γιατί χρησιμοποιούμε μιγαδικά αν το σήμα είναι πραγματικό;

- Ένας πραγματικός αριθμός  $|X|$  δεν αρκεί - χάνεις τη φάση.
- Δύο πραγματικά (μέτρο και φάση) είναι ισοδύναμο με ένα μιγαδικό ( $\text{Re} + j\text{Im}$ ).
- Τα μιγαδικά κάνουν την αλγεβρα πιο απλή (γινόμενα, παράγωγοι, μετατοπίσεις).
- Το x(t) επιστρέφει πραγματικό μετά τη σύνθεση: Το αντίστροφο CTFT συνθέτει συμμετρικά τα +ω και -ω μέρη, ώστε για πραγματικά σήματα το τελικό x(t) να είναι πραγματικό.

### ΣΥΜΒΟΛΑΙΟ

x(t) πραγματικό, X(ω) μιγαδικό. Το μιγαδικό είναι εργαλείο.

### ΠΡΟΣΟΧΗ

Μη μπερδεύεις "μιγαδικό" με "δεν φυσικό". Παραμένει πληροφορία.

### ΕΛΕΓΧΟΣ

Αν x(t) πραγματικό, ποια Hermitian συνθήκη επιβάλλεται; σ19.

**ΕΚΦΩΝΗΣΗ:** Δίνεται  $x(t)=\text{rect}(t/T)$  με  $T=2$ . Προβλέψτε χωρίς υπολογισμό: ποια είναι η τιμή  $X(0)$  και πού βρίσκεται το πρώτο μηδενικό του  $X(\omega)$ ; (Απ:  $X(0)=T=2$ ,  $\omega_1=\pi$ )

$$X(0) = \text{εμβαδόν του } x(t) \cdot \text{πρώτο μηδενικό sinc} = 2\pi/T$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Δεν χρειάζεται ολοκλήρωμα για κάθε ερώτηση. Δύο βασικές τιμές διαβάζονται απευθείας από το σχήμα:  $X(0) = \text{εμβαδόν}$ , και  $2\pi/T = \text{πρώτο μηδενικό για rect}$ .

## ΕΡΩΤΗΣΗ

Για  $T=2$ :  $X(0)=?$  και πρώτο μηδενικό σε  $\omega=?$

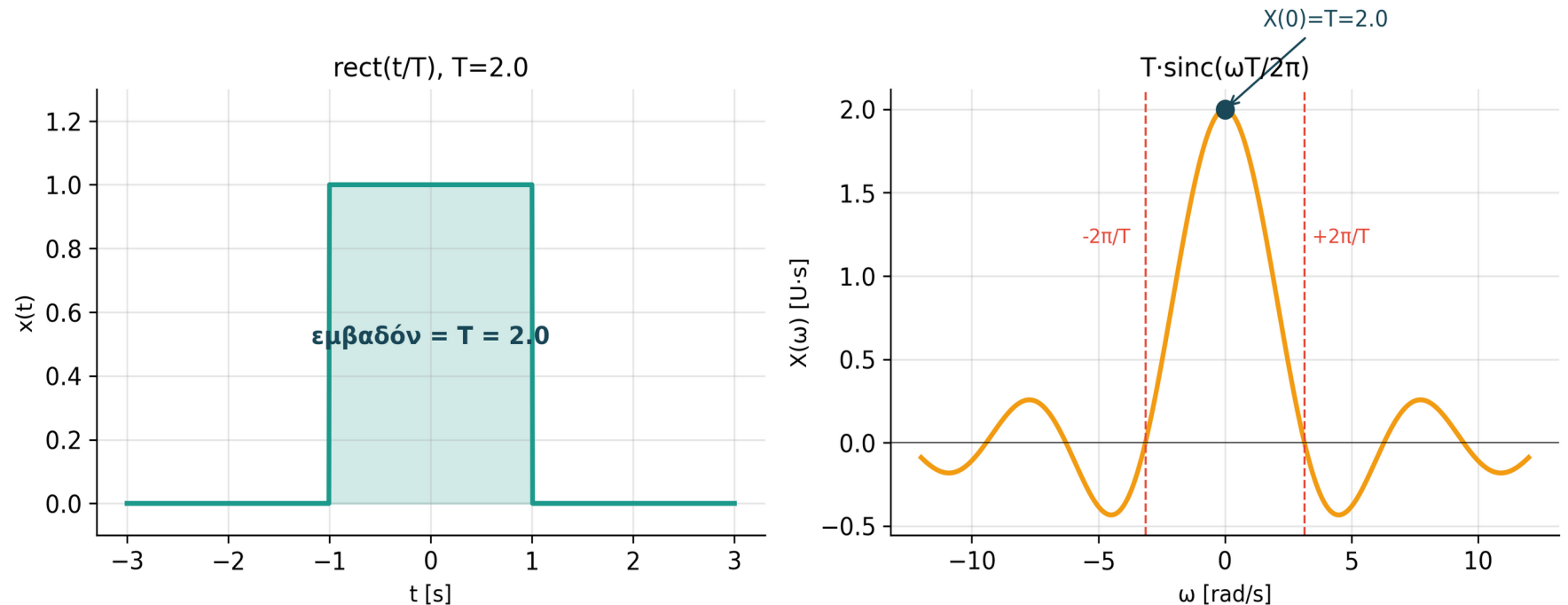
## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- $X(0) = \text{εμβαδόν} = T \cdot 1 = 2$  ( $\int x(t) dt \rightarrow \text{DC} = \text{εμβαδόν}$ ).
- 1ο μηδενικό sinc:  $\omega T/2\pi = 1 \rightarrow \omega_1 = 2\pi/T = \pi \approx 3.14 \text{ rad/s}$ .
- $\omega_1 = \text{δείκτης εύρους ζώνης}$  — ενέργεια στον κύριο λοβό  $[-\omega_1, +\omega_1]$ .
- Διαικότητα: στενό  $x(t) \rightarrow \text{ΜΙΚΡΟ } X(0)=T$  αλλά μεγάλο BW (αντιστροφή).

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Επανάλαβε για  $T=4$ :  $X(0)=4$ , πρώτο μηδ.  $=\pi/2 \approx 1.57 \text{ rad/s}$ .

Πρόβλεψη + επαλήθευση: εμβαδόν  $\rightarrow X(0)$ , πρώτο μηδενικό  $\rightarrow$  εύρος ζώνης



Αριστερά: σχήμα στον χρόνο με εμβαδόν= $T$ . Δεξιά: sinc με  $X(0)=T$  και 1ο μηδ.  $2\pi/T$ .

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$t$  [s],  $x(t)$ ·[U]. Φάσμα:  $\omega$  [rad/s],  $X(\omega)$  [U·s].

## ΠΡΟΣΕΧΩ

$X(0) = \text{κορυφή κεντρικού λοβού}$  (= εμβαδόν του  $x(t)$ ). ΟΧΙ το εμβαδόν του sinc.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν:  $\text{rect}$  στον χρόνο. Μετά: επαλήθευση με κώδικα.

Επαλήθευση:  $X(0) = T$  και πρώτο μηδενικό =  $2\pi/T$  (για T=1, 2, 4)

### Στόχος

Octave script: X(ω) για rect(t/T) με T=1, 2, 4 και επαλήθευση:

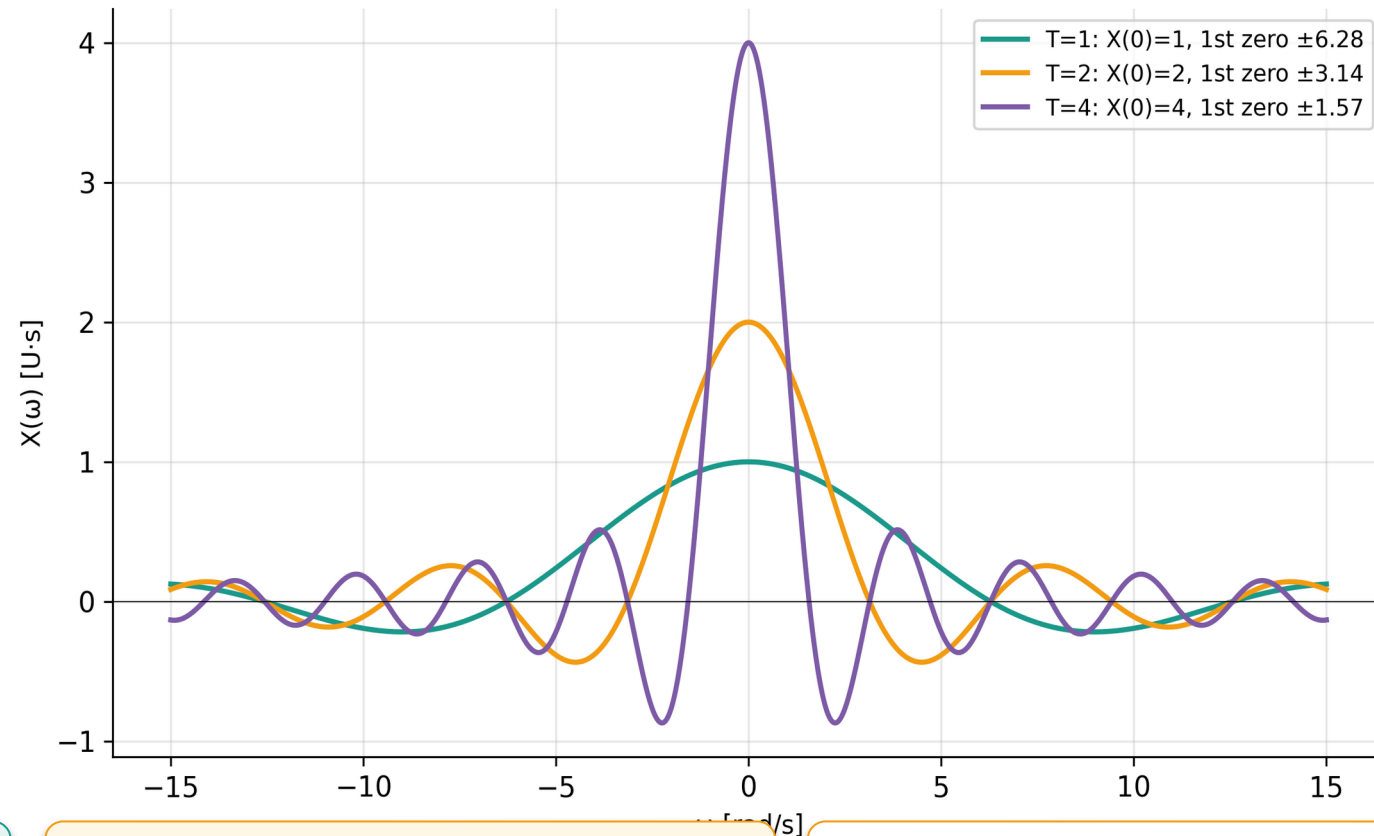
- $X(0) = T$  (εμβαδόν)
- 1ο μηδενικό =  $2\pi/T$

### ΤΙ ΒΛΕΠΟΥΜΕ:

3 sinc καμπύλες. Μεγάλο T → υψηλό X(0), στενός λοβός.  
Διακρίση: αργό x(t) → συμπακνωμένο X(ω).

```
clear; close all; clc; pkg load signal
% --- anonymous helpers (W04 σύμβαση) ---
u = @(t) (t>=0);
rect = @(t,a,b) ((t>=a) & (t<=b));
% --- επαλήθευση rect ↔ T·sinc(ωT/2π) ---
w = linspace(-15, 15, 2001);
for T = [1 2 4]
    X = T * sinc(w*T/(2*pi));
    plot(w, X, 'LineWidth', 1.8); hold on;
    printf('T=%d: X(0)=%.2f\n', T, T);
end
xlabel('\omega'); ylabel('X(\omega)');
legend('T=1','T=2','T=4');
title('rect \lefttrightharpoonrightarrow sinc'); grid on;
xlim([-15 15]);
```

Octave verification:  $\text{rect}(t/T) \rightarrow T \cdot \text{sinc}(\omega T/2\pi)$  για T=1,2,4



### ΤΙ ΠΕΡΙΜΕΝΩ

$X(0) = T$  (επαλήθευση: 1, 2, 4). Πρώτα μηδενικά σε  $\omega=2\pi, \pi, \pi/2$ .

### ΚΛΑΣΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

$\text{sinc}(x)$  στο Octave/MATLAB είναι  $\sin(\pi x)/(\pi x)$ , όχι  $\sin(x)/x$ .  
Πρόσεξε τον παράγοντα  $\pi$ .

### ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Άρτιο σήμα στον χρόνο → πραγματικό φάσμα. Άρα  $\angle X(\omega) = 0$  ή  $\pi$  (όχι ενδιάμεσες τιμές).

Τι παθαίνει η FS όταν η περίοδος μεγαλώνει - σύνδεση προς CTFT

$$x_{T_0}(t) = \sum_m \text{rect}((t - mT_0)/T) \quad \text{όταν } T_0 \rightarrow \infty : \quad x(t) = \text{rect}(t/T)$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Η ιστορία του W07 αρχίζει όταν σταματά η περιοδικότητα. Αν η περίοδος  $T_0$  μεγαλώνει, οι παλμοί απομακρύνονται. Στο όριο μένει ένας μόνο παλμός.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

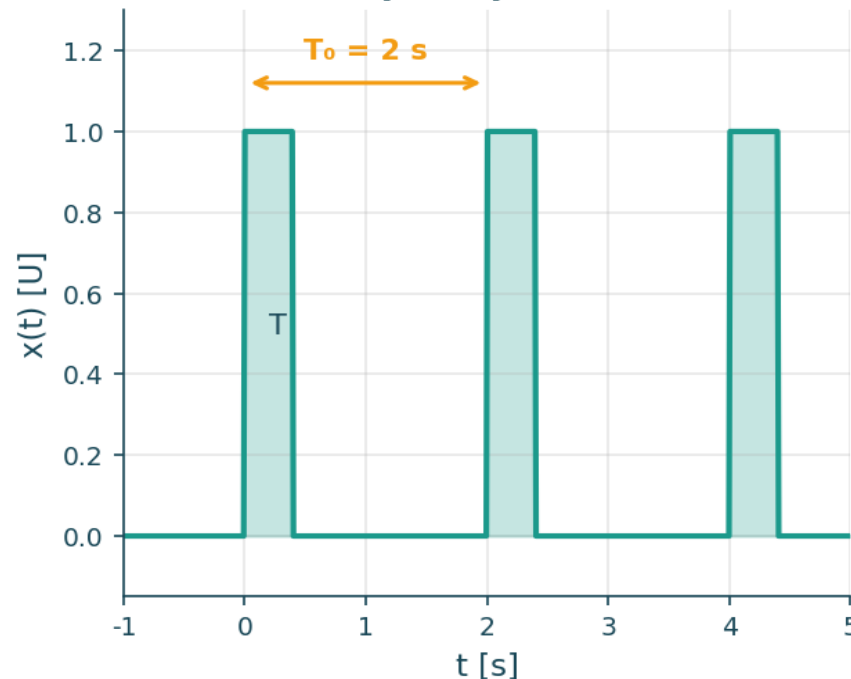
Πρόβλεψη: τι συμβαίνει στο  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  όταν το  $T_0$  μεγαλώνει

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Αυτό εξηγεί γιατί το άθροισμα της FS γίνεται ολοκλήρωμα του CTFT στο όριο.

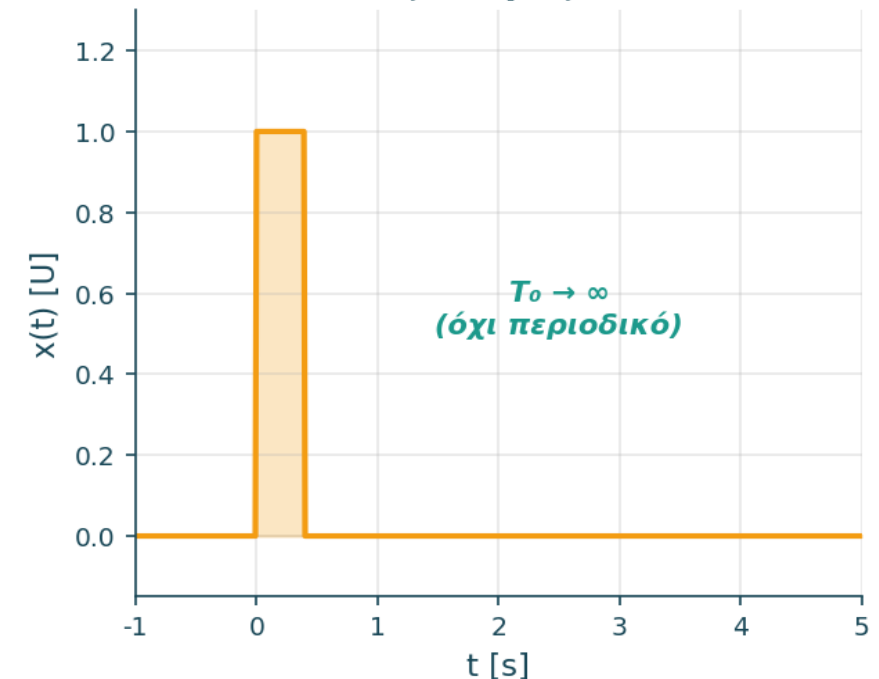
Μίνι: σχεδίασε στο χαρτί τι γίνεται όταν  $T_0 = 5T$ . Και όταν  $T_0 = 100T$ ;  
Παράδειγμα:  $T_0 = 10T \rightarrow \sim 10$  αρμονικές.  
 $T_0 \rightarrow \infty \rightarrow$  φάσμα συνεχές.

## Παλμοσειρά (W06)



Τι βλέπουμε: η ίδια  $\text{rect}$  ως παλμοσειρά (αριστερά) και ως μονός παλμός (δεξιά). Καθώς  $T_0$  αυξάνει, η παλμοσειρά τείνει στον μονό παλμό.

## Μονός παλμός (W07)



## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Χρόνος:  $t$  [s],  $x_{T_0}(t)$  [U]. Δεν είμαστε ακόμα στο φάσμα.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη πεις ότι απλώς "χάνονται" οι αρμονικές. Πυκνώνουν σε συνεχές  $\omega$ .

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: άξονες FS/CTFT/FFT. Μετά: σωστή κλιμάκωση  $T_0 \Delta \omega$ .

# Ποια ποσότητα ενώνει πραγματικά FS και CTFT;

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Η μαθηματική ποσότητα που συνδέει FS με CTFT είναι  $T_0 a_k$ .

$T_0 \cdot a_k \approx X(k\omega_0)$  όταν  $T_0$  μεγαλώνει

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

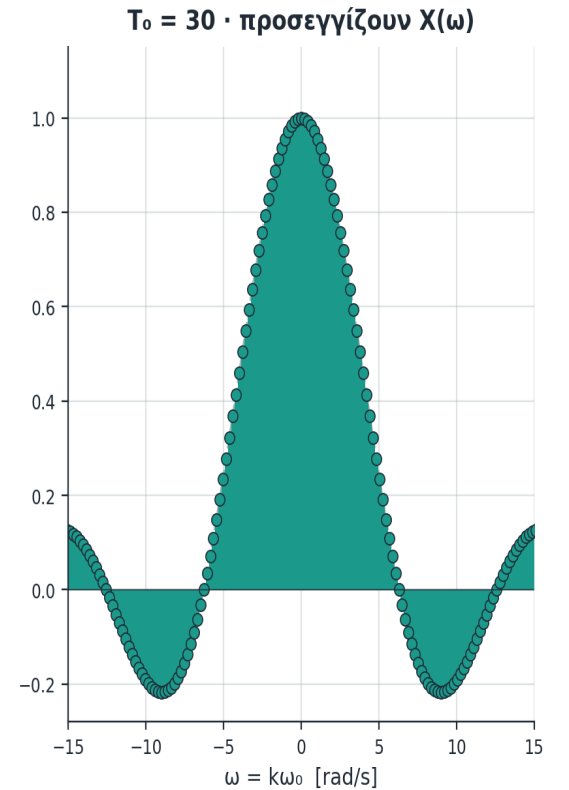
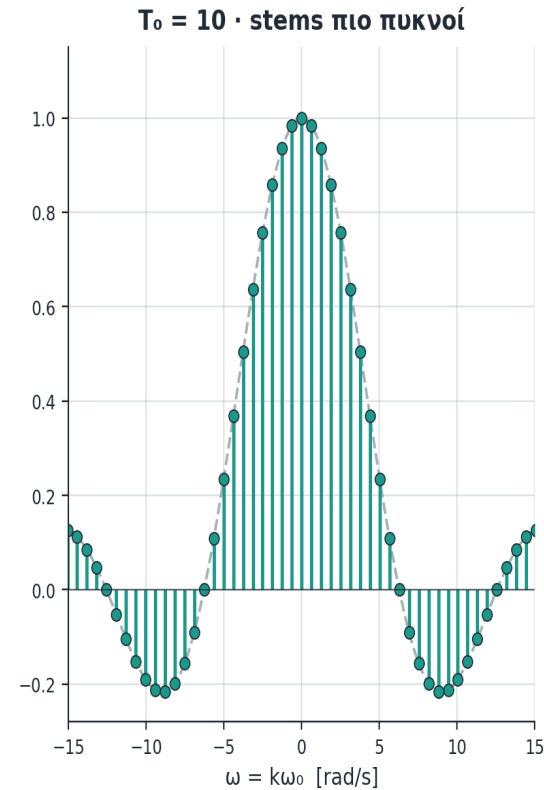
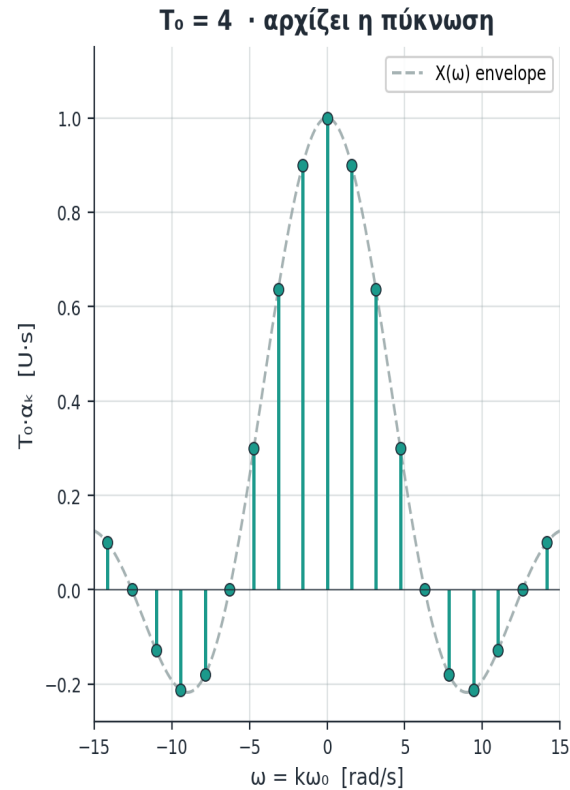
Για περιοδοποιημένο παλμό (παλμοσειρά με μεγάλη περίοδο  $T_0$ ) δεν συγκρίνουμε απευθείας το  $a_k$  με το  $X(\omega)$ . Η ποσότητα που πλησιάζει το συνεχές envelope είναι το  $T_0 \cdot a_k$

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Πρόβλεψη: αν σχεδιάσει μόνο  $|a_k|$ , θα δούμε σωστά το CTFT envelope

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Αυτό είναι λεπτόμερεια αλλά κρίσιμο: αλλιώς η γέφυρα FS  $\rightarrow$  FT δίνει λάθος κλίμακα.



Τι βλέπουμε: για  $T_0 = 4, 10, 30$  σχεδιάζουμε  $T_0 \cdot a_k$  ως stems vs  $\omega = k \cdot \omega_0$ . Καθώς το  $T_0$  μεγαλώνει, τα stems πυκνώνουν και προσεγγίζουν το συνεχές  $X(\omega)$  (γκρι διακεκομμένο envelope).

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

άξονας x:  $\omega = k\omega_0$  [rad/s]. άξονας y:  $|T_0 a_k|$  [U·s], όχι  $|a_k|$ .

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Προσοχή: τα stems δείχνουν δείγματα του συνεχούς envelope  $X(\omega)$ , όχι το CTFT αυτό καθαυτό.

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν:  $T_0 \rightarrow \infty$ . Μετά: ορισμός CTFT analysis/synthesis.

Η κατεύθυνση της πράξης είναι μέρος της έννοιας: χρόνος ↔ συχνότητα και πίσω

$$X(\omega) = \int x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \approx \quad x(t) = (1/2\pi) \int X(\omega) e^{+j\omega t} d\omega$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

CTFT έχει 2 κατευθύνσεις. Ανάλυση = πάω σε ω.  
Σύνθεση = επιστρέφω σε t.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Γιατί υπάρχει 1/(2π) μόνο στη σύνθεση και όχι στην ανάλυση;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Επειδή ο άξονας είναι ω σε rad/s. Αν δουλεύεις με f σε Hz, 1/(2π) εξαφανίζεται.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γράψε τον ορισμό CTFT και τον αντίστροφο. Δείξε πού μπαίνει 1/(2π).

## ΑΝΑΛΥΣΗ

$$X(\omega) = \int x(t) e^{-j\omega t} dt$$

x(t)



X(ω)



$$\text{ΣΥΝΘΕΣΗ: } x(t) = (1/2\pi) \int X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ο παράγοντας 1/(2π) μπαίνει στην αντίστροφη σχέση όταν δουλεύουμε σε ω [rad/s].

Το πάνω βέλος είναι ανάλυση, το κάτω είναι σύνθεση. Δεν είναι ίδια πράξη χωρίς τον 1/(2π).

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [s] ή ω [rad/s]. Στο f [Hz] ο παράγοντας 1/(2π) χάνεται.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Η σύνθεση δεν είναι "αντιστρόφως ανάλογη" — είναι ολοκλήρωμα σε όλο το ω.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: ορισμός X(ω). Μετά: λεξιλόγιο φάσματος.

# Λεξιλόγιο: τι σημαίνει "παλμός", "BW", "envelope"

W06

 $x(t)$  $X(\omega)$  $\phi/BW$ 

RC

FFT

Όροι που χρειάζεσαι για W07

Πριν προχωρήσουμε σε rect/sinc, ορίζουμε ξεκάθαρα 5 όρους

Παλμός · διάρκεια  $T$  · Envelope (Περιβάλλουσα) · πρώτο μηδενικό · εύρος ζώνης (BW)

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Λεξιλόγιο πριν την άσκηση. "Παλμός" = μη περιοδικό σήμα ενέργειας. "Envelope" = το συνεχές σχήμα γύρω από διακριτά σημεία. "Διάρκεια  $T$ " = effective width.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

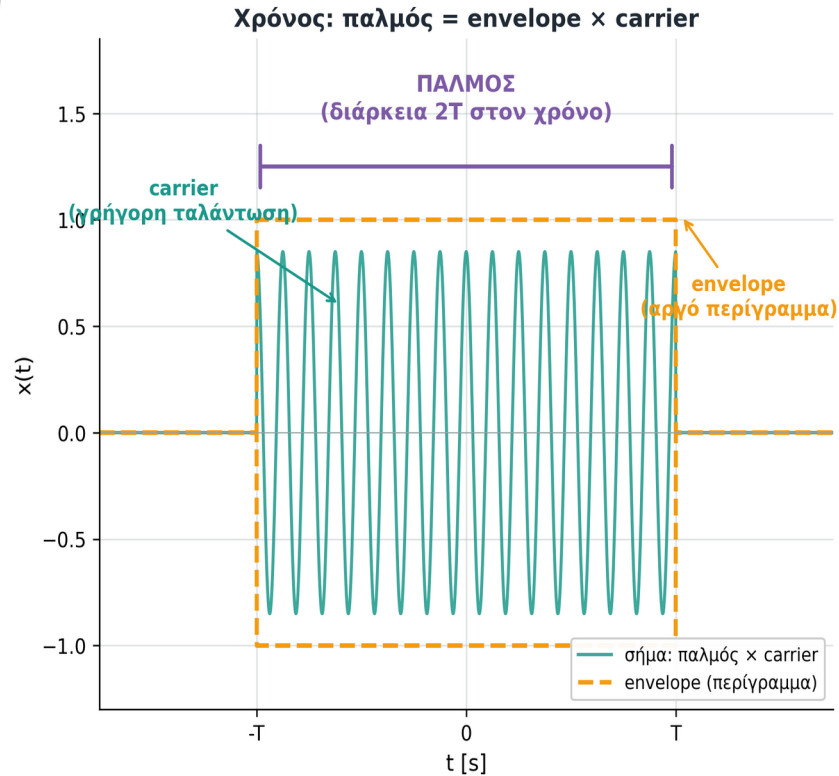
Τι είναι envelope σε σύγκριση με το πραγματικό σήμα;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

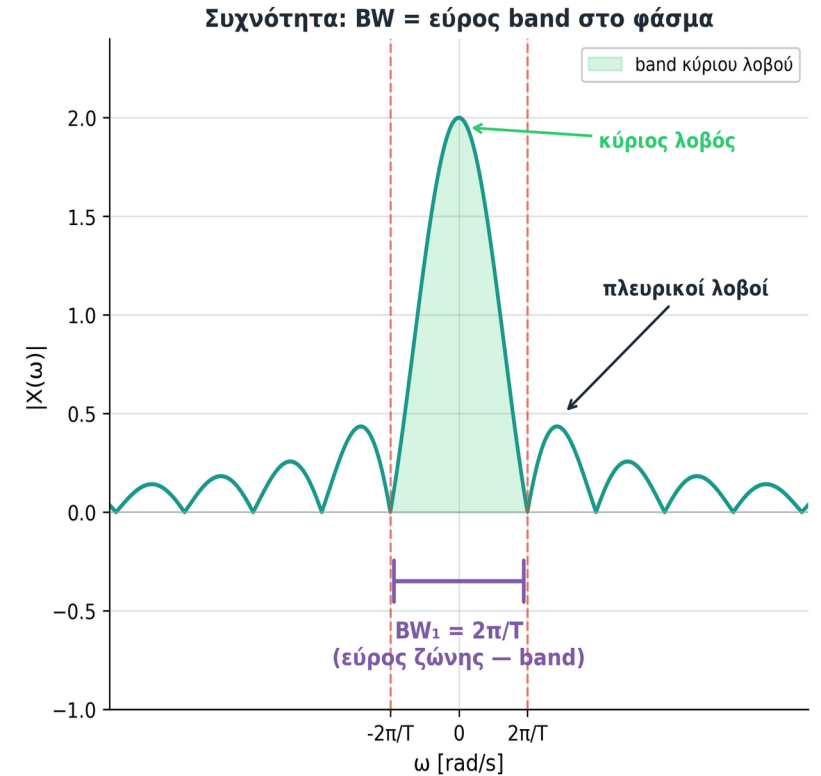
Envelope είναι μια "καμπύλη που αγκαλιάζει": π.χ. σε διακριτά stems  $|a_k|$ , το envelope είναι μια συνεχής  $X(\omega)$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ποιο είναι το envelope του  $\cos(t) \cdot \text{rect}(t/4)$ ;  
(Απ:  $\text{rect}(t/4) \cdot \dots$ )



Σχηματική επεξήγηση των βασικών όρων με παράδειγμα παλμού.



## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Διάφορα: χρόνος  $t$  [s], συχνότητα  $\omega$  [rad/s] ανάλογα το διάγραμμα.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

"Διάρκεια" δεν είναι μονόσημη: rect έχει σαφή  $T$ , Gaussian όχι.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: μέτρο/φάση. Μετά: rect παλμός και sinc φάσμα.

### Ενότητα 3

# Στενός χρόνος → πλατύ φάσμα

Από rect στο sinc,  $X(0)$  ως εμβαδόν, μηδενικά και λοβοί

#### Ξέρω ήδη

ότι το rect είναι πεπερασμένο σήμα  
ενέργειας

#### Τώρα ανοίγει

το ζεύγος  $\text{rect} \leftrightarrow T \cdot \text{sinc}(\omega T/2\pi)$ ,  $X(0)=T$   
και 1ο μηδενικό  $2\pi/T$

#### Στο τέλος μπορώ

να ποσοτικοποιώ το συμβιβασμό  
διάρκειας-εύρους ζώνης

# sinc(x): η συνάρτηση που εμφανίζεται παντού

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον:  $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ 

Η κανονικοποιημένη sinc:  $\sin(\pi x)/(\pi x)$  — η συνάρτηση που θα δούμε σαν φάσμα του rect

$$\text{sinc}(0) = 1 \quad \cdot \quad \text{sinc}(k) = 0 \text{ για } k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \cdot \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(x) dx = 1$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Πριν δείξουμε ότι  $\text{rect} \leftrightarrow \text{sinc}$ , ορίζουμε την sinc μόνη της.

- Το όριο  $\sin(\pi x)/(\pi x)$  στο  $x=0$  είναι 1 (όχι 0/0 — εφαρμόζουμε L'Hôpital).
- Μηδενίζεται ακριβώς στα  $x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$
- Πλευρικοί λοβοί φθίνουν  $\sim 1/x$  και αλλάζουν πρόσημο.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

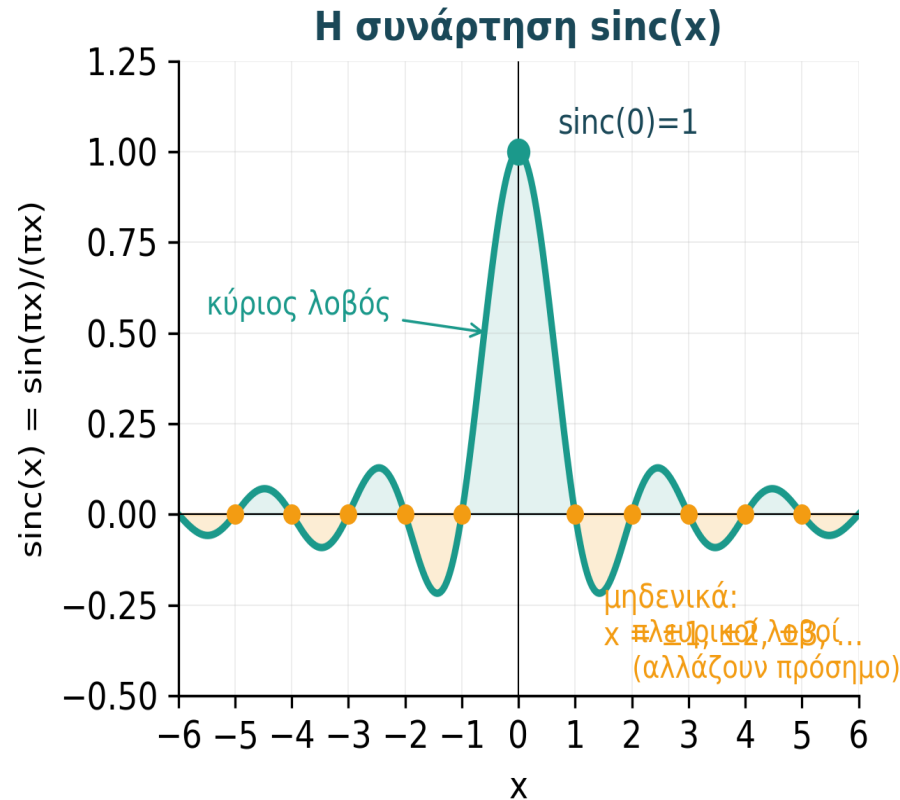
Πόσο είναι η  $\text{sinc}(0)$ ;  
Σε ποιο  $x$  μηδενίζεται 1η φορά;  
(Απ:  $\text{sinc}(0)=1$ , 1ο μηδενικό σε  $x=1$ .)

## ΕΞΗΓΗΣΗ

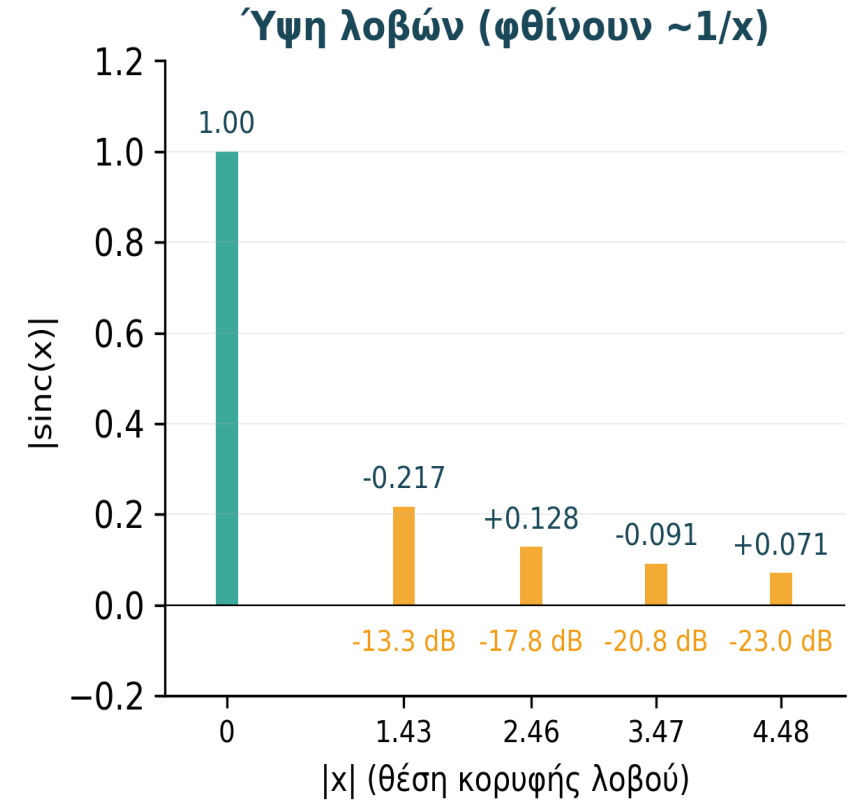
Σύμβαση που χρησιμοποιούμε ΠΑΝΤΟΥ στο deck:  
 $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$  (normalized)  
Άλλη παραλλαγή:  $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$  — μηδενικά σε κτ, όχι σε κ.  
Στο deck γράφουμε  $X(\omega)$  του rect ως  $T \cdot \text{sinc}(\omega T/2\pi)$  — η normalized.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ύψη πλευρικών λοβών (απόλυτη τιμή):  
1ος  $\approx 0.217$  (-13.3 dB)  
2ος  $\approx 0.128$  (-17.8 dB)  
3ος  $\approx 0.091$  (-20.8 dB)



Αριστερά: η sinc στον  $x$ . Δεξιά: ύψη πλευρικών λοβών — φθίνουν, αλλάζουν πρόσημο.



## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$x$  αδιάστατο.  $\text{sinc}(x)$  αδιάστατο. Το dB ύψος =  $20 \cdot \log_{10} |\text{sidelobe}|$ .

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη συγχέεις τις 2 συμβάσεις: η normalized ( $\sin(\pi x)/(\pi x)$ ) έχει μηδενικά σε ακέραιους.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: λεξιλόγιο. Μετά: rect παλμός και ζεύγος  $\text{rect} \leftrightarrow \text{sinc}$ .

# Ορθογώνιος παλμός $\text{rect}(t/T)$ : ορισμός και βασικά μεγέθη

W06

x(t)

X( $\omega$ ) $\phi$ /BW

RC

FFT

Τρέχον:  $x(t)=\text{rect}(t/T)$ 

Ο πιο απλός μη περιοδικός παλμός: 1 μέσα στο διάστημα, 0 έξω

$$\text{rect}(t/T) = 1 \text{ αν } |t| \leq T/2, \text{ 0 αλλιώς εμβαδόν} = T$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Το  $\text{rect}$  είναι σήμα ενέργειας:  $\int |x|^2 dt = T < \infty$ . Άρα δέχεται CTFT. Είναι πεπερασμένη υποστήριξης. Όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά (εμβαδόν, διάρκεια, ασυνέχειες) περιγράφουν το παλμό.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Για τριπλάσιο  $T$ , το εμβαδόν τριπλασιάζεται. Το BW;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

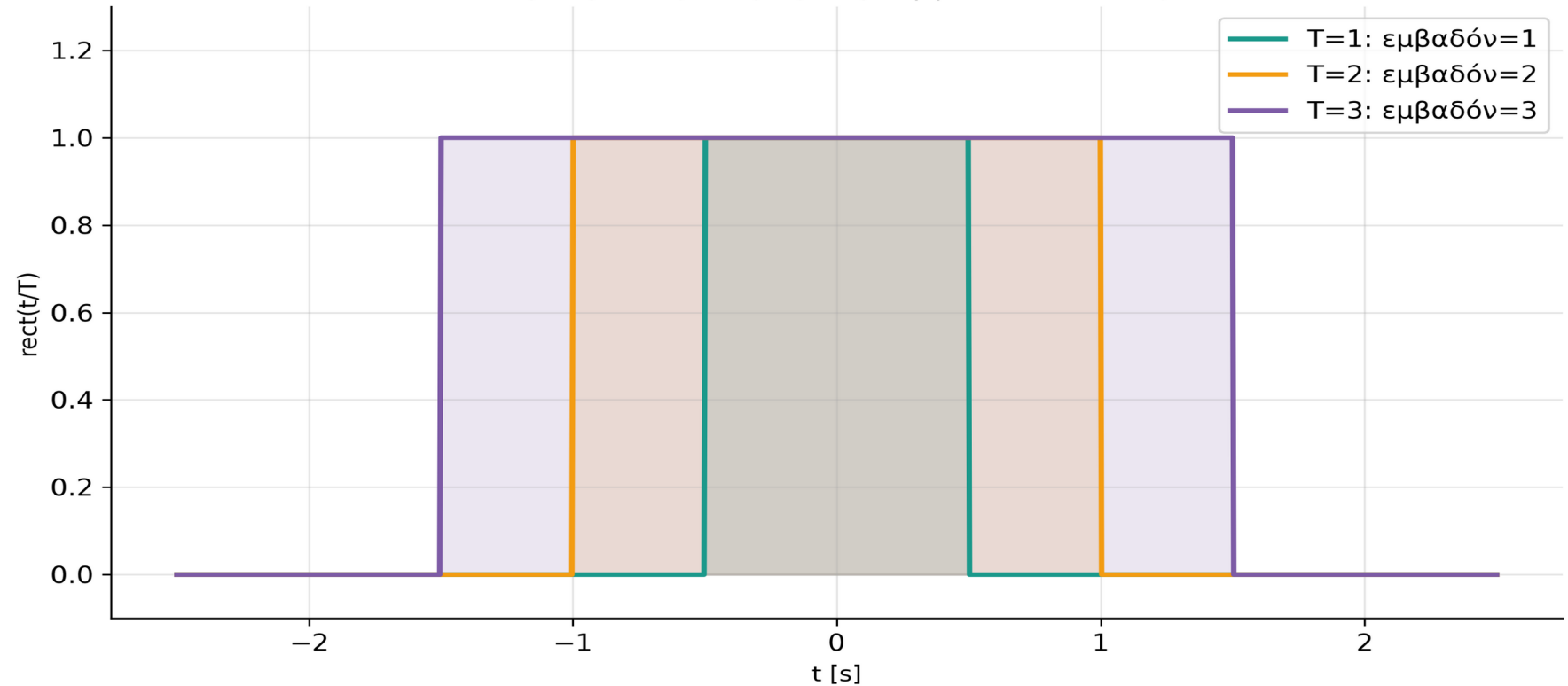
Εμβαδόν =  $T$  (γραμμικά).  $BW = 2\pi/T$  (αντιστρόφως ανάλογα). Άρα: τριπλασιάζεις  $T \rightarrow$  εμβαδόν  $\times 3$ ,  $BW \div 3$ . Time-bandwidth product.

Παράδειγμα:  $T=2 \rightarrow$  εμβ.=2,  $BW_1=\pi$ .  $T=4 \rightarrow$  εμβ.=4,  $BW_1=\pi/2$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γράψε  $x(t)=\text{rect}(t/T)$  ως  $y(t)=\text{rect}((t-t_0)/T)$ . Πώς φαίνεται;

Ορθογώνιος παλμός: 1 για  $|t| \leq T/2$ , 0 αλλιώς



3 παλμοί  $\text{rect}$  διαφορετικού πλάτους  $T$  — όλοι 1 σε ύψος, διαφορετικοί σε διάρκεια.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

$t$  [s],  $\text{rect}(t/T)$  αδιάστατο. Εμβαδόν =  $T$  έχει μονάδα [s]. Μη συγχέεις  $T$  (διάρκεια) με  $T_0$  (περίοδος). Το  $\text{rect}$  δεν έχει  $T_0$ .

Πριν: λεξιλόγιο. Μετά: το ζεύγος  $\text{rect} \leftrightarrow \text{sinc}$ .

Ζεύγος  $\text{rect} \leftrightarrow \text{sinc}$ : τι ακριβώς δείχνει και πού μηδενίζεται.

$\text{rect}(t/T) \leftrightarrow T \cdot \text{sinc}(\omega T/2\pi)$  - πρώτα μηδενικά:  $\omega = \pm 2\pi/T$

### ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ

Ο ορθογωνικός παλμός είναι η πρώτη πλήρης «ιστορία» χρόνου-συχνότητας. Απλός στον χρόνο, αλλά απλώνεται σε όλο το φάσμα μέσω μιας sinc.

### ΕΞΗΓΗΣΗ

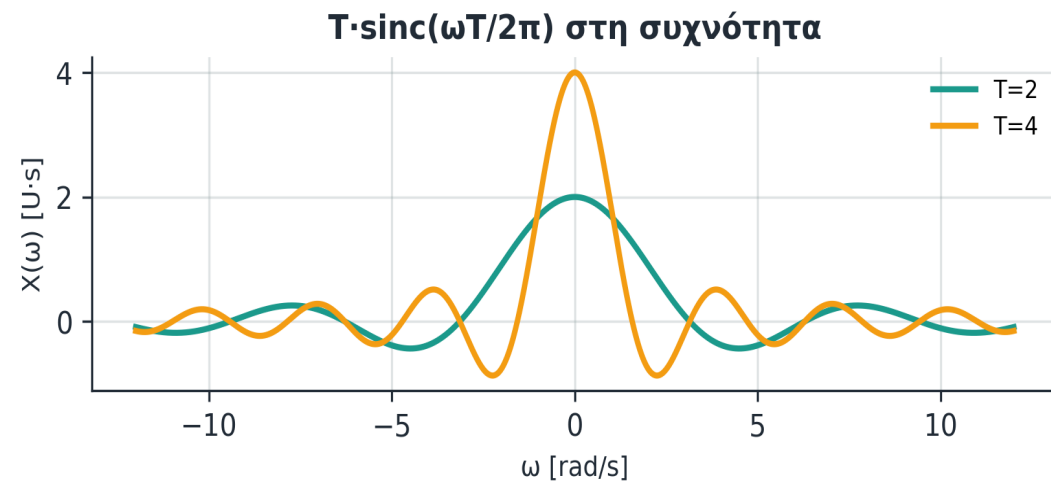
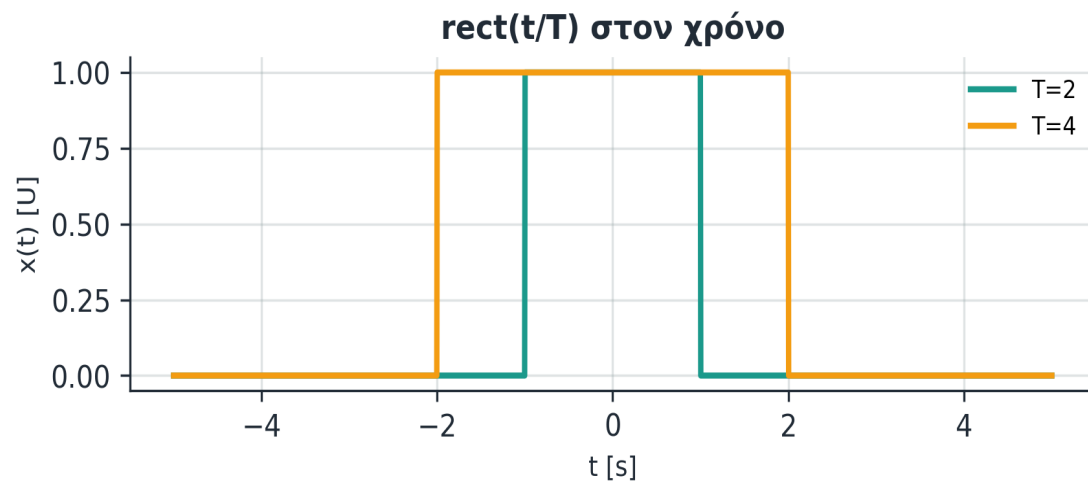
Όταν T διπλασιάζεται: το  $X(0) = T$  διπλασιάζεται (εμβαδόν στον χρόνο), αλλά τα μηδενικά της sinc έρχονται πιο κοντά → στενότερο εύρος ζώνης.

### Παράδειγμα:

$\omega = \pi$  με  $T=2 \rightarrow \text{sinc}(0.5) \approx 0.637$ .  $\omega = 2\pi \rightarrow \text{sinc}(1) = 0$ .

### ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για  $T = 4$  βρες  $X(0)$  και το πρώτο μηδενικό σε rad/s.



Τι βλέπουμε:  $\text{rect}(t/T)$  στον χρόνο και η αντίστοιχη  $T \cdot \text{sinc}(\omega T/2\pi)$  στο φάσμα, για  $T=2$  (πιο πλατύ φάσμα) και  $T=4$  (στενότερο φάσμα).

### ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$t$  [s],  $x(t)$  [U]. Φάσμα:  $\omega$  [rad/s],  $X(\omega)$  [U·s].

### ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη γράψεις sinc με f αν οι άξονες είναι σε  $\omega$  χωρίς να δηλώσεις τη μετατροπή.

### ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: διάρκεια. Μετά: οπτικοποίηση με κώδικα Octave και πρώτο μηδενικό.

## 3 πληροφορίες από το sinc: ύψος κορυφής, θέση μηδενικών, λοβοί

$$X(0) = T \text{ (εμβαδόν)} \cdot \text{μηδενικά σε } \pm 2\pi n/T \cdot \text{λοβοί φθίνουν } 1/\omega$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Ο παλμός έχει το πιο έντονο φασματικό περιεχόμενο γύρω από τη μηδενική συχνότητα. Όσο απομακρυνόμαστε από το  $\omega=0$ , το φάσμα ταλαντώνεται, μηδενίζεται σε συγκεκριμένες συχνότητες και οι λοβοί γίνονται όλο και μικρότεροι.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

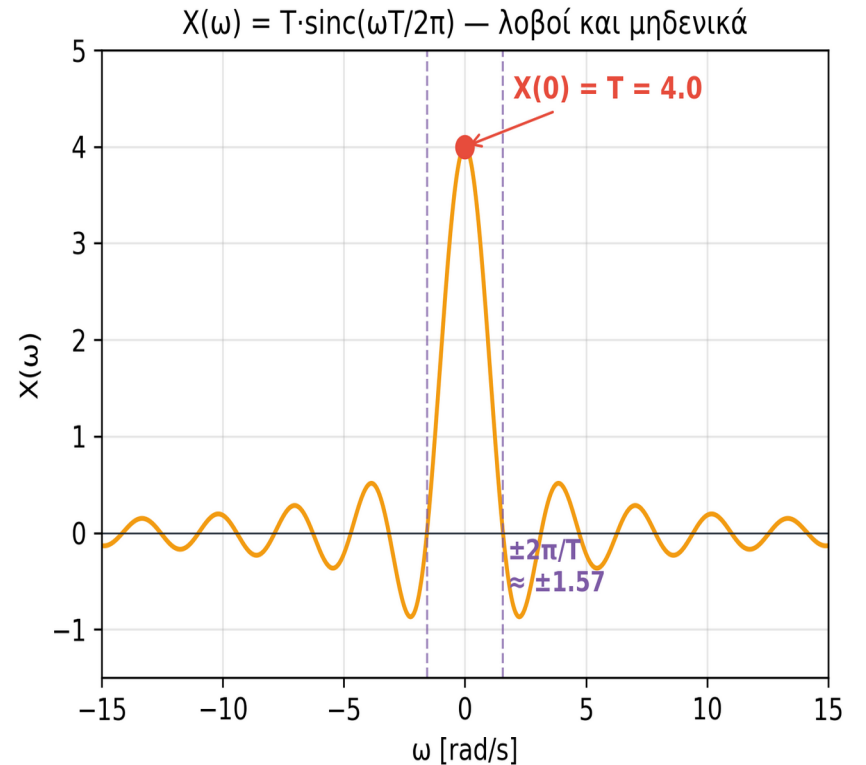
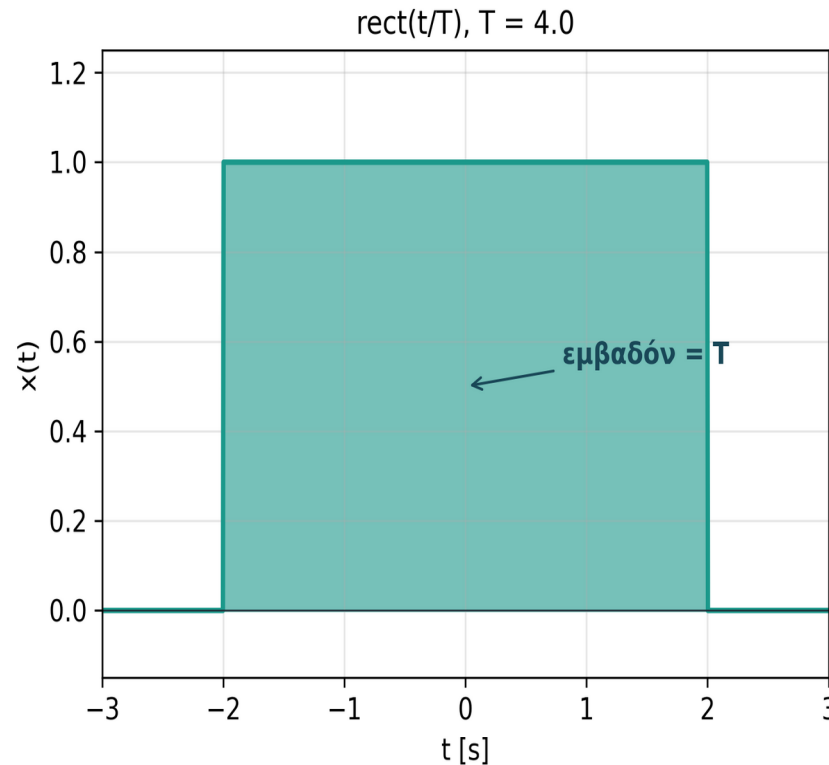
Για  $T=4$ : βρες κορυφή κεντρικού λοβού  $X(0)$ , πρώτο μηδενικό και συνολικό πλάτος.  
Απ:  $X(0)=4$ , 1ο μηδενικό  $\omega=\pm\pi/2$ , πλάτος κεντρικού λοβού =  $\pi$  rad/s.

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Το ύψος  $X(0)=T$  προέρχεται από το εμβαδόν στο χρόνο. Τα μηδενικά είναι όπου  $\sin(\omega T/2)=0$  αλλά  $\omega \neq 0$ . Οι πλευρικοί λοβοί φθίνουν περίπου ως  $1/\omega$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για  $T=2$ , βρες 1ο και 2ο μηδενικό. (Απ:  $\pi$ ,  $2\pi$ .)



$X(0)=T$  κορυφή,  $\pm 2\pi/T$  πρώτα μηδενικά, εναλλασσόμενοι πλευρικοί λοβοί.

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  [rad/s].  $X(\omega)$  [U·s]. Διακεκομμένες δείχνουν  $\pm 2\pi/T$ .

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη πεις "πρώτο μηδενικό =  $\pi/2$ " χωρίς να ξέρεις πόσο είναι το T.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: ζεύγος rect  $\leftrightarrow$  sinc. Μετά: αλλαγή T  $\rightarrow$  αλλαγή sinc.

# Τι αλλάζει στο sinc όταν αλλάζει το T;

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: rect για T=1, 2, 4

Time-bandwidth duality: στενός παλμός → πλατύ φάσμα, και αντίστροφα

$2T \rightarrow X(\theta)$  διπλασιάζεται, μηδενικά πλησιάζουν, BW μειώνεται

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Όταν αλλάζεις το T βλέπεις την αντίστροφη σχέση διάρκειας-εύρους ζώνης. Αυτό είναι η βάση όλης της σχεδίασης σημάτων (modulation, sampling, channel design).

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

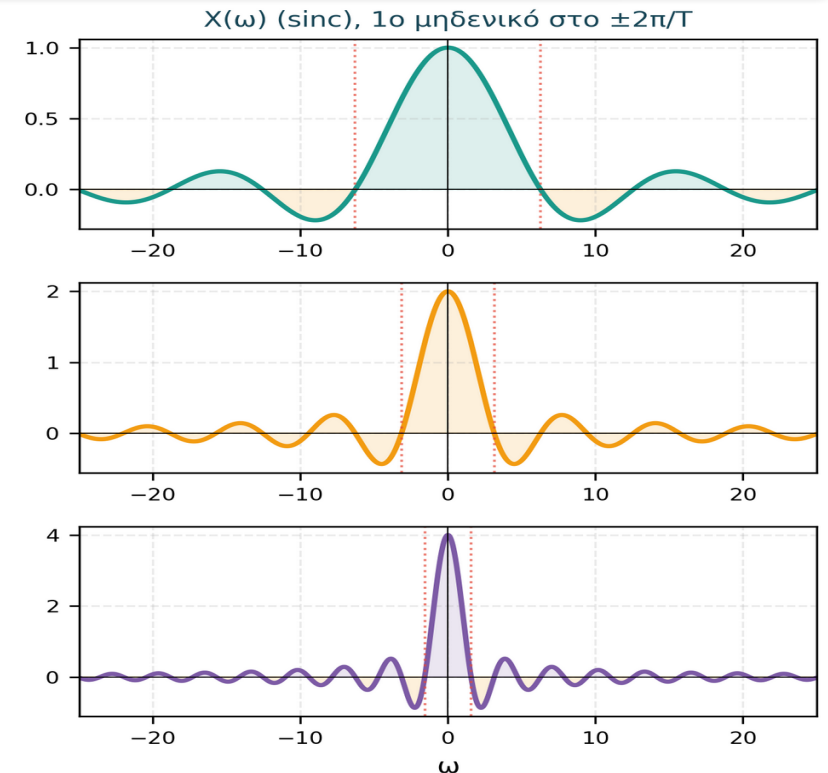
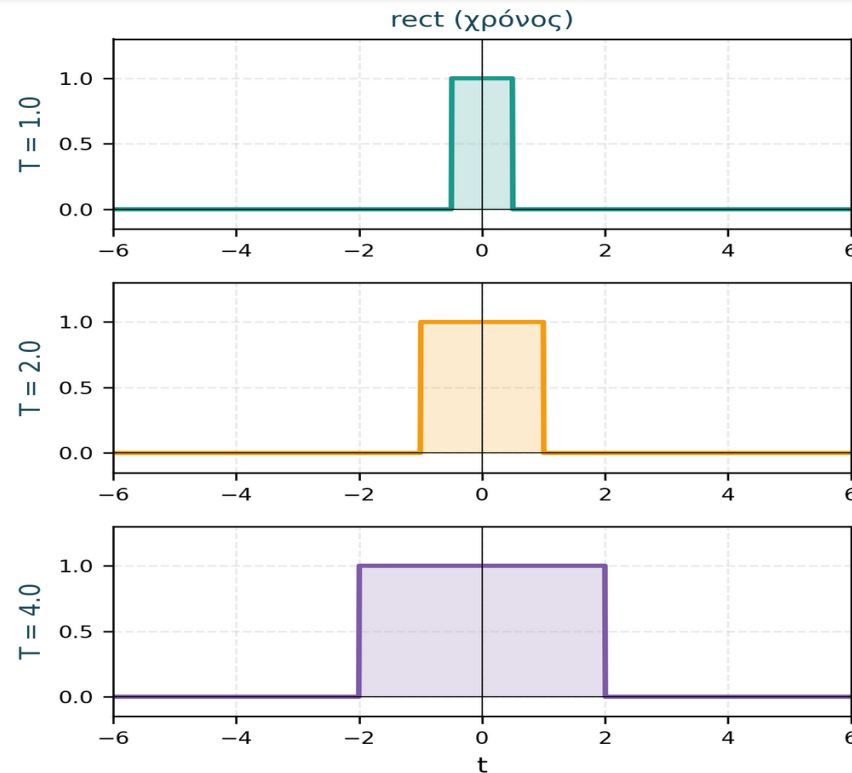
Διπλασιάζεις T. Το BW πέφτει στο μισό. Το εμβαδόν;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Εμβαδόν:  $\times 2$ . BW (1ο μηδενικό):  $/2$ . Time-bandwidth product  $BW \cdot T$  παραμένει σταθερό ( $=2\pi$  για rect). Αυτό είναι "uncertainty" στο σήμα-φάσμα δίπολο.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ποιο T θέλεις για  $BW=2$  rad/s. (Απ:  $T=\pi \approx 3.14$ .)



Καθώς το T αυξάνει: παλμός πλατύτερος στον χρόνο, sinc πιο στενό στη συχνότητα.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Πάνω: t [s]. Κάτω: ω [rad/s]. Σύγκριση 3 T τιμών.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Time-bandwidth product δεν είναι το ίδιο για όλα τα σχήματα. Για rect είναι  $2\pi$ .

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: λοβοί sinc. Μετά: ποσοτικός ορισμός BW.

Τριγωνικός παλμός:  $\text{tri}(t/T) \leftrightarrow T \cdot \text{sinc}^2(\omega T/2\pi)$ 

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

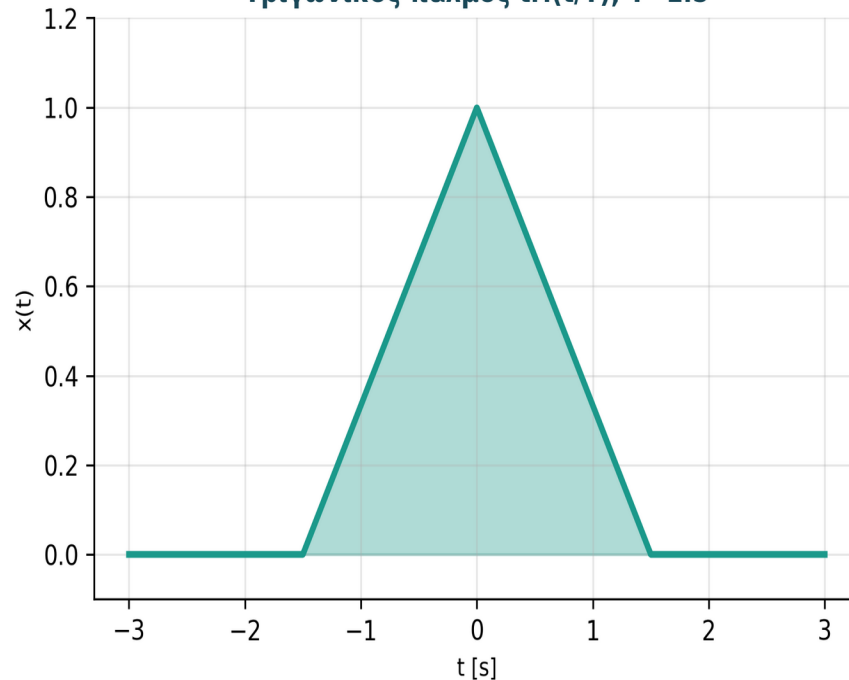
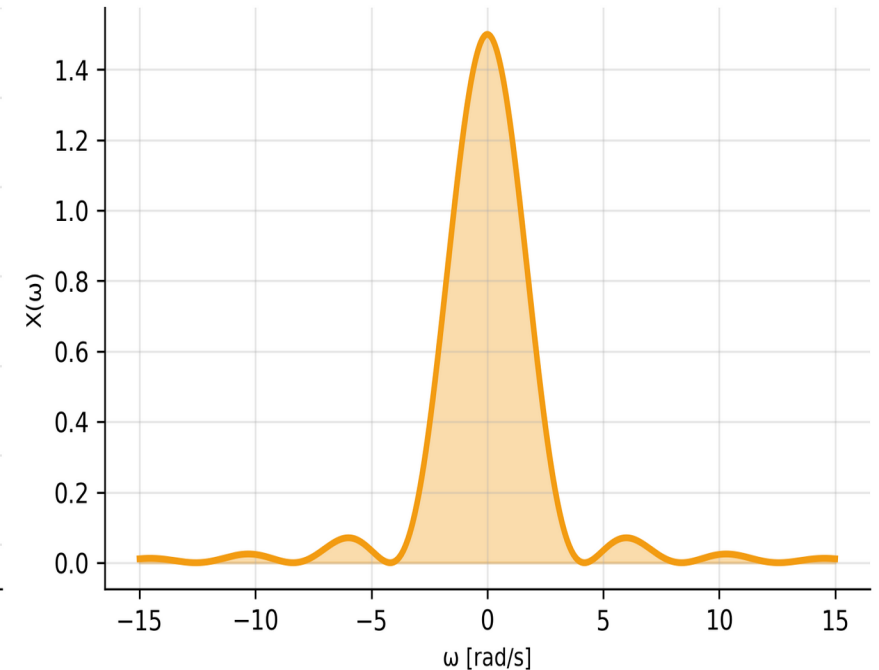
FFT

Τρέχον:  $\text{tri}(t/T)$  — πιο ομαλό από  $\text{rect}$ Ο τριγωνικός παλμός είναι ομαλότερος από  $\text{rect}$  — και αυτό φαίνεται στο φάσμα του

$$\text{tri}(t/T) = \max(1 - |t|/T, 0) \quad \Leftrightarrow \quad T \cdot \text{sinc}^2(\omega T/2\pi) \geq 0 \text{ πάντα}$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Τριγωνικός = ομαλός παλμός με γραμμικές πλευρές. Συνέλιξη δύο  $\text{rect}(t/(T/2))$  δίνει triangle (linearly).

Τριγωνικός  $\leftrightarrow$   $\text{sinc}^2$ : πιο ομαλό από  $\text{rect}$  → λιγότεροι πλευρικοί λοβοίΤριγωνικός παλμός  $\text{tri}(t/T)$ ,  $T=1.5$  $X(\omega) = T \cdot \text{sinc}^2(\omega T/2\pi) \geq 0$  πάνταΑριστερά: τριγωνικός  $\text{tri}(t/T)$ . Δεξιά: το φάσμα του  $\text{sinc}^2$  — πάντα μη αρνητικό, πιο γρήγορα φθινόν από  $\text{sinc}$ .

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Γιατί το φάσμα του triangle δεν έχει αρνητικές τιμές; (Απ: είναι  $\text{sinc}^2$ , άρα μη αρνητικό)

## ΕΞΗΓΗΣΗ

$\text{rect} * \text{rect} = \text{triangle}$  (στο χρόνο). Άρα  $\text{RECT} \times \text{RECT} = \text{sinc} \times \text{sinc} = \text{sinc}^2$  (στη συχνότητα, από convolution theorem). Όλο μη αρνητικό.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Συγκρίνε λοβούς του  $\text{sinc}^2$  με  $\text{sinc}$ . Ποιο πέφτει γρηγορότερα; (Απ:  $\text{sinc}^2$  — γιατί τετράγωνο μειώνει τους λοβούς)

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$t$  [s] και  $\omega$  [rad/s]. Εμβαδό triangle =  $T$  (το ίδιο με  $\text{rect}$ ).

## ΠΡΟΣΕΧΩ

$\text{tri} = \text{RECT} * \text{RECT}$  scaled. Άρα convolution → multiplication στη  $\omega$ . Είναι το πρώτο  $\text{sinc}^2$  που συναντάς.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν:  $\text{rect} \leftrightarrow \text{sinc}$ . Μετά: Gaussian (επόμενος βαθμός ομαλότητας).

Δίνονται τρία σήματα . Ταξινομήστε τα από το στενότερο στο πλατύτερο εύρος ζώνης (BW). Δικαιολογήστε.

$$BW_1 = 2\pi/T \rightarrow \text{στενό } T = \text{πλατύ BW} \cdot \text{πλατύ } T = \text{στενό BW}$$

Άσκηση: ταξινόμηση τα T από στενό σε πλατύ  $BW_1=2\pi/T$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Άσκηση εμπέδωσης της duality. Σου δίνονται 3 τιμές T. Υπολόγισε  $BW_1=2\pi/T$  για καθένα και ταξινόμησε. Δείξε γιατί.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Από T=0.5, 1, 2: ποιο έχει το πλατύτερο φάσμα; (Απ: T=0.5.)

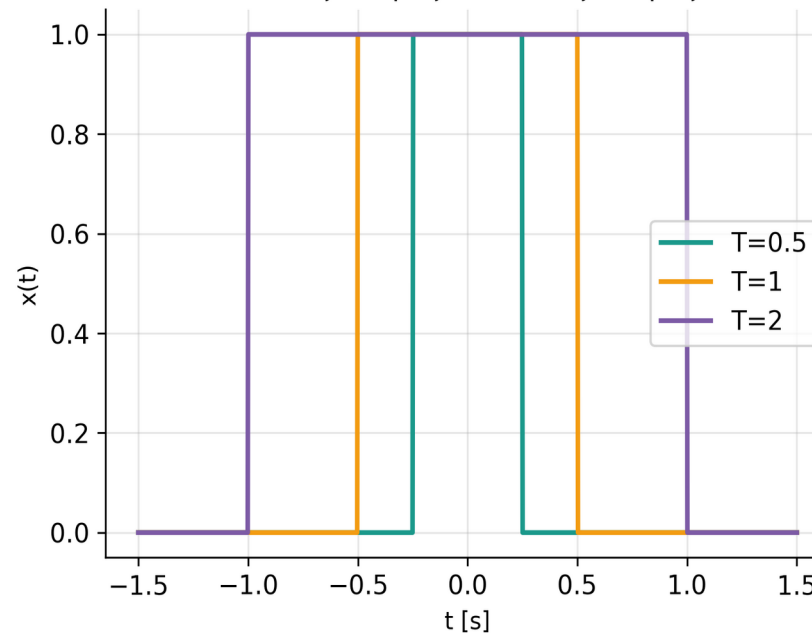
## ΕΞΗΓΗΣΗ

T=0.5 →  $BW=4\pi \approx 12.57$ . T=1 →  $BW=2\pi \approx 6.28$ . T=2 →  $BW=\pi \approx 3.14$ . Άρα στενότερος παλμός (T=0.5) έχει πλατύτερο φάσμα. Αυτό είναι το αντιστρόφο της time-bandwidth duality.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

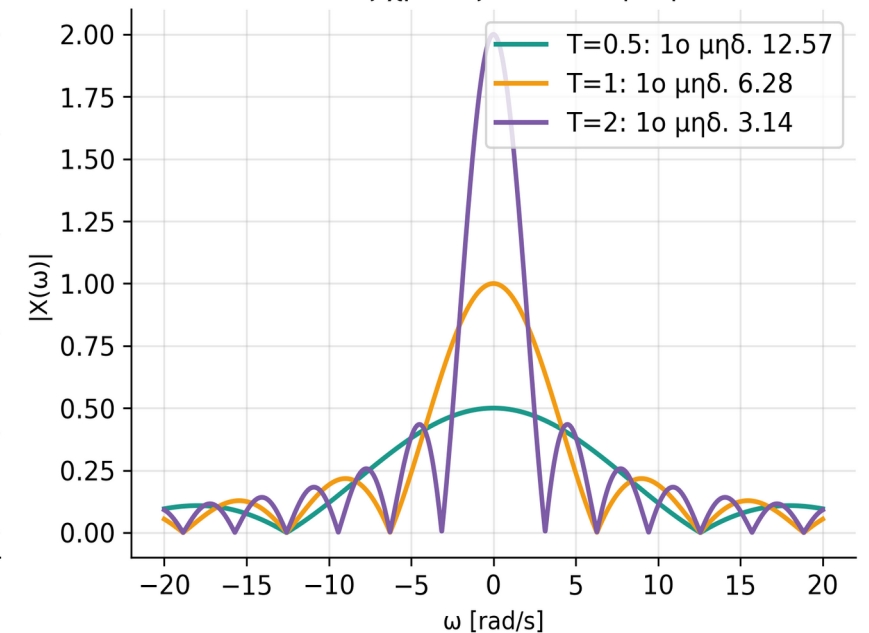
Βρες T ώστε  $BW=1$  rad/s. (Απ:  $T=2\pi=6.28$  s.)

Στενός παλμός vs πλατύς παλμός



3 παλμοί στενοί/πλατείς στον χρόνο, αντιστοίχως πλατείς/στενοί στη συχνότητα.

Στενός χρόνος → πλατύ φάσμα



ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Χρόνος [s], συχνότητα [rad/s]. Σύγκριση 3 T.

"Στενό BW" δεν είναι "καλό BW". Είναι σχεδιαστική επιλογή.

Πριν: T αλλαγή. Μετά: ποσοτικός ορισμός BW και  $\Omega_{90}$ .

## Ενότητα 4

# Εύρος ζώνης

$BW_1$  από πρώτο μηδενικό vs  $\Omega_{90}/\Omega_{95}$  από αθροιστική ενέργεια

**Ξέρω ήδη**

ότι το  $\text{rect} \rightarrow \text{sinc}$  έχει ορατό πρώτο μηδενικό

**Τώρα ανοίγει**

2 ορισμοί BW: first-null και energy-bandwidth, και πότε χρησιμοποιείται ο καθένας

**Στο τέλος μπορώ**

να επιλέγω διάρκεια  $T$  για διαθέσιμο κανάλι  $B$

# Τι είναι ένα "band" στη συχνότητα;

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον:  $|X(\omega)|^2$  και ορισμός band

Band = ζώνη συχνοτήτων με σημαντική ενεργειακή συμμετοχή

band =  $[\omega_{low}, \omega_{high}] \cdot \text{ολοκλήρωμα } |X|^2 \text{ μέσα} = \text{ποσοστό ενέργειας}$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Πριν τους ποσοτικούς ορισμούς BW, εξηγούμε τη γενική ιδέα: το φάσμα δεν είναι ομοιόμορφο. Συγκεντρώνει ενέργεια σε "bands" — ζώνες κρίσιμων συχνοτήτων.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόση ενέργεια έχει το band  $[0, 5 \text{ rad/s}]$  σε ένα Gaussian σήμα;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

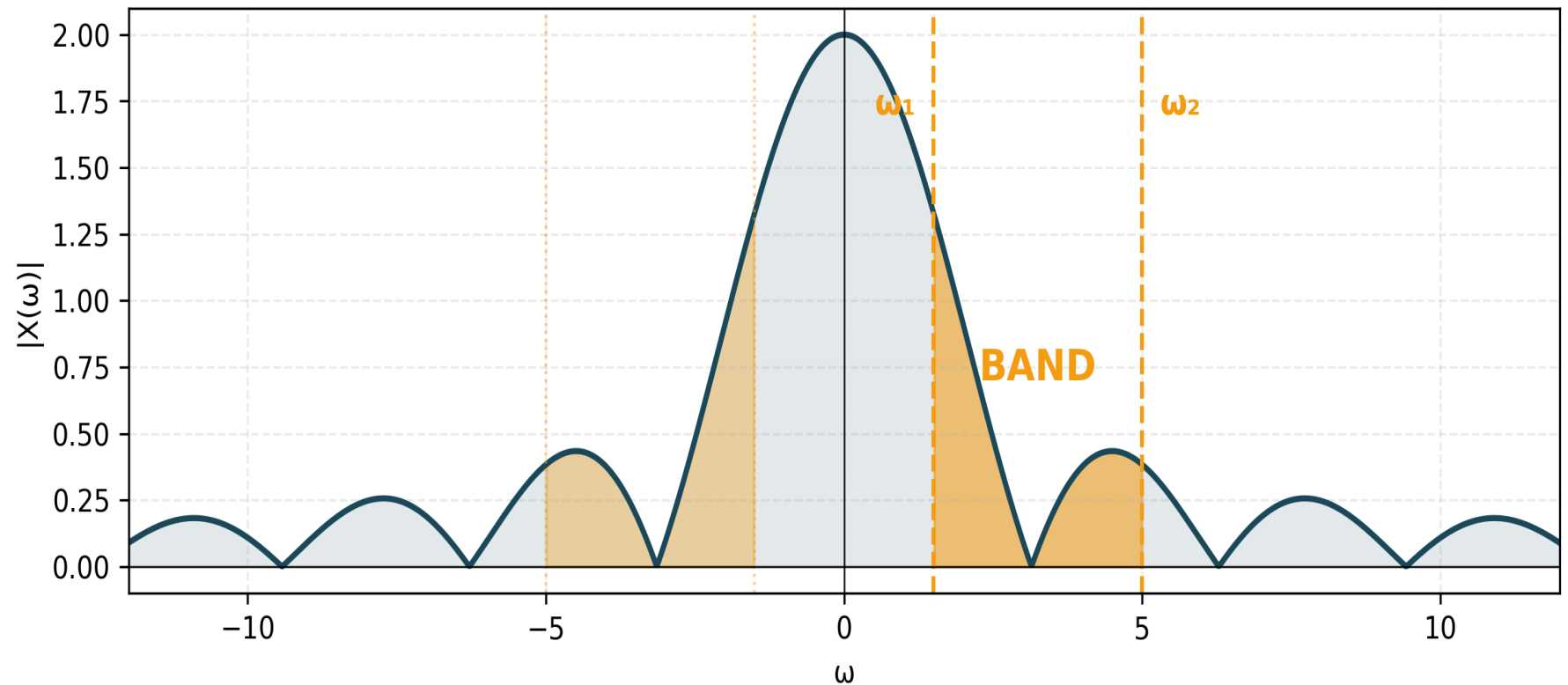
Εξαρτάται από τη τυπική απόκλιση  $\sigma$ . Για  $\sigma=1$ , σχεδόν όλη η ενέργεια είναι κάτω από  $\omega=3$  (καθώς  $|X|^2$  φθίνει εκθετικά). Για στενότερο Gaussian, η ενέργεια διασκορπίζεται.

Κριτήριο "σημαντικού" band είναι αυθαίρετο (90/95/99%). Για Gaussian:  $\sigma^2 = \text{διασπορά στον χρόνο}$ ,  $|X|^2 = 2\pi\sigma^2 \cdot e^{-(\sigma^2\omega^2)}$  — στενός  $\sigma \rightarrow$  πλατύ BW.

## Σημείωση:

Προσοχή: το half-power point δεν είναι το band που κρατά 50% της συνολικής ενέργειας. Είναι το σημείο όπου  $|H(\omega)|^2 = 1/2$  (-3 dB). Energy bandwidth ( $\Omega_{-q}$ ) και half-power είναι διαφορετικά κριτήρια.

Band: συνεχόμενη περιοχή συχνοτήτων  $[\omega_1, \omega_2]$



Πυκνότητα ενέργειας  $|X(\omega)|^2$  με σκιαγραφημένο band  $[a, b]$ .

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

$\omega$  [rad/s],  $|X|^2$  (φασματική κατανομή ενέργειας) σε  $[U^2 \cdot s^2]$ . "Band" δεν είναι σαφές χωρίς κριτήριο: -3dB, 90%, 95%. Πριν: rect/sinc. Μετά: ενέργεια εντός band.

# Πώς υπολογίζω ενέργεια σε ένα band;

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: ολοκλήρωμα  $|X|^2$  σε διάστημα

Υπολογίζουμε ενέργεια με ολοκλήρωμα της πυκνότητας ενέργειας μέσα στα όρια του band

$$E_{\text{band}} = (1/2\pi) \cdot \int_{-a}^b |X(\omega)|^2 d\omega \quad [\text{Parseval ανά band}]$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Από Parseval: total energy =  $(1/2\pi) \int |X|^2 d\omega$ . Ενέργεια σε ένα band είναι το ίδιο ολοκλήρωμα αλλά περιορισμένο στο διάστημα  $[a, b]$ .

## ΕΡΩΤΗΣΗ

Αν  $E_{\text{total}}=10$  και  $E_{\text{band}}=9$ , ποιο ποσοστό; (90%)

## ΑΠΑΝΤΗΣΗ

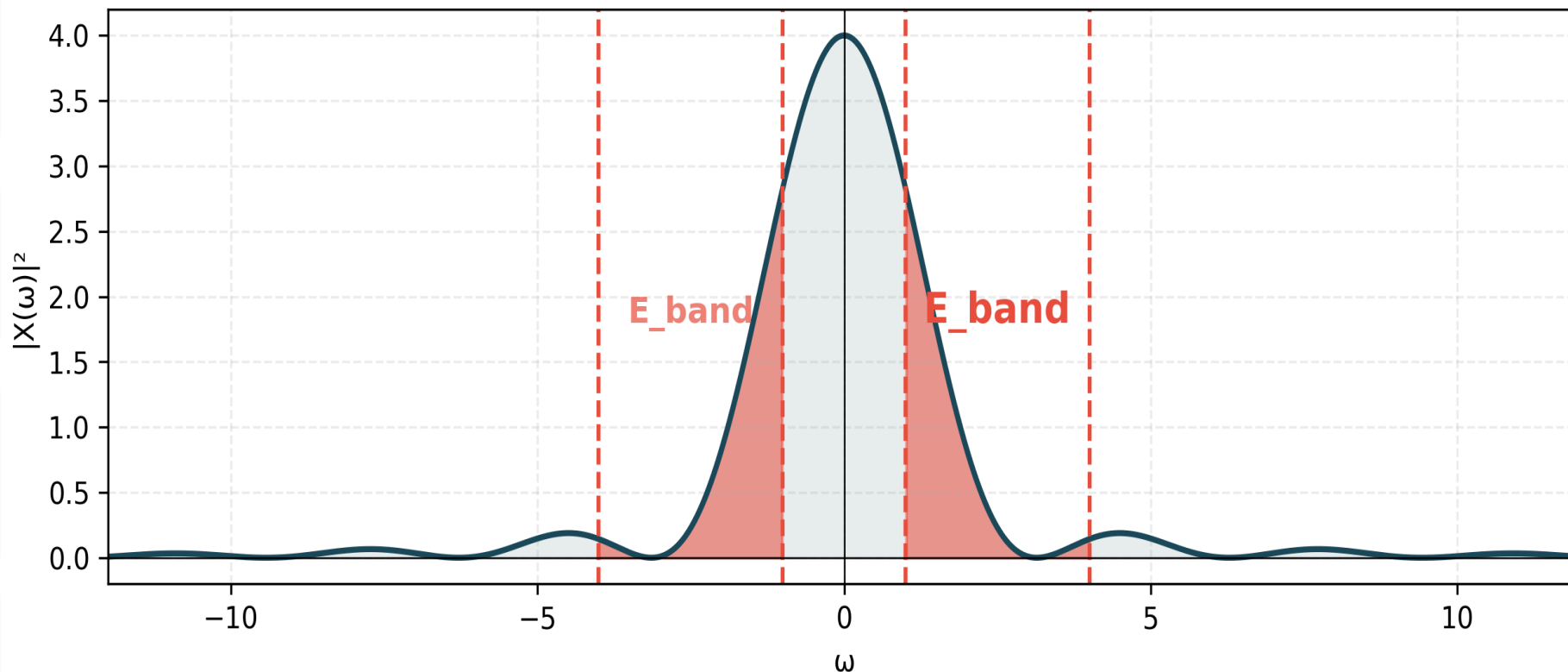
$E_{\text{band}} / E_{\text{total}} = 0.9 = 90\%$ . Ορίζουμε  $\Omega_q$  συμμετρικά:  $\int_{-\Omega_q}^{\Omega_q} |X|^2 d\omega / \int |X|^2 d\omega = q$ .

Για άρτιο  $|X|^2$  (πραγματικό σήμα):  $2 \cdot \int_0^{\Omega_q} |X|^2 d\omega / E_{\text{total}} = q$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν φάσμα είναι  $\text{rect}(\omega/W)$ , τι ποσοστό ενέργειας έχει  $[0, W/4]$ ;

Ενέργεια σε band:  $E_{\text{band}} = (1/2\pi) \cdot \int |X(\omega)|^2 d\omega, \omega \in [\omega_1, \omega_2] \cup [-\omega_2, -\omega_1]$



Πυκνότητα ενέργειας με ολοκληρωμένο εμβαδόν σε ένα band.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

$\omega$  [rad/s],  $|X(\omega)|^2$  [ $U^2 \cdot s^2$ ]. Σκιαγραφημένη περιοχή = ενέργεια band.

Πρόσεξε τον παράγοντα  $1/(2\pi)$  — βγαίνει από τον ορισμό CTFT.

Πριν: ορισμός band. Μετά: ποσοτικός ορισμός  $\Omega_{90}, \Omega_{95}$ .

# Τι είναι bandwidth και πώς το μετράω;

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Gaussian + ορισμός Ω<sub>90</sub>/Ω<sub>95</sub>

**Bandwidth = εύρος συχνοτήτων που «χρειάζεται» ένα σήμα για περιγραφή ή μετάδοση**

$$\Omega_{90} : \left( \int_{[-\Omega_{90}, \Omega_{90}] } |X(\omega)|^2 d\omega \right) / \left( \int_{[-\infty, \infty]} |X(\omega)|^2 d\omega \right) = 0.90$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Για ενεργειακά σήματα μετράω πόση ενέργεια βρίσκεται μέσα στο [-Ω,Ω]. Το Ω<sub>90</sub> κρατά 90% της ενέργειας.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

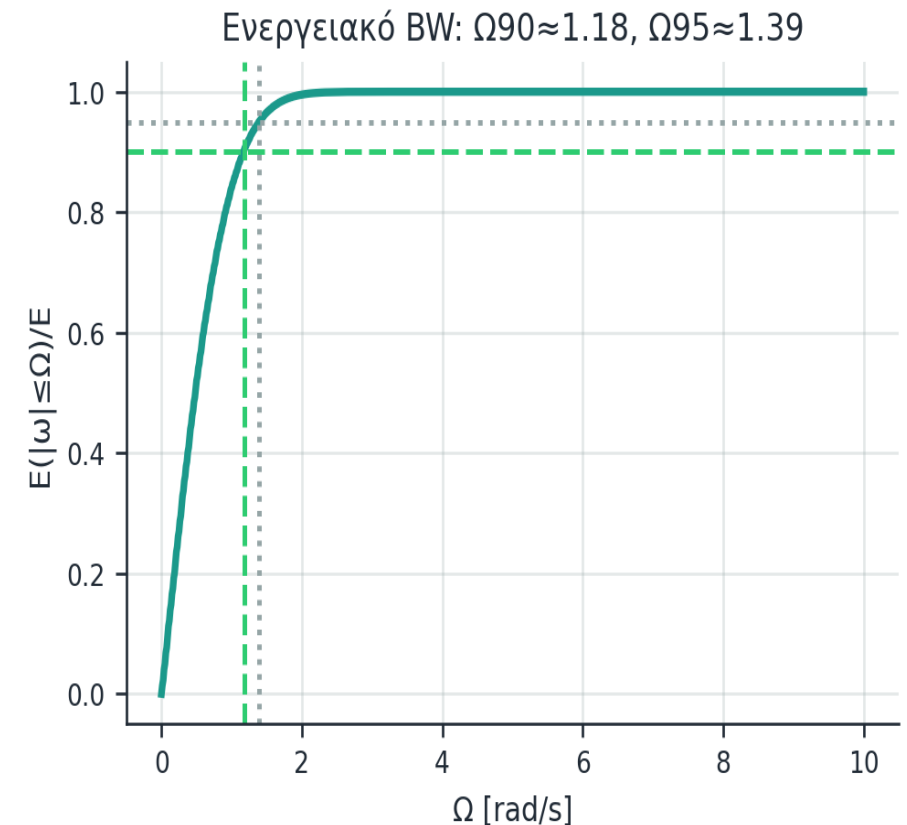
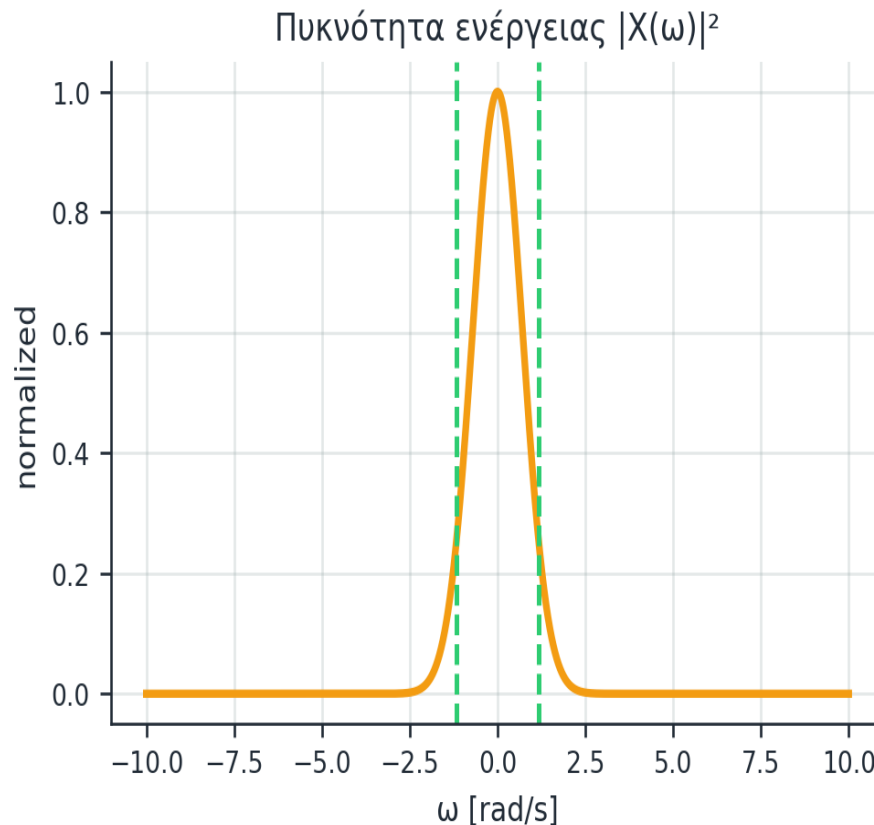
Αν διπλασιάσεις τη τυπική απόκλιση σ του Gaussian, τι κάνει το Ω<sub>90</sub>;

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Πραγματικό σήμα → |X(ω)|<sup>2</sup> άρτιο → Ω συμμετρικό γύρω από 0.  
Gaussian: η Fourier της είναι επίσης Gaussian, ομαλή, χωρίς zeros.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Παράδειγμα Gaussian σ=1: Ω<sub>90</sub>≈1.16, Ω<sub>95</sub>≈1.39, Ω<sub>99</sub>≈1.82 rad/s (από erfinv).



Αριστερά φασματική κατανομή ενέργειας. Δεξιά αθροιστική ενέργεια που ορίζει Ω<sub>90</sub> και Ω<sub>95</sub>.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

ω [rad/s] στον άξονα. |X(ω)|<sup>2</sup> σε U<sup>2</sup>·s<sup>2</sup> (φασματική κατανομή ενέργειας) Ω<sub>90</sub> ≠ "πρώτο μηδενικό". Δουλεύει για Gaussian που δεν έχει zeros.

Πριν: ορισμός BW. Μετά: connection με W06 cumulative power.

# Πρώτο μηδενικό του sinc → ορισμός $BW_1$ για rect παλμό

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον σήμα:  $x(t) = \text{rect}(t/T) \rightarrow BW_1$ 

Από το πρώτο μηδενικό του sinc ορίζω το εύρος ζώνης  $BW_1$  - πρώτη ποσοτική περιγραφή του φάσματος.

$BW_1 = 2\pi/T$  και αμφίπλευρο εύρος =  $4\pi/T$

### ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ

Όταν το φάσμα είναι sinc, το πρώτο μηδενικό είναι ορατό σημάδι στο διάγραμμα. Το  $\omega$  αυτής της θέσης γίνεται κριτήριο εύρους ζώνης:  $BW_1 = 2\pi/T$  (μονόπλευρο) ή  $4\pi/T$  (αμφίπλευρο).

### ΕΞΗΓΗΣΗ

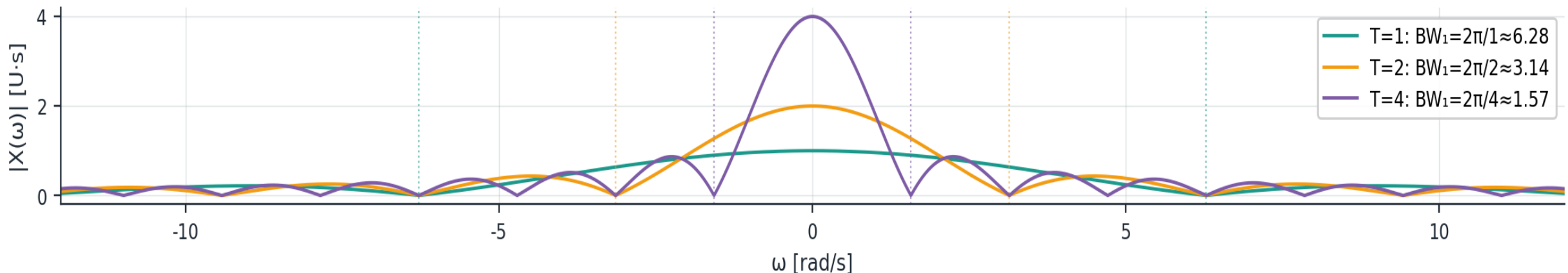
Αν τετραπλασιάσεις το  $T$ , το  $BW_1$  γίνεται 4 φορές μικρότερο - αντιστρόφως ανάλογο. Ο κανόνας ισχύει για rect με κριτήριο πρώτου μηδενικού - δεν είναι «θεμελιώδης αβεβαιότητα».

**Παράδειγμα:**  $T_{\min}=1 \text{ ms} \rightarrow BW_1 = 2\pi \cdot 1000 \text{ rad/s} \approx 6283 \text{ rad/s}$ .

### ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Υπολόγισε το  $BW_1$  για  $T = 0.5, 2, 8$  (σε rad/s). Ταξινόμησε από στενό σε πλατύ.

## Εύρος ζώνης πρώτου μηδενικού — $|X(\omega)|$ για διάφορα $T$



Τι βλέπουμε:  $|X(\omega)|$  για  $T = 1, 2, 4$  — όσο μικραίνει το  $T$ , τα μηδενικά απομακρύνονται ( $\Delta\omega = 2\pi/T$  μεγαλώνει). Στενότερος παλμός → πλατύτερο φάσμα.

### ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Αξονας x:  $\omega$  [rad/s]. Αξονας y:  $|X(\omega)|$  [U·s].  
Οι διακεκομμένες δείχνουν τα  $\pm 2\pi/T$  κάθε  $T$ .

### ΠΡΟΣΕΧΩ

$BW_1 =$  πρώτο μηδενικό (όχι «θεμελιώδες όριο»). Κύριος λοβός rect = 90.3% ενέργειας — για ποσοτικό κριτήριο:  $\Omega_q$  (σ39).

### Duality

$F[F[x]](t) = 2\pi \cdot x(-t)$ . Άρα ισχύει και  $\text{sinc} \leftrightarrow \text{rect}$  (όχι μόνο  $\text{rect} \leftrightarrow \text{sinc}$ ).

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: σύγκριση BW πραγματικών εφαρμογών

Διαφορετικές εφαρμογές, διαφορετικές απαιτήσεις BW — *engineering reality*, όχι θεωρία

% ενέργειας: **Voice ~85%** · **Music ~99%** · **Data 99%+** · **Critical 99.9%+**

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Στη θεωρία είδαμε  $BW_1$  από μηδενικό sinc. Στην πράξη κάθε εφαρμογή έχει δικό της κριτήριο: voice αρκεί 85%, music 99%, data 99%+, ιατρικά 99.9%+.

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Παρατήρηση: ίδιο σήμα (π.χ. φωνή), διαφορετική απαίτηση % ενέργειας → διαφορετικό «πρακτικό» BW. Παράδειγμα: φωνή POTS 300–3400 Hz αρκεί για κατανόηση, αλλά στη μουσική θα έλειπε η άνω αρμονική περιοχή.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

**Πρότεινε BW για Bluetooth audio streaming. Ποιο ποσοστό;**  
(Απ: ~1–2 MHz, target ~95–98% — μουσική με συμπίεση.)

Εφαρμογή	BW	Φορέας	% ενέργειας	tier
Voice (POTS)	300–3400 Hz	Χάλκινο τηλεφωνικό	~85%	1
Dial-up 56k modem	~4 kHz πρακτικά	POTS line	~95% (στενό)	2
Music (HiFi)	20 Hz - 20 kHz	Audio output	~99%	3
FM ραδιόφωνο	200 kHz/σταθμό	UHF/VHF	~90%	2
ADSL2+	~1.1 MHz	Χαλκός	~90%	2
Wi-Fi 6 (1 stream)	80 MHz	5 GHz φάσμα	~95%	2
Οπτική ίνα (1 ch)	~50 GHz	Φως 1550 nm	99%+	3

## Engineering rule of thumb

- Voice:** 85–90% αρκετά καταλαβαίνεις τι λες
- Music:** 95–99% διαφορά ακούγεται
- Data:** 99%+ κάθε bit error πληρώνεται
- Critical:** 99.9%+ medical, radar, safety

Πίνακας 7 εφαρμογών — χρωματιστή ένδειξη: πράσινο=μέτριο, τουρκουάζ=υψηλό, πορτοκαλί=κρίσιμο.

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Στήλες πίνακα: εφαρμογή, BW (μονάδες: Hz, kHz, MHz, GHz), μέσο, % ενέργειας.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Το «πρακτικό BW» εξαρτάται από εφαρμογή — δεν είναι θεωρητικό μέγεθος. Μην το συγχέεις με  $\Omega_q$  ή  $BW_1$ .

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν:  $BW_1$  θεωρητικό (sinc nulls). Μετά: ποσοτικά  $\Omega_q$  (energy bandwidth,  $\sigma_{42} \rightarrow \sigma_{43}$ ).

## Γκαουσιανός παλμός - ομαλός, χωρίς πρώτο μηδενικό.

 $x(t)=e^{-(t^2/(2\sigma^2))}$  και  $X(\omega)$  έχει επίσης γκαουσιανή μορφή

## ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ

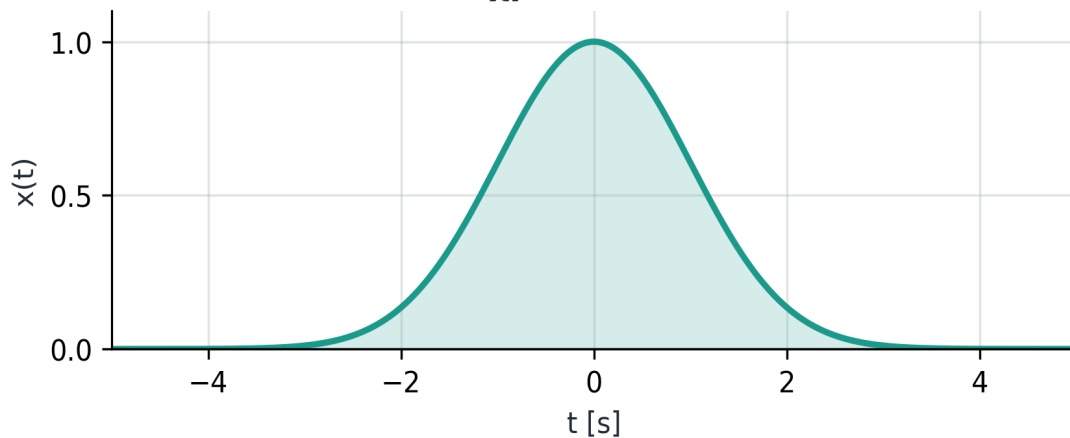
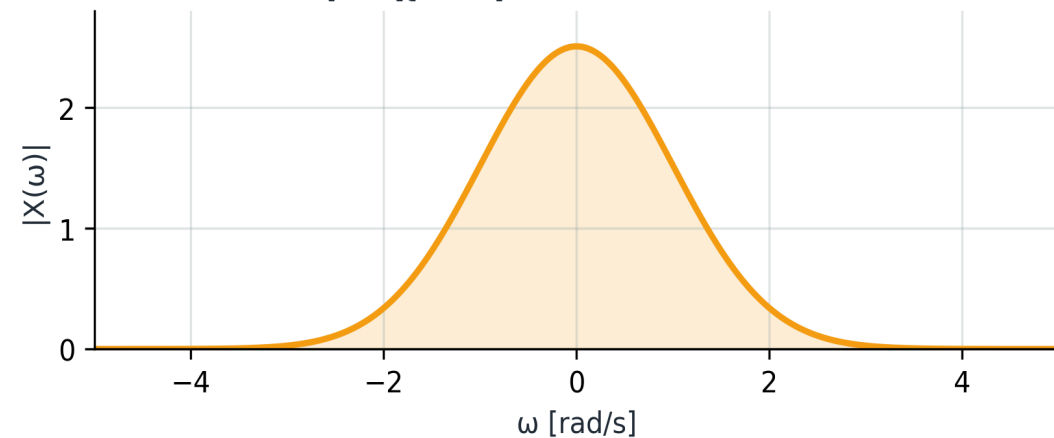
Ο γκαουσιανός παλμός δεν έχει ασυνέχειες και δεν έχει μηδενικά στο φάσμα. Δεν ορίζεται εύρος ζώνης πρώτου μηδενικού. Χρησιμοποιούμε κριτήρια όπως RMS διασπορά, -3 dB, ή εύρος ενέργειας.

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο γκαουσιανός παλμός δίνει επίσης γκαουσιανό φάσμα χωρίς πλευρικούς λοβούς. Η ομαλότητα στον χρόνο συνδέεται με γρηγορότερη φασματική απόσβεση και έλλειψη μηδενικών.  
Παράδειγμα:  $\sigma=1 \rightarrow e^{-(\omega^2/2)}$ .  $2\sigma \rightarrow$  ΣΤΕΝΕΥΕΙ 2x (αντιστρ.).

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πες ποιο κριτήριο θα χρησιμοποιούσες για γκαουσιανό και γιατί.

Gaussian στον χρόνο:  $x(t) = e^{-(t^2/(2\sigma^2))}$ Gaussian στη συχνότητα:  $X(\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{(-\sigma^2\omega^2/2)}$ 

Τι βλέπουμε: γκαουσιανός στον χρόνο και γκαουσιανός στη συχνότητα - και τα δύο ομαλά, χωρίς μηδενικά, χωρίς πλευρικούς λοβούς.

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Χρόνος:  $t$  [s],  $x(t)$ . Συχνότητα:  $\omega$  [rad/s],  $|X(\omega)|$ . Δεν υπάρχουν σημεία μηδενικών.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Ο γκαουσιανός δεν έχει ασυνέχειες και δεν έχει μηδενικά στο φάσμα

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: εύρος ζώνης rect. Μετά: ορισμοί εύρους ζώνης όταν δεν υπάρχουν μηδενικά.

$\Omega_X$  = ελάχιστο θετικό  $\Omega$  για το οποίο  $E[-\Omega, \Omega]/E_{total} \geq X/100$

$\Omega_{90}$ : 90% της ενέργειας ·  $\Omega_{95}$ : 95% της ενέργειας

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Όταν το φάσμα δεν έχει σαφές πρώτο μηδενικό (Gaussian, πραγματικά σήματα ραδιοσυχνότητων), χρησιμοποιούμε energy bandwidth: ποσοστιαία ενέργεια σε ένα συμμετρικό διάστημα γύρω από το 0.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

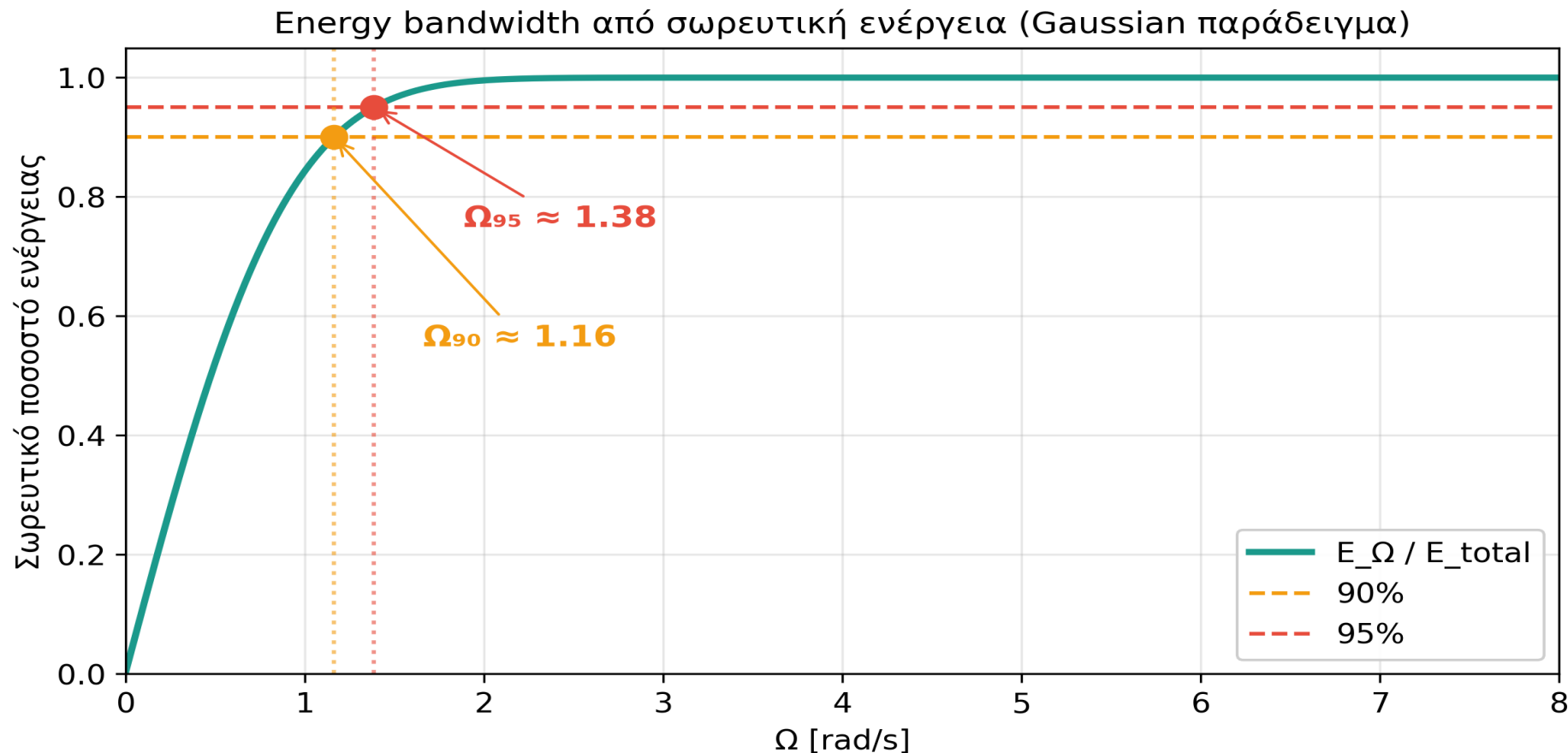
Για ίδιο Gaussian, ποιο είναι μεγαλύτερο:  $\Omega_{90}$  ή  $\Omega_{95}$ ; ( $\Omega_{95}$ .)

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Όσο πιο αυστηρό το κριτήριο (95% αντί 90%), τόσο μεγαλύτερο το  $\Omega$  που χρειάζεται. Παράδειγμα: Gaussian  $\sigma=1 \rightarrow \Omega_{90} \approx 1.16$ ,  $\Omega_{95} \approx 1.39$ ,  $\Omega_{99} \approx 1.82$  rad/s (από erfinv).

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για στενότερο Gaussian,  $\Omega_{90}$  μεγαλύτερο ή μικρότερο;



Αθροιστική ενέργεια από 0 προς  $\infty$ , σημεία τομής 90% και 95%.

Αν συμπίεσεις το σήμα στον χρόνο, το φάσμα του ξεχειλώνει — και αντίστροφα. Universal property

$$x(at) \approx (1/|a|) \cdot X(\omega/a) \quad - \quad a>1: \text{ συμπίεση χρόνου, επέκταση } \omega$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Αν παίξεις ένα κασετόφωνο 2 φορές πιο γρήγορα (a=2), η μουσική γίνεται 2x πιο πιεσμένη στον χρόνο. Στο φάσμα: όλες οι συχνότητες διπλασιάζονται.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Αν x(t)=Gaussian με σ=1, ποιο σ έχει η x(2t); (Απ: σ=0.5 — συμπεσμένο)

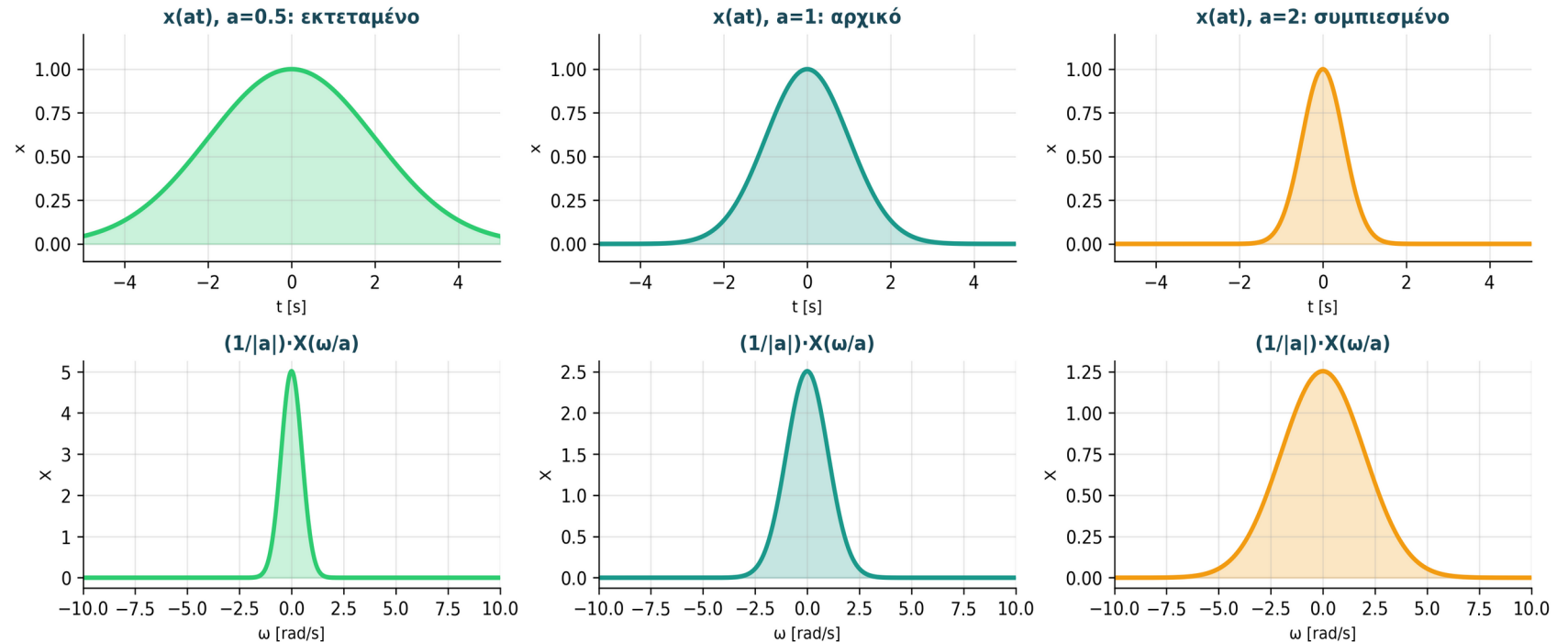
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Άμεση εφαρμογή της time-bandwidth duality. Πιο στενός χρόνος ⇔ πιο πλατύ φάσμα. Ο παράγοντας 1/|a| δίνει τη σωστή κλιμάκωση του φάσματος (όχι διατήρηση εμβαδού).

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Για x(t)=rect(t/T): πόσο είναι το πρώτο μηδενικό του X(ω) για x(at) σε σχέση με αυτό του x(t); (Απ: a φορές μεγαλύτερο)

Time scaling: x(at) ≈ (1/|a|)·X(ω/a) — συμπίεση χρόνου = επέκταση φάσματος



Πάνω: σήμα x(at) για 3 διαφορετικά a (0.5, 1, 2). Κάτω: το αντίστοιχο φάσμα. Συμπίεση χρόνου = εκτεταμένο φάσμα.

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

t [s] και ω [rad/s]. Παράγον 1/|a| καθορίζει τη σωστή κλιμάκωση: εμβαδόν και ενέργεια αλλάζουν με 1/|a|.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

a αρνητικό αντιστρέφει το σήμα — επιπλέον αντιστροφή φάσματος. Πιο πολύπλοκο, ξεχωριστή ανάγνωση.

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: rect ⇔ sinc time-bandwidth. Μετά: Parseval και ενέργεια.

Η ολική ενέργεια του σήματος είναι η ίδια είτε την υπολογίσεις στον χρόνο είτε στη συχνότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = (1/2\pi) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Δεν χάνεται και δεν δημιουργείται ενέργεια στο μετασχηματισμό. Το CTFT είναι αμφιμονοσήμαντο, διατηρεί την ενέργεια.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Αν διπλασιάσεις το x(t), η ενέργεια... (Απ: τετραπλασιάζεται. Λόγος: η ενέργεια ορίζεται ως  $\int |x(t)|^2 dt$ , οπότε  $2 \cdot x$  δίνει  $|2x|^2 = 4 \cdot |x|^2$  στο ολοκλήρωμα)

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

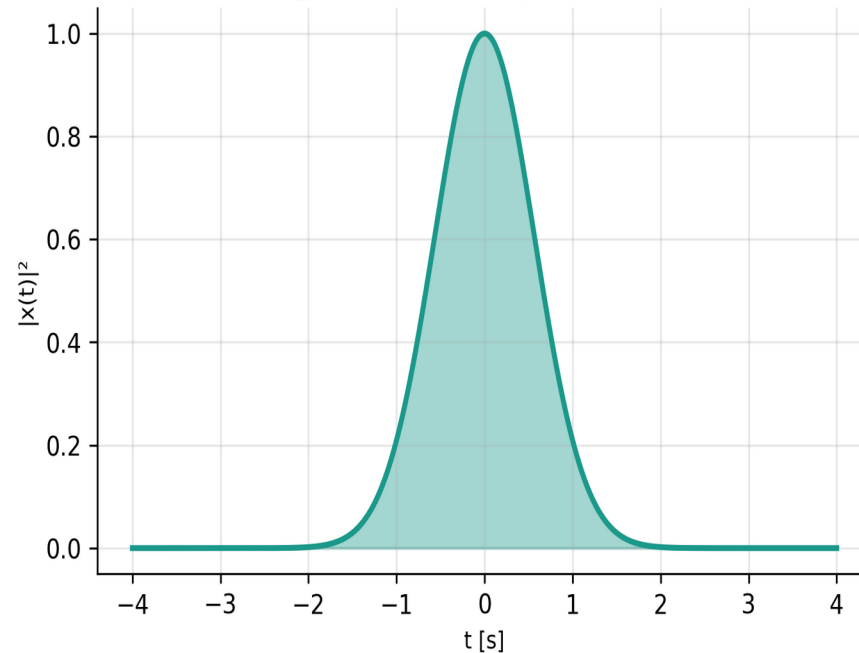
Αυτό λέγεται θεώρημα Parseval (ή Rayleigh για ενεργειακά σήματα). Πρακτικά: μπορώ να υπολογίσω ενέργεια από όποιο πεδίο είναι πιο εύκολο λόγω ισοδυναμίας.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

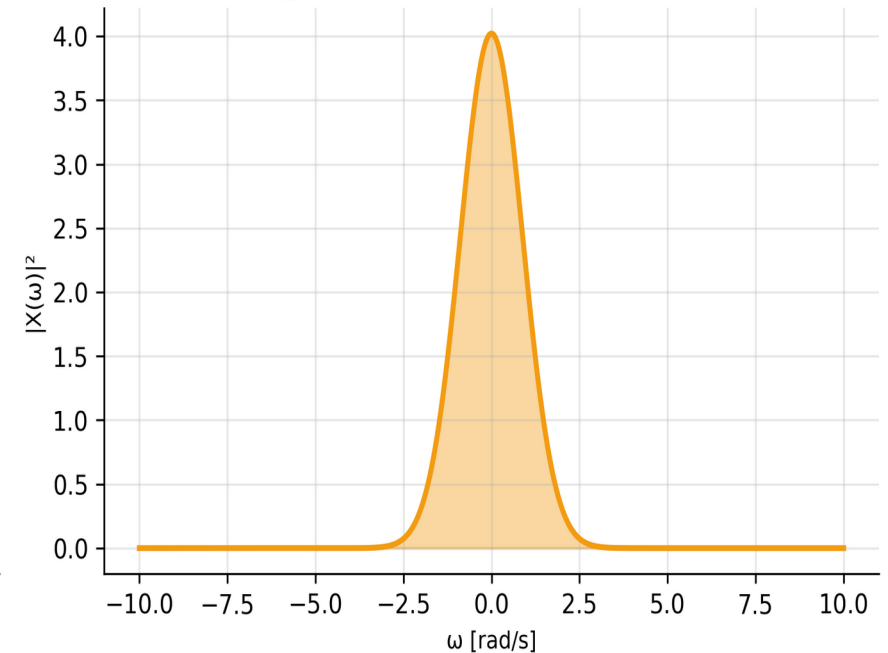
Για  $x(t)=e^{-t}u(t)$ , βρες E χρησιμοποιώντας τύπο χρόνου και τύπο συχνότητας. (Απ:  $E=1/2$  και από τα δύο)

Parseval:  $\int |x(t)|^2 dt = (1/2\pi) \int |X(\omega)|^2 d\omega \rightarrow E=1.418 = 1.418 \checkmark$

**E\_χρόνος =  $\int |x(t)|^2 dt = 1.418$**



**E\_ω =  $(1/2\pi) \int |X(\omega)|^2 d\omega = 1.418$**



Αριστερά:  $|x(t)|^2$  στον χρόνο — εμβαδό = E. Δεξιά:  $|X(\omega)|^2$  στη συχνότητα — εμβαδό/(2π) = E. Οι αριθμοί ταυτίζονται.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [s] και ω [rad/s]. Ενέργεια σε  $[U^2 \cdot s]$ .

ΠΡΟΣΕΧΩ

Ο παράγοντας  $1/(2\pi)$  είναι ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟΣ στη συχνότητα όταν δουλεύεις σε rad/s. Σε Hz εξαφανίζεται.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: ορισμός  $\Omega_{90}$ ,  $\Omega_{95}$ . Μετά: σύνδεση με W06 cumulative power.

Άθροισμα → Ολοκλήρωμα. Διακριτό k → Συνεχές ω. Ίδια λογική BW.

$$W06: P_K = \sum_{k \leq K} |a_k|^2 \quad \cdot \quad W07: E_{[-\Omega, \Omega]} = (1/2\pi) \int_{[-\Omega, \Omega]} |X(\omega)|^2 d\omega$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Η ποσοτικοποίηση BW είναι παράλληλη στα 2 πλαίσια. Στο W06 αθροίζεις διακριτές αρμονικές. Στο W07 ολοκληρώνεις συνεχές φάσμα. Η ιδέα "πόση ενέργεια έχει συμπυκνωθεί έως κάποιο όριο" είναι ίδια.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πώς γίνεται το άθροισμα → ολοκλήρωμα; (Απ:  $T_0 \rightarrow \infty$  από Section 2.)

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Παράδειγμα FS:  $a_k = 1/k^2 \rightarrow 95\%$  με  $K=5$ .  
Παράδειγμα CTFT:  $x(t) = e^{-t} \cdot u(t)$ ,  $|X|^2 = 1/(1+\omega^2)$   
(αιτιατή εκθετική, Lorentzian φάσμα). Συμμετρικό 95% ενέργειας:  $\Omega_{95} \approx 12.7$  rad/s.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν 95% ισχύος είναι σε  $k = \pm 3$ , ποιο εύρος ζώνης διακριτό;

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Αριστερά: k αδιάστατο. Δεξιά: ω [rad/s]. Cumulative [0, 1] αδιάστατο.

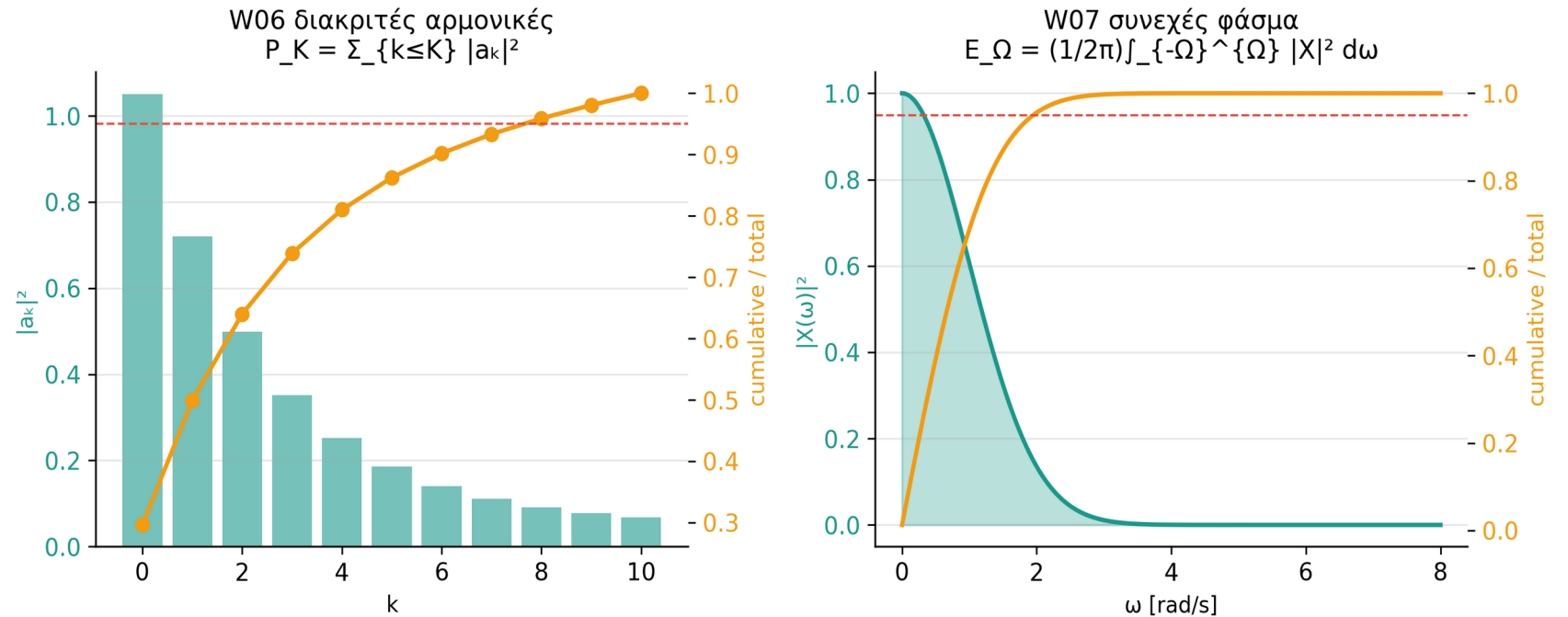
## ΠΡΟΣΕΧΩ

Ο παράγοντας  $1/(2\pi)$  προέρχεται από την ω convention CTFT.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν:  $\Omega_{90}, \Omega_{95}$ . Μετά: άσκηση σχεδιασμού rect σε κανάλι  $B=1$  rad/s.

Άθροισμα ↔ Ολοκλήρωμα: ίδια λογική, άλλο πεδίο



# Άσκηση 1 — rect παλμός σε κανάλι B=1 rad/s

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

x(t)=rect(t/T), κανάλι B=1 rad/s

Πλήρες pipeline: ορίζω σήμα, βρίσκω φάσμα, μετράω BW, παίρνω απόφαση για T

### Εκφώνηση

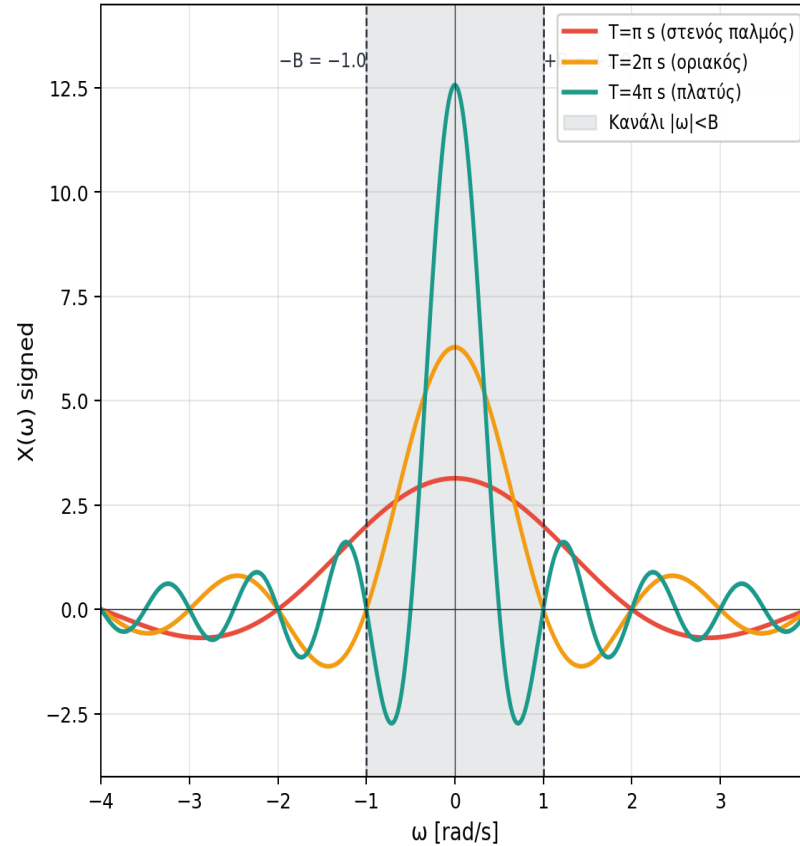
x(t)=rect(t/T). Θέλουμε όσο πιο σύντομο παλμό γίνεται σε κανάλι B=1 rad/s.

Πρώτο μηδενικό του sinc:  $\omega_1=2\pi/T$ .

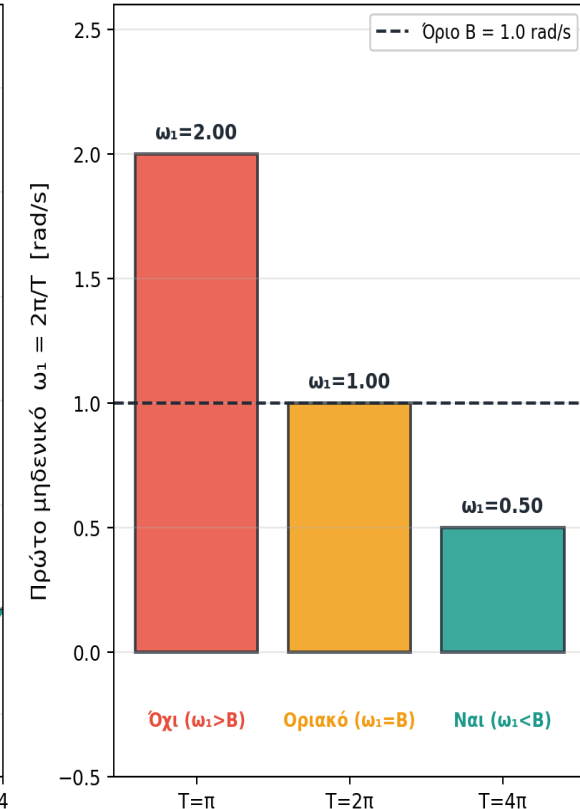
Απαιτήση:  $\omega_1 \leq B = 1$  rad/s.

```
clear; close all; clc; pkg load signal
% --- anonymous helpers ---
u = @(t) (t>=0);
rect = @(t,a,b) ((t>=a) & (t<=b));
% --- rect παλμός σε κανάλι B=1 rad/s ---
B = 1.0; Tmin = 2*pi/B; % ω1=2π/T ≤ B
w = linspace(-4, 4, 4001);
for T = [pi 2*pi 4*pi]
    Xn = T * sinc(w*T/(2*pi));
    plot(w, Xn, 'LineWidth', 1.6); hold on;
end
xlabel('\omega'); ylabel('X(\omega)');
legend('T=π', 'T=2π', 'T=4π'); grid on; xlim([-4 4]);
% Απάντηση: T ≥ 2π χωρά στο B=1 rad/s.
```

Τρεις rect παλμοί διαφορετικού T → τρία sinc φάσματα



Σύγκριση: το  $\omega_1$  vs το όριο καναλιού B



### ΤΙ ΠΕΡΙΜΕΝΩ

Δες τα μηδενικά να μετακινούνται στις θέσεις  $\pm 2\pi/T$  (πρώτο μηδενικό sinc στο  $\omega=2\pi/T$ ). Όσο μικρότερο T, τόσο πλατύτερο sinc.

### ΚΛΑΣΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

Να μη συγχέεις  $\omega_1=2\pi/T$  (πρώτο μηδενικό) με B (μονόπλευρο όριο καναλιού).

### ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

T=π/2 s:  $\omega_1=4$  rad/s > B → δεν χωρά. T=π s:  $\omega_1=2$  rad/s > B → δεν χωρά. T=2π s:  $\omega_1=1$  rad/s = B → οριακό (Tmin).

# Άσκηση 2 — Πότε πέφτει -20 dB σε RC LPF

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: RC LPF τ=0.1 s, βρίσκω ω<sub>20</sub>

**ΕΚΦΩΝΗΣΗ**

Δίνεται RC LPF με τ = 0.1 s. Σε ποιο ω το |H(ω)| πέφτει στα -20 dB από τη DC τιμή;  
(Η RC θα εξεταστεί διεξοδικά στις σ73-σ75 — εδώ τη χρησιμοποιούμε ως bandwidth example.)

$|H(\omega)| = 1/\sqrt{1+(\omega\tau)^2}$  · στόχος -20 dB ⇒ ωτ = √99

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

RC LPF: H(ω)=1/(1+jωτ). |H(ω)|=1/√(1+(ωτ)<sup>2</sup>). DC κέρδος = 1 (= 0 dB).

Στόχος: βρες ω όπου |H| = 0.1 (-20 dB από DC).

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Στο -3 dB έχω ωτ=1 (ωc=10). Στο -20 dB θα έχω ωτ ≈ πόσο; (μικρό ή μεγάλο;)

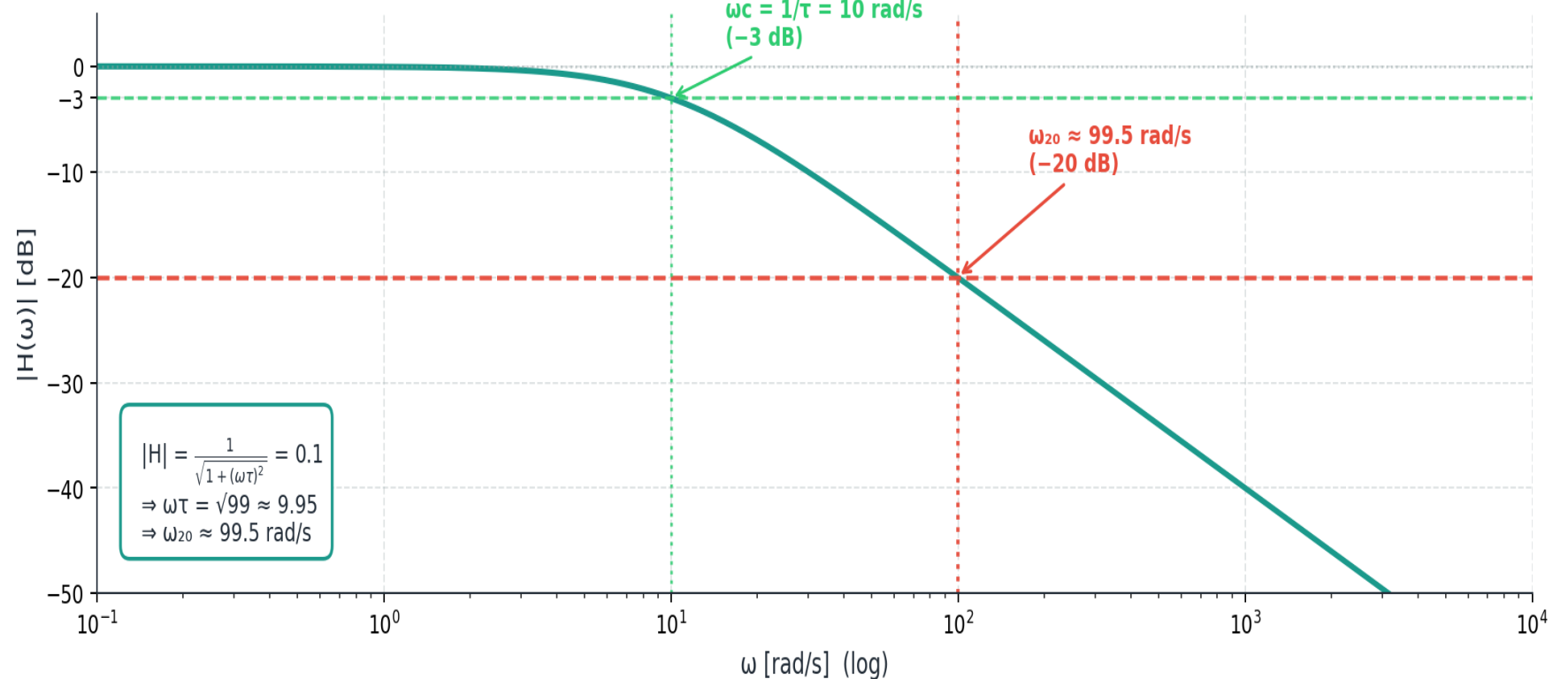
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

1/√(1+(ωτ)<sup>2</sup>) = 0.1 ⇒ 1+(ωτ)<sup>2</sup> = 100 ⇒ ωτ = √99 ≈ 9.95.  
Με τ = 0.1 s: ω<sub>20</sub> ≈ 99.5 rad/s.  
Δηλαδή ~10× πάνω από την ωc=10.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Βρες ω<sub>40</sub> (όπου πέφτει -40 dB). (Απ: ωτ=√9999 → ω<sub>40</sub> ≈ 1000 rad/s.)

**B12 — Πότε πέφτει -20 dB σε RC LPF με τ = 0.1 s**



Bode plot RC LPF — η οριζόντια -20 dB συναντά τη γραφική στο ω<sub>20</sub> ≈ 99.5 rad/s.

**ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

log ω [rad/s] στον x-άξονα. |H| σε dB στον y. Σταθερά τ καθορίζει την ωc.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Ακριβώς: ω<sub>20</sub> = √99 · ωc ≈ 9.95·ωc. Πρακτικά: ≈ 10·ωc (κλίση -20 dB/dec στο 1ης τάξης φίλτρο).

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: BW, rect. Μετά: ω για 99% ενέργειας σε Gaussian (Άσκηση 3).

# Άσκηση 3 — Ω<sub>99</sub> για Gaussian παλμό

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: Gaussian σ=1, βρίσκω Ω<sub>99</sub>

**ΕΚΦΩΝΗΣΗ:**

Gaussian με σ = 1. Βρες Ω<sub>99</sub>, (θετικό μισό-εύρος του συμμετρικού [-Ω<sub>99</sub>, Ω<sub>99</sub>] που περιέχει 99% της ενέργειας).

$$x(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)} \cdot |X|^2 = 2\pi\sigma^2 \cdot e^{-\sigma^2\omega^2} \cdot E[-\Omega, \Omega] / E_{total} = \text{erf}(\sigma\Omega) \quad (\text{συμμετρικό})$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Στο Gaussian δεν υπάρχουν μηδενικά → BW<sub>1</sub> δεν ορίζεται.

Χρειάζομαι ποσοτικό κριτήριο: αθροιστική ενέργεια. Στόχος: Ω<sub>99</sub>.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Ξέρω Ω<sub>90</sub> ≈ 1.16, Ω<sub>95</sub> ≈ 1.39. Πού περιμένεις Ω<sub>99</sub>; (κοντά, μέση τιμή ή πιο μακριά;)

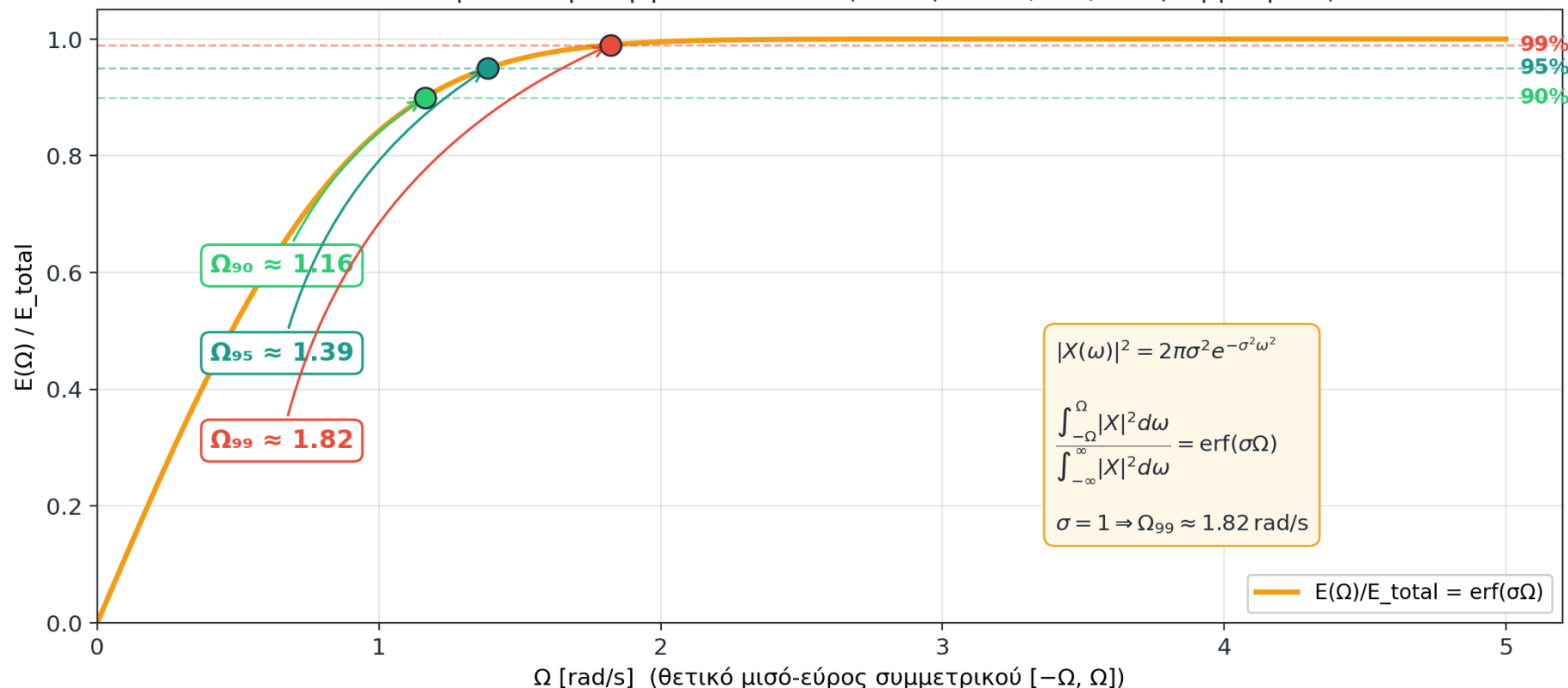
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Για συμμετρικό [-Ω, Ω]:  $E[-\Omega, \Omega] / E_{total} = \text{erf}(\sigma\Omega)$ .  
 Θέτω  $\text{erf}(\sigma\Omega) = 0.99 \rightarrow \sigma\Omega = \text{erfinv}(0.99) \approx 1.821$ .  
 Με σ=1: Ω<sub>99</sub> ≈ 1.82 rad/s.  
 Πολύ πιο μακριά από Ω<sub>95</sub> (1.39) γιατί η ουρά της Gaussian αργεί.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Αν διπλασιάσω σ, τι γίνεται το Ω<sub>99</sub>;  
 (Απ: μισό ≈ 0.91 αντιστρόφως ανάλογο.)

B13 — Αθροιστική ενέργεια Gaussian (σ = 1) · Ω<sub>90</sub>, Ω<sub>95</sub>, Ω<sub>99</sub> (συμμετρικά)



Καμπύλη αθροιστικής ενέργειας — Ω<sub>99</sub> διαβάζεται από τομή με την οριζόντια 99%.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Ω [rad/s] (θετικό μισό-εύρος). γ: αθροιστική ενέργεια E(Ω)/E<sub>total</sub>. Οριζόντιες στο 90/95/99%.

Ο τύπος erf(σΩ) ισχύει για συμμετρικό [-Ω, Ω].

Πριν: Ω<sub>90</sub>/Ω<sub>95</sub>. Μετά: σύνδεση με W06 (αθροιστική ισχύς FS).

## Ενότητα 5

# Φάση

Καθαρή καθυστέρηση → γραμμική φάση, και τότε φαίνεται πριονωτή

### Ξέρω ήδη

ότι το  $|X|$  δεν αλλάζει με μετατόπιση χρόνου

### Τώρα ανοίγει

ότι time shift δίνει γραμμική φάση κλίση= $-t_0$ , και `unwrap+mask` για zero-crossings

### Στο τέλος μπορώ

να μετρώ καθυστέρηση από κλίση φάσης

# Πότε η φάση είναι «καθαρή» και πότε γίνεται «πριονωτή»

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: rect / τρίγωνο / Gaussian

Για πραγματικά άρτια x(t):  $X(\omega) \in \mathbb{R}$ . Φάση=0 όπου  $X > 0$ ,  $\pi$  όπου  $X < 0$ . Αλλαγή προσήμου  $\rightarrow$  άλματα  $0/\pi$ .

rect:  $\pm\pi$  άλματα · τρίγωνο: επίπεδη · Gaussian: μηδενική παντού

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Συγκρίνουμε φάση για 3 παλμούς: rect, τρίγωνο, Gaussian.

Στόχος: να διακρίνεις πότε  $\angle X$  είναι «καθαρή» (επίπεδη) και πότε γίνεται «πριονωτή» ( $\pm\pi$  άλματα στα μηδενικά).

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιόν από τους 3 παλμούς (rect/τρίγωνο/Gaussian) θα δούμε άλματα  $\pm\pi$  στη φάση;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Φάση =  $\arg(X)$ . Άλματα  $\pm\pi$  εμφανίζονται όπου  $X$  αλλάζει πρόσημο (περνάει από μηδέν).

rect: sinc έχει εναλλασσόμενο πρόσημο  $\rightarrow \pm\pi$  άλματα.

τρίγωνο:  $\text{sinc}^2 \geq 0$  πάντα  $\rightarrow$  φάση επίπεδη.

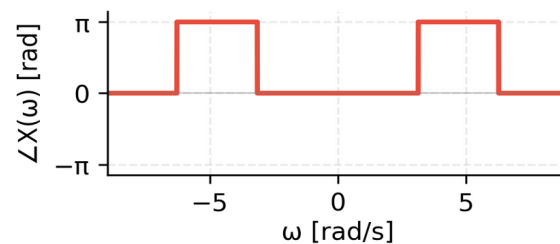
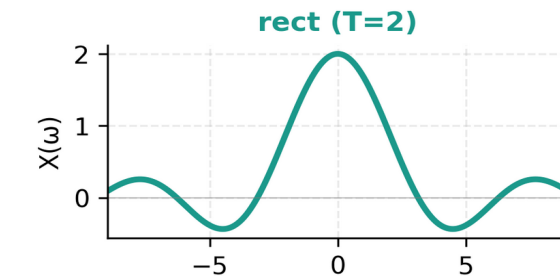
Gaussian:  $X \in \mathbb{R}^+$   $\rightarrow$  φάση μηδέν παντού (ιδανικό test-case).

Σημείωση: η «παλμοσειρά» στη φάση δεν είναι φυσική παλμοσειρά — είναι φάση που πηδάει  $0 \leftrightarrow \pi$  σε κάθε μηδενικό του sinc. Κάθε «παλμός» = ένας πλευρικός λοβός.

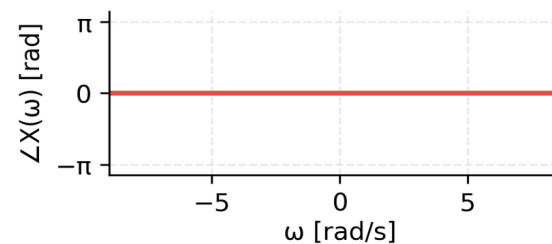
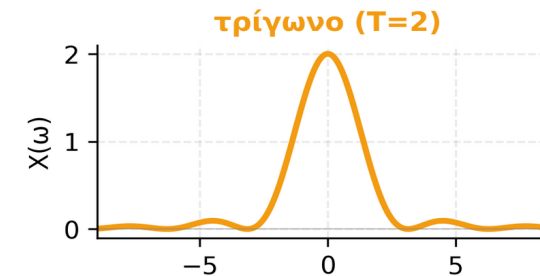
## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν τετραγωνίσεις το rect (point-wise  $\text{rect}^2 = \text{rect}$ ), αλλάζει η φάση; (Απ: όχι —  $\text{rect}^2 = \text{rect}$ .)

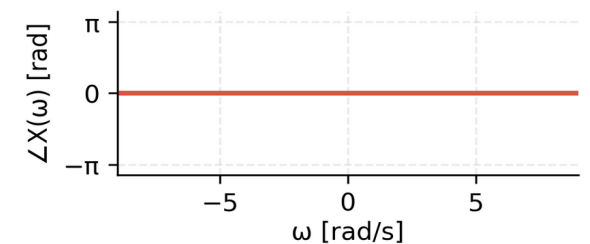
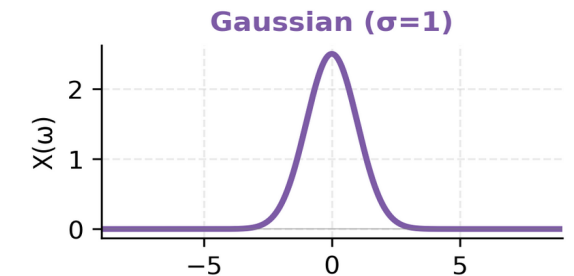
## Πότε η φάση είναι «καθαρή» και πότε γίνεται «πριονωτή»



$\angle X$  έχει  $\pm\pi$  άλματα στα μηδενικά



$\text{sinc}^2 \geq 0 \rightarrow \angle X = 0$  παντού



$X \in \mathbb{R}^+$  παντού  $\rightarrow \angle X = 0$

rect: άλματα στα μηδενικά · τρίγωνο και Gaussian: φάση επίπεδη/μηδενική.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  [rad/s],  $X(\omega)$  [U·s] (πραγματικό για αυτούς τους 3 παλμούς).  $\phi$  [rad]. Τα  $\pm\pi$  άλματα δείχνουν αλλαγή προσήμου, όχι χρονική καθυστέρηση.

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: φάση & μέτρο. Μετά: γιατί Gaussian = κατανόηση time-shift.

## Γιατί πρώτα φάση με Gaussian και όχι με rect;

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: Gaussian vs rect για phase visualization

Η Gaussian δεν έχει zeros στο φάσμα → η γραμμική φάση φαίνεται καθαρή

Gaussian:  $\angle Y = -\omega t_0$  γραμμικά · rect:  $\angle Y$  έχει "0/π" άλματα στα zeros

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Όταν  $|X(\omega)| \rightarrow 0$ , η φάση δεν ορίζεται αξιόπιστα. Στα μηδενικά του sinc το  $X(\omega)$  αλλάζει πρόσημο → wrapped phase έχει άλματα 0/π.

Για μέτρηση καθυστέρησης: unwrap → mask (όπου  $|X|$  μεγάλο) → polyfit.

Η Gaussian δεν έχει zeros → φάση καθαρή.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε rect, ποιο μηδενικό προκαλεί 1ο "άλμα π" στη φάση;

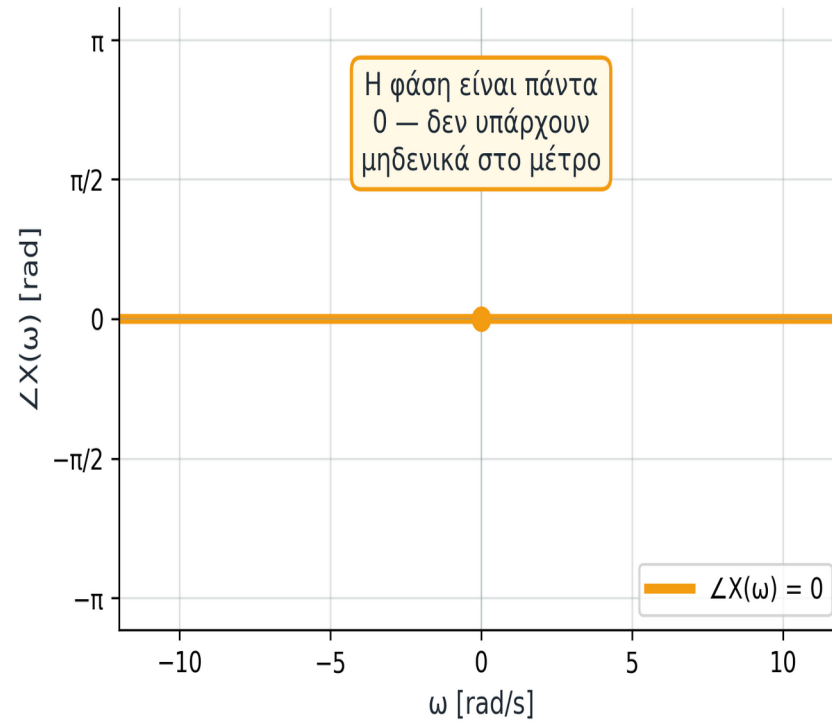
## ΕΞΗΓΗΣΗ

Το 1ο μηδενικό σε  $\omega = \pm 2\pi/T$ . Εκεί το sinc αλλάζει πρόσημο. Αυτό σημαίνει  $e^{j\pi}$  (= -1), άρα η φάση κάνει "άλμα" π. Με unwrap+mask αποφεύγουμε τα zeros για να μετράμε σωστά κλίση.

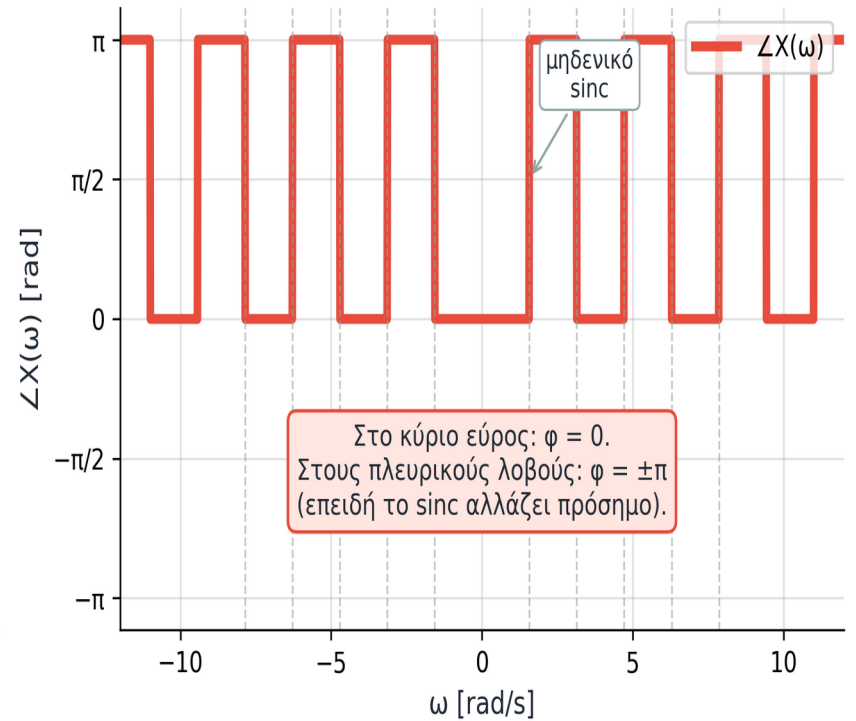
## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Με ποιο tools κάνεις mask στα zeros; (Octave: index > ε.)

Gaussian:  $\angle X(\omega) \equiv 0$  για κάθε  $\omega$



Rect:  $\angle X(\omega)$  πηδάει 0 ↔ π στα μηδενικά



Σύγκριση: Gaussian (καθαρή γραμμική φάση) vs rect (0/π άλματα λόγω zeros).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

$\omega$  [rad/s]. Φάση [rad] συνήθως -π..+π. Για unwrap, εκτείνεται. Μη μετράς κλίση σε σημείο όπου  $|X|$  είναι μικρό. Mask πρώτα.

Πριν: τι σημαίνει φάση. Μετά: άσκηση μέτρησης κλίσης.

Για  $y(t)=x(t-t_0)$ , το μέτρο μένει ίδιο και η φάση αλλάζει κατά  $-\omega t_0$

$$y(t) = x(t - t_0) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$$

**Πίνακας 2c (WRAPPED phase):**  
Η πραγματική γραμμική φάση  $-\omega t_0$  είναι ευθεία. Wrap σπάει την ευθεία σε πριονωτή  $[-\pi, \pi]$ .  
unwrap την επαναφέρει —δες σ56, σ57.

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Γκαουσιανός παλμός  $x(t)=e^{-t^2/(2\sigma^2)}$  και  $y(t)=x(t-2)$ . Καθαρή καθυστέρηση  $t_0=2$ .

$\tau_{\text{phase}} = -\phi/\omega$ .  $\tau_{\text{group}} = -d\phi/d\omega$ .  
Σε γραμμική φάση:  $\tau_p = \tau_g = t_0$ .

## ΕΡΩΤΗΣΗ

Τι θα δω στη φάση  $\phi_Y - \phi_X$  αν μετατοπιστεί το σήμα κατά  $t_0=2$  s;

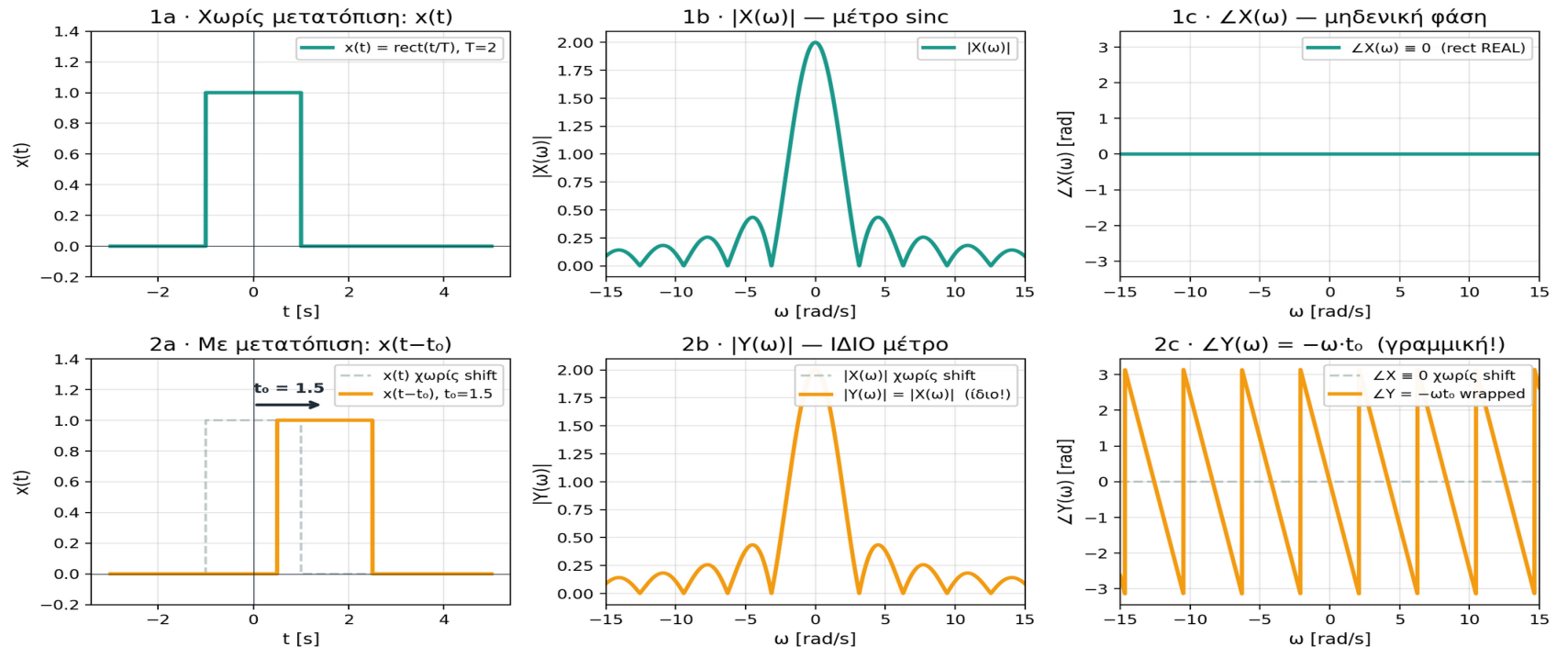
## ΕΞΗΓΗΣΗ

Time shift  $t_0 \rightarrow$  πολ/μός με  $e^{-j\omega t_0}$ .  
 $|Y|=|X|$  αμετάβλητο,  $\angle Y = \angle X - \omega t_0$ .  
 $\angle Y - \angle X$  γραμμική, κλίση =  $-t_0$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν  $\phi_Y - \phi_X = -5\omega$ , ποια καθυστέρηση  $t_0$ ; (Απ:  $t_0=5$  s)

**Χρονική μετατόπιση:  $|X|$  ΔΕΝ αλλάζει, η φάση παίρνει γραμμικό όρο  $-\omega t_0$**   
(Ισχύει για ΚΑΘΕ x(t), όχι μόνο rect)



Ευθεία φάσης σημαίνει καθαρή καθυστέρηση. Κλίση =  $-t_0$ .

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  [rad/s] οριζόντια. φάση σε rad. Κλίση σε s.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Στο rect το φάσμα έχει sinc zeros: η ίδια γραμμική φάση φαίνεται πριονωτή.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: μέτρο vs φάση. Μετά: wrapped phase πραγματικού σήματος.

# Modulation: συχνοτική μετατόπιση

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον:  $x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \rightarrow$  φέρει το X γύρω από  $\pm\omega_0$

Πολλαπλασιασμός με  $\cos(\omega_0 t)$  μεταφέρει το φάσμα σε  $\pm\omega_0$  — αυτό είναι το πιο βασικό βήμα κάθε modulation

$$x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Modulation:  $x(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \approx \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Baseband: φάσμα γύρω από  $\omega=0$  (π.χ. Gaussian, rect).  
 Passband / bandpass: φάσμα μεταφερμένο γύρω από μη μηδενική φέρουσα  $\pm\omega_0$  (αυτό κάνει το modulation).  
 Broadband: σήμα με μεγάλο εύρος ζώνης, ανεξάρτητα από το αν είναι baseband ή passband.

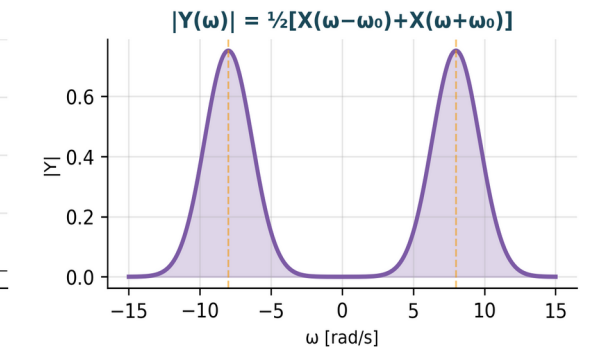
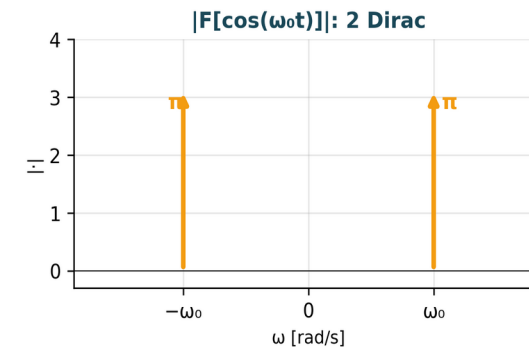
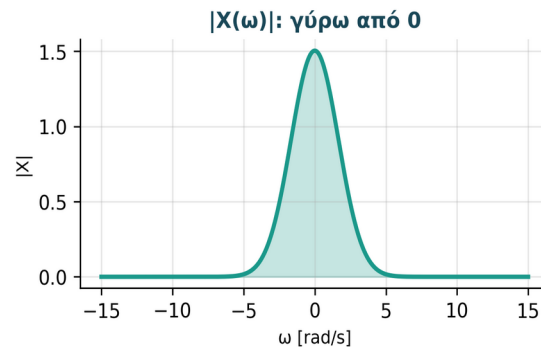
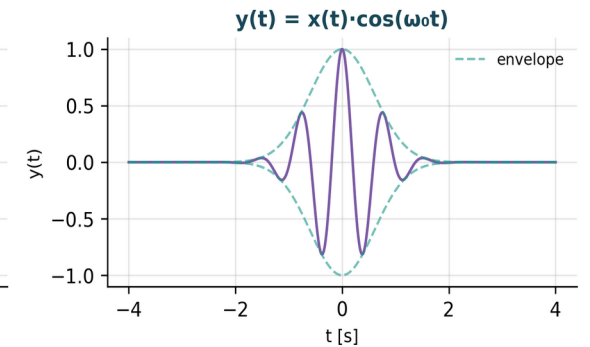
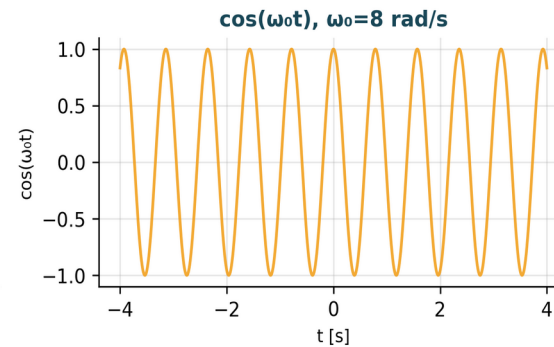
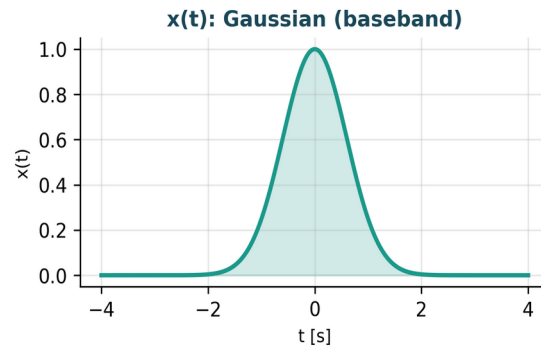
Αν  $|X(\omega)|$  έχει peak στο  $\omega=0$ , πού θα είναι τα peaks του  $|Y|$ ;  
 (Απ: στο  $\omega=\pm\omega_0$ )

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Από Euler:  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{+j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ .  
 Άρα  $x \cdot \cos = \frac{1}{2}[x \cdot e^{+j\omega_0 t} + x \cdot e^{-j\omega_0 t}]$ .  
 Frequency shift:  $\frac{1}{2}X(\omega \mp \omega_0)$ .

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Αν  $x(t)=\text{rect}(t/T)$  και  $\omega_0=10$ , ποιο είναι το  $Y(\omega)$ ;  
 (Απ:  $\frac{1}{2}T \cdot \text{sinc}((\omega-10)T/2\pi) + \frac{1}{2}T \cdot \text{sinc}((\omega+10)T/2\pi)$ )



Πάνω αριστερά: baseband. Πάνω δεξιά: «modulated». Κάτω: το φάσμα μετατοπίζεται σε  $\pm\omega_0$  ως δύο αντίγραφα του X.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

$\omega$  [rad/s]. Επίδειξη με  $\omega_0=8$  rad/s.  $|Y|$  αδιάστατο (πλάτος). Η μετατόπιση είναι ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ: εμφανίζεται στο  $+\omega_0$  ΚΑΙ στο  $-\omega_0$  (όχι μόνο σε ένα). Πριν: φάσσορες και Euler. Μετά: παράδειγμα AM modulation.

Το πιο γνωστό modulation στην πράξη: AM ραδιόφωνο. Ένα μήνυμα μεταφέρεται με carrier σε  $\omega_c$

$$s(t) = [1 + \mu \cdot m(t)] \cdot \cos(\omega_c t) \rightarrow |S(\omega)| \text{ γύρω από } \pm\omega_c$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Μήνυμα  $m(t)$  baseband (π.χ. φωνή). Πολλαπλασιάζεται με φέρουσα  $f_c$  (στο plot:  $f_c=80$  Hz,  $f_m=5$  Hz — pedagogical). Αποτέλεσμα: φάσμα γύρω από  $\pm\omega_c$  αντί για baseband.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν  $m(t)$  έχει  $BW = \Omega_m$ , ποιο είναι το BW του AM σήματος γύρω από  $\omega_c$ ; (Απ:  $2\Omega_m$  αμφίπλευρο)

## ΕΞΗΓΗΣΗ

AM modulation = frequency shift με προσθήκη carrier για ευκολία demodulation. Το modulation index  $\mu$  ελέγχει βάθος. Στο φάσμα: 1 Dirac στο  $\pm\omega_c$  (carrier) + 2 πλευρικές ζώνες (sidebands).

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γιατί χρειαζόμαστε το «+1» στο  $s(t)=[1+\mu\cdot m]\cdot\cos$ ; (Απ: για envelope detection — εξαναγκάζει το envelope να μη μηδενίζεται)

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

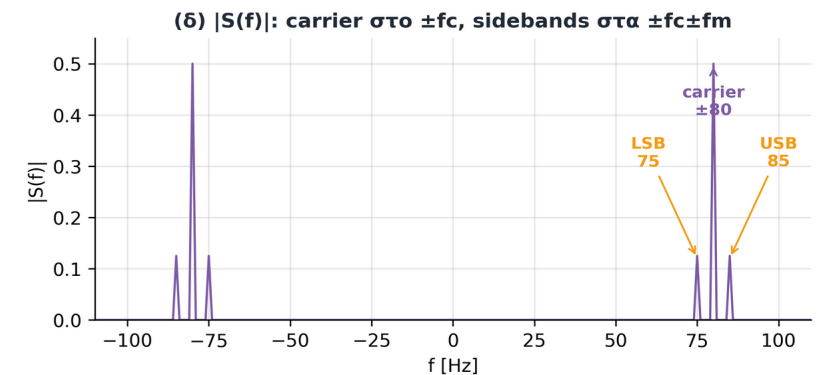
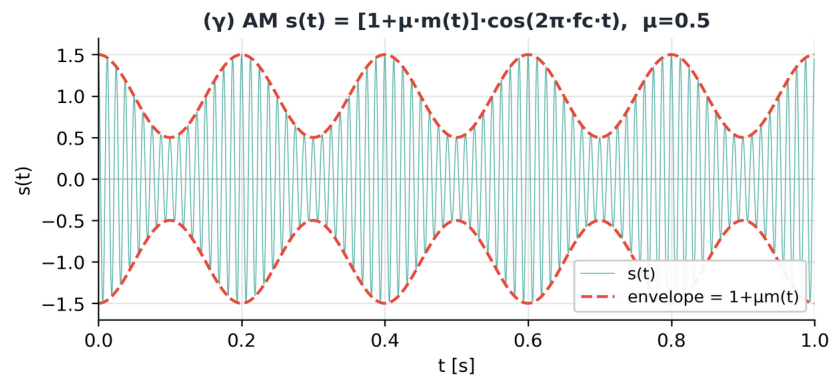
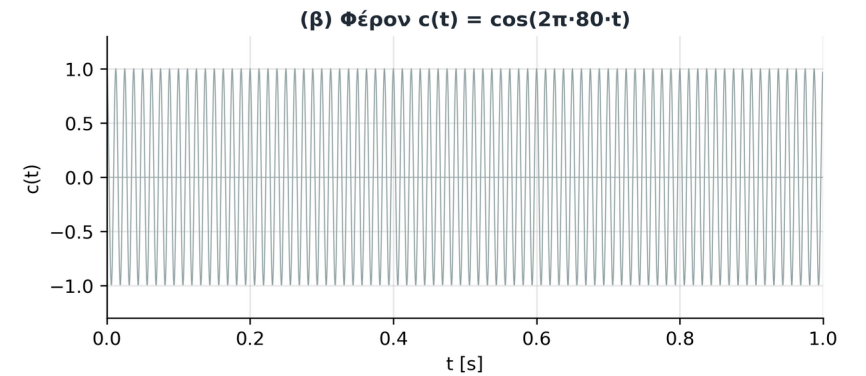
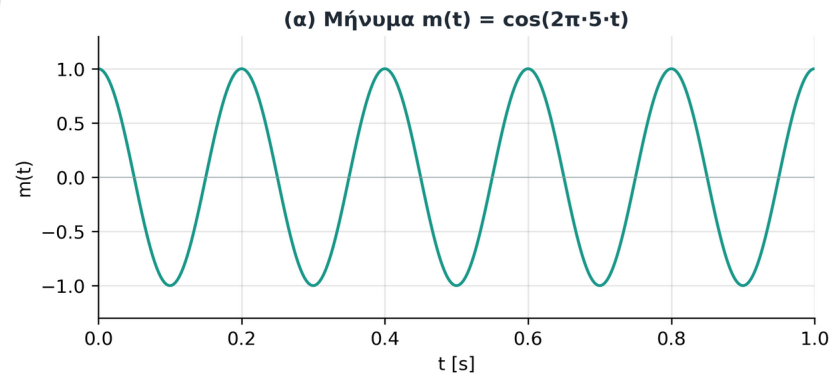
t [s], f [Hz]. Pedagogical  $f_c=80$  Hz,  $f_m=5$  Hz για σαφή plots.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Το AM φάσμα είναι  $2\Omega_m$  πλατύ (αμφίπλευρο), όχι  $\Omega_m$ . Διπλάσιο εύρος από το baseband.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: γενική modulation. Μετά: bridge σε W08 (sampling = modulation με Dirac comb).



Πάνω αριστερά:  $m(t)$ . Πάνω δεξιά:  $\cos$  carrier. Κάτω αριστερά:  $s(t)$  — το envelope ακολουθεί τη μορφή του  $m$ . Κάτω δεξιά:  $|S(\omega)|$  με carrier+sidebands.

Δεν διαβάζουμε θέση από το μέτρο. Τη διαβάζουμε από κλίση φάσης.

## Στόχος

Έχεις πραγματικό παλμό  $y(t)=x(t-t_0)$ .

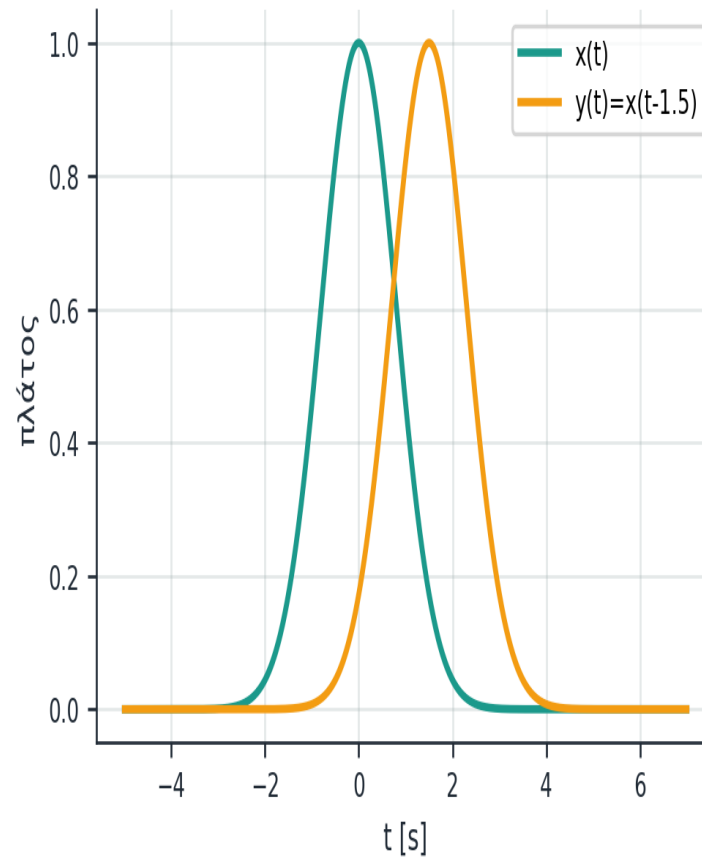
Από το plot της φάσης  $\phi Y(\omega)$  να βρεις το  $t_0$ .

Υπολογισμός: slope =  $\Delta\phi/\Delta\omega$ .

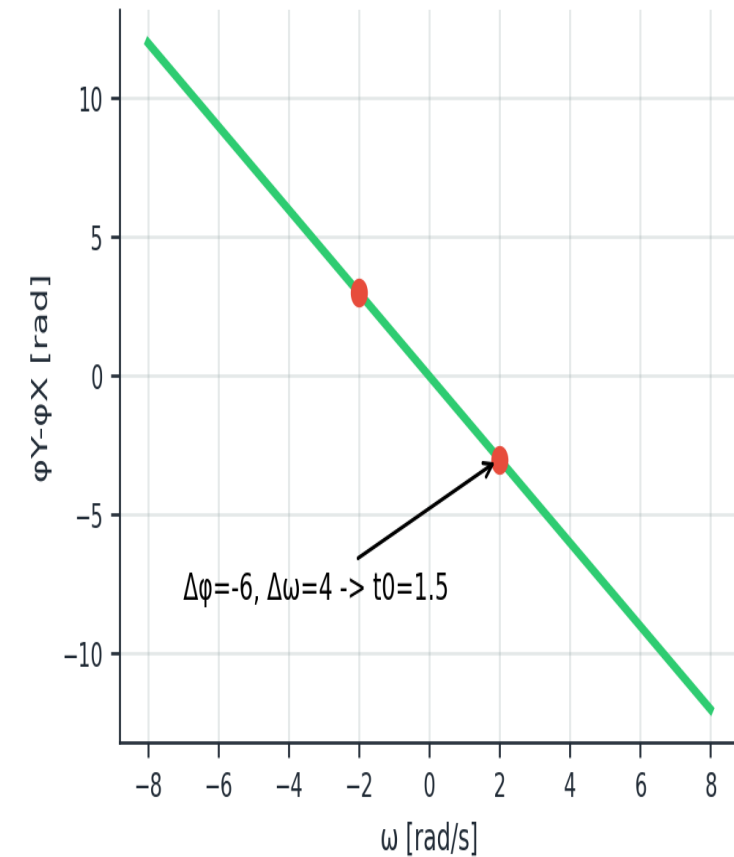
$t_0 = -\text{κλίση}$ .

```
% Καθυστέρηση Gaussian: μέτρηση από slope
t0 = 1.5;
sig = 0.8;
w = linspace(-8, 8, 1500);
X = sqrt(2*pi)*sig*exp(-(w*sig).^2/2);
Y = X .* exp(-1j*w*t0);
phi = unwrap(angle(Y));
plot(w, phi); grid on;
xlabel("ω [rad/s]");
ylabel("φY [rad]");
% slope από 2 σημεία (-3, +3):
slope = (phi(end-200) - phi(200))/(w(end-200) - w(200));
t0_estim = -slope;
```

Πραγματικό παράδειγμα: καθυστέρηση 1.5 s



$t_0 = -\Delta\phi/\Delta\omega$



## ΤΙ ΠΕΡΙΜΕΝΩ

Το plot της φάσης είναι ευθεία. Διαβάζω κλίση από 2 αξιόπιστα σημεία.

## ΚΛΑΣΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

Κλίση από κοντινά σημεία αυξάνει θόρυβο. Πάρε σημεία μακριά μεταξύ τους.

## ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Στο παράδειγμα slope = -1.5, άρα  $t_0 = 1.5$  s. Επιβεβαιώνει την εισαγωγή.

Άσκηση — μέτρα  $t_0$  από φάση: unwrap + mask + polyfit

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

 $y(t)=\text{rect}((t-2)/4)$ , βρες  $t_0$  από κλίση

Από wrapped φάση  $\rightarrow$  unwrap + mask  $\rightarrow$  linear fit. Βρες  $t_0$  χωρίς να ξέρεις το αρχικό σήμα.

unwrap: αναιρεί τα  $\pm 2\pi$  άλματα. mask: αγνοεί  $\omega$  όπου  $|X| \approx 0$  (τυχαία γωνία). polyfit: γραμμικό fit για κλίση =  $-t_0$ .

## Εκφώνηση

Δίνεται  $y(t) = \text{rect}((t - t_0)/T)$  με  $T=4$ , άγνωστο  $t_0$ .

Από το φάσμα  $Y(\omega)$ :

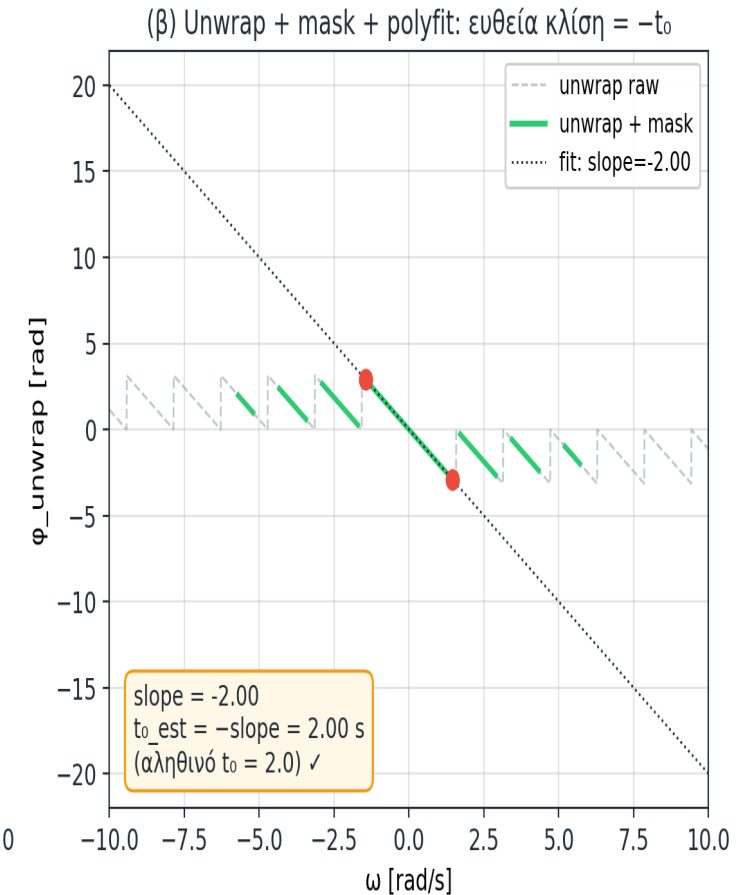
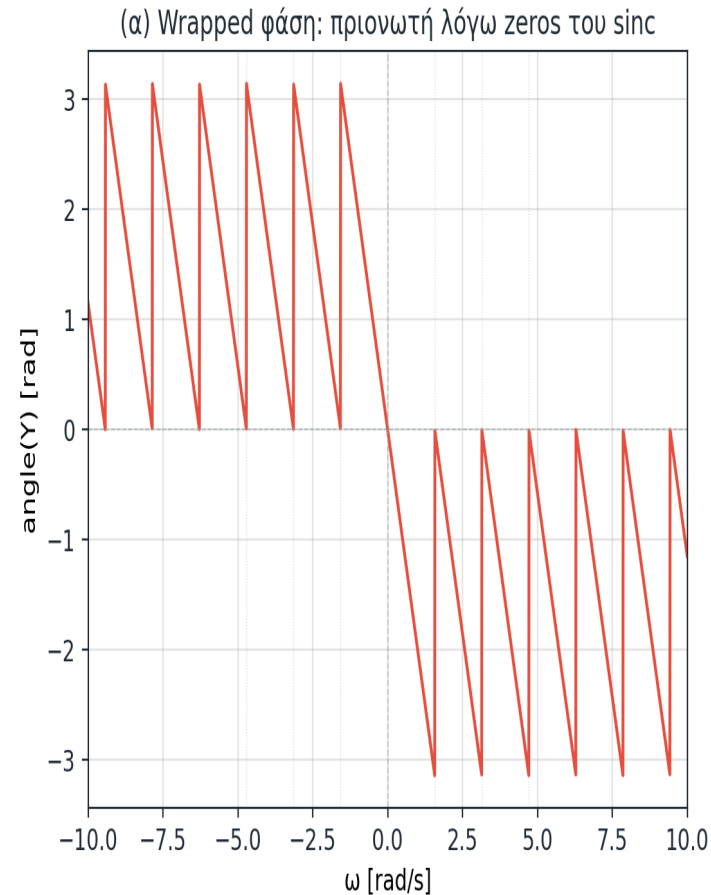
- 1) βρες wrapped φάση =  $\text{angle}(Y)$
- 2) unwrap, mask όπου  $|Y| < 0.08 \cdot \max$
- 3) γραμμικό fit στον κύριο λοβό
- 4)  $t_0 = -\text{κλίση}$

```
clear; close all; clc; pkg load signal
% --- W04 anon helpers ---
rect = @(t,a,b) ((t>=a) & (t<=b));
% --- Μέτρηση t0 από φάση rect ---
w = linspace(-10, 10, 3000);
T = 4; t0 = 2; % αληθινό
t0
Y = T*sinc(w*T/(2*pi)).*exp(-1j*w*t0);
phi = unwrap(angle(Y));
msk = abs(Y) >= 0.08*max(abs(Y)); % mask
ml = (abs(w) < pi/2) & msk; % κύριος
λοβός
p = polyfit(w(ml), phi(ml), 1);
t0_est = -p(1); % => 2.00
```

Octave/MATLAB built-ins: unwrap (αναιρεί  $\pm 2\pi$ ), polyfit (linear/poly fit), index masking (mask =  $\text{abs}(X) \geq \epsilon$ ). Δεν χρειάζεσαι extra package — pkg load signal μόνο για κάποιες ειδικές.

## ΤΙ ΠΕΡΙΜΕΝΩ

Γραμμική κλίση στον κύριο λοβό.  $t_{0\_est} = -\text{κλίση} \approx 2.00 \text{ s}$  ✓



## ΚΛΑΣΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

Χωρίς mask, τα zeros του sinc δίνουν τυχαίες γωνίες — το polyfit χαλάει.

## ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

$\text{polyfit}(w(\text{mask}), \phi(\text{mask}), 1) \rightarrow$  κλίση =  $-2.00 \rightarrow t_0 = 2.00 \text{ OK}$  (όσο το αληθινό)

# Ιδιότητες FT + $u(t)$

Property map, γενικές vs ειδικές, αιτιατά σήματα και ενεργά όρια

Ξέρω ήδη

ότι linearity, time-shift, scaling και convolution είναι universal

Τώρα ανοίγει

πίνακας ιδιοτήτων + αιτιατή εκθετική  $e^{-at}u(t) \rightarrow 1/(a+j\omega)$

Στο τέλος μπορώ

να αναγνωρίζω γενική vs ειδική ιδιότητα

Ιδιότητα	x(t)	X(ω)
Γραμμικότητα	$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$	$a \cdot X_1(\omega) + b \cdot X_2(\omega)$
Χρονική μετατόπιση	$x(t - t_0)$	$X(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
Συχνότητα: μετατόπιση	$x(t) \cdot e^{+j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Κλιμάκωση χρόνου	$x(at)$	$(1/ a ) \cdot X(\omega/a)$
Συζυγία	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Παράγωγος (χρόνος)	$d/dt x(t)$	$j\omega \cdot X(\omega)$
Συνέλιξη	$x(t) * h(t)$	$X(\omega) \cdot H(\omega)$
Γινόμενο	$x(t) \cdot y(t)$	$(1/2\pi) \cdot (X * Y)(\omega)$

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

Property = κανόνες που ισχύει για όλα τα CTFT pairs.

**ΠΡΟΣΟΧΗ**

Διαφορετικό από ειδικές μορφές (π.χ. rect → sinc). σ31.

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Συνέλιξη/γινόμενο = κεντρικό για LTI συστήματα σ37.

# Γενικές ιδιότητες vs ειδικές μορφές: μην μπερδεύεσαι

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: classification ιδιοτήτων

Δύο κατηγορίες: ισχύουν για κάθε x(t), ή μόνο για συγκεκριμένα ζεύγη

**ΓΕΝΙΚΗ:** πάντα ισχύει · **ΕΙΔΙΚΗ:** μόνο για συγκεκριμένο είδος σήματος

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Σύγχυση που οδηγεί σε λάθη: πχ "το RC είναι low-pass" είναι ΕΙΔΙΚΗ ιδιότητα, όχι γενική. ΓΕΝΙΚΗ ιδιότητα είναι πχ "συνέλιξη → γινόμενο" που ισχύει για ΟΛΑ τα LTI συστήματα.

**ΕΡΩΤΗΜΑ**

Είναι το "Parseval" γενική ή ειδική;

**ΑΠΑΝΤΗΣΗ**

Γενική. Ισχύει για κάθε x(t) σήμα ενέργειας. Αντίθετα, "Gaussian → Gaussian" είναι ειδική γιατί εφαρμόζεται μόνο στη συγκεκριμένη συνάρτηση. Αν χρησιμοποιήσεις ειδική για άλλο σήμα, βγάζεις λάθος αποτέλεσμα.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Κατάταξε: linearity, rect→sinc, time-shift→linear-phase, RC=low-pass.

**ΓΕΝΙΚΕΣ**

ισχύουν για κάθε x(t)

- Γραμμικότητα:  $aX_1 + bX_2$
- Time shift  $x(t-t_0) \rightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
- Scaling  $x(at) \rightarrow (1/|a|)X(\omega/a)$
- Συζυγία  $x^*(t) \rightarrow X^*(-\omega)$
- Συνέλιξη  $x*h \rightarrow X \cdot H$
- Παράγωγος  $dx/dt \rightarrow j\omega X$
- Πραγματικό x → Hermitian X
- Parseval  $\int |x|^2 dt = (1/2\pi) \int |X|^2 d\omega$

**ΕΙΔΙΚΕΣ**

μόνο για συγκεκριμένα σήματα

- $\text{rect}(t/T) \rightarrow T \cdot \text{sinc}(\omega T/2\pi)$
- Gaussian → Gaussian
- $\delta(t) \rightarrow 1$
- $\cos(\omega_0 t) \rightarrow \text{spikes σε } \pm \omega_0$
- $e^{-at}u(t) \rightarrow 1/(a+j\omega)$
- RC:  $H(\omega) = 1/(1+j\omega\tau)$  χαμηλοπερατό

**Παγίδα: "RC είναι low-pass" είναι ΕΙΔΙΚΗ, όχι γενική ιδιότητα φίλτρων**

**ΔΙΑΒΑΣΩ ΠΙΝΑΚΑ**

Ιδιότητες που ισχύουν πάντα και ειδικές Για συγκεκριμένα ζεύγη

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Μην γενικεύεις ειδική ιδιότητα. "Αιτιατή εκθετική →  $1/(a+j\omega)$ " δεν αφορά "όλα τα φίλτρα".

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: property map. Μετά: u(t) και αιτιατό.

# Duality theorem: $F[F[x]](t) = 2\pi \cdot x(-t)$

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

rect ↔ sinc και sinc ↔ rect

Αν εφαρμόσεις FT δύο φορές, παίρνεις πίσω το αρχικό σήμα — με αναστροφή και παράγοντα 2π

$$F[F[x(t)]](t) = 2\pi \cdot x(-t) \Rightarrow \text{αν } x \leftrightarrow X, \text{ τότε } X(t) \leftrightarrow 2\pi \cdot x(-\omega)$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Συνέπεια: rect ↔ sinc αλλά και sinc ↔ rect (με σωστή κλιμάκωση). Εξοικονομεί τα μισά FT υπολογισμούς.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Αν  $x(t) = \text{sinc}(t)$ , τι είναι  $X(\omega)$ ; (Απ:  $\text{rect}(\omega/(2\pi))$  — από duality)

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Από συμμετρία των τύπων ανάλυσης/σύνθεσης. Με αναστροφή  $\omega \leftrightarrow t$  και διπλό πέρασμα, ο μόνος διαφορετικός παράγων είναι 2π. Σημείωση: εδώ  $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$  (normalized). Με αυτή τη σύμβαση:  $\text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(\omega/(2\pi))$ .

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Από Gaussian ↔ Gaussian, τι λέει το duality; (Απ: η Gaussian είναι self-dual — μένει Gaussian.)

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

Δουλεύει για κάθε ζεύγος. Σημείο προσοχής: η αναστροφή -ω.

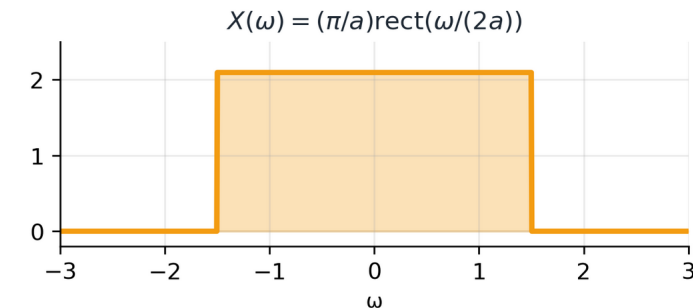
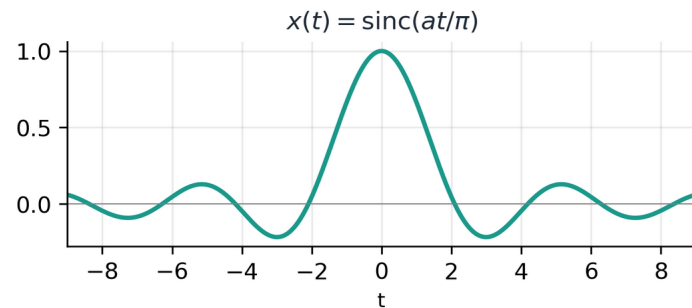
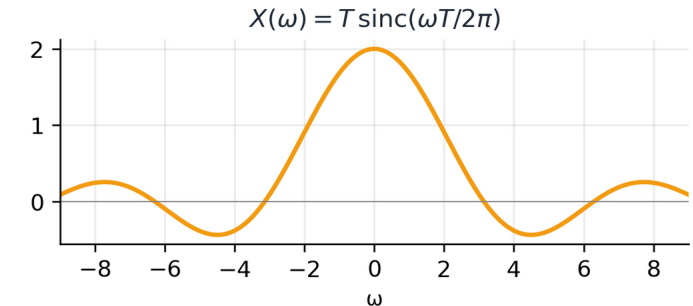
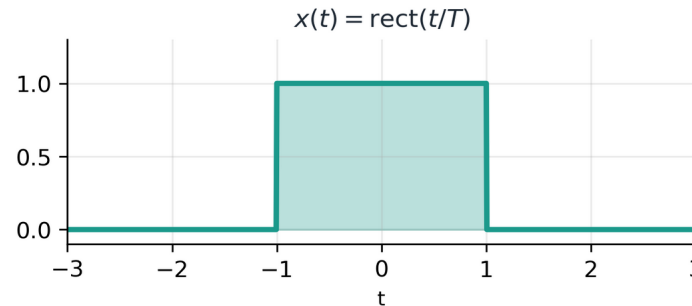
**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Δεν είναι "F[F]=identity". Είναι "F[F]=2π·(αναστροφή)". 4 εφαρμογές FT επιστρέφει στο αρχικό  $\times (2\pi)^2$ .

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: property map. Μετά: group delay.

**Duality: rect ↔ sinc and sinc ↔ rect**



Πίνακας 2x2: αν ξέρεις το ζεύγος rect ↔ sinc, παίρνεις δωρεάν το ζεύγος sinc ↔ rect.

u(t) είναι "διακόπτης": 0 πριν, 1 μετά. Όχι διακοσμητικό σύμβολο.

$u(t) = 0$  αν  $t < 0$ ,  $u(t) = 1$  αν  $t \geq 0$  · αλλάζει όρια ολοκληρώματος

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Όταν γράφεις  $x(t)=f(t) \cdot u(t)$ , το  $u(t)$  δεν είναι "πάντα 1". Είναι ένας διακόπτης. Όταν ολοκληρώνεις, αυτό αλλάζει τα πραγματικά όρια από  $(-\infty, +\infty)$  σε  $[0, +\infty)$ .

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσο είναι το  $e^{-t} \cdot u(t)$  στο  $t=-2$ ; (Απ: 0.)

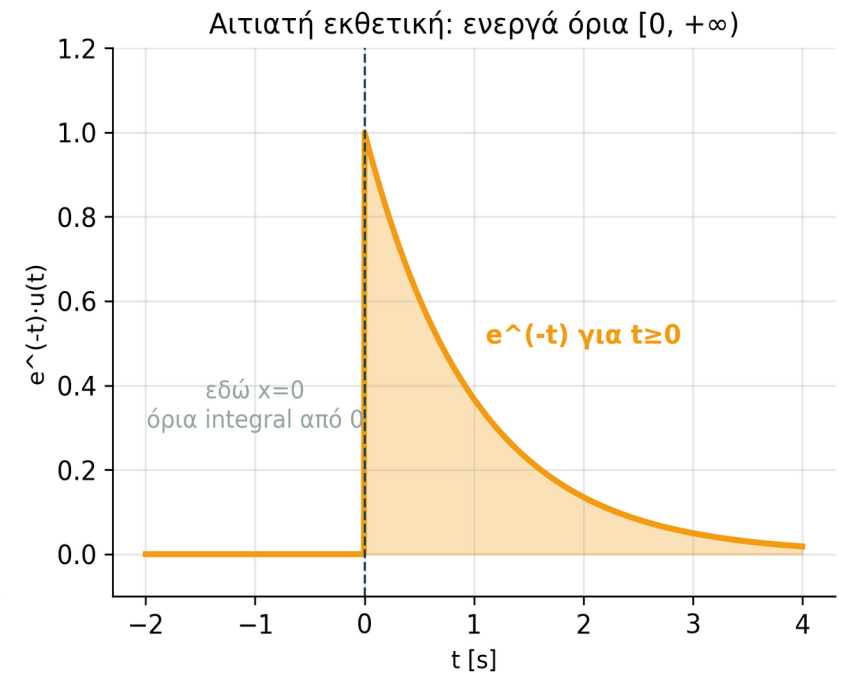
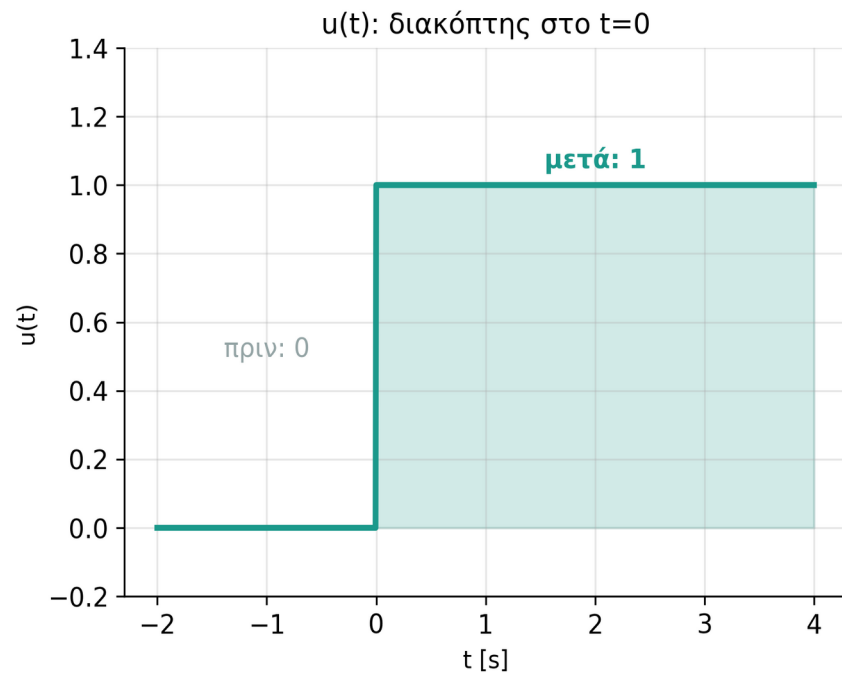
## ΕΞΗΓΗΣΗ

Για  $t < 0$ , το  $u(t)=0 \rightarrow$  όλο το γινόμενο 0. Άρα στο ολοκλήρωμα CTFT, το διάστημα  $(-\infty, 0)$  δεν συνεισφέρει. Πρακτικά γράφουμε  $\int_0^{\infty}$  αντί για  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γράψε  $x(t)=\cos(t) \cdot u(t)$  ως ολοκλήρωμα.  
Ποια είναι τα όρια;

u(t) ως διακόπτης: αλλάζει τα όρια ολοκληρώματος



Αριστερά: u(t) ως διακόπτης. Δεξιά:  $e^{-t} \cdot u(t)$  με όρια  $[0, \infty)$ .

Αιτιατό =  $x(t)=0$  για  $t<0$ . Φυσικά κρουστικές αποκρίσεις είναι αιτιατές.

Αιτιατό:  $x(t) \cdot u(t)$  · Μη αιτιατό: συμμετρικό ως προς  $t=0$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Γιατί θέλω αιτιατό:

- Φυσική αιτιότητα — η έξοδος δεν προηγείται της εισόδου.
- Όλες οι πραγματικές κρουστικές αποκρίσεις είναι αιτιατές:  $h(t)=0$  για  $t<0$ .
- Απλά όρια στο CTFT:  $\int_{-\infty}^{+\infty}$  αντί για  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ .
- Real-time υλοποίηση: δεν χρειάζεται μελλοντικά δείγματα.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Είναι το  $\cos(t) \cdot u(t)$  αιτιατό;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

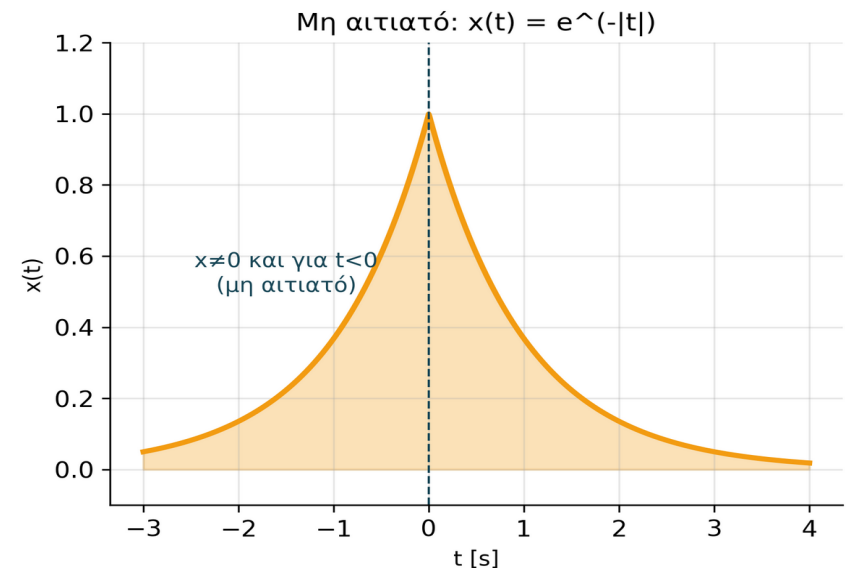
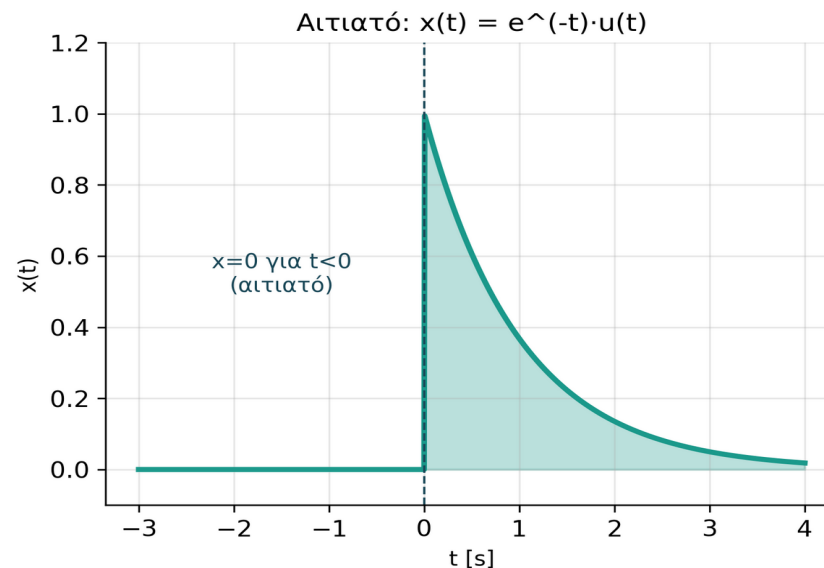
Ναι. Για  $t<0$  το  $u(t)=0$ , άρα το γινόμενο 0.  
 Octave: `u = @(t)(t>=0)`.  
 Αλλάζει όρια CTFT:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Είναι το  $r(t)=t \cdot u(t)$  αιτιατό; (Απ: ναι.)  
 Octave: `trapz(0:0.01:5, t.*u(t))` → εμβαδόν.

**ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ**  $x(t) \cdot u(t) \rightarrow$  αιτιατό ( $=0$  για  $t<0$ ).  $e^{(-|t|)} \rightarrow$  ΜΗ-αιτιατό. Φυσικά συστήματα πάντα αιτιατά → εξηγεί γιατί σ65  $1/(a+j\omega)$  ΕΙΔΙΚΗ (όχι ΓΕΝΙΚΗ).

Αιτιατό vs μη αιτιατό: ζει μόνο μετά  $t=0$  ή και πριν;



Αριστερά: αιτιατό  $e^{(-t)u(t)}$ . Δεξιά: μη αιτιατό  $e^{(-|t|)}$ .

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

t [s], σήμα σε [U]. Διακεκομμένη στο  $t=0$  ως διαχωριστής.

Αιτιατό vs μη αιτιατό = ξεχωριστά σήματα, όχι "διορθωμένη γραφή".

Πριν:  $u(t)$ . Μετά: Άσκηση 6  $e^{(-at)u(t)} \rightarrow 1/(a+j\omega)$ .

Άσκηση 5 — ενεργά όρια με  $u(t)$ 

W06

x(t)

X( $\omega$ )

φ/BW

RC

FFT

x(t)=e<sup>-t</sup>u(t) — αιτιατό

## ΕΚΦΩΝΗΣΗ

Δίνεται  $x(t)=e^{-t}u(t)$ . Δείξτε γιατί το ολοκλήρωμα CTFT περιορίζεται σε  $[0, \infty)$ . Υπολογίστε το ολοκλήρωμα σε  $[-3, 6]$  και σε  $[0, 6]$  και συγκρίνετε.

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+j\omega)t} dt$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

$x(t)=e^{-t}u(t)$ . Για  $t < 0$  το σήμα είναι ακριβώς μηδέν. Άρα το CTFT integral ξεκινά από 0.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιο διάστημα ολοκληρώνεις πραγματικά;

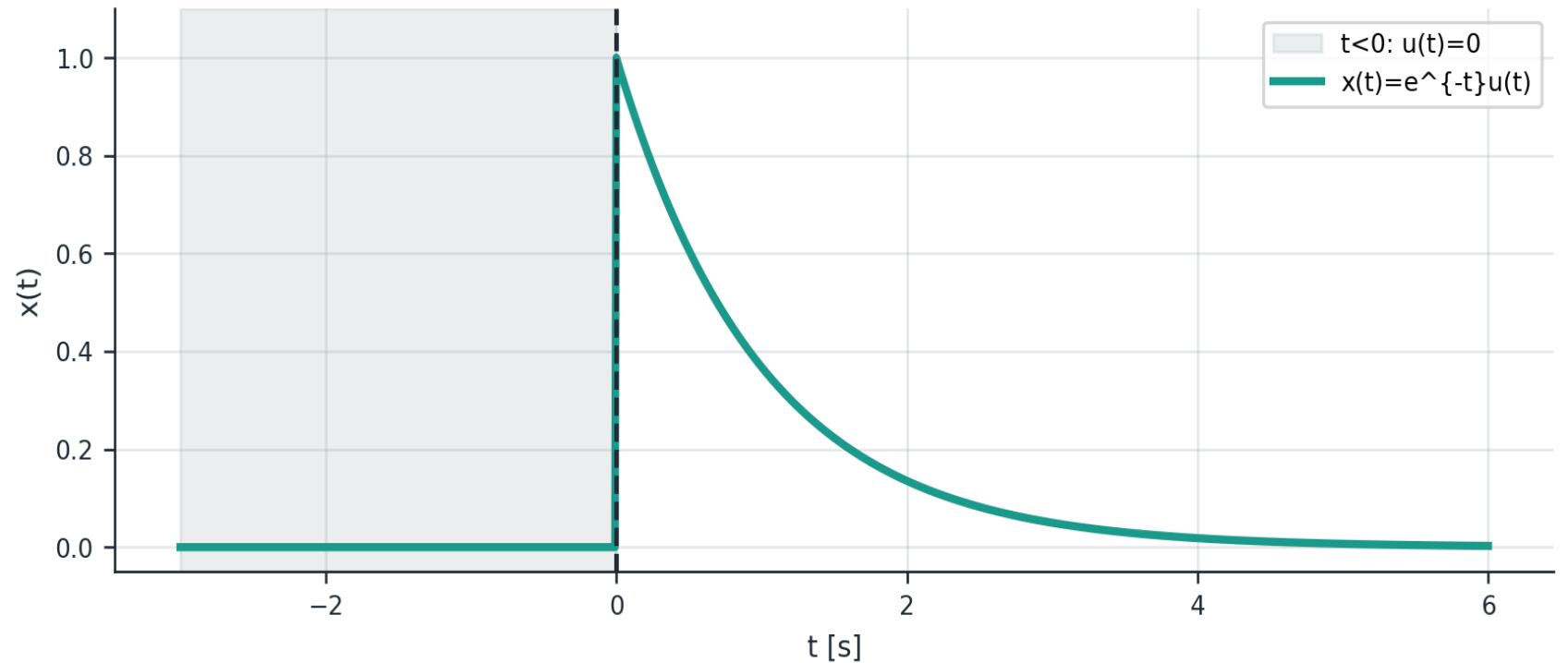
## ΕΞΗΓΗΣΗ

Γράψε CTFT ορισμό, αντικατάστησε  $x(t)$ , δείξε γιατί μένει  $\int_0^{\infty}$  μέσω  $u(t)$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ολοκλήρωσε σε  $[-3, 6]$  και σε  $[0, 6]$ . Συγκρίνετε τιμές.  
(Απ: πρακτικά ίδιες — πριν το 0 δεν συνεισφέρει)

Το  $u(t)$  αλλάζει τα ενεργά όρια:  $(-\infty, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$



Η γκρι περιοχή δεν συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα. Αυτό είναι το νόημα των ενεργών ορίων.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΙΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [s] στον χρόνο. x(t) σε [U]. Σκίαση = ενεργά όρια.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη γράφεις  $\int_{-\infty}^{\infty}$  αν το  $u(t)$  μηδενίζει την περιοχή  $t < 0$ .

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: ορισμός  $u(t)$ . Μετά: CTFT αιτιατής εκθετικής.

# Άσκηση 6 – CTFT αιτιατής εκθετικής, μιγαδικά σήματα και Hermitian

Δίνεται  $x(t)=e^{-(at)}u(t), a>0$ . Ζητάμε τύπο, μέτρο, φάση, ενέργεια και Hermitian έλεγχο

$$X(\omega) = 1/(a + j\omega) \text{ και } E = 1/(2a)$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

$x(t)=e^{-(at)}\cdot u(t), a>0$ .  
 Υπολόγισε  $X(\omega) = \int_{-0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = 1/(a+j\omega)$ .  
 Στόχος:  $|X(\omega)|, \angle X(\omega)$  σε κλειστή arctan-μορφή.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Είναι το  $x(t)$  πραγματικό; Άρα ισχύει Hermitian;

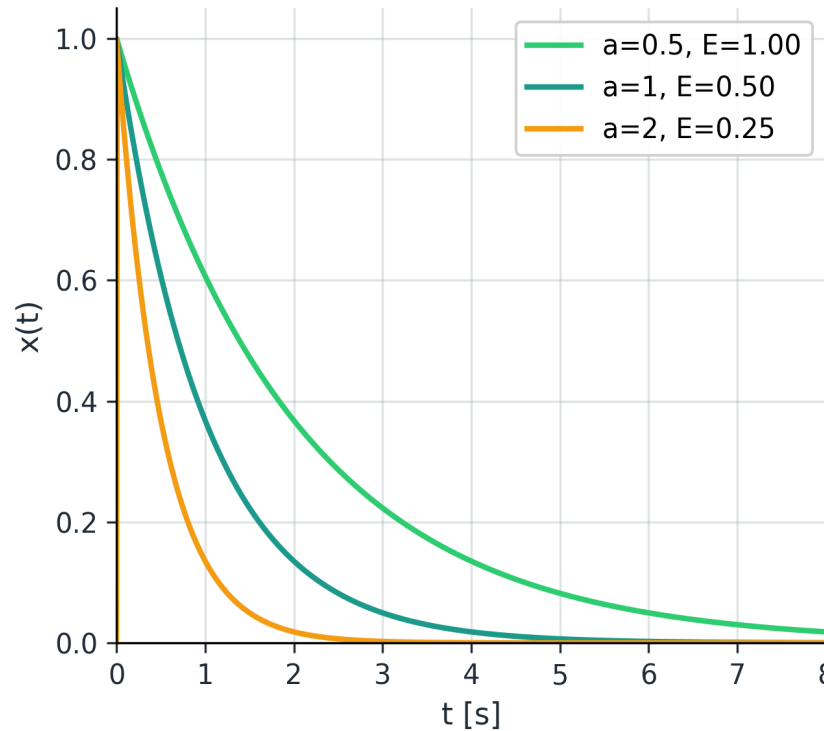
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

$X(\omega)\cdot(a-j\omega)/(a-j\omega) = (a-j\omega)/(a^2+\omega^2)$ .  
 $|X|=1/\sqrt{a^2+\omega^2}, \angle X = -\arctan(\omega/a)$ .  
 Για  $a=1, \omega=1: |X|=1/\sqrt{2}$  (-3 dB).

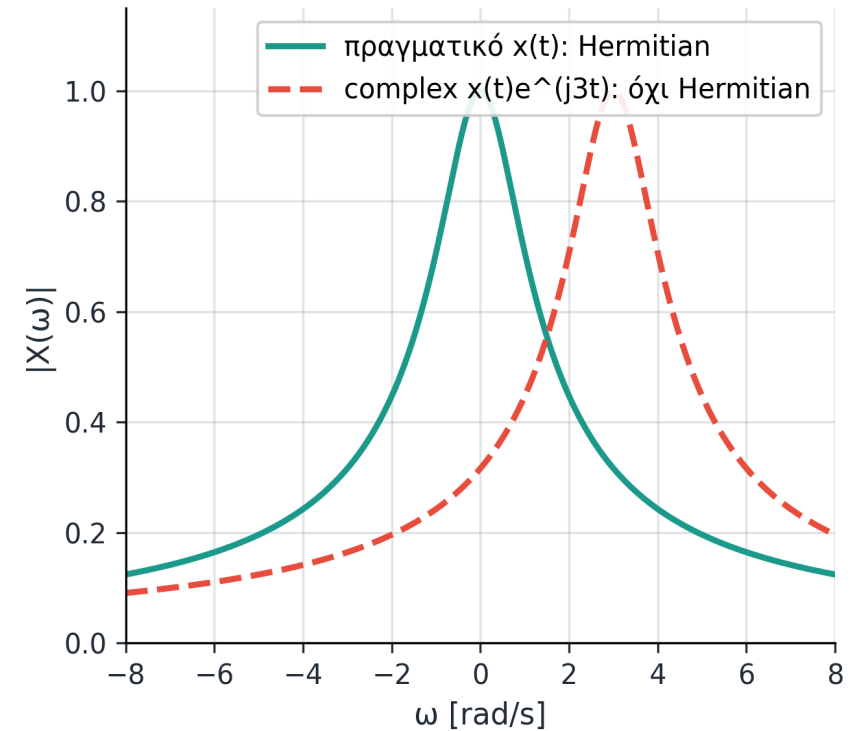
**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Αν  $x(t)=e^{-(at)}e^{(j3t)}u(t)$ , είναι μιγαδικό. Ακυρώνεται η Hermitian; (Απ: Ναι,  $X(-\omega) \neq X^*(\omega)$ )

$x(t)=e^{-(at)}u(t): E=1/(2a)$



Hermitian μόνο για πραγματικό  $x(t)$



Αριστερά φαίνεται η ενέργεια  $1/(2a)$ . Δεξιά φαίνεται πότε χάνεται η Hermitian συμμετρία.

# Λύση: CTFT αιτιατής εκθετικής — μέτρο, φάση και -3 dB σημείο

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

X(ω)=1/(a+jω), a=1

Η λύση δεν είναι μόνο τύπος. Διαβάζουμε και τι σημαίνει στο plot

$$|X(\omega)| = 1/\sqrt{a^2 + \omega^2} \cdot \varphi(\omega) = -\arctan(\omega/a)$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

$X(\omega) = \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t} dt = 1/(a + j\omega)$ , για  $a > 0$ .

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιο  $\omega$  το  $|X|$  μειώνεται στο  $1/\sqrt{2}$  της μέγιστης τιμής;

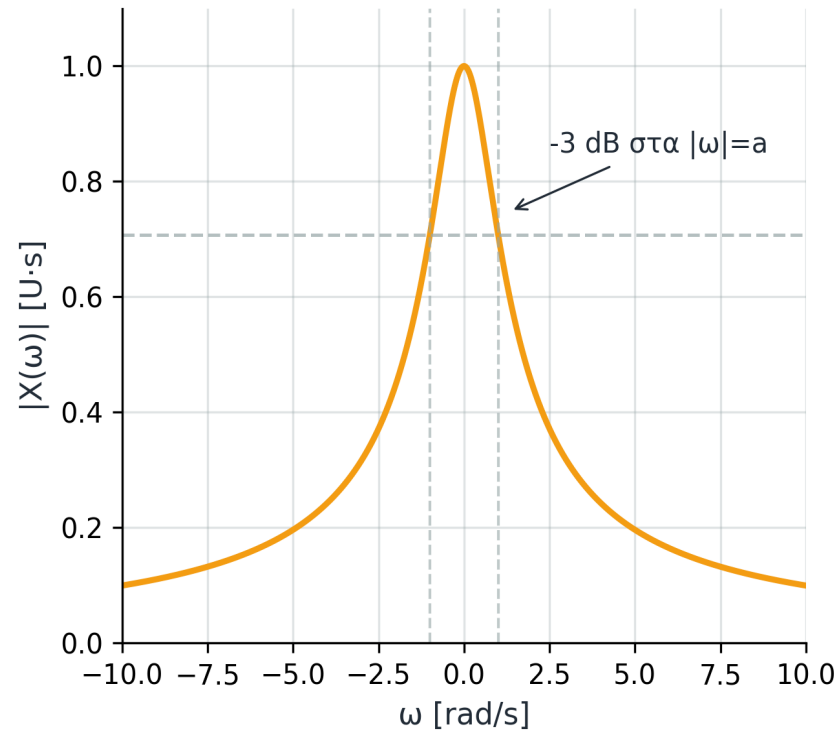
## ΕΞΗΓΗΣΗ

$|X(\omega)| = 1/\sqrt{a^2 + \omega^2}$ .  $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/a)$ . Για  $a=1$ :  $|X(0)|=1$ ,  $|X(1)|=1/\sqrt{2} \approx 0.707$  (-3 dB).

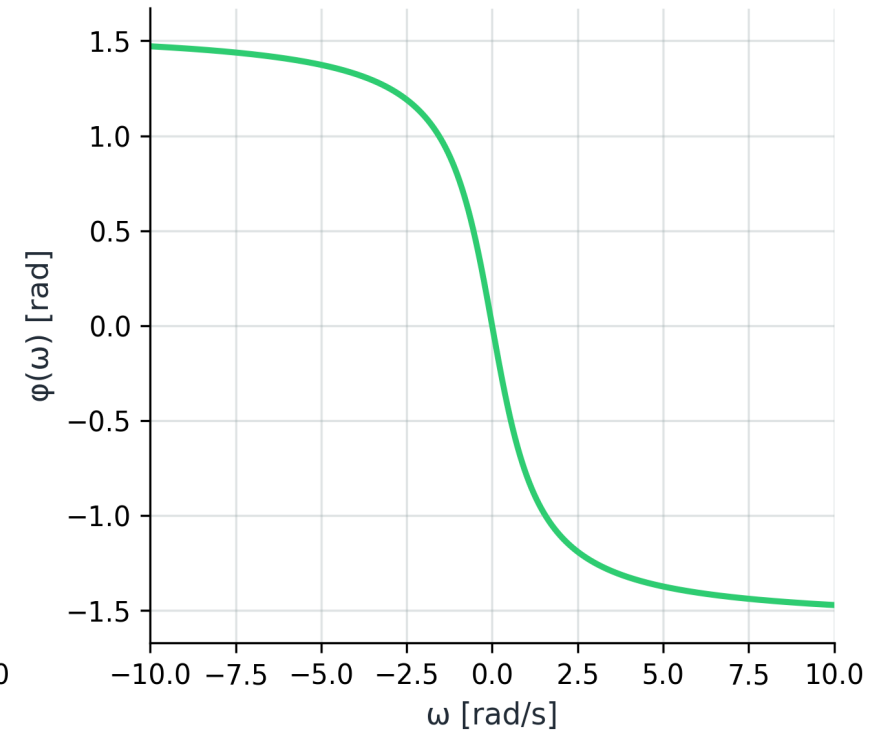
## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Βρες το  $\omega_{-3dB}$  ως συνάρτηση του  $a$ .  
(Απ:  $\omega_{-3dB} = a$ )

$$|X(\omega)| = 1/\sqrt{a^2 + \omega^2}, a=1$$



$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/a), \text{ περιττή}$$



Το ίδιο σχήμα θα γίνει  $H(\omega) = 1/(1+j\omega t)$ . Αυτό είναι χαμηλοπερατό φίλτρο RC.

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  σε rad/s (log scale).  $|X|$  σε dB. φάση σε rad.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Στο -3 dB σημείο: το πλάτος είναι  $|H|=1/\sqrt{2}$  και η ισχύς  $|H|^2$  είναι  $1/2$  της μέγιστης τιμής.

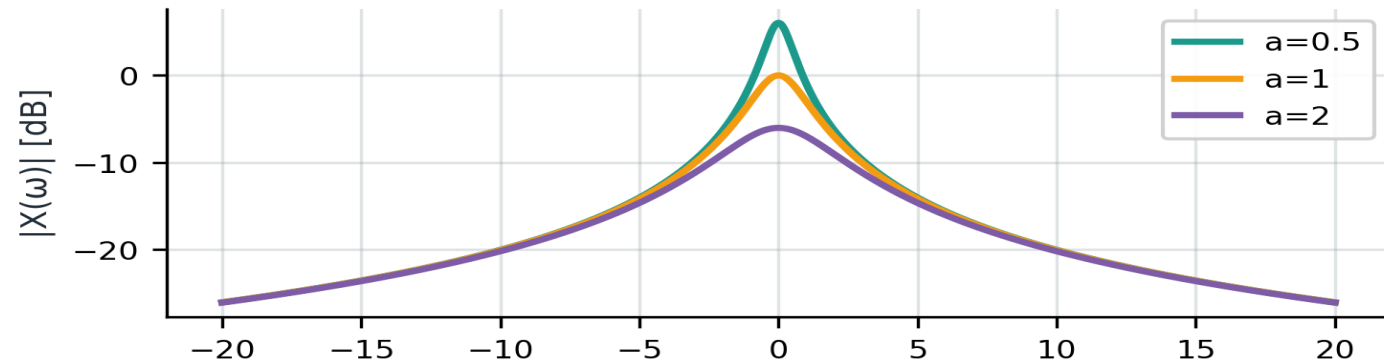
Στόχος: επιβεβαίωση ότι ισχύει  $|X(\omega)| = 1/\sqrt{a^2+\omega^2}$  και  $\varphi(\omega) = -\arctan(\omega/a)$  για  $x(t) = e^{(-at)} \cdot u(t)$ ,  $a \in \{0.5, 1, 2\}$ .

Γράψε ένα Octave script που:

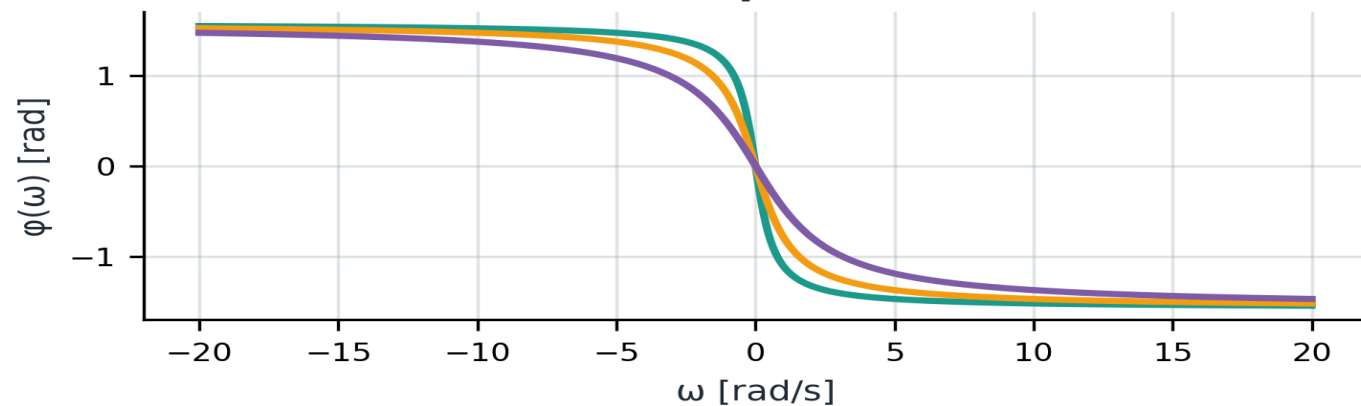
- 1) Ορίζει τη συχνότητα  $\omega$  στο διάστημα  $[-20, 20]$  με 4001 δείγματα.
- 2) Υπολογίζει το  $X(\omega) = 1/(a + j\omega)$  για κάθε  $a \in \{0.5, 1, 2\}$ .
- 3) Σχεδιάζει σε δύο υποπίνακες:
  - $|X(\omega)|$  σε dB ( $20 \cdot \log_{10}|X|$ )
  - $\varphi(\omega)$
- 4) Επαληθεύει αριθμητικά ότι το peak στο  $\omega=0$  ταιριάζει με  $1/a$ .

```
clear; close all; clc; pkg load signal
% --- anonymous helpers ---
u = @(t) (t>=0);
% --- |X(ω)|, ∠X(ω) για x(t) = e-at·u(t) ---
% X(ω) = 1/(a+jω) - αιτιατή εκθετική
w = linspace(-20, 20, 4001);
for a = [0.5 1 2]
    X = 1 ./ (a + 1j*w);
    subplot(2,1,1); hold on; plot(w,
    20*log10(abs(X)), 'LineWidth', 2);
    subplot(2,1,2); hold on; plot(w, angle(X),
    'LineWidth', 2);
end
subplot(2,1,1); grid on; ylabel('|X| [dB]');
legend('a=0.5', 'a=1', 'a=2');
subplot(2,1,2); grid on; xlabel('\omega');
ylabel('φ [rad]');
% Μέτρο: peak στο ω=0 ίσο με 1/a (=>6,0,-6 dB).
```

### Μέτρο CTFT αιτιατής εκθετικής



### Φάση CTFT



#### ΤΙ ΠΕΡΙΜΕΝΟΥΜΕ

$X(0) = 1/a$ . Για  $a=0.5 \rightarrow 2$  (= 6 dB). Για  $a=1 \rightarrow 1$  (= 0 dB). Για  $a=2 \rightarrow 0.5$  (= -6 dB).

#### ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Άρτιο μέτρο ( $|X(-\omega)| = |X(\omega)|$ ) ΟΚ. Περιττή φάση ( $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ ) ΟΚ  
Συμμετρίες ορατές γραφικά

# RC ως φίλτρο - convolution theorem

$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$ . Από συνέλιξη σε γινόμενο.

Ξέρω ήδη

ότι το  $e^{-at}u(t) \rightarrow 1/(a+j\omega)$  και ότι  $Y=X \cdot H$  για LTI

Τώρα ανοίγει

$H(\omega)=1/(1+j\omega\tau)$ ,  $\omega_c=1/\tau$ , και πλήρης λύση  $\text{rect} \rightarrow \text{RC}$

Στο τέλος μπορώ

να λύνω LTI σε συχνότητα και να επαληθεύω με  $\text{conv}(x,h) * dt$

# Τι είναι $H(\omega)$ — απόκριση συχνότητας και $Y(\omega)$ φάσμα εξόδου

W06

$x(t)$

$X(\omega)$

$\phi/BW$

**RC**

FFT

$x(t)=\text{rect}(t/2)$ ,  $h(t)=\text{RC low-pass}$

Στο LTI σύστημα,  $x(t)$  μπαίνει,  $h(t)$  χαρακτηρίζει το σύστημα και  $y(t)$  έξοδος

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

$X(\omega)$ : φάσμα εισόδου.  $H(\omega)$ : απόκριση συχνότητας του LTI.  $Y(\omega)$ : φάσμα εξόδου.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Αν  $|H(\omega)|$  κρατά μόνο χαμηλές συχνότητες, τι θα γίνει το  $|Y(\omega)|$ ;

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Αν LTI:  $y(t)=x*h$  και  $Y=X\cdot H$ . Για  $x=\text{rect}(t/2)$  και  $H=\text{RC low-pass}$ , το  $Y$  έχει μικρότερη BW (φιλτράρεται).

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Αν  $|X(\omega)|=1$  και  $|H(2)|=0.3$ , ποιο  $|Y(2)|$ ; (Απ: 0.3)

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

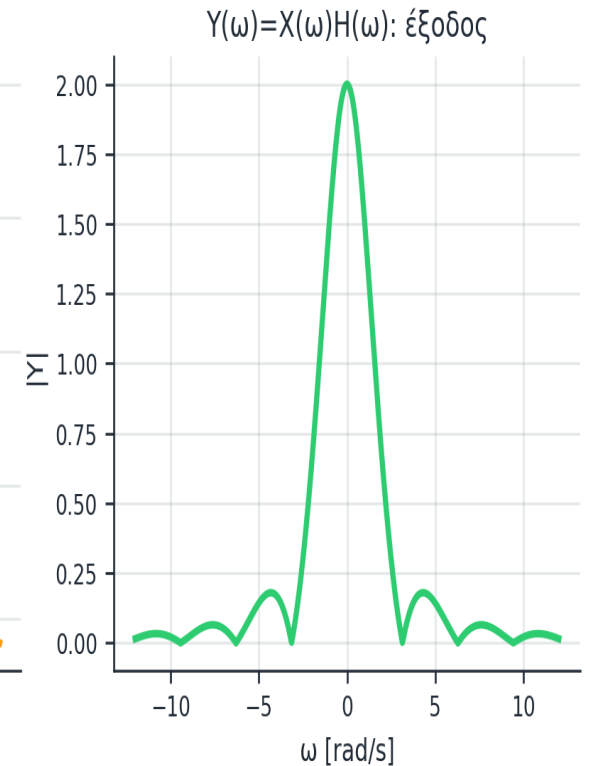
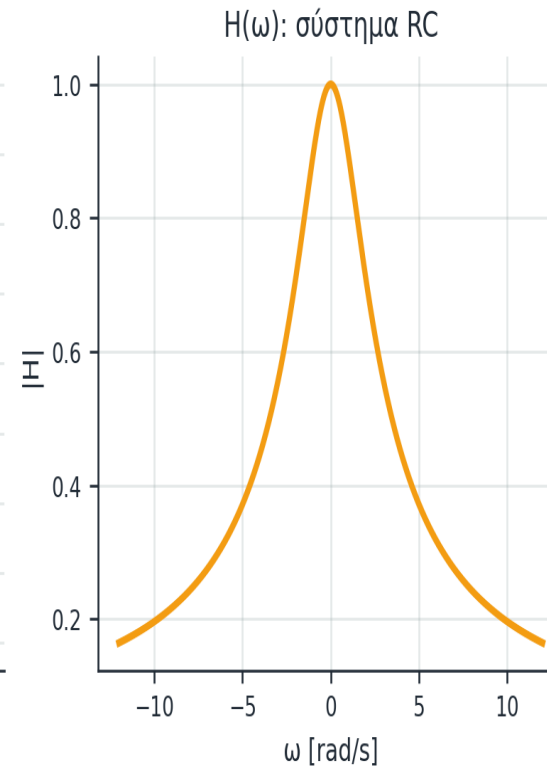
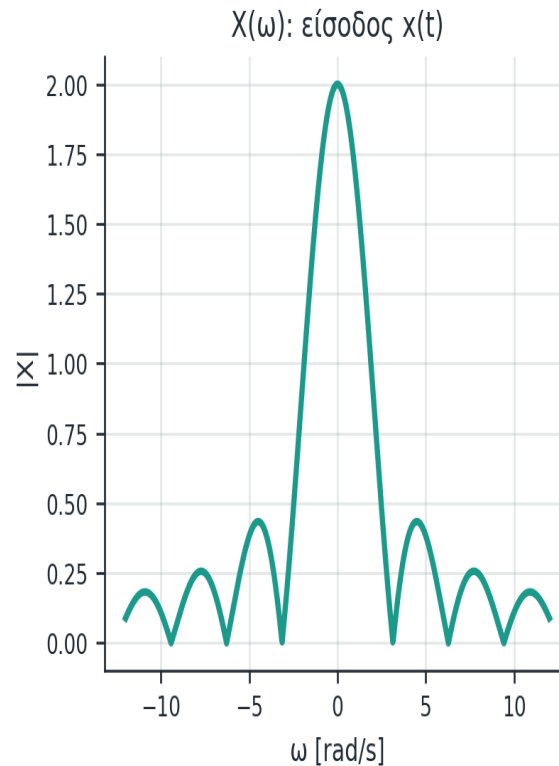
$\omega$  [rad/s].  $|H|$  είναι κέρδος (συνήθως αδιάστατο όταν εισόδος/έξοδος ίδιες μονάδες).  $|X|$ ,  $|Y|$  έχουν μονάδες φάσματος: [μονάδα σήματος]-s.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

$Y=X\cdot H$  ΜΟΝΟ για LTI. Για μη γραμμικά συστήματα δεν ισχύει.

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: convolution theorem. Μετά: γιατί RC κόκκινο νήμα.



Το  $Y(\omega)$  είναι αποτέλεσμα του  $X(\omega)$  επί  $H(\omega)$ , όχι νέο ανεξάρτητο σήμα.

# Θεώρημα συνέλιξης: $x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον σήμα:  $x(t)=\text{rect}(t/2)$ ,  $h_{\text{RC}}(t)$ ,  $y=x*h$ 

**Convolution theorem:  $y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$ .**

**Σήματα:  $x(t)=\text{rect}(t/2)$ ,  $h_{\text{RC}}(t) = (1/\tau) \cdot e^{-(t/\tau)} \cdot u(t)$ ,  $y(t)=x(t) * h_{\text{RC}}(t) \leftrightarrow Y=XH$**

## ΓΙΑΤΙ ΤΟ ΧΡΕΙΑΖΟΜΑΣΤΕ

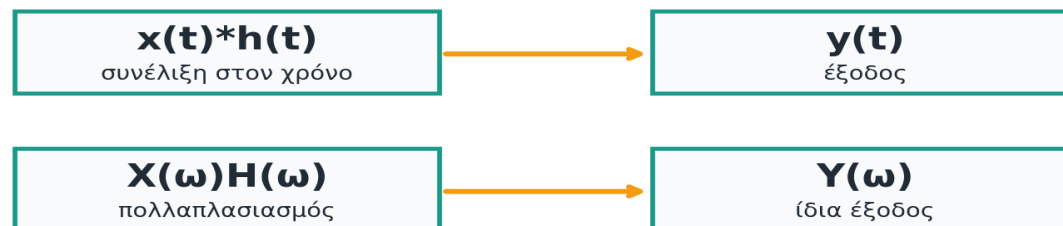
Στο W05 η έξοδος LTI ήταν συνέλιξη. Εδώ χρησιμοποιούμε συγκεκριμένο  $x(t)$  και συγκεκριμένο  $h(t)$ , ώστε το  $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$  να έχει φυσική σημασία.

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Στη συχνότητα, η δύσκολη συνέλιξη γίνεται απλός πολλαπλασιασμός: για κάθε  $\omega$ , το φίλτρο  $H(\omega)$  λέει πόσο περνά η συχνότητα και πόση φάση προσθέτει.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν  $|H(10)|=0.1$  και  $|X(10)|=5$ , βρες  $|Y(10)|$ .



Σήματα:  
 $x(t)=\text{rect}(t/2)$   
 $h_{\text{RC}}(t)=(1/\tau)e^{-t/\tau}u(t)$   
 $y(t)=x(t)*h_{\text{RC}}(t)$

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Το διάγραμμα δεν έχει αριθμητικούς άξονες. Δείχνει αντιστοιχία πράξεων: χρόνος  $\leftrightarrow$  συχνότητα.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη χρησιμοποιείς  $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$  για μη LTI σύστημα.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: εύρος ζώνης. Μετά: τότε ισχύει το LTI πλαίσιο.

Ένα φυσικό σήμα συνδέει χρόνο, CTFT, φάση, bandwidth και LTI φίλτρα

$$h(t) = (1/\tau) \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

$h(t)=(1/\tau) \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t)$  είναι η κρουστική απόκριση RC φίλτρου: αιτιατή, πραγματική, σταθερή, με πεπερασμένη ενέργεια.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Γιατί όλο το W07 επιστρέφει σε RC;

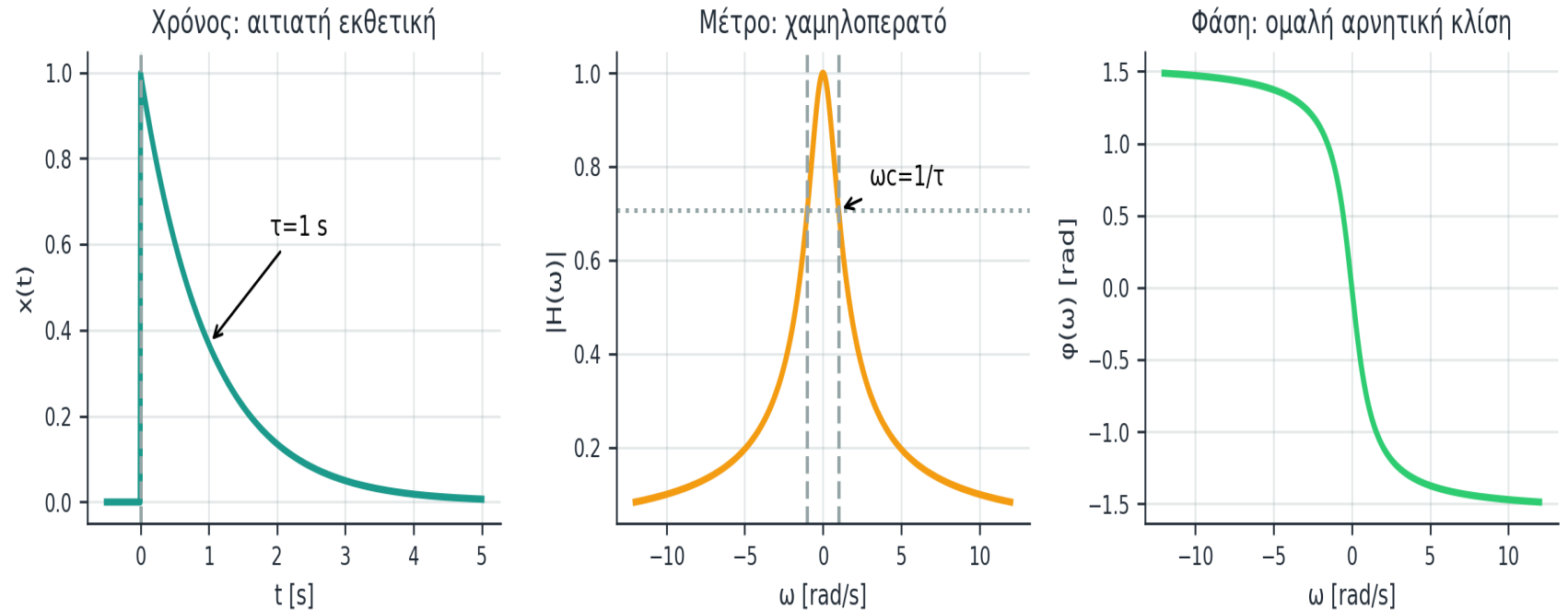
## ΕΞΗΓΗΣΗ

Καθαρός χρόνος  $\tau$ , καθαρή συχνότητα  $\omega_c=1/\tau$  και απλή απόκριση  $H(\omega)=1/(1+j\omega\tau)$ . Εμφανίζεται σε CTFT, συνέλιξη, φίλτρα, Laplace.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν  $\tau=0.1$  s, υπολογισμός  $\omega_c$  και  $f_c$ . (Απ:  $\omega_c=10$  rad/s,  $f_c \approx 1.59$  Hz)

RC κόκκινο νήμα: αιτιατό, πραγματικό, σταθερό, με απλή απόκριση συχνότητας



Το RC δίνει απλό φυσικό παράδειγμα για να μη μένει ο Fourier αφηρημένη έννοια.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$t$  [s] ή  $\omega$  [rad/s]. Παράμετρος  $\tau$  σε s.

ΠΡΟΣΕΧΩ

$\tau$  είναι χρονική σταθερά.  $\omega_c=1/\tau$  σε rad/s ή  $f_c=1/(2\pi\tau)$  σε Hz.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν:  $H(\omega)$  και convolution. Μετά: -3 dB και cutoff.

# -3 dB σημείο και cutoff συχνότητα $\omega_c = 1/\tau$

W06

x(t)

X( $\omega$ ) $\phi$ /BW

RC

FFT

Τρέχον:  $|H(\omega)| = 1/\sqrt{1+(\omega\tau)^2}$ Cutoff = εκεί που το πλάτος πέφτει στο  $1/\sqrt{2} \approx 0.707$  (= -3dB)

$$\omega_c = 1/\tau \cdot |H(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \cdot \angle H(\omega_c) = -\pi/4 = -45^\circ$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Το -3dB σημείο είναι το κεντρικό χαρακτηριστικό κάθε RC φίλτρου. Είναι ταυτόχρονα η συχνότητα στην οποία:

- το πλάτος πέφτει στο  $1/\sqrt{2}$ ,
- $|H|^2$  πέφτει στο  $1/2$  (μισή ισχύς),
- η φάση γίνεται  $-45^\circ$ .

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν  $\tau=0.5$  s, πόσο είναι  $\omega_c$ ;  
(Απ: 2 rad/s.)

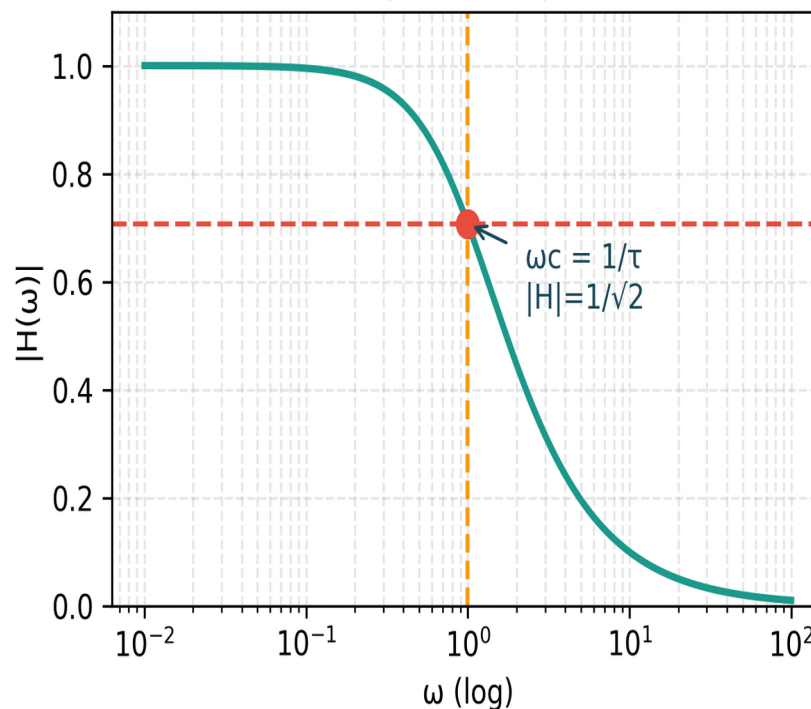
## ΕΞΗΓΗΣΗ

Το RC time constant  $\tau$  καθορίζει πλήρως την απόκριση. Διπλασιάζεις το  $\tau \rightarrow \omega_c$  πέφτει στο μισό. Αυτό σημαίνει πιο "βαρύ" χαμηλοπερατό: αποκόπτει χαμηλότερες συχνότητες.

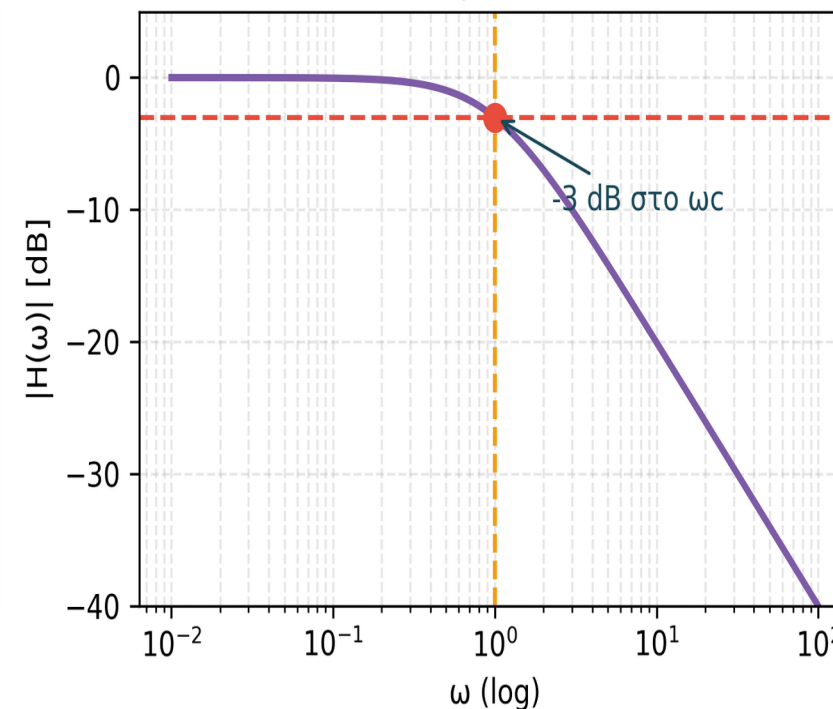
## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σχεδίαση: RC για  $\omega_c=10$  rad/s. Πόσο  $\tau$ ; (Απ:  $\tau=0.1$  s.)

Μέτρο RC low-pass



Μέτρο σε dB



$|H(\omega)|$  και  $\angle H(\omega)$  στο log scale, με  $\omega_c=1/\tau$  ως σημείο αναφοράς.

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  [rad/s] (συνήθως log scale).  $|H|$  αδιάστατο.  $\angle H$  [°].

## ΠΡΟΣΕΧΩ

-3dB ≠ "δεν περνά". Πέφτει στο 70.7% — ακόμα σημαντικό.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: ΓΕΦΥΡΑ. Μετά: ΑΣΚΗΣΗ rect  $\rightarrow$  RC με conv\*dt.

Bode plot: log scale στο  $\omega$  + dB στο  $|H|$  — βλέπεις πολύ μεγαλύτερο εύρος συχνοτήτων σε ένα plot

$|H|$  (dB) =  $20 \cdot \log_{10} |H|$  · άξονας  $\omega$  σε log scale · cutoff at  $\omega_c=1/\tau$  (-3 dB)

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Σε γραμμικό plot, το  $|H|$  του RC δείχνει "καμπύλη". Σε log-log: δύο ευθείες (ασύμπτωτες). Πολύ καθαρότερη ανάγνωση cutoff και κλίση.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πάνω από  $\omega_c$ , ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $|H|$  dB ανά δεκάδα;  
(Απ: -20 dB/decade — 1ης τάξης φίλτρο)

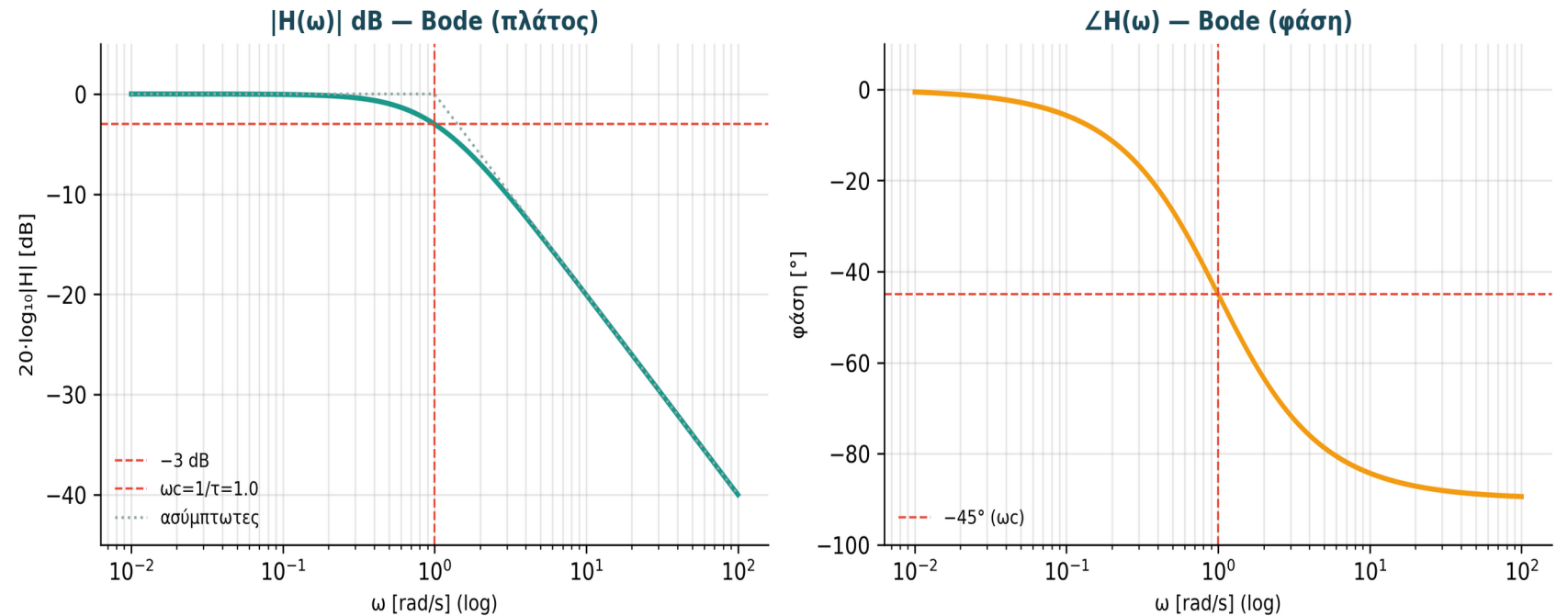
## ΕΞΗΓΗΣΗ

Για  $\omega \ll \omega_c$ :  $|H| \approx 1$ , ευθεία 0 dB. Για  $\omega \gg \omega_c$ :  $|H| \approx 1/(\omega\tau)$ , δηλαδή  $20 \cdot \log = -20 \cdot \log(\omega\tau)$ . Η μετάβαση στο  $\omega_c$  είναι -3 dB.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Στο Bode διάγραμμα, πόσο πέφτει το  $|H|$  από  $\omega_c$  σε  $10 \cdot \omega_c$ ;  
(Απ: -20 dB)

Bode plot: RC LPF,  $H(\omega)=1/(1+j\omega\tau)$ ,  $\tau=1$  s  $\Rightarrow \omega_c=1$  rad/s



Αριστερά:  $|H|$  σε dB vs  $\log(\omega)$  — δύο ευθείες ασύμπτωτες, intersection στο  $\omega_c$ . Δεξιά:  $\angle H$  — από  $0^\circ$  σε  $-90^\circ$ , με  $-45^\circ$  στο  $\omega_c$ .

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  σε rad/s ΣΕ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΚΛΙΜΑΚΑ.  $|H|$  σε dB. Φάση σε μοίρες (όχι rad).

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Bode = ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΟ  $\omega$ . Linear  $\omega$  χάνει την ιδέα. Συμβολισμός:  $20 \cdot \log_{10}$  (ισχύς θα ήταν  $10 \cdot \log_{10}$ ).

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: -3 dB σημείο. Μετά: ιδανικά vs πραγματοποιήσιμα.

Ιδανικά φίλτρα έχουν ορθογώνια |H| — αλλά απαιτούν μη αιτιατή κρουστική απόκριση. Πραγματικότητα: RC και Butterworth προσεγγίζουν

**Ιδανικό LPF:  $H(\omega) = \text{rect}(\omega / (2\omega_c)) \Leftrightarrow h(t) = (\omega_c / \pi) \cdot \text{sinc}(\omega_c \cdot t / \pi)$  — ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ**

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

Ένα φίλτρο που "κόβει τέλεια" στο  $\omega_c$  και "περνά τέλεια" κάτω από αυτό απαιτεί  $h(t)$  που εκτείνεται σε όλο  $t$  — και στο  $t < 0$ ! Δηλαδή το ιδανικό LPF είναι μη αιτιατό.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Γιατί δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε ιδανικό LPF; (Απ: επειδή απαιτεί γνώση μέλλοντος)

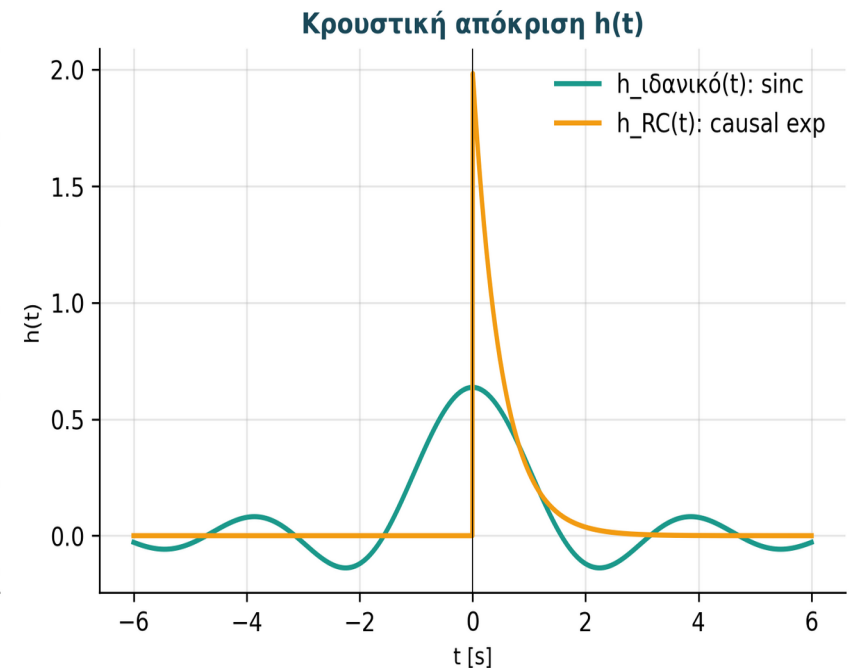
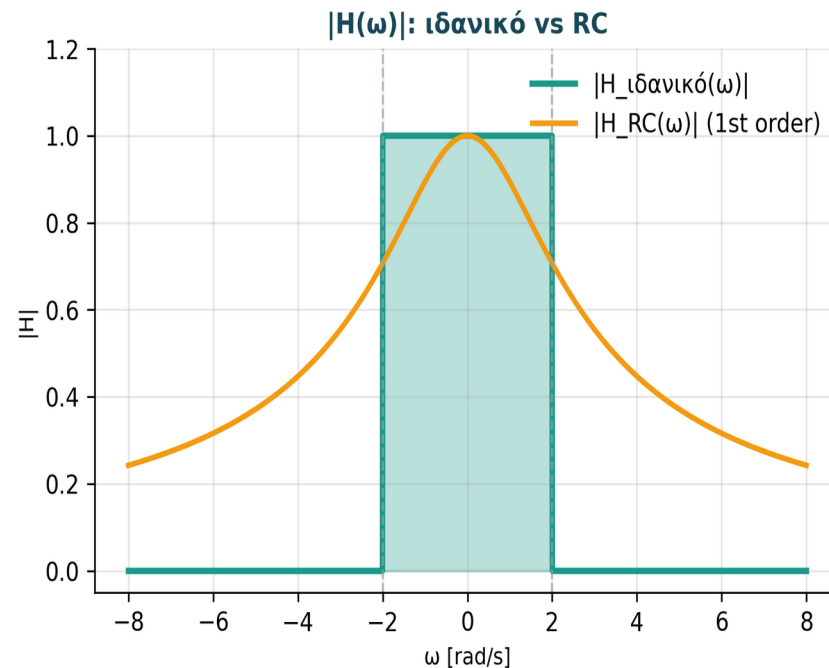
**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Πραγματικά φίλτρα (RC) είναι αιτιατά αλλά "μαλακά" στο cutoff. Σύνεπεια: time-bandwidth trade-off. Στενός cutoff απαιτεί πιο πολύπλοκο (high-order) φίλτρο.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Γιατί το  $h(t) = \text{sinc}$  είναι "unity gain στο passband" το ιδανικό LPF; (Απ: επειδή στο  $\omega$  είναι μόνο 0 ή 1 — δεν αλλοιώνει πλάτος μέσα στο passband)

**Ιδανικά vs πραγματοποιήσιμα: ιδανικό LPF = sinc (μη αιτιατό!)**



Αριστερά:  $|H(\omega)|$  ιδανικό (κάθετα όρια) vs RC (ομαλό roll-off). Δεξιά:  $h(t)$  ιδανικό (sinc — εκτείνεται σε  $t < 0$ !) vs RC (causal exp).

**ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

$\omega$  [rad/s] και  $t$  [s].  $h$  ιδανικό φεύγει αρκετά στο  $t < 0$  — μη φυσικό.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Στην πράξη δουλεύουμε με προσεγγίσεις (Butterworth, Chebyshev). Όσο υψηλότερη τάξη, τόσο πιο "ιδανικό" αλλά πιο πολύπλοκο.

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: Bode plot RC. Μετά: τρεις τύποι φίλτρων (LPF/HPF/BPF).

Τρεις τύποι φίλτρων ανάλογα με το ποια ζώνη συχνοτήτων αφήνουν να περάσει

LPF: περνά  $\omega < \omega_c$  · HPF: περνά  $\omega > \omega_c$  · BPF: περνά  $\omega_1 < \omega < \omega_2$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

LPF (Low-Pass): κρατά χαμηλές συχνότητες, κόβει υψηλές (π.χ. RC). HPF (High-Pass): αντίστροφο (π.χ. CR). BPF (Band-Pass): κρατά μια ζώνη — αφαιρεί χαμηλές ΚΑΙ υψηλές.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν είσοδος είναι  $x(t)=\cos(2t)+\cos(20t)$  και  $\omega_c=5$  σε LPF, ποιο επιβιώνει; (Απ: ο τόνος  $\omega=2$ )

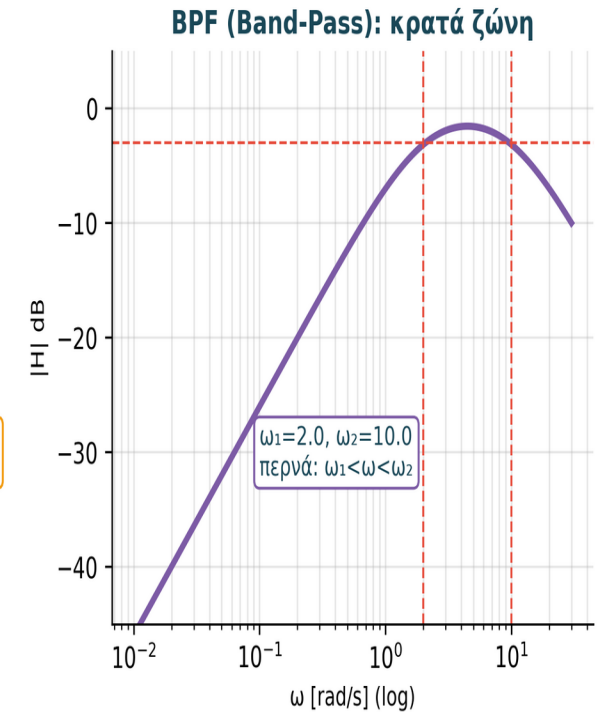
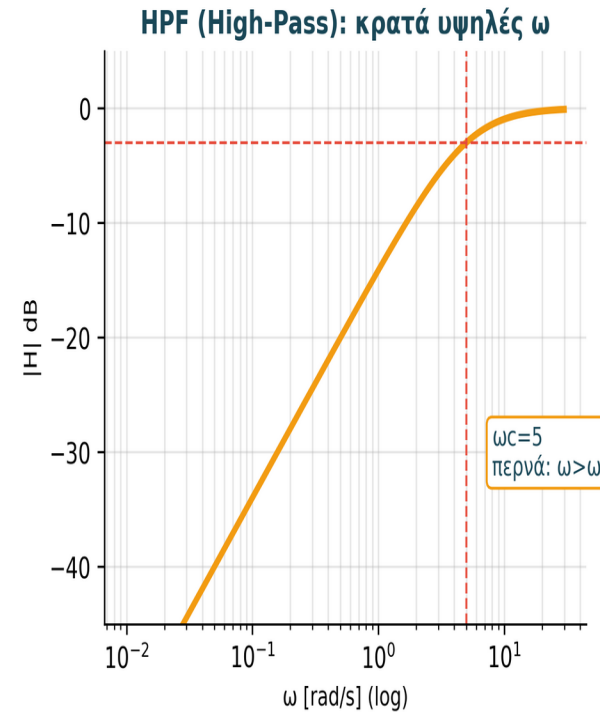
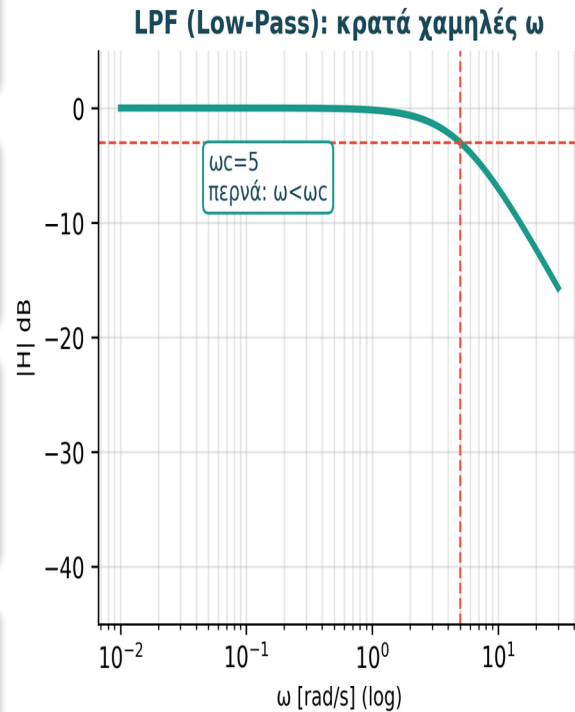
ΕΞΗΓΗΣΗ

LPF χρήσιμο για anti-aliasing και θόρυβο υψηλών  $\omega$ . HPF για AC coupling και DC removal. BPF για επιλογή κέντρου συχνότητας (radio tuning, audio EQ).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σχέδιο φίλτρου για να αφαιρέσεις 50 Hz θόρυβο από φωνή 100-3000 Hz; (Απ: HPF με  $\omega_c=2\pi \cdot 60$  rad/s, ή notch στο 50 Hz)

## Τρία βασικά φίλτρα: LPF, HPF, BPF



Από αριστερά: LPF, HPF, BPF σε log scale. Όλα δείχνουν -3 dB στο cutoff τους.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\omega$  [rad/s] σε log scale.  $|H|$  σε dB. -3 dB σημεία στα cutoff.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Όνομα φίλτρου = ζώνη ΠΟΥ ΠΕΡΝΑΕΙ. LPF = «low-pass» (όχι «low-block»).

**ΕΚΦΩΝΗΣΗ** Πέρνα  $x(t)=\text{rect}(t/2)$  μέσα από RC με  $\tau=0.5$  s (άρα  $\omega_c=2$  rad/s). Στη συχνότητα γράφεις  $X(\omega)$ ,  $H(\omega)$ ,  $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$ . Στον χρόνο επαληθεύεις με αριθμητική συνέλιξη  $y=\text{conv}(x,h) * dt$ . Σύγκρινε  $x(t)$  με  $y(t)$ : οι ακμές πρέπει να γίνουν πιο ομαλές.

$$x(t)=\text{rect}(t/2), h_{\text{RC}}(t)=2 \cdot e^{-2t} \cdot u(t) \quad (\tau=0.5 \text{ s}), y(t)=x * h_{\text{RC}}$$

**ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ**

Τι παρατηρούμε: τώρα ενώνουμε όλο το W07. Ο παλμός έχει sinc φάσμα, το RC κόβει υψηλές συχνότητες και το αποτέλεσμα στον χρόνο είναι πιο ομαλό στις ακμές.

**ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ**

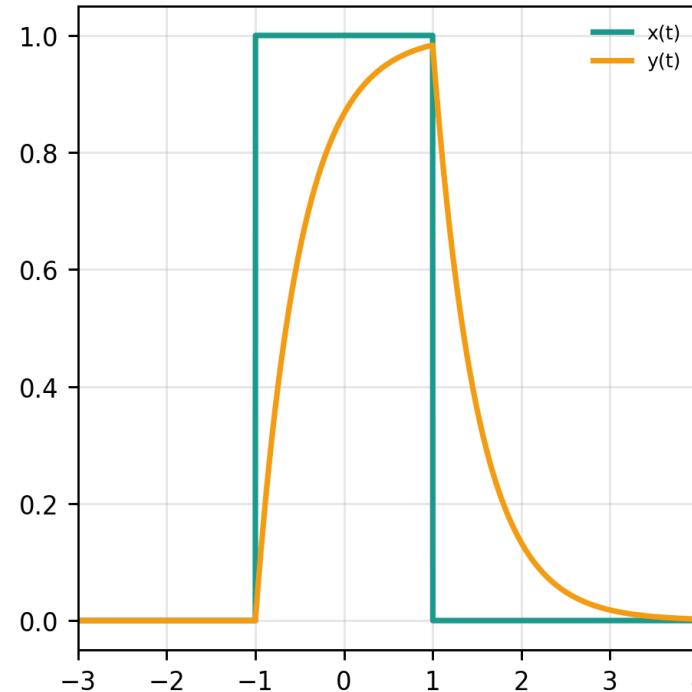
- 1) γράψε  $X(\omega)$ ,
- 2) βρες  $\omega_c$
- 3) γράψε  $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$
- 4) σύγκρινε  $|X|$ ,  $|H|$ ,  $|Y|$
- 5) πρόβλεψε  $y(t)$
- 6) επαλήθευσε με conv και dt.

```
OCTAVE
% Τελικό παράδειγμα: rect -> RC -> y(t)
T = 2; tau = 0.5; dt = 0.001;
t = -5:dt:5;
x = double(abs(t) <= T/2);
th = 0:dt:8;
h = (1/tau)*exp(-th/tau); % κρουστική απόκριση RC

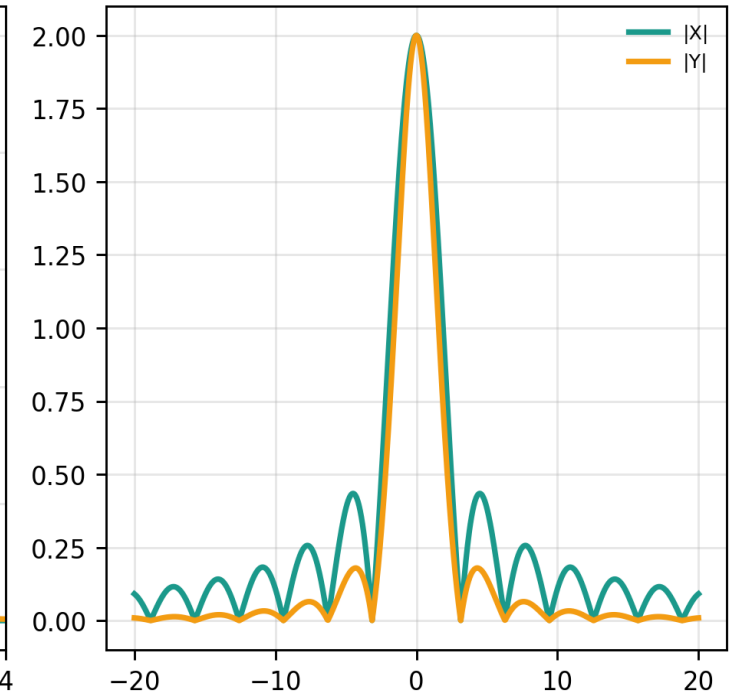
y = conv(x,h) * dt; % κλίμακα CT συνέλιξης
ty = (t(1)+th(1)):dt:(t(end)+th(end));

plot(t,x,'--',ty,y,'LineWidth',2);
xlabel('t [s]'); grid on;
legend('x(t)', 'y(t)=x*h');
```

χρόνος: οι ακμές λειαίνονται



συχνότητα: οι υψηλές μειώνονται

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

Διαγράμματα φάσματος:  $\omega$  [rad/s],  $|X|$  [U·s],  $|H|$  χωρίς μονάδα,  $|Y|$  [U·s]. Time plots: t [s], x(t), y(t) [U].

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

Πρόσεχε κλιμάκωση σε αριθμητική συνέλιξη: για CT χρειάζεται πολλαπλασιασμός με dt.

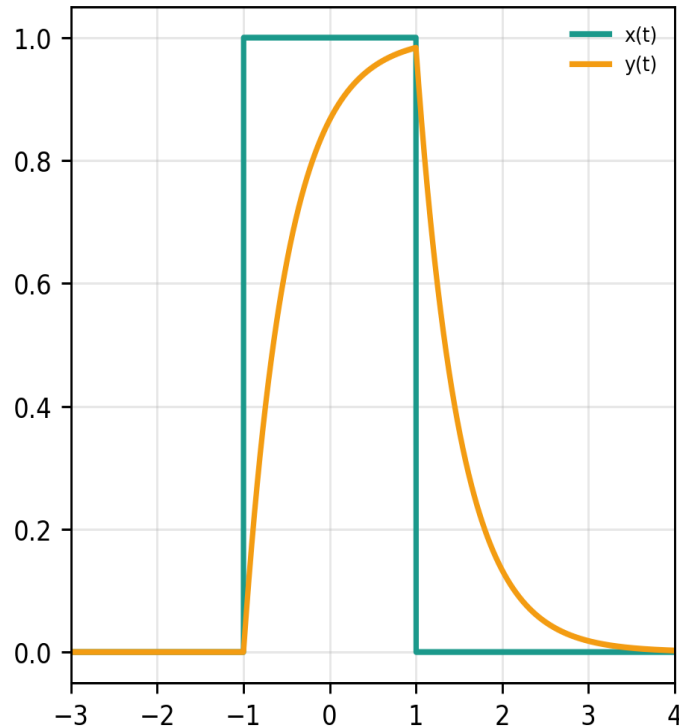
**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: RC sweep. Μετά: λύση ανακεφαλαίωσης.

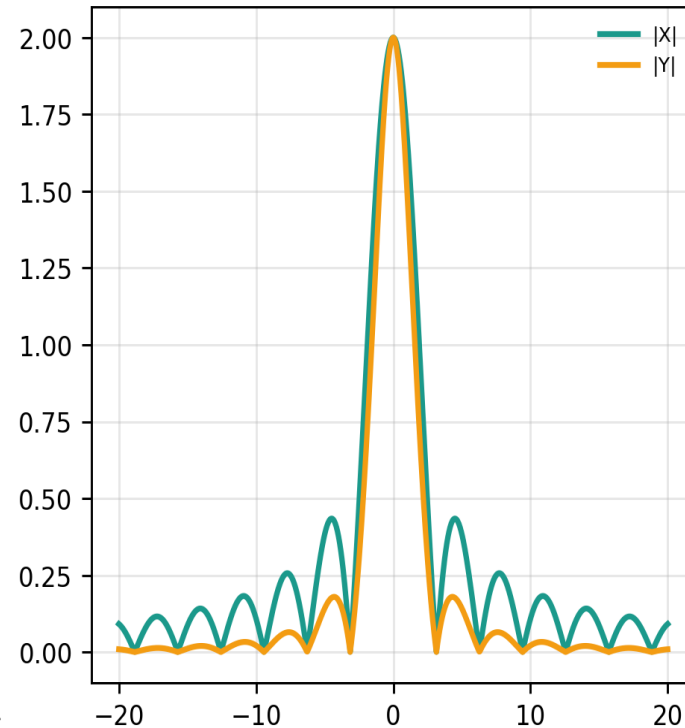
Λύση : X(ω), H(ω), Y(ω) και η ερμηνεία του y(t) στον χρόνο.

$$X(\omega)=2\text{sinc}(\omega/\pi), H(\omega)=1/(1+j0.5\omega), Y(\omega)=X(\omega)H(\omega), y=x*h_{RC}$$

χρόνος: οι ακμές λειαίνονται



συχνότητα: οι υψηλές μειώνονται



### 1. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

Στο φάσμα, το RC ζυγίζει το sinc του παλμού:  $|Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)|$ . Οι υψηλές συχνότητες μειώνονται περισσότερο.

### 2. ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Στον χρόνο, η συνέλιξη  $y(t)=x(t)*h_{RC}(t)$  λειαίνει την άνοδο και την πτώση. Οι ακμές δεν είναι πλέον κατακόρυφες.

### 3. ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

Έλεγχος Octave: για CT συνέλιξη γράψε  $y=\text{conv}(x,h)*dt$ . Αυτό ελέγχει τη φυσική κλίμακα.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ** Αν διπλασιάσεις το C, πώς αλλάζει η ωc;

Octave υλοποίηση: σ87 (συμπληρωματικά snippets, snippet #4 Parseval / σ23 για rect ↔ sinc)

#### ΔΙΑΒΑΣΤΕ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Άξονες συχνότητας: ω [rad/s]. Άξονες χρόνου: t [s]. |X|, |Y| σε [U·s]. |H| χωρίς μονάδα. h(t) σε [1/s].

#### ΠΡΟΣΕΧΩ

Μην συγκρίνεις απόλυτα |H| με |X| σαν να έχουν ίδιες μονάδες. Το |H| είναι κέρδος φίλτρου.

#### ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: εκφώνηση Άσκησης 7. Μετά: γραφική ερμηνεία στον χρόνο.

# Λύση Άσκησης 7: rect μέσα από RC — άνοδος εκθετική, πτώση εκθετική

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον: y(t) στο χρόνο

Συνέλιξη  $\text{rect} * h_{\text{RC}}$  δίνει "δύο εκθετικές" στις 2 περιοχές

Είσοδος  $\text{rect}$  σε  $[-T/2, T/2]$ ,  $y(t)$  ανεβαίνει εκθετικά, μετά πέφτει εκθετικά

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Η συνέλιξη  $\text{rect} * h_{\text{RC}}$  χωρίζεται σε 3 περιοχές:

- $t < -T/2$ :  $y(t) = 0$
- $-T/2 \leq t \leq T/2$ :  $y(t) = 1 - e^{-(t+T/2)/\tau}$
- $t > T/2$ :  $y(t) = (1 - e^{-(T/\tau)}) \cdot e^{-(t-T/2)/\tau}$

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Στο τέλος του  $\text{rect}$  ( $t=T/2$ ), πόσο έχει φτάσει το  $y$ ;

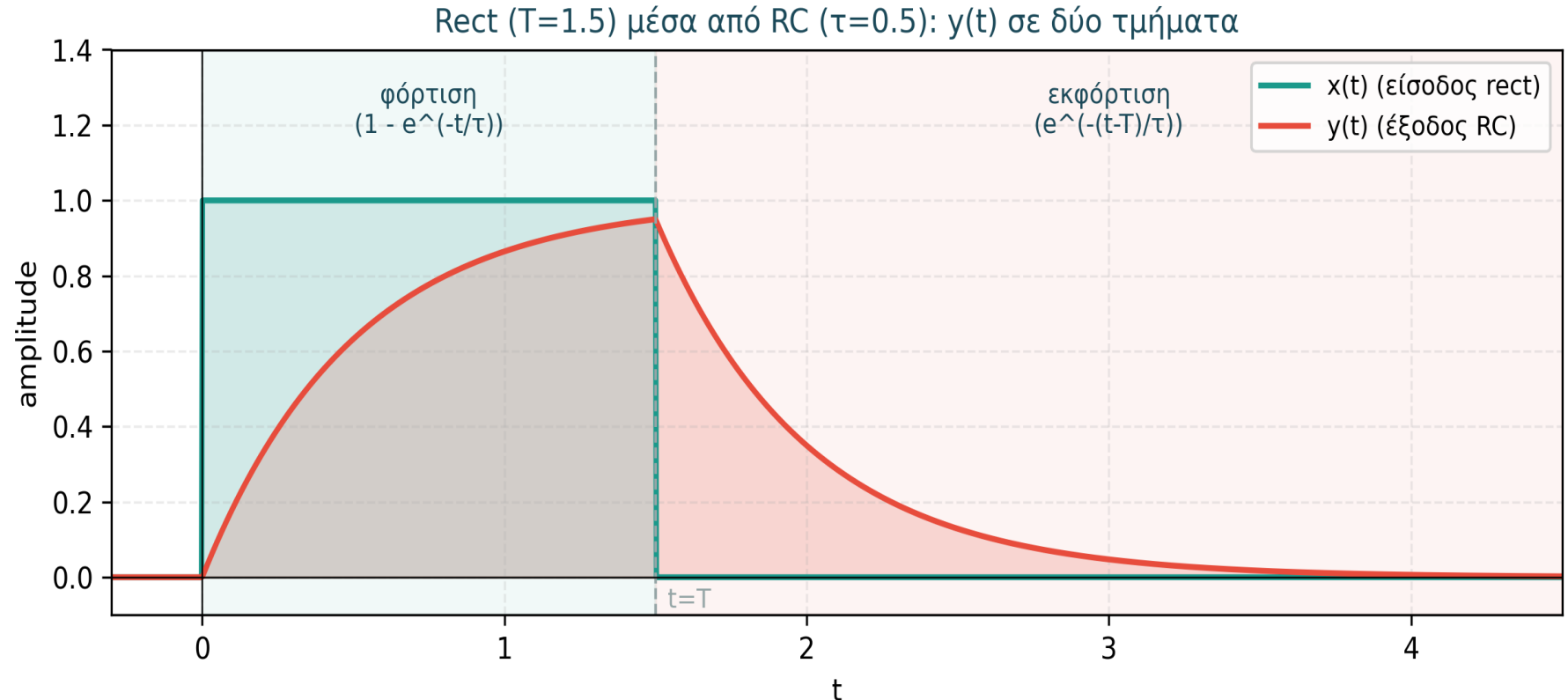
## ΕΞΗΓΗΣΗ

$$y(T/2) = 1 - e^{-(T/\tau)}$$

Αν  $T/\tau$  είναι μεγάλο,  $y \approx 1$  (το φίλτρο πρόλαβε να γεμίσει). Αν  $T/\tau$  μικρό,  $y < 1$  (δεν πρόλαβε).

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για  $T=2$ ,  $\tau=0.5$ :  $y(T/2) = 1 - e^{-(4)} \approx 0.98$ . Σχεδόν 1.



$y(t)$  σε σχέση με  $x(t)$   $\text{rect}$ : η  $\text{rect}$  γίνεται "ομαλή" στις ακμές.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [s], σήμα [U]. Σύγκριση  $x(t)$  και  $y(t)$  στο ίδιο plot.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Πρόσεξε τις 3 περιοχές. Δεν είναι ενιαίος τύπος.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: -3 dB. Μετά: ΣΥΝΟΨΗ προς W08.

W07 σου έδωσε τη συνεχή θεωρία. W08 μετράει το ίδιο με δείγματα.

**Πριν εμπιστευτείς FFT: δήλωσε  $F_s$ ,  $N$ , παράθυρο, άξονα και μονάδες**

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Όλο το W07 ζει στη συνεχή  $\omega$ . Το W08 θα δειγματοληπτήσει: συνεχές  $y(t) \rightarrow$  δείγματα  $y[n] \rightarrow$  DFT  $Y[k]$ . Σε κάθε στάδιο υπάρχουν υποθέσεις που πρέπει να δηλώνεις.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι κάνει το παράθυρο στη DFT;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Μειώνει το "leakage" — διαρροή ενέργειας από μια συχνότητα σε γειτονικά bins. Χωρίς παράθυρο, ένας μη ακέραιος αριθμός περιόδων στο  $N$  δείγματα δημιουργεί τεχνητές υψηλές συχνότητες.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γράψε τρία πράγματα πριν τρέξεις FFT. ( $F_s$ ,  $N$ , παράθυρο.)

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

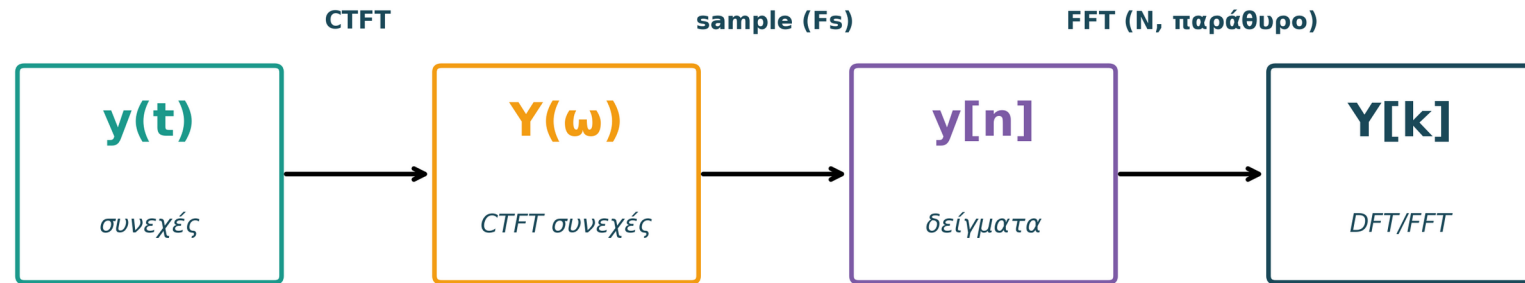
W07:  $\omega$  [rad/s]. W08:  $f$  [Hz] ή  $k$  [bin index]. Δήλωσε πάντα.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη παρουσιάσεις FFT ως ακριβές CTFT χωρίς να δηλώσεις τις υποθέσεις.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Τέλος W07. Επόμενο W08: δειγματοληψία, aliasing, παράθυρα, leakage.



Η ίδια αλυσίδα δουλεύει για κάθε σήμα: ξεκίνα από  $y(t)$ , τελείωσε σε  $Y[k]$ .

Η αλυσίδα: συνεχές  $y(t) \rightarrow$  CTFT  $\rightarrow$  δείγματα  $\rightarrow$  DFT/FFT.

W06

 $x(t)$  $X(\omega)$  $\varphi/BW$ 

RC

FFT

Επιπλέον υλικό: βιβλία, online, κώδικας, μαθηματικά

Πού μπορείς να εμβαθύνεις: βιβλία, online, εργαλεία, μαθηματικά.

**BIBΛΙΑ**

- Oppenheim & Willsky — Κεφ. 4 (CTFT)
- Proakis — Κεφ. 1
- Roberts — Κεφ. 6-7

**ONLINE ΠΗΓΕΣ**

- MIT OCW 6.003 (notes + video)
- 3Blue1Brown: «What is FT?»

**OCTAVE / MATLAB**

- Octave signal: [octave.sourceforge.io/signal](https://octave.sourceforge.io/signal)
- `fft`, `sinc`, `conv`, `unwrap`, `polyfit`
- ``pkg load signal`` πριν από κάθε επίλυση

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**sinc normalized •  $\delta$  Dirac

W06

 $x(t)$  $X(\omega)$  $\varphi/BW$ 

RC

FFT

W08 → δειγματοληψία, DFT/FFT, παράθυρα, αναδίπλωση

W07 → CTFT (συνεχές  $\omega$ ). W08 → DFT (διακριτό  $k$ ) και FFT (αλγόριθμος).**Νέες έννοιες W08: δειγματοληψία, αναδίπλωση (Nyquist), παράθυρα, leakage.**

## ΑΠΟ W07 ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ

- ✓ CTFT, rect  $\leftrightarrow$  sinc, Gaussian
- ✓ Convolution theorem ( $\sigma 71$ )
- ✓ BW, cutoff ( $\sigma 40, \sigma 73$ )

## ΝΕΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ W08

- $F_s$  [Hz], Nyquist-Shannon
- DFT: πεπερασμένο  $\rightarrow$  πεπερασμένο
- FFT:  $O(N \log N)$ . Παράθυρα: Hann, Hamming

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΕΣ W07  $\rightarrow$  W08

$x(t) \rightarrow x[n]$  (sample)  
 $X(\omega) \rightarrow X[k]$  (DFT)  
 $\int |X|^2 d\omega \rightarrow \sum |X[k]|^2$   
 $\Omega \rightarrow F_s/2$  (Nyquist)

## ΤΙ ΜΕΝΕΙ ΓΙΑ W09

- z-transform  $H(z)$ , IIR/FIR φίλτρα, pole-zero plots

Ροή: W07  $y(t) \rightarrow Y(\omega)$ . W08:  $y[n] \rightarrow Y[k]$ . W09:  $H(z)$ .

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

W07 εργαλεία  $\rightarrow$  W08 υπολογιστής  $\rightarrow$  W09 σχεδίαση φίλτρων.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Convolution theorem ( $\sigma 71$ ) θα σε ακολουθήσει σε W08+W09.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Άνοιξε W08 με  $F_s$ ,  $N$ , παράθυρο στη μνήμη. CTFT  $\neq$  DFT.

# Φάσορες σε βάθος

Πώς λύνουμε LTI σύστημα με 3 αριθμούς αντί για ολοκλήρωμα

## Ξέρω ήδη

ότι  $e^{j\omega t}$  είναι περιστρεφόμενο μιγαδικό βέλος μήκους 1

## Τώρα ανοίγει

3 πράξεις φασόρων:  $\times + \div$ , και πώς λύνουν  $\cos \rightarrow \cos$  μέσα από RC

## Στο τέλος μπορώ

να βρω  $y(t)$  χωρίς συνέλιξη: ένα  $H(\omega_0)$  αρκεί

# Άλγεβρα φασόρων — 3 πράξεις σε πολική μορφή

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον σήμα: φάσορες σε  $re^{j\theta}$  μορφή

Σε πολική μορφή:  $A \cdot B = (r_A r_B) \cdot e^{j(\theta_A + \theta_B)}$  ·  $A + B =$  παραλληλόγραμμα ·  $A/B = (r_A/r_B) \cdot e^{j(\theta_A - \theta_B)}$

$A = r_A \angle \theta_A$ ,  $B = r_B \angle \theta_B \rightarrow$  πολλαπλασιάζω μέτρα, προσθέτω/αφαιρώ γωνίες

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Φάσορες είναι περιστρεφόμενα μιγαδικά βέλη. Η άλγεβρα τους είναι απλούστερη σε πολική μορφή  $re^{j\theta}$  παρά σε  $Re + jIm$ .

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν Α έχει γωνία  $30^\circ$  και Β γωνία  $45^\circ$ , τι γωνία έχει το  $A \cdot B$ ;  $75^\circ$ .

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Πολλαπλασιασμός: πολλαπλασιάζουμε μέτρα και προσθέτουμε γωνίες.  
 Άθροισμα = παραλληλόγραμμα.  
 Διαίρεση = αντίθετη ροή.  
 Όλα διατηρούν τη μιγαδική φύση γιατί το χρειαζόμαστε για κάθε τόνο  $\cos$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν  $A = 2 \angle 30^\circ$ ,  $B = 3 \angle 20^\circ$ : πες  $A \cdot B$  και  $A/B$  χωρίς ολοκλήρωμα.

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Re/Im σε αδιάστατες μονάδες (μοναδιαίος κύκλος). Γωνίες σε μοίρες ή rad ανάλογα το πλαίσιο.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

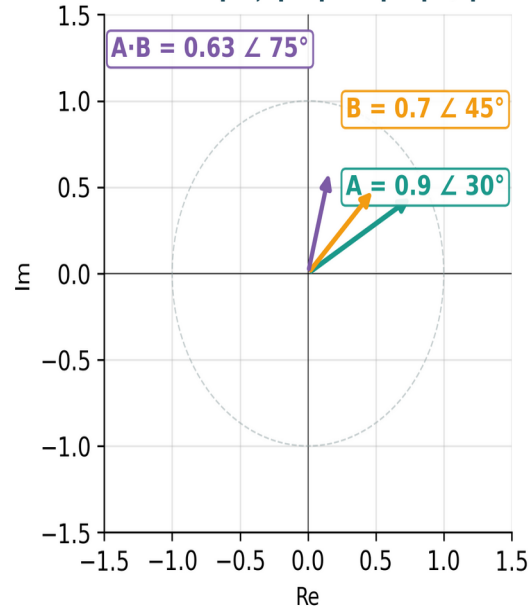
Μη γράφεις  $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$  σε rad. Διατήρησε μονάδες. Πάντα η γωνία σχετική στο Re-άξονα.

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

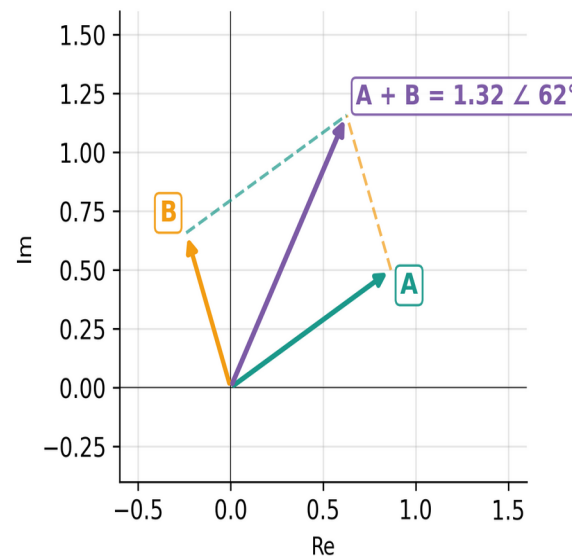
Πριν: ορισμός φάσορα. Μετά: πώς λύνει το LTI με ένα γινόμενο.

## Άλγεβρα φασόρων — 3 πράξεις σε πολική μορφή

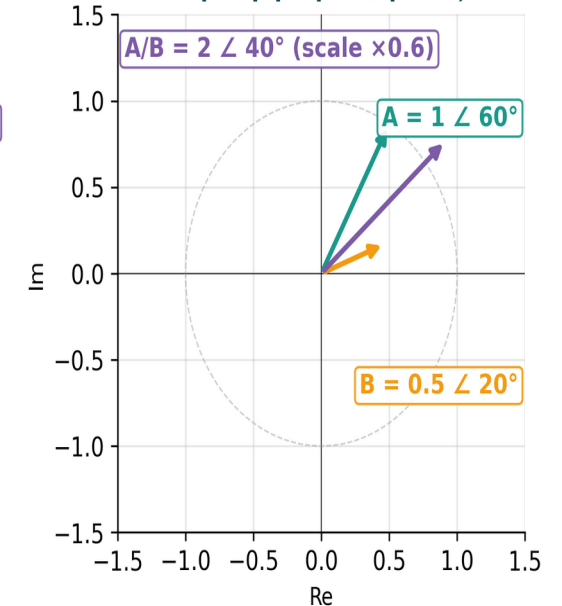
Πολλαπλασιασμός: μέτρα × μέτρα, γωνίες +



Άθροισμα: παραλληλόγραμμα Re+Im



Διαίρεση: μέτρα ÷, γωνίες -



Αριστερά πολλαπλασιασμός, μέση άθροισμα, δεξιά διαίρεση. Όλα στο μοναδιαίο κύκλο/πλέγμα.

# Πώς λύνουμε LTI με φάσπορα: cos μπαίνει → cos βγαίνει

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

Τρέχον σήμα:  $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ , RC με  $\tau$ 

Ιδιότητα LTI: αν είσοδος =  $\cos(\omega_0 t)$ , έξοδος =  $|H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \angle H(\omega_0))$

$$y(t) = |H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \angle H(\omega_0))$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Το LTI σύστημα δεν "αλλάζει" τη συχνότητα. Αλλάζει το πλάτος και μετατοπίζει τη φάση. Τίποτε άλλο.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν  $|H(\omega_0)|=0.6$  και  $\angle H=-50^\circ$ , πόσο πλάτος βγάζει είσοδος πλάτους 1; 0.6.

## ΕΞΗΓΗΣΗ

Το  $e^{j\omega_0 t}$  είναι ιδιοσυνάρτηση του LTI: σύστημα · ιδιοσυνάρτηση = ιδιοτιμή · ιδιοσυνάρτηση. Ιδιοτιμή =  $H(\omega_0)$ . Άρα  $\cos \rightarrow \cos$  με κλίμακα/φάση. Το θεώρημα  $Y=X \cdot H$  λέει ακριβώς αυτό.

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

RC με  $\tau=0.2$ , είσοδος  $\cos(5t)$ . Βρες  $|H(5)|$ ,  $\angle H(5)$ ,  $y(t)$ .

## ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

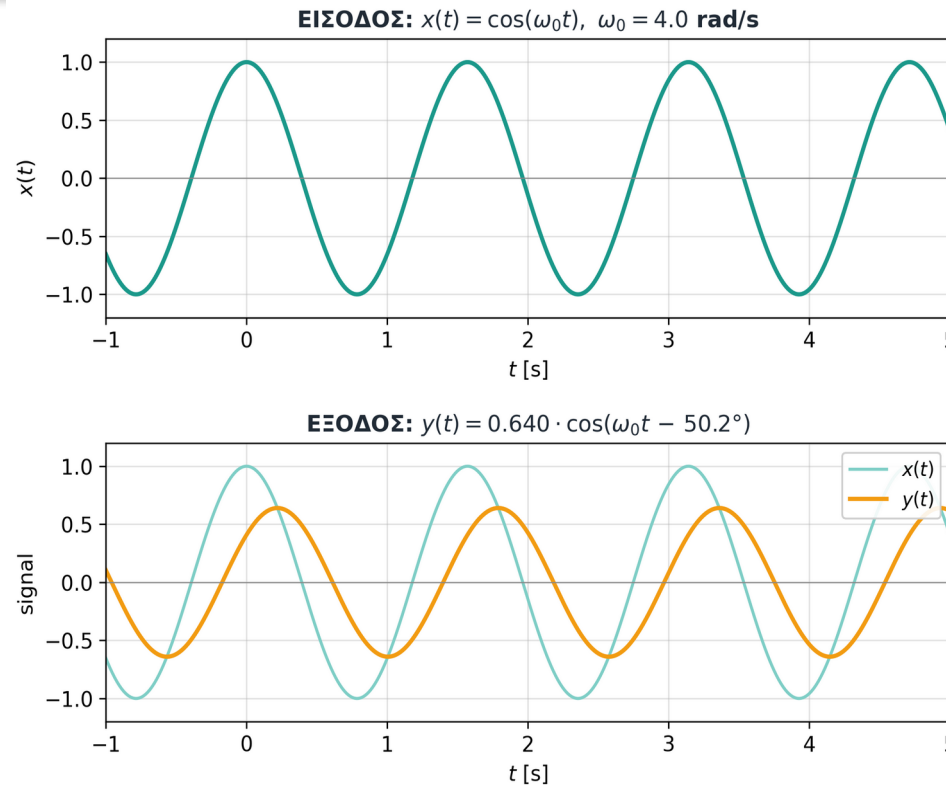
Χρόνος  $t$  [s]. Στο φασικό διάγραμμα Re/Im αδιάστατο.  $\omega$  σε rad/s, φάση σε μοίρες ή rad.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Ισχύει ΜΟΝΟ για LTI σύστημα. Αν το σύστημα είναι μη γραμμικό ή χρονομεταβλητό, η συχνότητα αλλάζει.

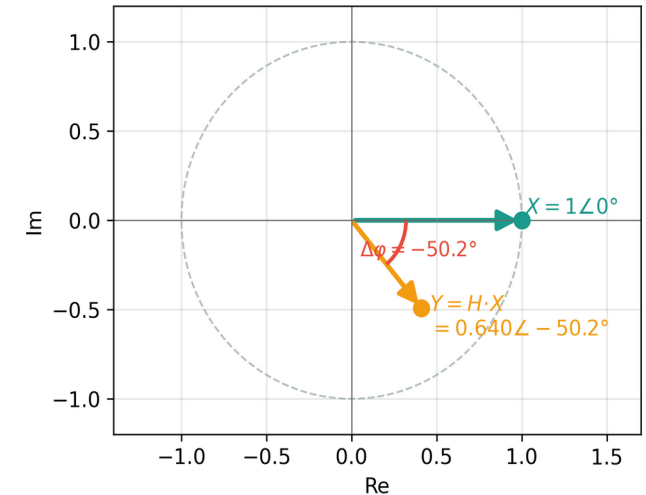
## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: άλγεβρα φασόρων. Μετά: worked example με 2 τόνους σε RC.



Πάνω: είσοδος και φάσπορες. Κάτω: έξοδος ίδιας συχνότητας, αλλά μικρότερο πλάτος και μετατοπισμένη φάση.

## Φάσπορες: $X$ πολλαπλασιάζεται με $H(\omega_0)$



## Worked example: RC χαμηλοπερατό σε σήμα 2 τόνων

W06

x(t)

X(ω)

φ/BW

RC

FFT

x(t)=2cos(3t)+cos(20t), RC με τ=0.2

Υπερθέτω:  $x = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) \rightarrow y = A_1 |H(\omega_1)| \cos(\omega_1 t + \angle H(\omega_1)) + A_2 |H(\omega_2)| \cos(\omega_2 t + \angle H(\omega_2))$ 

$$y(t) = \sum_i A_i \cdot |H(\omega_i)| \cdot \cos(\omega_i t + \angle H(\omega_i))$$

## ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Όταν είσοδος είναι άθροισμα ημίτονων, το LTI επιδρά σε καθένα ξεχωριστά. Γραμμικότητα + ιδιοσυνάρτηση = πολλαπλασιαστική επεξεργασία ανά τόνο.

## ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν  $\tau=0.2$ ,  $|H(3)| \approx ?$ ;  $|H(20)| \approx ?$ ; ποιος τόπος επιβιώνει;

## ΕΞΗΓΗΣΗ

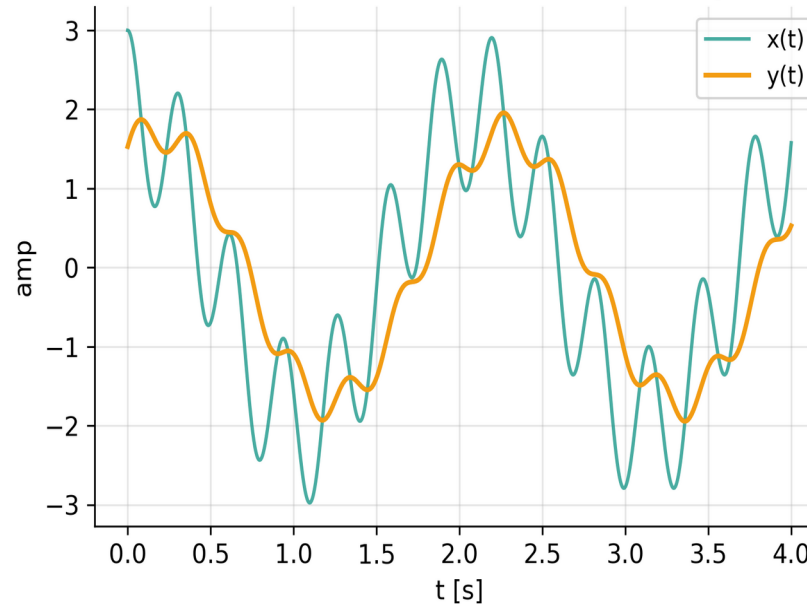
$|H(3)| = 1/\sqrt{1+(0.6)^2} \approx 0.86$  -  
 $|H(20)| = 1/\sqrt{1+(4)^2} \approx 0.24$ . Ο τόπος  $\omega=20$  σχεδόν εξαφανίζεται. Αυτό κάνει το χαμηλοπερατό RC: απλώς ζυγίζει κάθε φάσσορα με το αντίστοιχο  $|H|$ .

## ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

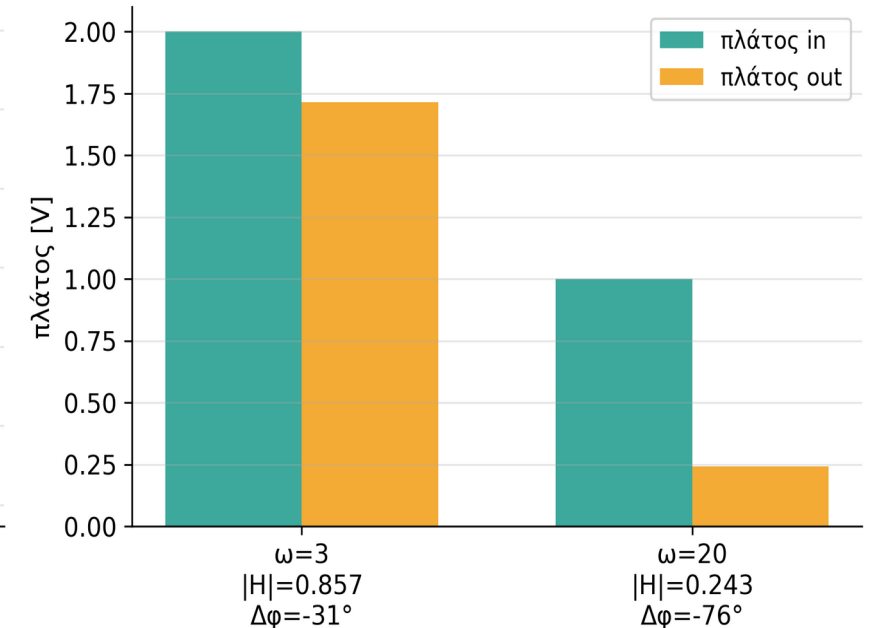
Αν  $\tau=0.1$ , πες ποιος τόπος επιβιώνει πιο πολύ:  $\omega=3$  ή  $\omega=20$ ;

## Εφαρμογή φασόρα: RC χαμηλοπερατό σε σήμα 2 τόνων

x(t)=2cos(3t)+cos(20t) → RC(τ=0.2) → y(t)



Δύο φάσορες, ένας RC: το RC "σβήνει" τη υψηλή



Αριστερά χρονικός κυματισμός: ο γρήγορος τόπος σβήνει. Δεξιά πλάτη ανά τόνο πριν/μετά το RC.

## ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [s], A [V]. Bar plot: άξονας x = κάθε τόπος ω, άξονας y = πλάτος σε V.

## ΠΡΟΣΕΧΩ

Δεν είναι γραμμικός μέσος όρος. Είναι πολλαπλασιασμός κάθε φάσσορα με το αντίστοιχο H(ω).

## ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν: cos απλό. Μετά: άσκηση με απόκριση συστήματος |H| και υπολογισμό y.

# ΑΣΚΗΣΗ — διάβασε $|H|$ , $\angle H$ και υπολόγισε $y(t)$

W06

$x(t)$

$X(\omega)$

$\phi/BW$

**RC**

FFT

RC με  $\tau=0.5$ , είσοδος  $\cos(2t)$

**ΕΚΦΩΝΗΣΗ**

Δίνεται plot  $|H(\omega)|$  και  $\angle H(\omega)$  ενός RC LPF με  $\tau=0.5$ . Σε  $\omega=2$  διαβάζουμε  $|H(2)|=1/\sqrt{2}\approx 0.707$  και  $\angle H(2)=-\pi/4$ . Αν είσοδος  $x(t)=\cos(2t)$ , υπολογίστε  $y(t)$ . (Απ:  $y(t)=0.707\cdot\cos(2t-\pi/4)$ )

**ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ**

εξάσκηση στο "φάσρα" — χωρίς να καταφεύγει σε ολοκλήρωμα. Όλα από το plot.

**ΠΡΟΒΛΕΨΗ**

Αν είσοδος  $\cos(2t)$  στο RC με  $\tau=0.5$ , στο  $\omega=2$  το  $|H|\approx?$  και  $\angle H\approx?$

**ΕΞΗΓΗΣΗ**

Από τύπο:  $|H(2)|=1/\sqrt{1+1^2}\approx 0.707$  (-3dB),  $\angle H(2)=-\arctan(1)=-45^\circ$ . Άρα  $y(t)=0.707\cdot\cos(2t-45^\circ)$ . Αν δεν είχαμε τύπο, διαβάζαμε τις τιμές απευθείας από το plot. Ίδιος αλγόριθμος.

**ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ**

Για  $\cos(4t)$ : χαμηλότερο  $|H|$ , μεγαλύτερη γωνία  $\angle H$ .

**ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

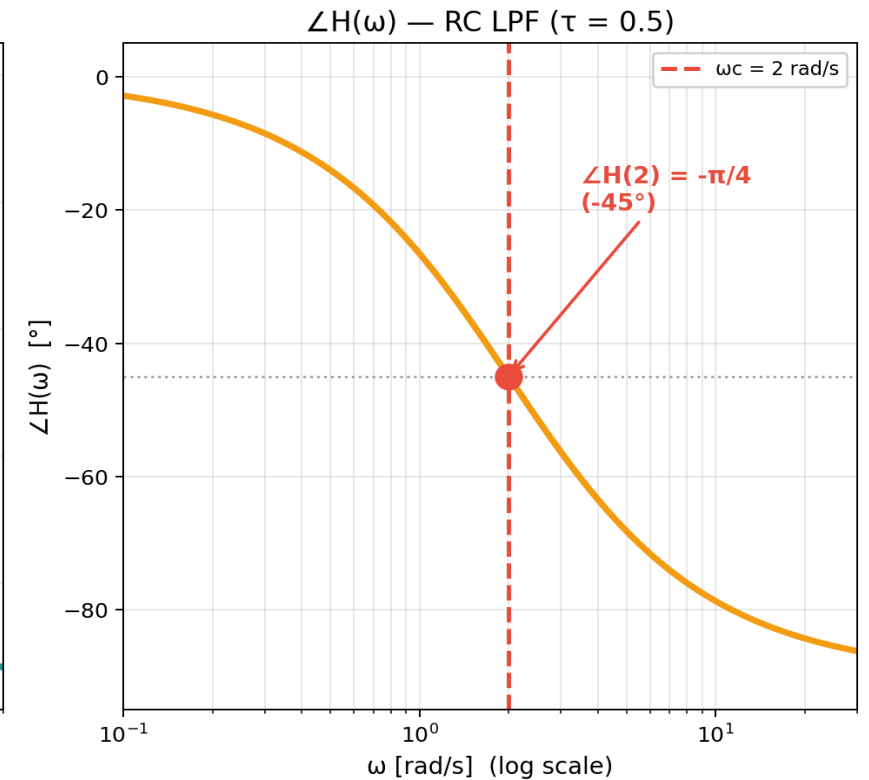
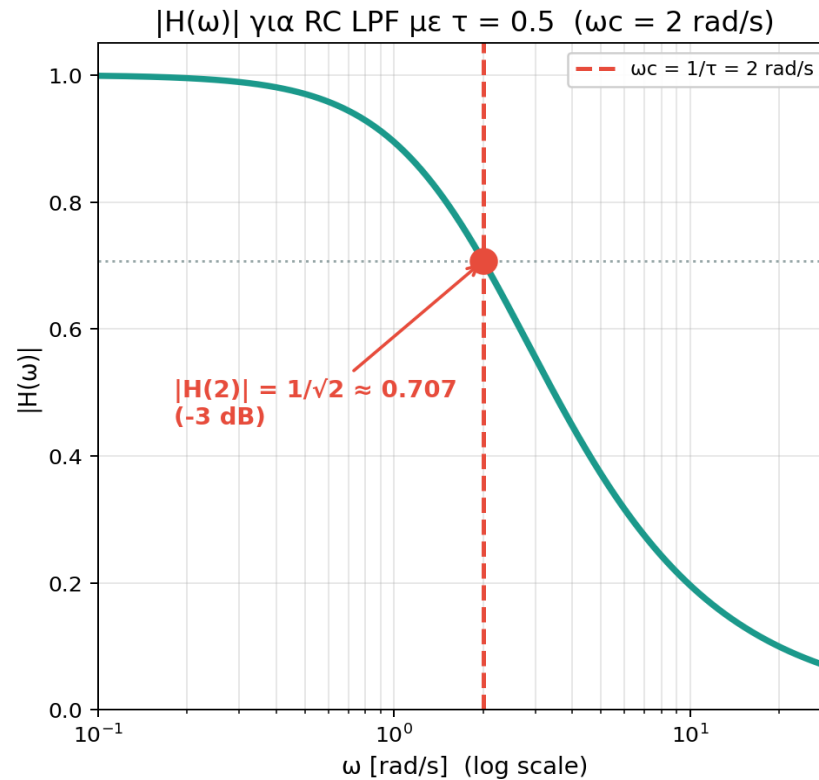
$\omega$  [rad/s] σε log scale.  $|H|$  αδιάστατο. Φάση σε μοίρες.

**ΠΡΟΣΕΧΩ**

-3 dB δεν σημαίνει "μηδέν" — σημαίνει  $1/\sqrt{2} \approx 0.707$  του πλάτους.

**ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ**

Πριν: worked example. Μετά: μέτρο/φάση σε γενικό  $X(\omega)$ .



Αριστερά  $|H(\omega)|$  log scale με -3dB σημείο στο  $\omega_c=2$  rad/s ( $\tau=0.5$ ). Δεξιά  $\angle H(\omega)$  με  $-45^\circ$  στο  $\omega_c$ .

# Βασική ορολογία συμβόλων — Σήματα και Συστήματα

Διακρίνουμε CTFT (συνεχής,  $\omega$  [rad/s]) ▶ DTFT (διακριτή,  $\Omega$  [rad/sample], 2π-περιοδ.) ▶ DFT ( $k$ , πεπερασμένο  $N$ )

№	Σύμβολο	Διαβάζεται	Τι σημαίνει	Πεδίο / Μονάδες
<b>CTFT • συνεχής χρόνος, συνεχής συχνότητα <math>\omega</math> [rad/s]</b>				
1	$x(t)$	" $x$ του $t$ "	σήμα εισόδου συνεχούς χρόνου	χρόνος $t$ [s]
2	$y(t)$	" $y$ του $t$ "	σήμα εξόδου συνεχούς χρόνου	χρόνος $t$ [s]
3	$h(t)$	" $h$ του $t$ "	κρουστική απόκριση συστήματος	χρόνος $t$ [s]
4	$X(\omega)$	" $X$ του $\omega$ "	CTFT του $x(t)$ — το φάσμα του $x(t)$	γων. συχνότητα $\omega$ [rad/s]
5	$Y(\omega)$	" $Y$ του $\omega$ "	CTFT του $y(t)$ — το φάσμα της εξόδου	γων. συχνότητα $\omega$ [rad/s]
6	$H(\omega)$	" $H$ του $\omega$ "	απόκριση συχνότητας — CTFT του $h(t)$	γων. συχνότητα $\omega$ [rad/s]
<b>DTFT • διακριτός χρόνος, συνεχής συχνότητα <math>\Omega</math> [rad/sample], 2π-περιοδική</b>				
7	$x[n]$	" $x$ του $n$ "	σήμα εισόδου διακριτού χρόνου	δείκτης $n$ , χωρίς μονάδες
8	$y[n]$	" $y$ του $n$ "	σήμα εξόδου διακριτού χρόνου	δείκτης $n$ , χωρίς μονάδες
9	$h[n]$	" $h$ του $n$ "	κρουστική απόκριση DT συστήματος	δείκτης $n$ , χωρίς μονάδες
10	$X(e^{j\Omega})$	" $X$ του $e$ στην $j\Omega$ "	DTFT του $x[n]$ — 2π-περιοδικό φάσμα	καν. συχν. $\Omega$ [rad/sample]
11	$Y(e^{j\Omega})$	" $Y$ του $e$ στην $j\Omega$ "	DTFT του $y[n]$ — φάσμα εξόδου	καν. συχν. $\Omega$ [rad/sample]
12	$H(e^{j\Omega})$	" $H$ του $e$ στην $j\Omega$ "	απόκριση συχνότητας DT συστήματος	καν. συχν. $\Omega$ [rad/sample]
<b>DFT • διακριτός χρόνος ΚΑΙ συχνότητα, πεπερασμένο μήκος <math>N</math></b>				
13	$X[k]$	" $X$ του $k$ "	DFT του $x[n]$ μήκους $N$ (πεπερασμένος μετασχ.)	δείκτης μπιν $k = 0, \dots, N-1$
14	$X[k] = X(e^{j\Omega}) _{\Omega = 2\pi k/N}$	"δειγματοληψία DTFT"	δείγματα του DTFT σε $N$ ισαπέχουσες συχνότητες	$\Omega_k = 2\pi k/N$ [rad/sample]
<b>Κοινά σύμβολα και παράμετροι</b>				
15	$\omega$	" $\omega$ " ή " $\omega$ μέγα"	γωνιακή συχνότητα (CT)	[rad/s]
16	$\Omega$	" $\Omega$ μέγα"	κανον. γωνιακή συχν. (DT/DFT)	[rad/sample], 2π-περιοδική
17	$f$	" $f$ "	συχνότητα σε κύκλους / s	[Hz]
18	$T$	" $T$ "	περίοδος σήματος	[s]
19	$T_s, f_s$	" $T$ sub s", " $f$ sub s"	περίοδος / συχνότητα δειγματοληψίας	[s], [Hz]
20	$ X(\omega) , \angle X(\omega)$	"μέτρο", "φάση"	πλάτος και φάση του φάσματος	ίδιο πεδίο με $X(\omega)$
21	$\text{supp}(x)$	"support του $x$ "	σύνολο όπου $x(t) \neq 0$ — περιοχή στήριξης	υποσύνολο του πεδίου

## Γρήγορη ανάγνωση

- Μικρά γράμματα στον χρόνο:  $x(t), y(t), h(t), x[n], y[n], h[n]$
- Κεφαλαία γράμματα στη συχνότητα:  $X(\omega), H(\omega), X(e^{j\Omega}), X[k]$
- LTI σύστημα — χρονικά:  $y = x * h$  ◀ φασματικά:  $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$
- Άλλο deck μπορεί να γράφει  $X(e^{j\omega})$  — εδώ διακρίνουμε με  $\Omega$  για σαφήνεια

## 4 ανεξάρτητα snippets — αντιστοιχούν στα slides σ26, σ38, σ42, σ44

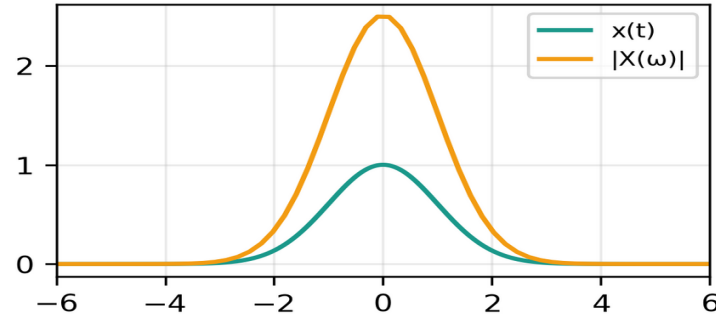
```
% == σ26 — CTFT ανάλυση αριθμητικά (Gaussian) ==
clear; close all; pkg load signal
t = -8:.005:8; sigma = 1;
x = exp(-t.^2/(2*sigma^2));
w = -10:.05:10;
dt = t(2)-t(1);
X = arrayfun(@(W) sum(x.*exp(-1j*W*t))*dt, w);
% |X(ω)| εδώ προσεγγίζει √(2π)σ·exp(-σ²ω²/2)

% == σ38 — Ενέργεια σε ένα band ==
T = 2; w = -15:.005:15;
X = T * sinc(w*T/(2*pi)); % Octave sinc = sin(πx)/(πx)
EdB = abs(X).^2;
E_tot = trapz(w, EdB)/(2*pi);
band = abs(w)<=4;
E_b = trapz(w(band), EdB(band))/(2*pi);
printf('Band [-4,4]: %.1f%% της ενέργειας\n', 100*E_b/E_tot);

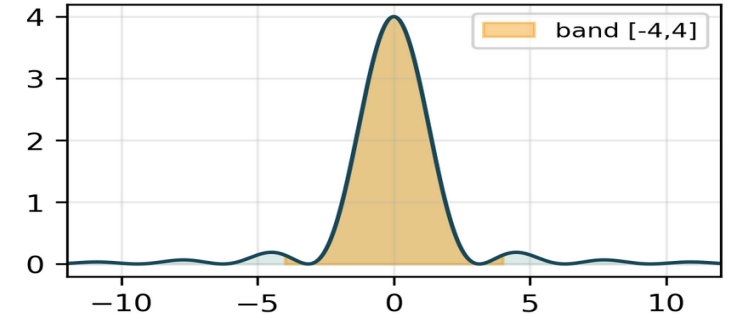
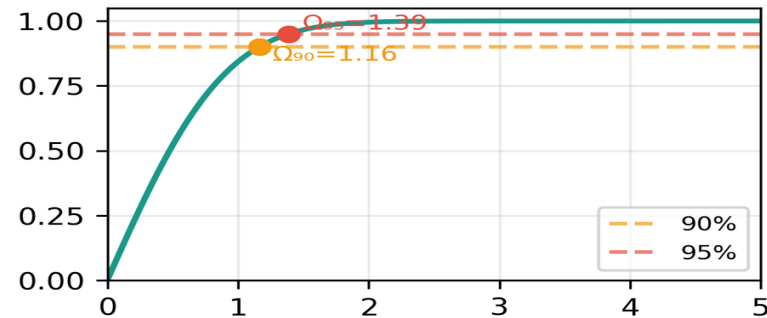
% == σ42 — Ω90, Ω95 για Gaussian σ=1 ==
% Analytic: E(|ω|≤Ω) / E_total = erf(σΩ)
% Αρα: Ω_q = erfinv(q/100) / σ
sigma = 1;
Om90 = erfinv(0.90) / sigma; % ≈ 1.16
Om95 = erfinv(0.95) / sigma; % ≈ 1.39
Om99 = erfinv(0.99) / sigma; % ≈ 1.82
printf('Ω90=%.3f Ω95=%.3f Ω99=%.3f\n', Om90, Om95, Om99);

% == σ44 — Parseval verification ==
t = -5:.001:5; x = exp(-t.^2/2);
E_time = sum(abs(x).^2) * (t(2)-t(1));
w = -20:.001:20;
X = sqrt(2*pi) * exp(-w.^2/2);
E_freq = sum(abs(X).^2) * (w(2)-w(1)) / (2*pi);
printf('E_time=%.3f E_freq=%.3f diff=%.2e\n', ...
    E_time, E_freq, abs(E_time-E_freq));
```

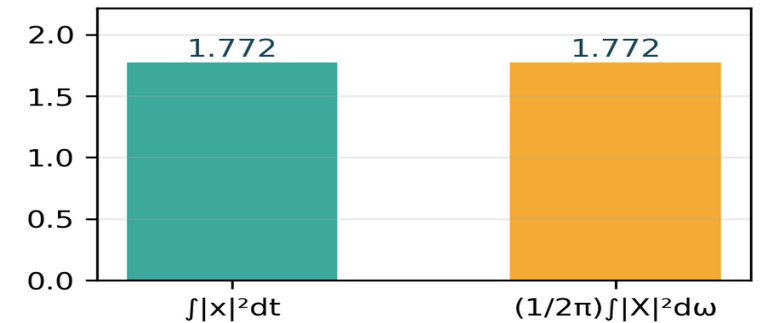
σ26 — CTFT ανάλυση (numerical)



σ38 — energy band: 93.0% σε [-4,4]

σ42 — Ω<sub>90</sub>, Ω<sub>95</sub> (Gaussian σ=1)

σ44 — Parseval ✓ (ζσα = 1.772)



## ΤΙ ΠΕΡΙΜΕΝΩ

σ26:  $|X(\omega)| \approx \sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot e^{-(\sigma^2 \omega^2/2)}$  για  $x = \text{Gaussian}$ .  
 σ44:  $E_{\text{time}} \approx E_{\text{freq}}$  (επιβεβαιώνεται με 4 decimals).

## ΚΛΑΣΙΚΟ ΛΑΘΟΣ

trapz(): απλό κανόνας τραπεζίου — αρκεί για ομαλά σήματα Gaussian/sinc.  
 Για διαγνωστικά: σύγκρινε αναλυτικό με αριθμητικό.

## ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ

erfinv() στο Octave: στο pkg statistics ή χρησιμοποίησε:  
 $\text{Om}_q = \text{sqrt}(2) * \text{erfinv}(2*q-1) / \sigma$  (αν λείπει direct erfinv).