Σήματα και Συστήματα

Εβδομάδα 4: Σύνθεση, Ιδιότητες & Εφαρμογές

Ιωάννης Στεφανής

(με βάση τις πρότερες σημειώσεις του εργαστηρίου)

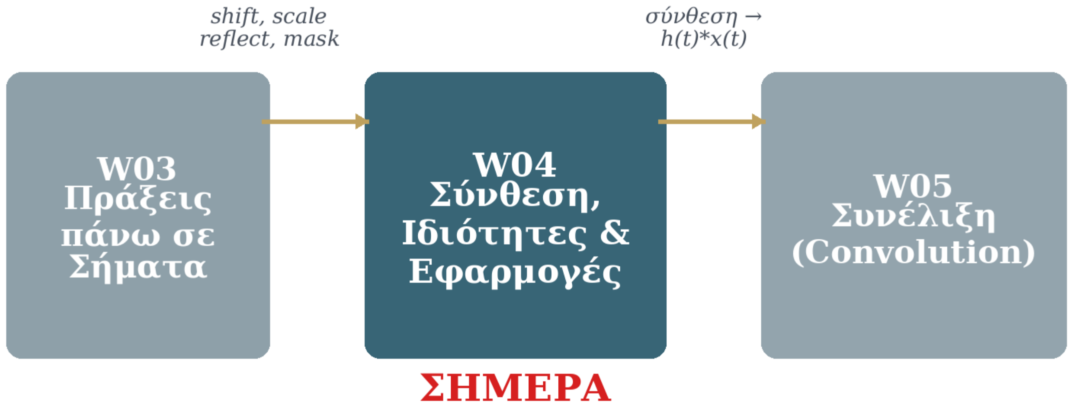
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Από W03 → W04 → W05

W03: Πράξεις πάνω σε σήματα
→ shift, scale, reflect, amplitude ops, boolean masks
→ RC exponential + sinusoid

W04 (σήμερα): Ανακεφαλαίωση & Εφαρμογή
1. Σύνθεση σημάτων → βηματικές, ράμπες, ημίτονα
2. Ιδιότητες → even/odd, περιοδικότητα, gating
3. Μεγάλες ασκήσεις → τα συνδυάζουμε ΟΛΑ

W05 Συνέχεια:
Συνέλιξη (Convolution)
→ flip + shift + multiply = με βάση ό,τι μάθαμε!
→ y(t) = x(t) * h(t)



Σήμερα ενώνουμε τα πάντα: σύνθεση + μετασχηματισμοί + ιδιότητες σε πρακτικές ασκήσεις.

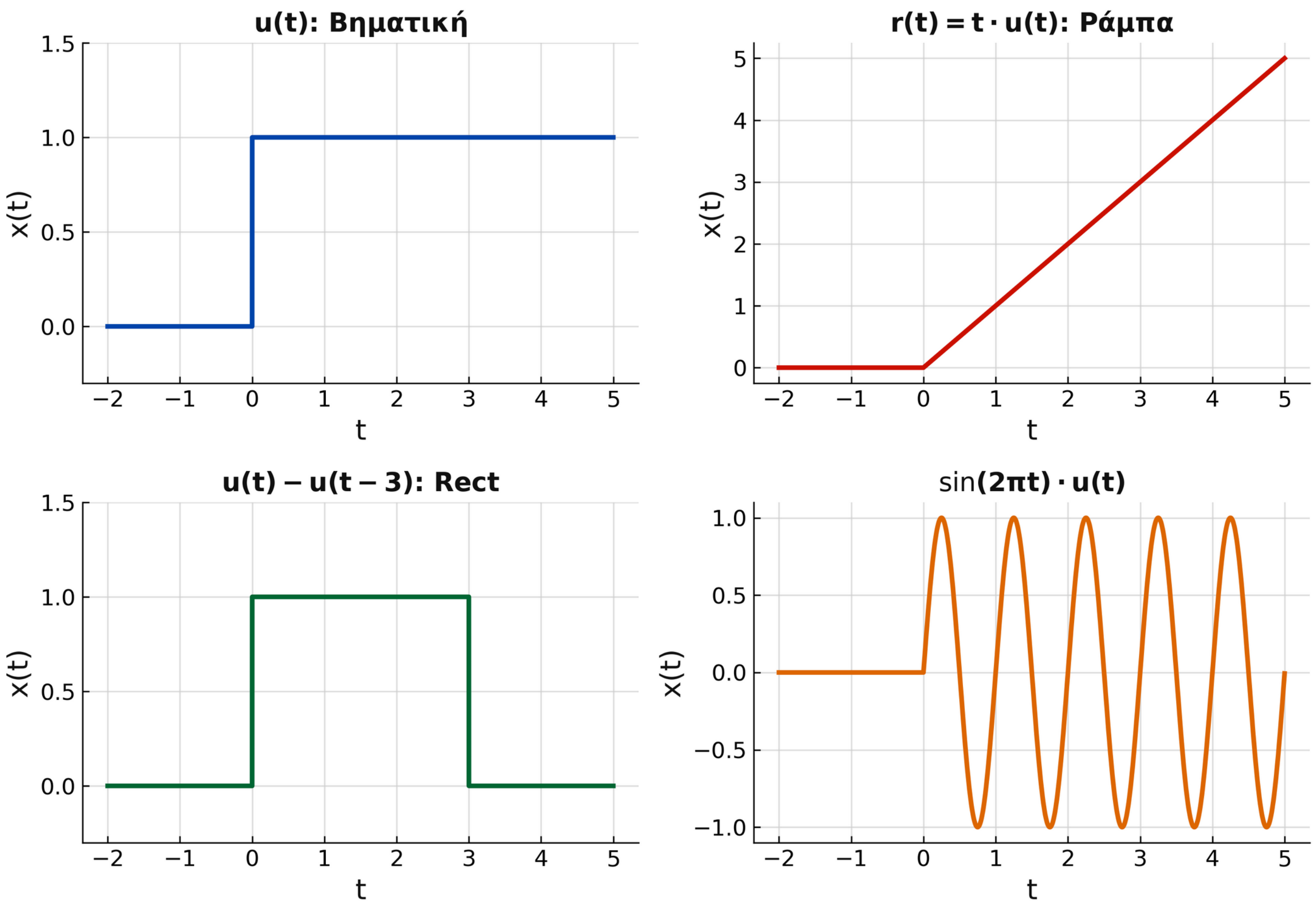
Εργαλειοθήκη Σημάτων — Σύντομη ανακεφαλαίωση - Ανώνυμες συναρτήσεις

u(t) = (t>=0) → Βηματική/Διακόπτης
r(t) = t·u(t) → Ράμπα (κλίση +1)
rect_T(t) = u(t)−u(t−T) → Παλμός

@ = anonymous function:

```
r = @(t) t .* (t >= 0);
f = @(t) exp(-abs(t));
% ΧΡΗΣΗ: καλώ σαν function!
t = -2:0.01:4;
plot(t, r(t), 'b', t, r(t-1), 'r--');
```

Boolean masks:
(t >= a) & (t < b) → [a, b)
CT: plot(t, x) | DT: stem(n, x)



@ = ορίζω inline function (anonymous function). Θα το χρησιμοποιήσουμε από εδώ και στο εξής στις ασκήσεις.

Μέθοδος Δ: Σύνθεση από Βηματικές & Ράμπες

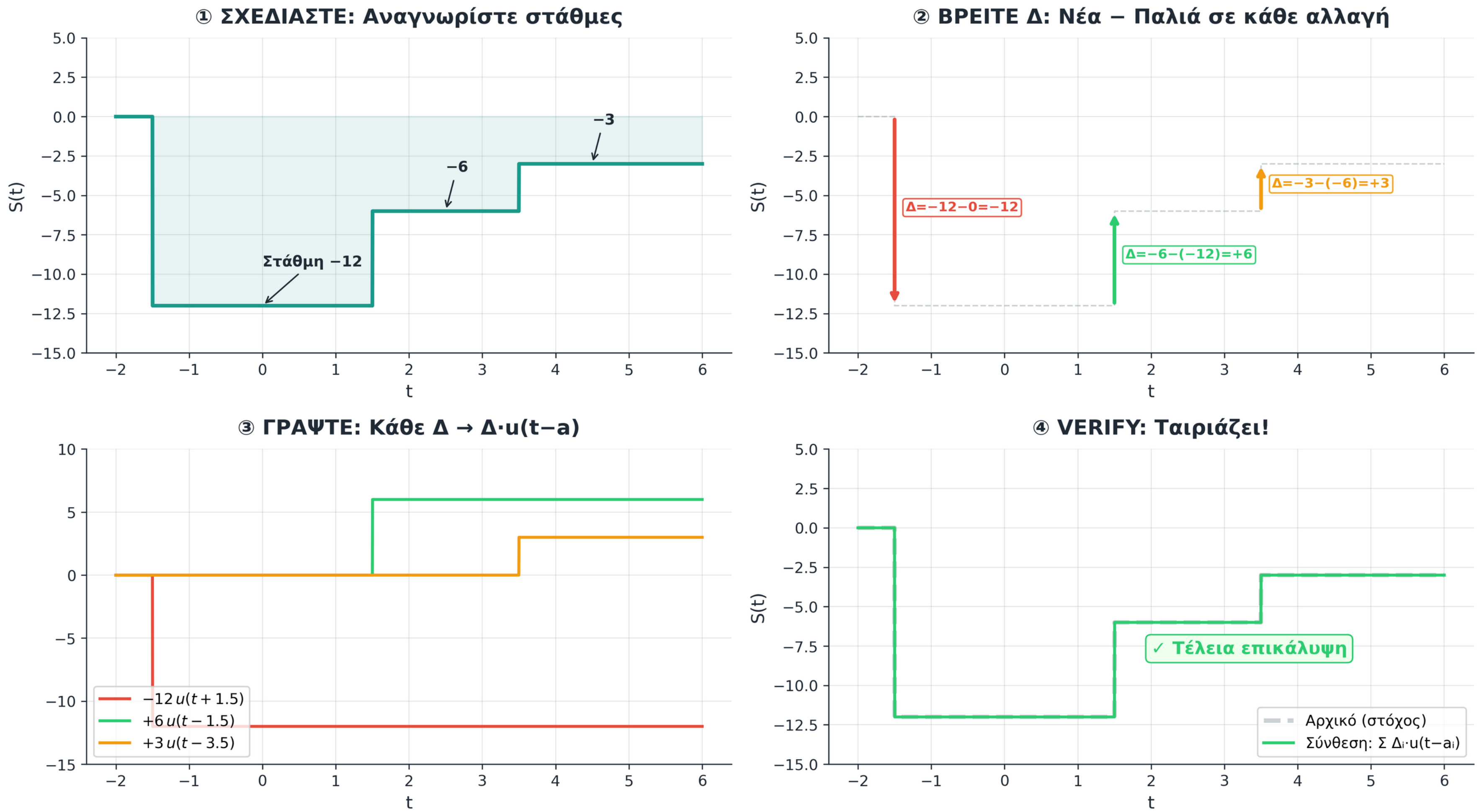
Η ιδέα είναι απλή: κάθε piecewise σήμα χτίζεται ως άθροισμα μετατοπισμένων «δομικών στοιχείων».

Βηματική u(t−a) → αλλαγή στάθμης στο t=a
CT: $x(t) = \Sigma\, c_i \cdot u(t-a_i)$
DT: $x[n] = \Sigma\, c_i \cdot u[n-a_i]$

Ράμπα r(t−a) → αλλαγή κλίσης στο t=a
Κατασκευή envelope: r(t)−r(t−1)−r(t−3)+r(t−4)

Μέθοδος Δ (βήμα-βήμα):
1 Σχεδιάστε — αναγνωρίστε τις στάθμες
2 Βρείτε Δ = νέα τιμή − παλιά τιμή
3 Γράψτε: κάθε Δ → Δ·u(t−a)
4 Verify: αθροίστε και συγκρίνετε

Μεικτό σήμα = βηματικές + ράμπες + ημίτονα × masks
π.χ. sin(2πt)·[u(t)−u(t−2)] + 3·[u(t−2)−u(t−4)]

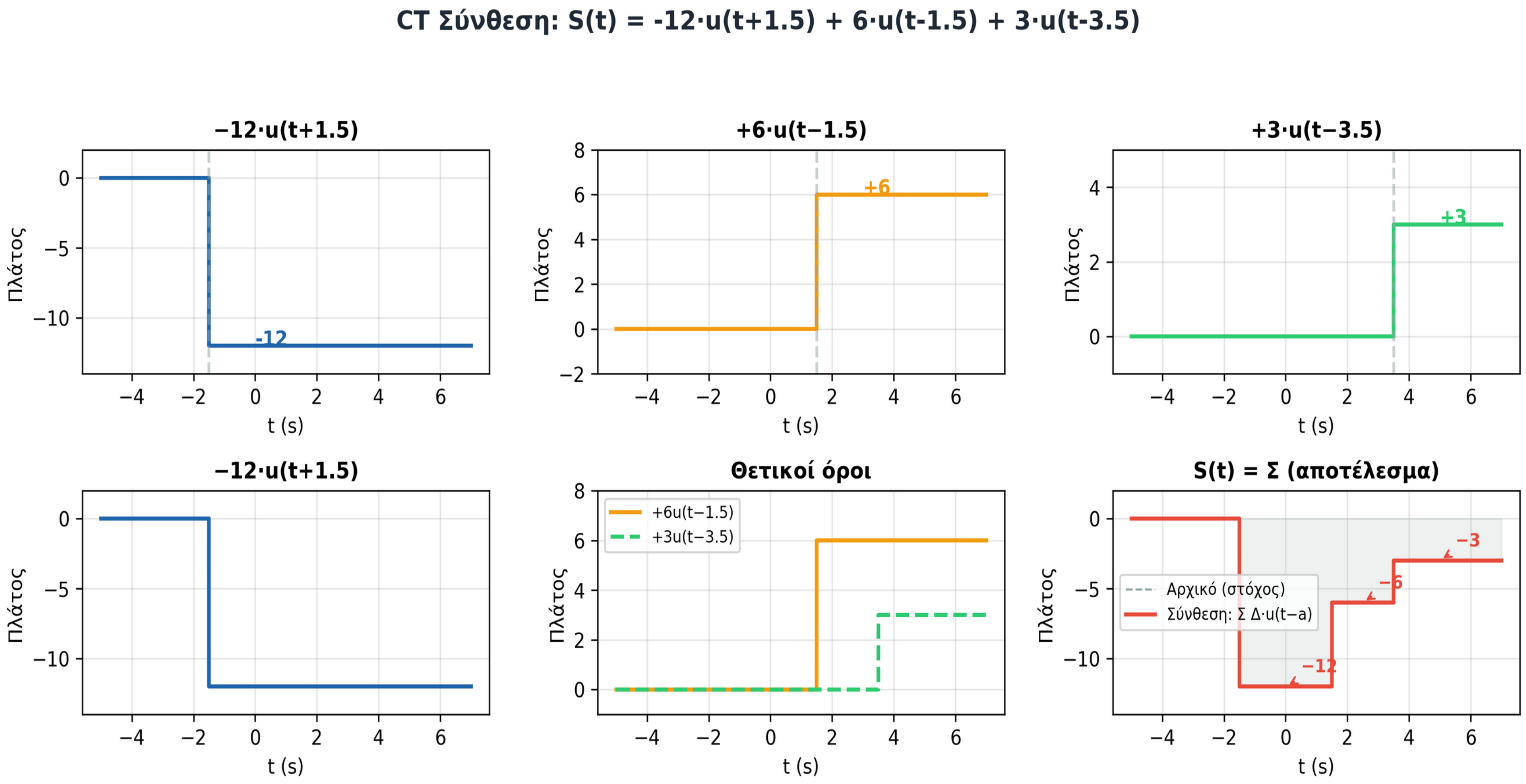


Ιδέα: ΟΤΙΔΗΠΟΤΕ = δομικά blocks μετατοπισμένα. Βάση ολόκληρης της Θεωρίας ΣΚΣ.

Λυμένο: CT Σύνθεση από Βηματικές

Άσκηση (CT Σύνθεση):
S(t)= 0 (t<−1.5),
−12 (−1.5≤t<1.5),
−6 (1.5≤t<3.5),
−3 (t≥3.5)
Να εκφραστεί ως Σ βηματικών u(t−a).

```
clc; clear all; close all;
% Ορισμός βηματικής
u = @(t) (t >= 0);
t = -4:0.001:6;
% Λύση: Δ = νέα − παλιά
% 1) (−12)−(0) = −12 → −12·u(t+1.5)
% 2) (−6)−(−12) = +6 → +6·u(t−1.5)
% 3) (−3)−(−6) = +3 → +3·u(t−3.5)
S = -12*u(t+1.5) + 6*u(t-1.5) + 3*u(t-3.5);
figure; plot(t, S, 'LineWidth', 2);
xlabel('t'); ylabel('S(t)');
title('CT Σύνθεση');
grid on;
```



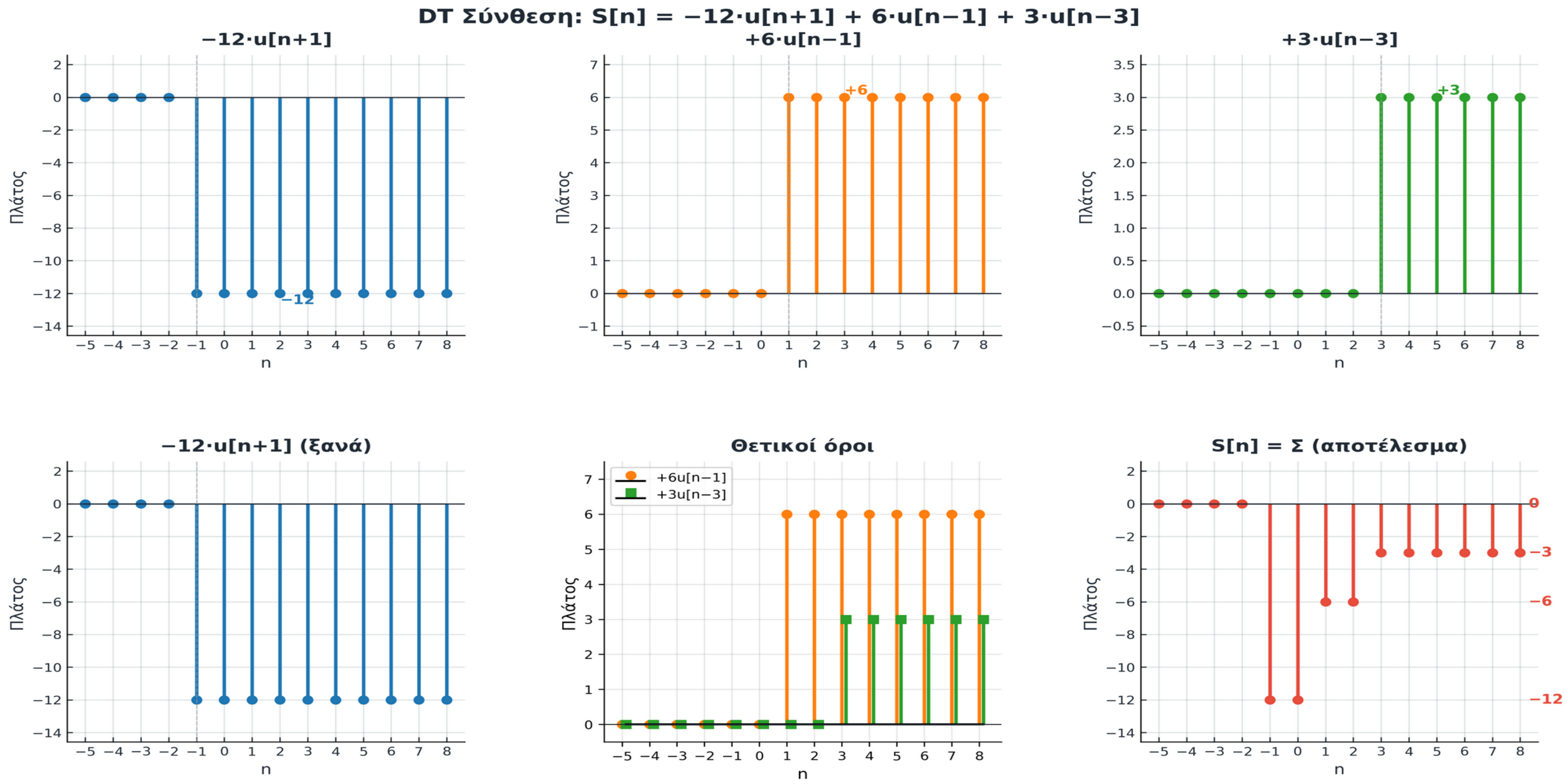
Μέθοδος Δ σε πράξη: Δ = νέα − παλιά, κάθε Δ γίνεται Δ·u(t−a). Αθροίστε, τρέξτε κώδικα, επαληθεύστε!

Λυμένο: DT Σύνθεση από Βηματικές

Άσκηση (DT Σύνθεση):

```
S[n] = 0        (n ≤ −2)
       −12      (−1 ≤ n ≤ 0),   {−1, 0}
       −6       (1 ≤ n ≤ 2),    { 1, 2}
       −3       (n ≥ 3)
```

```
clc; clear all; close all;
u = @(n) (n >= 0);
n = -5:8;
% Ίδια μέθοδος Δ
% ① −12·u[n+1]  ② +6·u[n−1]  ③ +3·u[n−3]
S = -12*u(n+1) + 6*u(n-1) + 3*u(n-3);
figure; stem(n, S, 'filled', 'LineWidth', 2);
xlabel('n'); ylabel('S[n]');
title('S[n] = Σ (αποτέλεσμα)');
grid on;
```



DT σύνθεση: ίδια μέθοδος Δ, αλλά u[n−a] αντί u(t−a). Stem αντί plot → δείγματα, όχι συνεχές.

Επαλήθευση Σύνθεσης: Πώς Ελέγχω;

Αφού γράψω $S(t) = \Sigma\, \Delta_i \cdot u(t-a_i)$, πώς ξέρω ότι είναι σωστό;

$S(t)=-12u(t+1.5)+6u(t-1.5)+3u(t-3.5)$

Βήμα 1: Επιλέγω σημεία ελέγχου — ένα ΣΕ ΚΑΘΕ περιοχή (για κάθε βηματική ισχύει $u_i<0 = 0$, $u_i>0 = 1$)

S(t) με αλλαγές στα t=−1.5, 1.5, 3.5 → δοκιμάζω t=−3, 0, 2.5, 5

Βήμα 2: Αντικαθιστώ στον τύπο ΚΑΙ ελέγχω

t=−3:

u(−1.5)=0,u(−4.5)=0,u(−6.5)=0 → S=0 OK (πριν την 1η αλλαγή)

t=0:

u(1.5)=1, u(−1.5)=0, u(−3.5)=0 → S = −12·1+6·0+3·0 = −12 OK

t=2.5:

u(4)=1, u(1)=1, u(−1)=0 → S = −12+6+0 = −6 OK

t=5:

u(6.5)=1, u(3.5)=1, u(1.5)=1 → S = −12+6+3 = −3 OK

Βήμα 3: Τρέξε στο Octave — plot(t, S) και σύγκρινε οπτικά!

Ίδια λογική για DT: stem(n, S) — ελέγχω n=−2, 0, 2, 4

Για ράμπες: ελέγχω ΚΑΙ κλίση (παράγωγο) ΚΑΙ τιμή σε κάθε σημείο αλλαγής

Παράδειγμα 2 — Ράμπες: e(t)=r(t)−r(t−1)−r(t−3)+r(t−4)

Ελέγχω κλίση ΚΑΙ τιμή σε κάθε τμήμα:

t=0.5: κλίση=+1, τιμή=0.5 OK (ανοδική ράμπα)

t=2: κλίση=0, τιμή=1 OK (σταθερό — +1−1=0)

t=3.5: κλίση=−1, τιμή=0.5 OK (καθοδική — 0−1=−1)

t=5: τιμή=0 OK (σταμάτησε στο t=4)

Επαλήθευση: 1 σημείο ελέγχου ανά περιοχή + Octave plot. Αν ταιριάζουν → σωστή σύνθεση!

Κατασκευή Περιβάλλουσας: 4 Ράμπες = Τραπέζιο

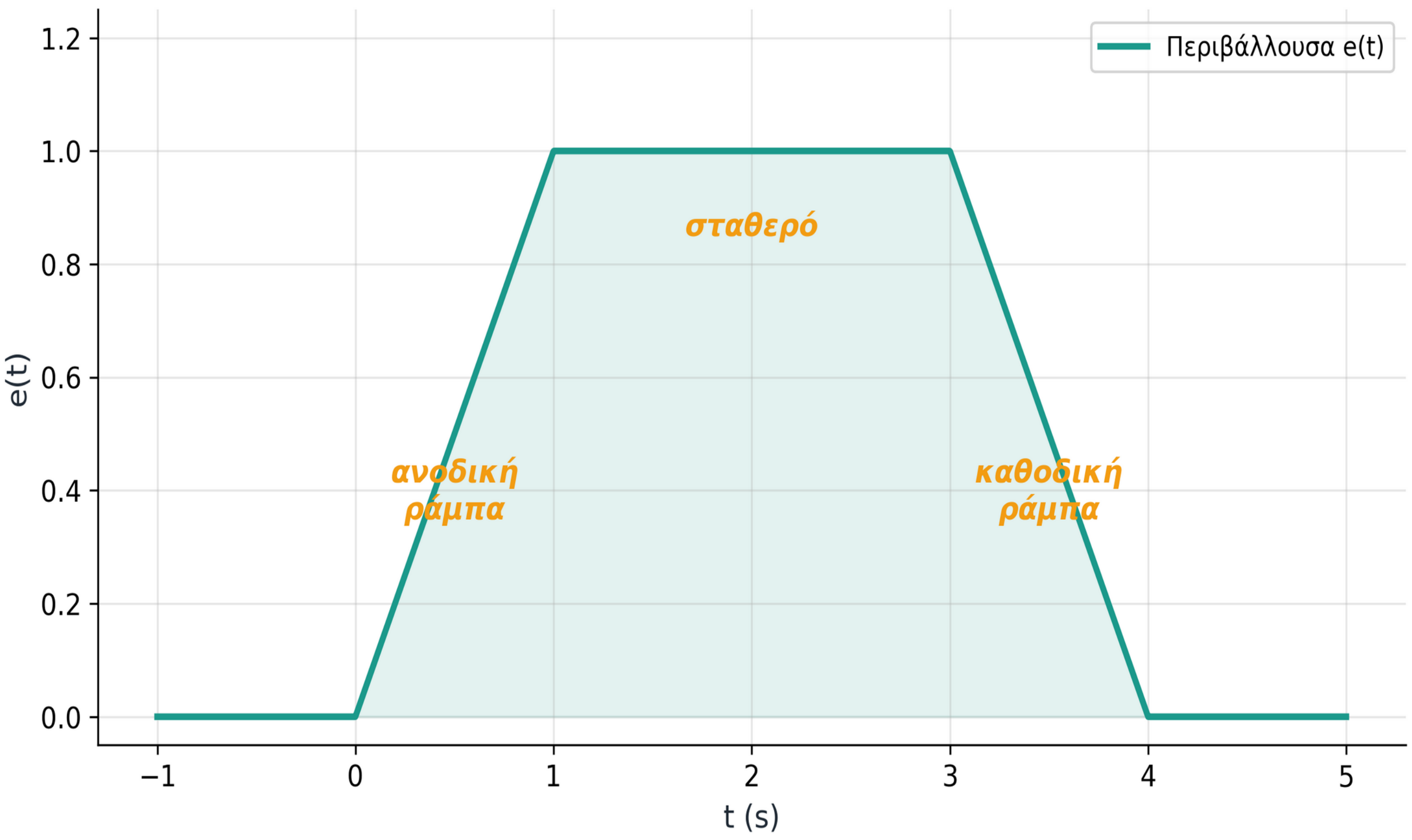
Βήμα-βήμα — Γιατί δημιουργείται plateau:

① r(t): κλίση +1 ξεκινά στο t=0
② −r(t−1): αφαιρώ κλίση +1 → σύνολο = 0
→ PLATEAU! (κλίσεις ακυρώνονται)
③ −r(t−3): αφαιρώ κλίση +1 → σύνολο = −1
→ κατέβασμα ξεκινά
④ +r(t−4): προσθέτω κλίση +1 → σύνολο = 0
→ σταματά = πίσω στο μηδέν

**Κλειδί: αφαίρεση ράμπας = ακυρώνει κλίση.
Δύο ράμπες ίδιας κλίσης → πλατό (κλίση 0).**

```
r = @(t) t .* (t >= 0);
t = -1:0.001:5;
e = r(t) - r(t-1) - r(t-3) + r(t-4);
figure; plot(t, e, 'LineWidth', 2);
xlabel('t (s)'); ylabel('e(t)');
title('Περιβάλλουσα τραπέζιο');
grid on;
```

Περιβάλλουσα από ράμπες: $e(t) = r(t) - r(t-1) - r(t-3) + r(t-4)$



Τεχνική ράμπας: κάθε r(t−a) αλλάζει κλίση. Αφαίρεση ράμπας = σταματά η κλίση. 4 ράμπες → τραπέζιο.

Envelope Fade-in/Hold/Fade-out & Burst

Πώς δουλεύει η περιβάλλουσα:
env(t) = r(t) − r(t−1) − r(t−3) + r(t−4)

Φάση 1 — Fade in [0,1]:
r(t) ξεκινά κλίση +1 → πλάτος αυξάνεται

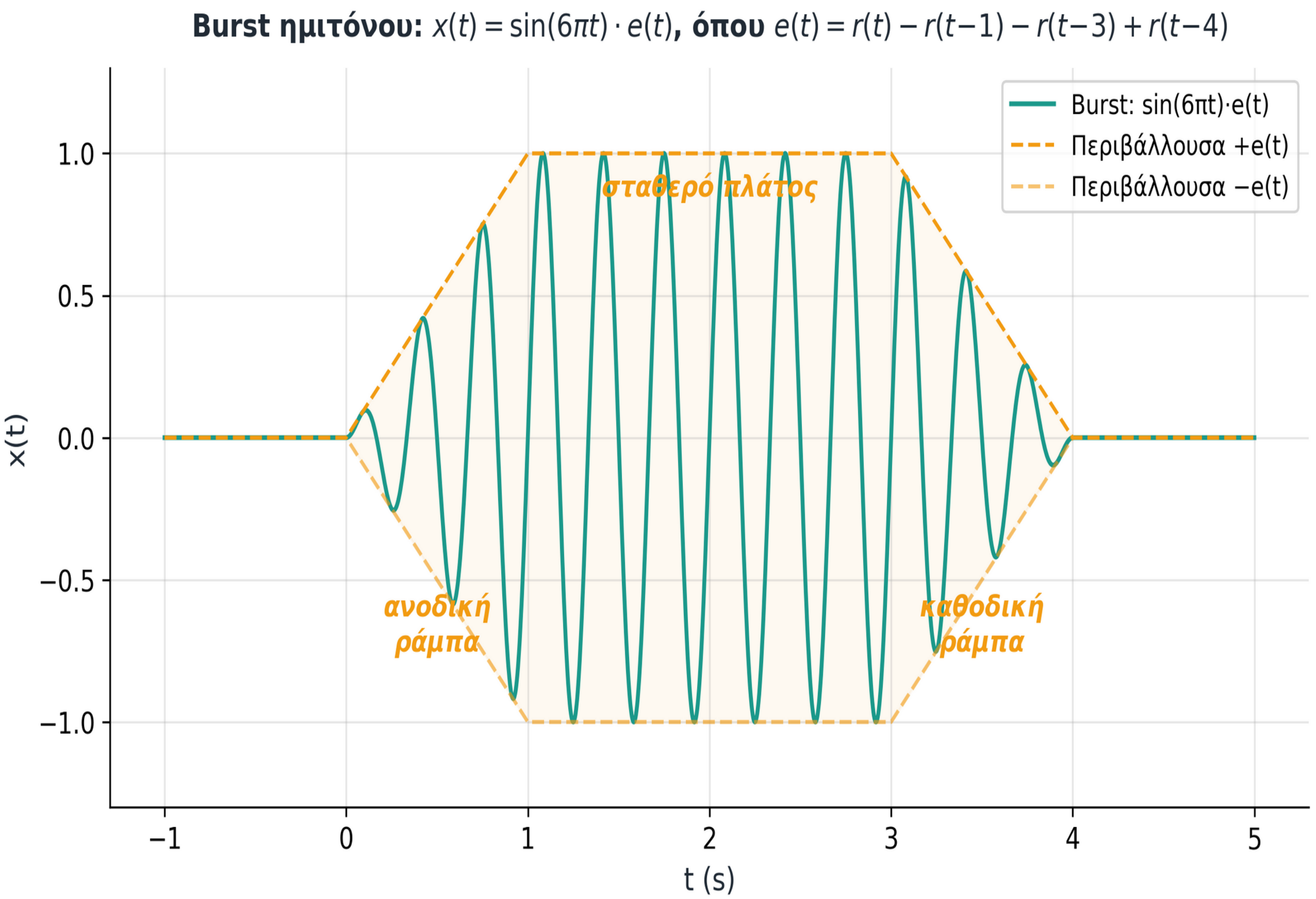
Φάση 2 — Hold [1,3]:
−r(t−1) ακυρώνει → κλίση 0 = σταθερό πλάτος

Φάση 3 — Fade out [3,4]:
−r(t−3) αφαιρεί → κλίση −1 = πλάτος μειώνεται

Φάση 4 — Τέλος [4,∞):
+r(t−4) ακυρώνει → κλίση 0 = πλάτος 0

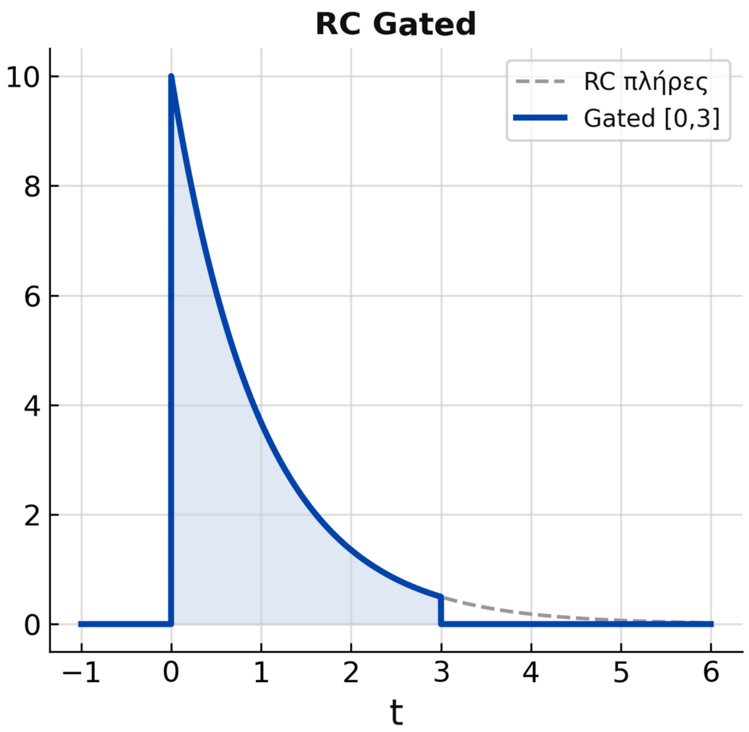
```
clc; clear all; close all;
r = @(t) t .* (t >= 0);
t = -1:0.001:5;
% Envelope: fade in [0,1], hold [1,3],
% fade out [3,4]
e = r(t) - r(t-1) - r(t-3) + r(t-4);
% Burst = sin × envelope
x = sin(2*pi*3*t) .* e;
figure; plot(t, x, 'LineWidth', 2); hold on;
plot(t, e, '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]);
plot(t,-e, '--', 'Color', [0.7 0.7 0.7]);
xlabel('t (s)'); ylabel('x(t)');
title('Burst ημιτόνου'); grid on;
```

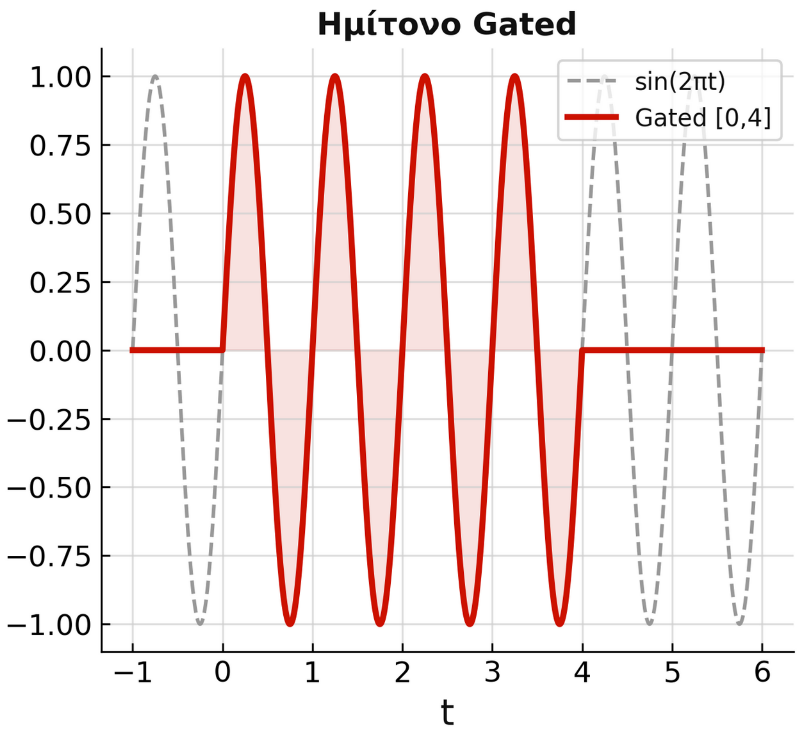
Burst = $\sin(2\pi f_0 t) \times \mathrm{env}(t)$
Η περιβάλλουσα ελέγχει ΤΟ ΠΛΑΤΟΣ του ημίτονου.



Ράμπες + αφαίρεση = πρακτικά envelopes. Εφαρμογή: audio, radar, τηλεπικοινωνίες.

Gating: Windowing σε 1 Slide





Τύπος

$$\mathbf{y(t) = x(t) \cdot [u(t-a) - u(t-b)]}$$

= x(t) μόνο στο [a, b]
= 0 παντού αλλού

Εφαρμογές:
- Windowing (DSP)
- TDM
- Radar bursts
- Audio fade

Πολλαπλασιασμός × Παράθυρο = μάσκα. Εφαρμογές: Windowing (Fourier/DSP), TDM, radar, audio fade.

Μετασχηματισμός x(at+b) — Ορισμοί & Μέθοδος

Ορισμός — Breakpoints

Τα σημεία τ_0 ενός σήματος x(τ) όπου αλλάζει η συμπεριφορά:
- αρχίζει ή τελειώνει (support)
- αλλάζει κλίση
- κάνει άλμα (ασυνέχεια)

Ασφαλής Μέθοδος — 1 βήμα

Για y(t) = x(at+b), λύνω:
$at + b = \tau_0 \;\rightarrow\; t = (\tau_0 - b) / a$
Εφαρμόζω σε ΚΑΘΕ breakpoint τ_0 του αρχικού.

Παγίδα: «shift πρώτα, reflect μετά» → ΛΑΘΟΣ
Η μέθοδος breakpoints αποφεύγει αυτόν τον κίνδυνο.

Τι αποκαλύπτουν τα νέα breakpoints:

Σειρά διατηρείται → $a > 0$ → κλίμακα + shift
Σειρά ΑΝΤΙΣΤΡΕΦΕΤΑΙ → $a < 0$ → ΑΝΑΚΛΑΣΗ
Απόσταση μικραίνει → $|a| > 1$ → συστολή
Απόσταση μεγαλώνει → $|a| < 1$ → διαστολή

Ισοδύναμη γεωμετρική σειρά (3 βήματα):

① Ανάκλαση x(−t) - αν $a < 0$
② Κλίμακα $x(|a|\cdot t)$ - συστολή ή διαστολή
③ Μετατόπιση - shift κατά $-b/a$
Σειρά: reflect → scale → shift (ΟΧΙ αντίστροφα!)

→ W05 Συνέλιξη: h(t−τ) = ανάκλαση + μετατόπιση = ακριβώς αυτός ο μετασχηματισμός!

Ασφαλές μονοπάτι: $t = (\tau_0 - b)/a$. Breakpoints αντιστρέφονται → ανάκλαση. Σειρά: reflect → scale → shift.

Πρακτικό παράδειγμα: y(t) = x(−2t+4)

Δίνεται: x(t) = t · [u(t) − u(t−1)]
(ράμπα [0,1) με κάθετη πτώση t=1)

Ζητείται: y(t) = x(−2t + 4)

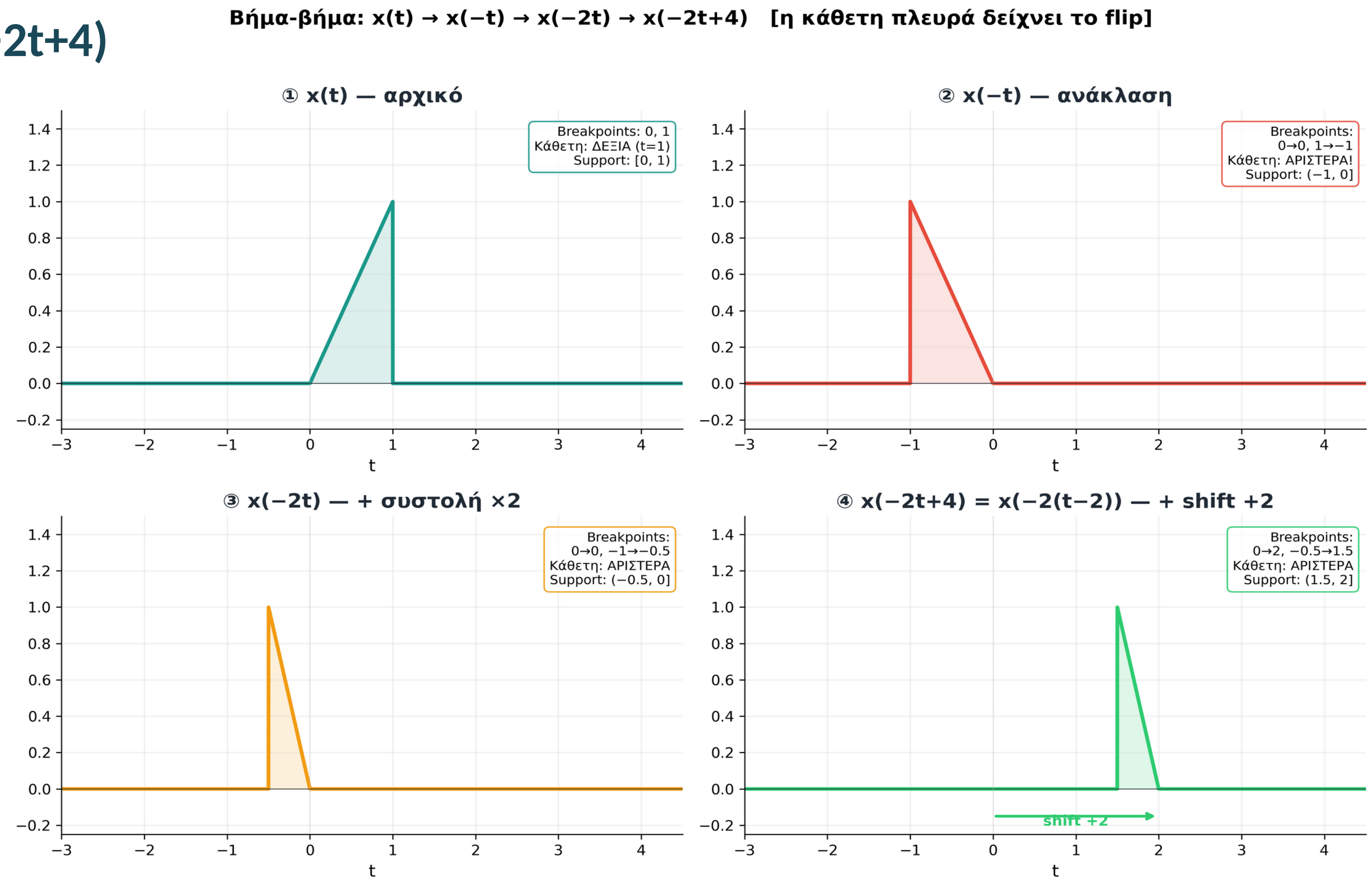
Βήμα 1: Βρες a, b
a = −2, b = +4

Βήμα 2: Breakpoints αρχικού
τ_0 = 0 (αρχή ράμπας)
τ_0 = 1 (κάθετη πτώση)

Βήμα 3: Εφαρμογή t = (τ_0−b)/a
- τ_0=0 → t = (0−4)/(−2) = 2
- τ_0=1 → t = (1−4)/(−2) = 1.5

Βήμα 4: Έλεγχος σειράς
Αρχικό: 0 < 1
Νέο: 2 > 1.5 → ΑΝΤΕΣΤΡΑΦΗ
= ανάκλαση **OK**

Support: (1.5, 2]
Κάθετη: τώρα ΑΡΙΣΤΕΡΑ (t=1.5)



y(t)=x(−2t+4): a=−2<0 → ανάκλαση, |a|=2 → συστολή ×2, κέντρο t=2. Κάθετη: ΔΕΞΙΑ → ΑΡΙΣΤΕΡΑ.

Σωστό vs Λάθος + Mini-practice

Αρχικό σήμα: $x(t) = t \cdot [u(t) - u(t-1)]$

Μετασχηματισμός: $y(t) = x(-2t+4)$

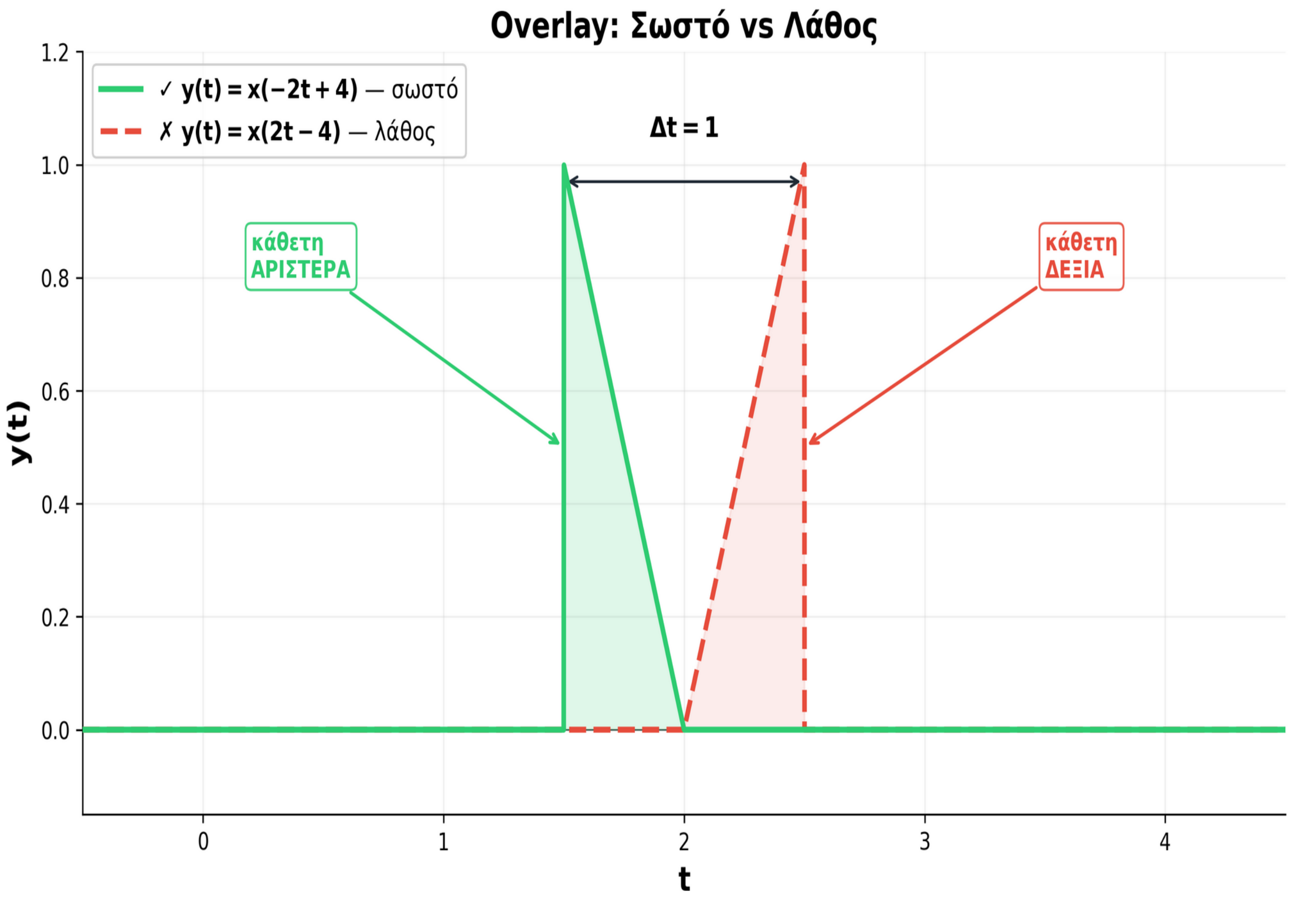
Δύο εξεταζόμενα σημεία:

	$\tau_0=0$	$\tau_0=1$
A: $t=(\tau_0-4)/(-2)$	2	1.5
B: $t=(\tau_0+4)/2$	2	2.5

OK A: 0→2, 1→1.5 → ΑΝΤΕΣΤΡΑΦΗ
= ανάκλαση, κάθετη ΑΡΙΣΤΕΡΑ

X B: 0→2, 1→2.5 → ΔΕΝ αντεστράφη
= κανένα flip, κάθετη ΔΕΞΙΑ

Λάθος: χρησιμοποίησε a=+2 αντί −2



Mini-practice: $z(t) = x(-3t+6)$
$0 \to (0-6)/(-3)=2$, $1 \to (1-6)/(-3) \approx 1.67$
Support: $[5/3, 2]$. Αντεστράφη OK

Λάθος πρόσημο a → λάθος θέση + λάθος σχήμα. Στο παράδειγμα η κάθετη πλευρά φανερώνει εαν έγινε flip.

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

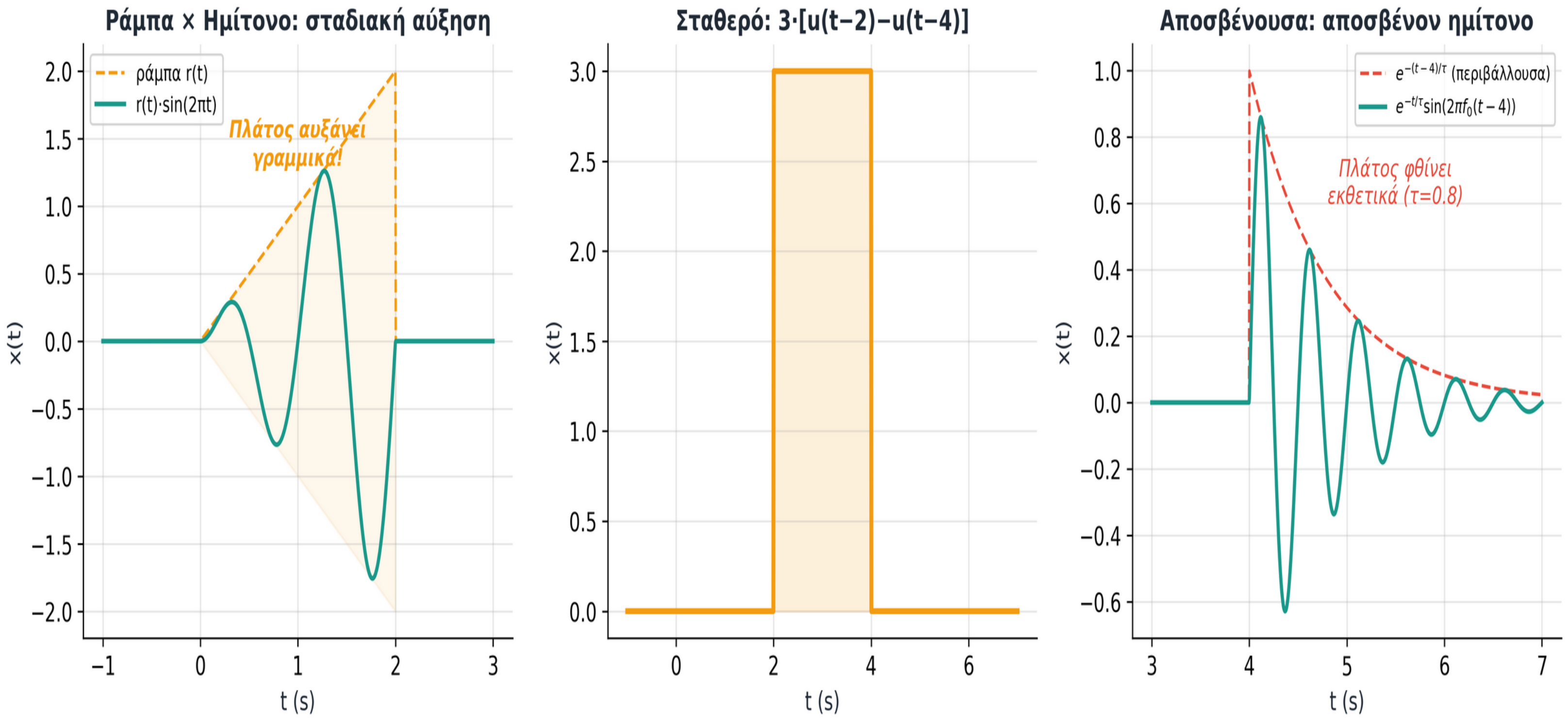
Σύνθετο Piecewise: Ράμπα × Ημίτονο + Αποσβένον

Άσκηση: Κατασκευάστε σήμα x(t) με 3 τμήματα:

1) $p_1(t) = r(t)\cdot\sin(2\pi t)$ για [0,2) — ράμπα ελέγχει πλάτος (fade-in)
2) $p_2(t) = 3$ για [2,4) — σταθερή στάθμη
3) $p_3(t) = \exp(-(t-4)/\tau)\cdot\sin(2\pi f_0(t-4))$ για $t \geq 4$ — αποσβένον ημίτονο

Εκφράστε ως gating sum. Τι ρόλο παίζει η περιβάλλουσα;

```
clear; close all; clc;

t = -1:0.001:8;

% Κομμάτι 1: ράμπα × ημίτονο [0,2)
ramp = min(t,2) .* (t>=0) .* (t<2);
p1 = ramp .* sin(2*pi*t);

% Κομμάτι 2: σταθερό [2,4)
p2 = 3 * ((t>=2) - (t>=4));

% Κομμάτι 3: αποσβένον ημίτονο [4,∞)
tau = 0.8;
p3 = exp(-(t-4)/tau) .* ...
     sin(2*pi*2*(t-4)) .* (t>=4);

x = p1 + p2 + p3;

figure;
plot(t, x, 'LineWidth', 2);
xlabel('t (s)'); ylabel('x(t)');
title('Σύνθετο piecewise');
grid on;
```



Κάθε κομμάτι = σήμα × gating mask. Η περιβάλλουσα (ράμπα ή εκθετικό) ελέγχει το πλάτος.

Even/Odd: Τι, Γιατί & Πότε Αποσυνθέτω

Ορισμοί:

EVEN (Άρτιο):

$x(-t) = x(t)$

Συμμετρικό ως προς t = 0

ODD (Περιττό):

$x(-t) = -x(t)$

Αντισυμμετρικό, x(0) = 0

MIXED (Μεικτό):

$x(-t) \neq \pm x(t)$

→ ΠΡΕΠΕΙ αποσύνθεση!

Αλγόριθμος Ελέγχου:

① Υπολόγισε x(−t)

(ανάκλαση — W03!)

② Σύγκρινε:

x(−t) = x(t); → EVEN ✓

x(−t) = −x(t); → ODD ✓

κανένα; → MIXED

③ Αν MIXED → Αποσύνθεσε:

$x_{EVEN} = ½[x(t) + x(-t)]$

$x_{ODD} = ½[x(t) - x(-t)]$

Γιατί μας Νοιάζει;

Fourier Series (W06):

EVEN → μόνο cos όροι

(bn = 0, μισοί υπολογισμοί!)

ODD → μόνο sin όροι

(an = 0, μισοί υπολογισμοί!)

MIXED → πλήρης σειρά

(χρειάζονται και an και bn)

Ολοκληρώματα:

∫ odd = 0 σε [−a, a]

→ «δωρεάν» απλοποίηση!

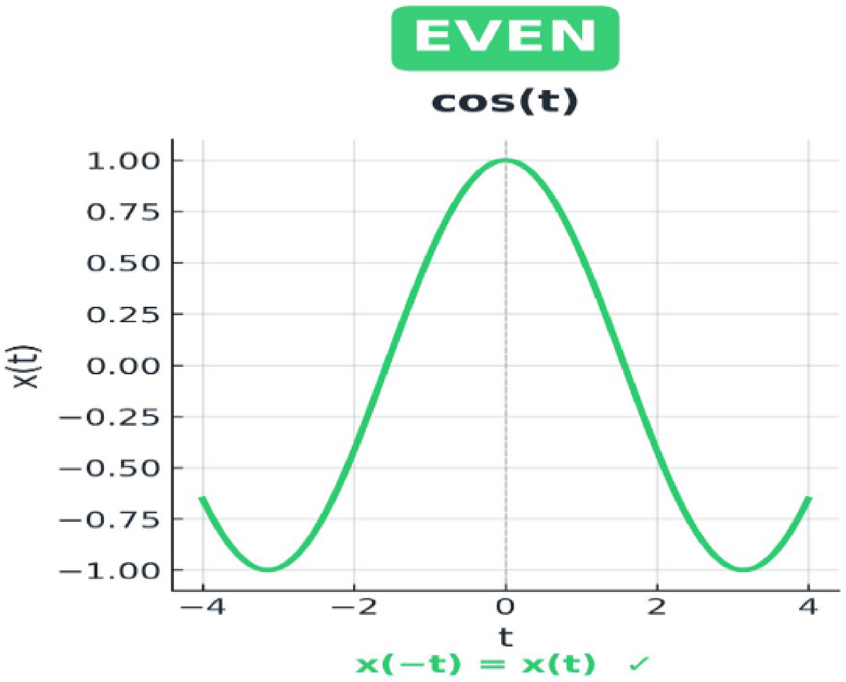
EVEN/ODD → Μισοί υπολογισμοί | MIXED → αποσύνθεσε πρώτα, μετά εκτιμάς!

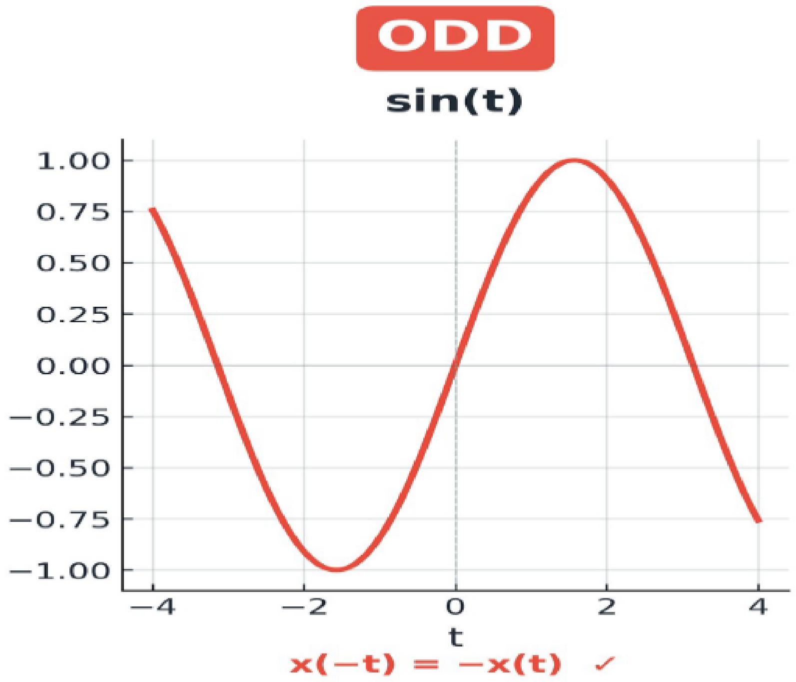
Πρώτα έλεγξε συμμετρία. Αν είναι mixed → αποσύνθεσε. Αν είναι even/odd → γλίτωσες τους μισούς υπολογισμούς των όρων Fourier !

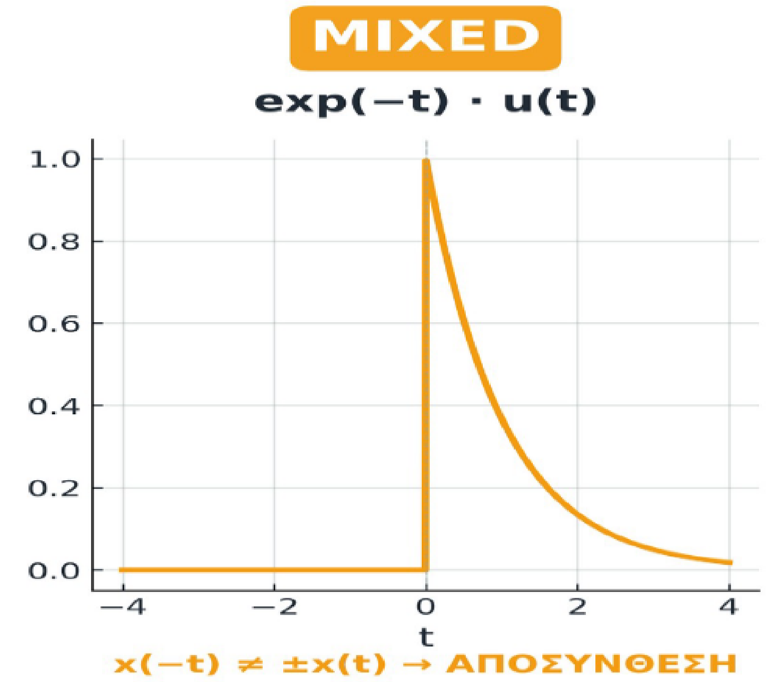
3 Σήματα — 3 Τύποι: Side-by-Side

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\Omega_0 t) + b_n \sin(n\Omega_0 t)\right]$$

Τριγωνομετρική συνάρτηση Fourier







cos(t) → EVEN

Fourier: μόνο a_n (cos)
b_n = 0 πάντα!

sin(t) → ODD

Fourier: μόνο b_n (sin)
a_n = 0 πάντα!

e^{-t}u(t) → MIXED

Fourier: και a_n και b_n
Πρώτα αποσύνθεσε!

Πρώτα έλεγξε συμμετρία. Αν είναι mixed → αποσύνθεσε. Αν είναι even/odd → γλίτωσες υπολογισμό για τους μισούς όρους Fourier!

Αποσύνθεση: 3 Βήματα + Σύγκριση Υπολογισμού

3 Βήματα Αποσύνθεσης:

① **Βρες x(−t)**
Ανάκλαση ως προς t = 0
(γνωστό από W03!)

② **xEVEN(t) = ½[x(t) + x(−t)]**
Κρατάμε ό,τι μένει ΙΔΙΟ
μετά την ανάκλαση

③ **xODD(t) = ½[x(t) − x(−t)]**
Κρατάμε ό,τι ΑΛΛΑΖΕΙ πρόσημο
μετά την ανάκλαση

Επαλήθευση:
xEVEN(t) + xODD(t) = x(t) ΠΑΝΤΑ!

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\Omega_0 t) + b_n \sin(n\Omega_0 t)\right]$$

Τριγωνομετρική συνάρτηση Fourier

Σύγκριση: Πότε Αποσυνθέτω;

EVEN σήμα	**Δεν χρειάζεται!** Ήδη καθαρό → μόνο cos Υπολογισμός: μόνο a_n
ODD σήμα	**Δεν χρειάζεται!** Ήδη καθαρό → μόνο sin Υπολογισμός: μόνο b_n
MIXED σήμα	**ΠΡΕΠΕΙ αποσύνθεση!** → xEVEN → a_n (cos μέρος) → xODD → b_n (sin μέρος)

Κλειδί: Αποσυνθέτω ΜΟΝΟ αν είναι mixed! Αλλιώς «δωρεάν».

Αποσύνθεση σε 3 βήματα: ① x(−t) ② xEVEN = ½[x+x(−t)] ③ xODD = ½[x−x(−t)]. Πάντα Xe+Xo = X(t).

Λυμένο: Αποσύνθεση $e^{-t}\cdot u(t)$

Δίνεται: $x(t) = e^{-t}\cdot u(t)$

Βήμα 1: $x(-t)$

$x(-t) = e^{t}\cdot u(-t)$

(αντικατάσταση $t \to -t$)

Βήμα 2:

$x_{EVEN}(t) = \frac{1}{2}[e^{-t}u(t) + e^{t}u(-t)] = \frac{1}{2}e^{-|t|}$

(συμμετρικό!)

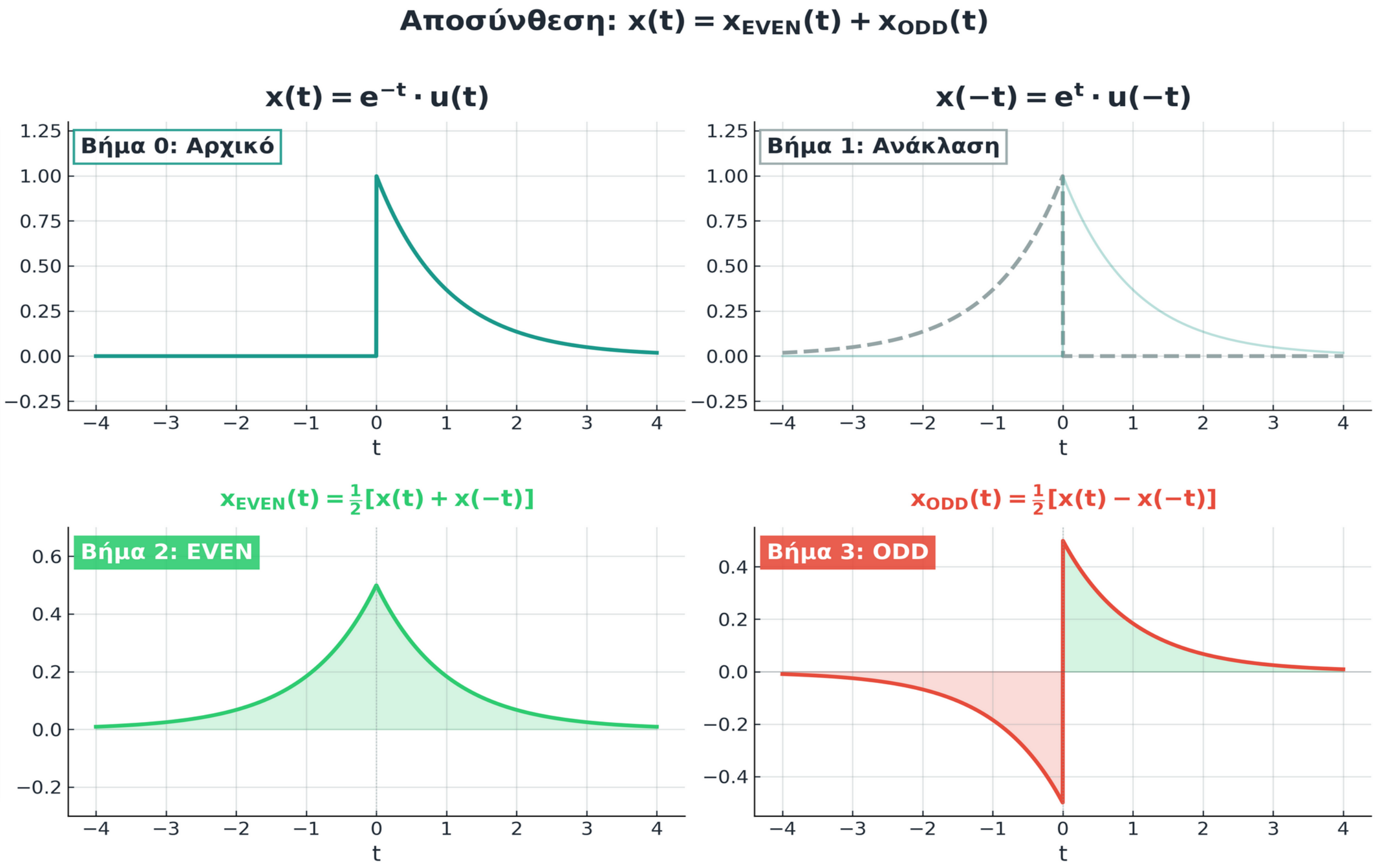
Βήμα 3:

$x_{ODD}(t) = \frac{1}{2}[e^{-t}u(t) - e^{t}u(-t)]$

(αντισυμμετρικό!)

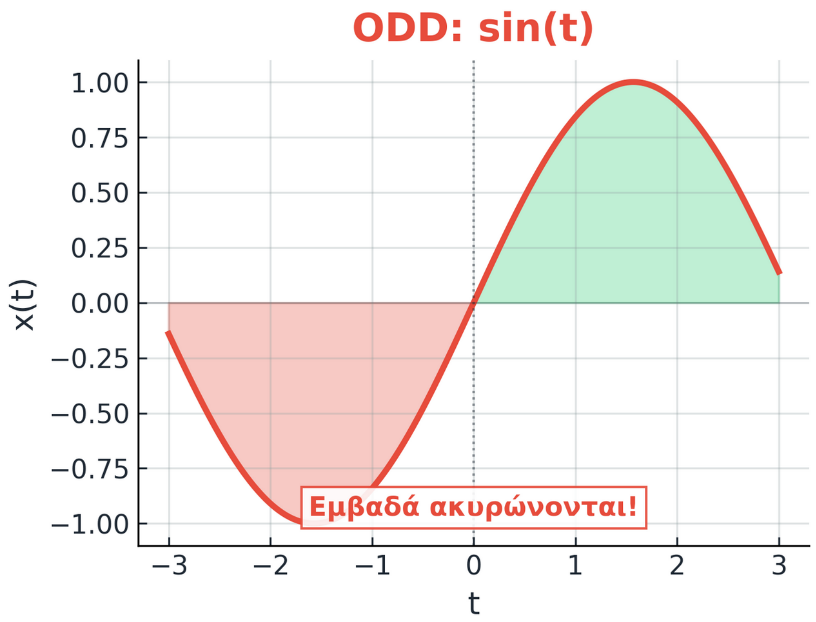
Επαλήθευσε: Xe + Xo = x(t) OK

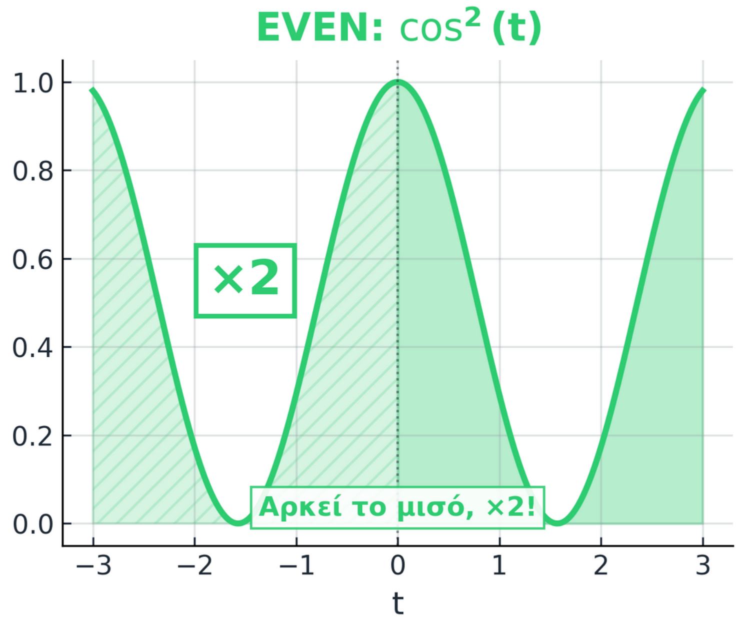
```
% Octave επαλήθευση:
t = -3:0.001:3;
x = exp(-t) .* (t>=0);
xf = x(end:-1:1);

xe = 0.5 * (x + xf);
xo = 0.5 * (x - xf);

err = max(abs(xe + xo - x))  % → ≈
0

figure;
plot(t, x,  'k',  'LineWidth', 2);
hold on;
plot(t, xe, 'g',  'LineWidth', 2);
plot(t, xo, 'r',  'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('t'); ylabel('Amplitude');
title('Αποσύνθεση σε even και
odd');
legend('x(t)', 'x_e(t)', 'x_o(t)');
```

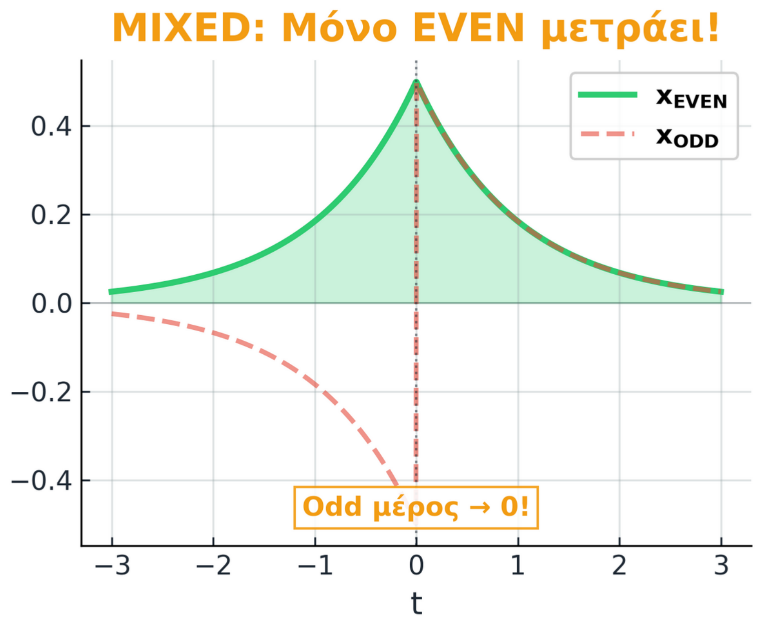


Mixed → 3 βήματα: $x(-t)$, xEVEN = ½[x+x(−t)], xODD = ½[x−x(−t)]. ΠΑΝΤΑ verify: $x_e + x_o = x(t)$

Ολοκλήρωμα: Even/Odd Shortcut







ODD σε [−a, a]:

$\int_{-a}^{a} x_{ODD}(t)\,dt = 0$

Τα εμβαδά ακυρώνονται
(+ και − ίσα & αντίθετα)

EVEN σε [−a, a]:

$\int_{-a}^{a} x_{EVEN}(t)\,dt$
$= 2 \cdot \int_{0}^{a} x_{EVEN}(t)\,dt$

Διπλασιασμός!
(αρκεί το μισό)

MIXED σε [−a, a]:

$\int_{-a}^{a} x(t)\,dt$
$= \int_{-a}^{a} x_{EVEN}(t)\,dt$

Το odd μέρος = 0
→ «δωρεάν» απλοποίηση!

Odd ∫[−a,a] = 0 (ακυρώνονται). Even ∫[−a,a] = 2·∫[0,a]. Mixed → μόνο even μέρος μετράει!

→ Γι' αυτό αποσυνθέτω (σ15) - η odd είναι δωρεάν!

CT Περιοδικότητα: $x(t) = x(t + T_0)$

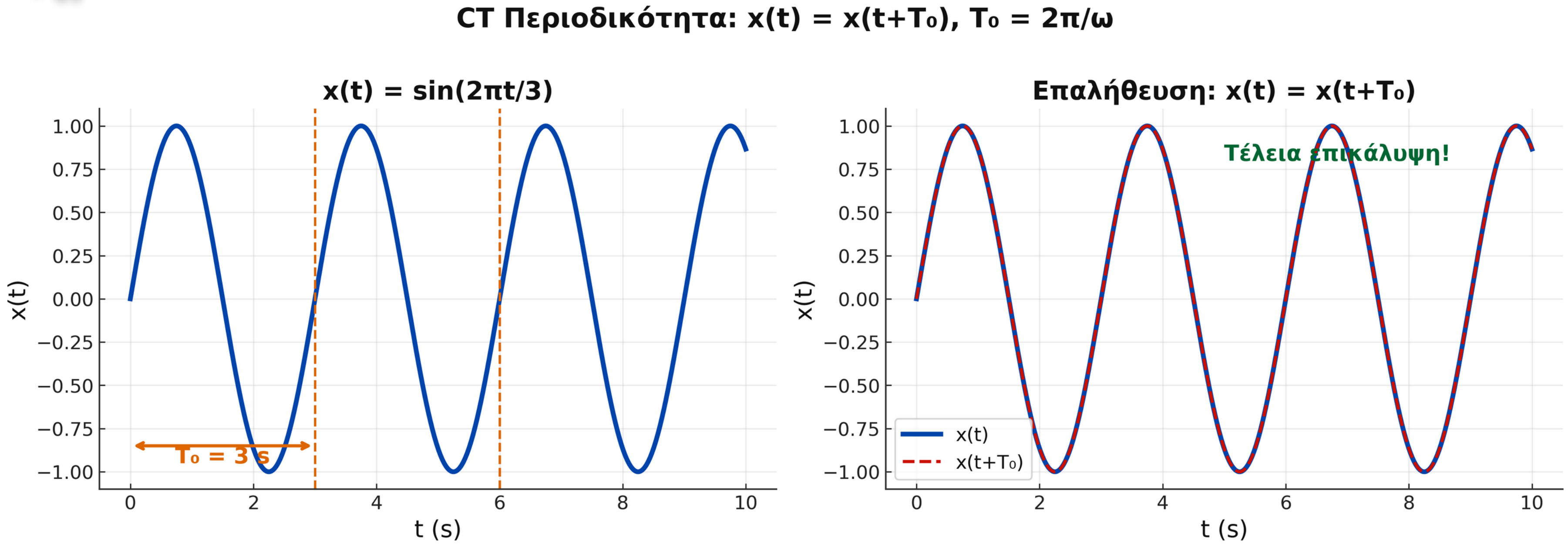
Θεμελιώδης περίοδος T_0:
Η μικρότερη τιμή $T_0 > 0$ ώστε $x(t) = x(t+T_0)$

$\sin(2\pi t/3) \to T_0 = 3$ s

Παρατηρήσεις:
1. Κάθε CT ημίτονο $\sin(\omega t)$ ΠΑΝΤΑ περιοδικό
2. $T_0 = 2\pi/\omega$ (μικρότερη περίοδος)
3. Άθροισμα: T_1/T_2 ρητός $\to T_0$ = LCM
4. T_1/T_2 άρρητος $\to$ ΟΧΙ περιοδικό!

Παράδειγμα:
$\sin(4\pi t)+\sin(6\pi t)$: $T_1=1/2$, $T_2=1/3$
Ratio = 3/2 (ρητός) $\to T_0 = 1$ s

$\cos(3t)+\cos(\pi t)$: $T_1=2\pi/3$, $T_2=2$
Ratio = $\pi/3$ (ΑΡΡΗΤΟΣ) $\to$ ΟΧΙ περιοδικό!



GCD & LCM — Τι είναι και πώς υπολογίζω

GCD(a,b) = Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης. π.χ. GCD(6,4)=2, GCD(2,3)=1
LCM(a,b) = Ελάχ. Κοινό Πολλαπλάσιο = a·b/GCD(a,b). π.χ. LCM(4,6)=12
Για κλάσματα $T_1=a/b$, $T_2=c/d$: T_0 = LCM(a,c) / GCD(b,d)
π.χ. $T_1=1/2$, $T_2=1/3$: T_0 = LCM(1,1)/GCD(2,3) = 1/1 = 1 s ✓
Octave: gcd(a,b), lcm(a,b) -> μόνο ακέραιοι!

Υπολογίζω $T_1=2\pi/\omega_1$, $T_2=2\pi/\omega_2$ → λόγος T_1/T_2. Ρητός → T_0 = LCM(T_1,T_2). Άρρητος → ΟΧΙ περιοδικό

Περιοδικότητα: Πλήρες Παράδειγμα Βήμα-Βήμα

Δίνεται: $x(t) = \sin(4\pi t) + \cos(10\pi t)$.
Είναι περιοδικό;

Βήμα 1: Βρες ω, f, T για κάθε συνιστώσα

$\sin(4\pi t)$: $\omega_1=4\pi$, $f_1=\omega_1/(2\pi)=2$ Hz, $T_1=1/f_1=0.5$ s
$\cos(10\pi t)$: $\omega_2=10\pi$, $f_2=\omega_2/(2\pi)=5$ Hz, $T_2=1/f_2=0.2$ s

Βήμα 2: Λόγος T_1/T_2 ρητός ή άρρητος;

$T_1/T_2 = 0.5/0.2 = 5/2 \rightarrow$ ΡΗΤΟΣ $\rightarrow$ ΝΑΙ περιοδικό!

Βήμα 3: $T_0 = \mathrm{LCM}(T_1,T_2) = \mathrm{LCM}(1,1)/\mathrm{GCD}(2,5) = 1/1 = 1$ s

Verify: $f_0=1/T_0=1$ Hz $\rightarrow f_1/f_0=2 \in \mathbb{Z}$ ✓, $f_2/f_0=5 \in \mathbb{Z}$ OK

ΠΡΟΣΟΧΗ — T_0 vs N:

CT: T_0 ΔΕΧΕΤΑΙ κλάσμα (π.χ. $T_0=0.5$ s), αρκεί T_1/T_2 ρητός
CT: f_0 ΔΕΧΕΤΑΙ κλάσμα, αρκεί f_1/f_0 και $f_2/f_0 \in \mathbb{Z}$
DT: $N = 2\pi/\omega_0$ ΠΡΕΠΕΙ $\in \mathbb{Z}$ (δείγματα = ακέραιος αριθμός!)
π.χ. $\sin(n)$: $N=2\pi\approx 6.28 \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ ΟΧΙ περιοδικό!

Ρητός και άρρητος λόγος

γρήγορος έλεγχος
μπορεί να γραφτεί ως m/n ;

ΘΕΩΡΙΑ

Ένας λόγος είναι ρητός όταν γράφεται ως κλάσμα ακεραίων με παρονομαστή μη μηδενικό.

Λόγος	Τιμή	Ρητός;	Γιατί
4/2	2	**Ναι**	κλάσμα ακεραίων
3/5	0.6	**Ναι**	πεπερασμένος δεκαδικός
7/3	2.333...	**Ναι**	περιοδικός δεκαδικός
-8/12	-2/3	**Ναι**	απλοποιείται σε κλάσμα ακεραίων
0/7	0	**Ναι**	0 = 0/1
π/2	1.57...	**Όχι**	περιέχει π, άρρητος
√2/3	0.471...	**Όχι**	περιέχει √2, άρρητος
1/√5	0.447...	**Όχι**	δεν γράφεται ως κλάσμα ακεραίων
2π/6π	1/3	**Ναι**	απλοποιείται σε κλάσμα ακεραίων
√8/√2	2	**Ναι**	γίνεται 2

Χρήσιμο στα διακριτά σήματα

$x[n] = \cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό όταν ο λόγος $\omega_0 / 2\pi$ είναι ρητός.

Παράδειγμα

$\omega_0 = \pi/4 \Rightarrow \omega_0/(2\pi) = 1/8$
1/8 είναι ρητός $\Rightarrow$ το σήμα είναι περιοδικό.

CT: T_0 δέχεται κλάσμα, αρκεί ρητός λόγος. DT: N ΠΡΕΠΕΙ $\in \mathbb{Z}$. Verify: $f_i/f_0 \in \mathbb{Z}$.

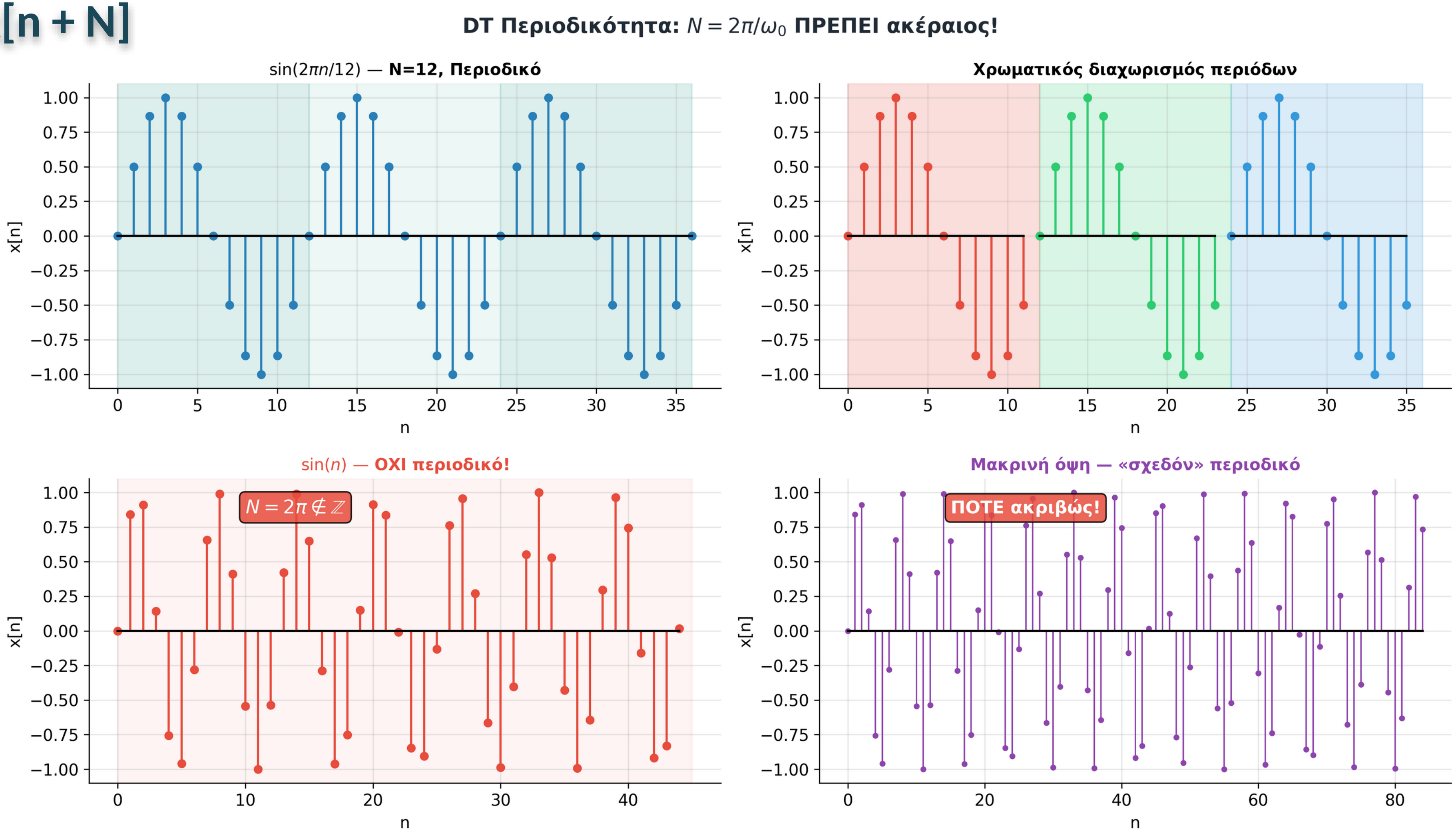
DT Περιοδικότητα: x[n] = x[n + N]

DT κανόνας:
$N = 2\pi/\omega_0$ ΠΡΕΠΕΙ να είναι ακέραιος!

$\sin(2\pi n/12) \rightarrow N = 12 \rightarrow$ ΝΑΙ
$\sin(n) \rightarrow N = 2\pi \approx 6.28 \rightarrow$ ΟΧΙ!

Παρατηρήσεις:
1. DT ημίτονο ΟΧΙ πάντα περιοδικό!
2. Απαιτείται $N = 2\pi/\omega_0 \in \mathbb{Z}$
3. ΜΕΓΑΛΗ ΔΙΑΦΟΡΑ από CT!

ΕΚΠΛΗΞΗ:
sin(n) ΔΕΝ είναι περιοδικό στο DT!
(Σε αντίθεση με CT: sin(t) πάντα περιοδικό)



DT: $N = 2\pi/\omega_0 \in \mathbb{Z}$; sin(2πn/12) περιοδικό (N=12), sin(n) ΟΧΙ ($N=2\pi \notin \mathbb{Z}$) -> ΜΕΓΑΛΗ διαφορά από CT.

Άσκηση Πρόβλεψης: Ποια Είναι Περιοδικά;

Χωρίς πράξεις, προβλέψτε από το plot!

1. sin(4πt) + sin(6πt)

2. cos(3t) + cos(πt)

3. DT: sin(2πn/5)

Κλειδί: Ratio = ρητός → ΝΑΙ
Ratio = άρρητος → ΟΧΙ
DT: $N \in \mathbb{Z}$ → ΝΑΙ

Απαντήσεις και επεξήγηση στην επόμενη σελίδα!

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Λύσεις Άσκησης Πρόβλεψης

1. sin(4πt) + sin(6πt) → ΝΑΙ περιοδικό!

$\omega_1=4\pi \rightarrow T_1=½$, $\omega_2=6\pi \rightarrow T_2=⅓$, λόγος $T_1/T_2 = 3/2$ (ρητός) → T_0 = LCM(½,⅓) = 1 s

Verify: $f_0=1$ Hz, $f_1=2/1=2 \in \mathbb{Z}$, $f_2=3/1=3 \in \mathbb{Z}$ OK

2. cos(3t) + cos(πt) → ΟΧΙ περιοδικό!

$\omega_1=3 \rightarrow T_1=2\pi/3$, $\omega_2=\pi \rightarrow T_2=2$, λόγος $T_1/T_2 = \pi/3$ (**ΑΡΡΗΤΟΣ**!)

Αν ο λόγος είναι άρρητος, δεν υπάρχει κοινή περίοδος → δεν επαναλαμβάνεται ποτέ ακριβώς.

3. DT: sin(2πn/5) → ΝΑΙ περιοδικό!

$N = 2\pi/(2\pi/5) = 5 \in \mathbb{Z}$ OK → επαναλαμβάνεται κάθε 5 δείγματα.

Κλειδί: Κοίταξε πρώτα το plot — αν «φαίνεται» περιοδικό, ΕΛΕΓΞΕ αριθμητικά!

Η cos(3t)+cos(πt) φαίνεται «σχεδόν» περιοδική, αλλά ο λόγος $\pi/3 \approx 1.047$ **ΟΧΙ** ρητός.

Πάντα ελέγχετε τον λόγο T_1/T_2. Αν άρρητος → ΟΧΙ περιοδικό, ακόμα κι αν «μοιάζει» στο plot!

Άσκηση 1: Σύνθεση & Μετασχηματισμός

Δίνεται piecewise σήμα:
$x(t) = 3$ για $0 \le t < 2$
$x(t) = -1$ για $2 \le t < 4$
$x(t) = 2$ για $t \ge 4$
$x(t) = 0$ αλλού

(α) Εκφράστε ως άθροισμα βηματικών $u(t-a)$.

(β) Σχεδιάστε $x(2t-3)$.
(Ποια η σωστή σειρά;)

(γ) Εφαρμόστε gating [1,5]:
$y(t) = x(t) \cdot [u(t-1) - u(t-5)]$

(δ) Βρείτε $x_e(t)$, $x_o(t)$.

(ε) Είναι περιοδικό; Αιτιολογήστε.

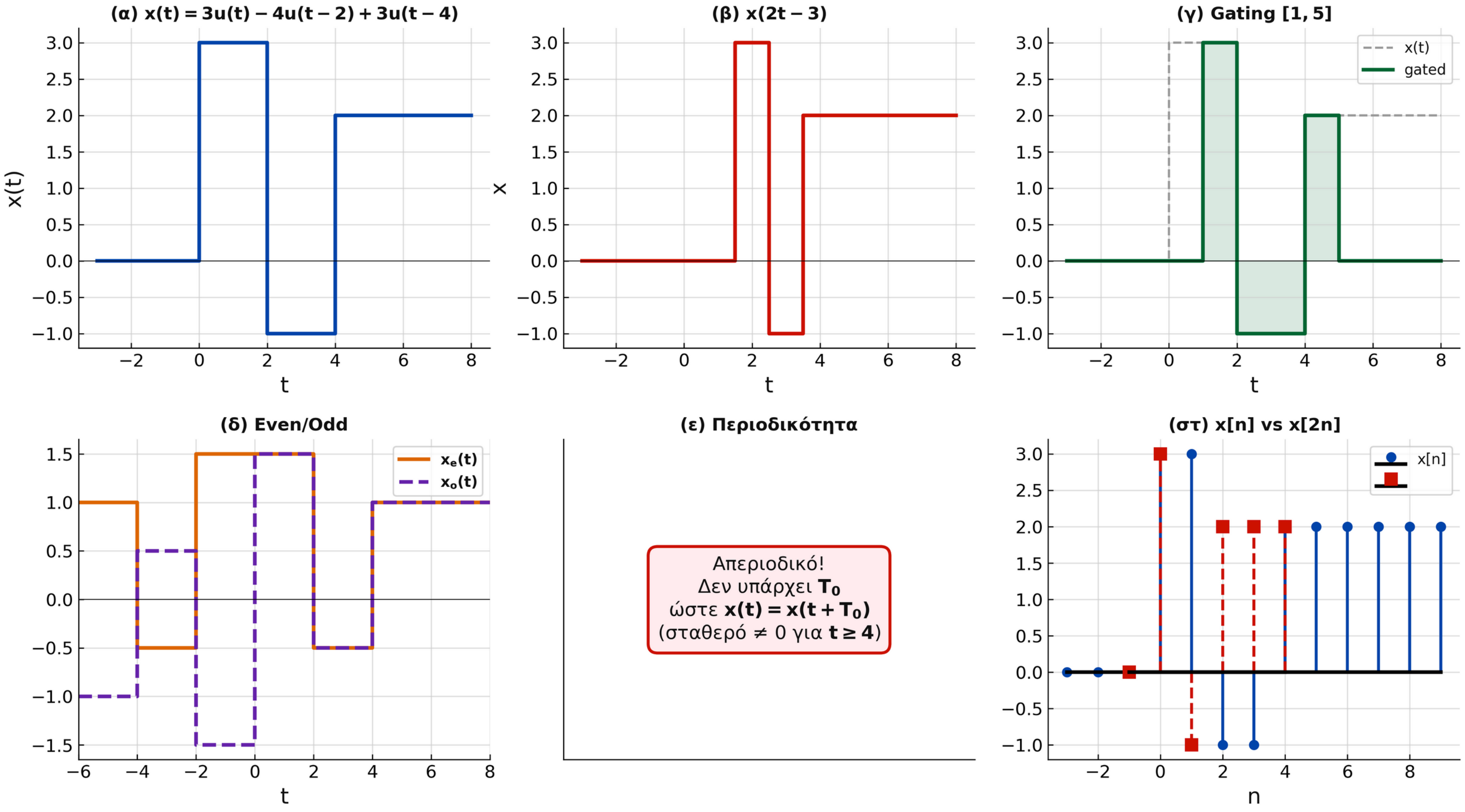
(στ) DT: $x[n]$ με ίδιες τιμές.
Βρείτε $x[2n]$ (decimation).

Σύνθεση + μετασχηματισμός + gating + even/odd + περιοδικότητα → ΟΛΑ μαζί σε μία άσκηση.

Άσκηση 1: Λύση

```
clear; close all; clc;
u = @(t) (t >= 0);
t = -3:0.001:8;
% (α) x(t)
x = 3*u(t) - 4*u(t-2) + 3*u(t-4);
% (β) x(2t-3)
x_combo = 3*u(2*t-3) - 4*u(2*t-5) + ...
          3*u(2*t-7);


% (γ) gating [1,5]
gate = u(t-1) - u(t-5);
y = x .* gate;

% (δ) even/odd – συμμετρικό grid
te = -8:0.001:8;
x0 = 3*u(te) - 4*u(te-2) + 3*u(te-4);
xf = 3*u(-te) - 4*u(-te-2) + 3*u(-te-4);
xe = 0.5*(x0 + xf);
xo = 0.5*(x0 - xf);

% (ε) ΟΧΙ περιοδικό – σταθερό ≠ 0 για t>=4
% (στ) Decimation x[2n] – χάνονται δείγματα
```

```
figure;
subplot(2,2,1);
plot(t, x, 'LineWidth', 2); grid on;
title('x(t)'); xlabel('t'); ylabel('x(t)');



subplot(2,2,2);
plot(t, x_combo, 'LineWidth', 2); grid on;
title('x(2t-3)'); xlabel('t');



subplot(2,2,3);
plot(t, y, 'LineWidth', 2); grid on;
title('y(t) = x(t)[u(t-1)-u(t-5)]'); xlabel('t');



subplot(2,2,4);
plot(te, xe, 'g', 'LineWidth', 2); hold on;
plot(te, xo, 'r', 'LineWidth', 2);
plot(te, x0, 'k--', 'LineWidth', 1.2);
grid on; title('Even / Odd');
xlabel('t'); legend('x_e', 'x_o', 'x');
```



(ε) ΟΧΙ περιοδικό → σταθερό ≠ 0 στο t≥4. (στ) Decimation x[2n] χάνει δείγματα.

Άσκηση 2: Πράξεις Πλάτους + Modulation

Δίνονται: $x_1(t) = \sin(2\pi t)$, $x_2(t) = \cos(6\pi t)$

(α) Σχεδιάστε: $2 \cdot x_1(t)$, $-x_1(t)$, $x_1(t)+1.5$
(κλιμάκωση, αναστροφή, DC offset)

(β) Σχεδιάστε x_1+x_2. ή κάτι άλλο;
Αιτιολογήστε.

(γ) Gating [0,3]:
$y(t) = x_1(t) \cdot [u(t) - u(t-3)]$

(δ) AM: $m(t) = [1 + 0.8 \cdot x_1(t)] \cdot x_2(t)$
Σχεδιάστε. Τι παρατηρείτε;

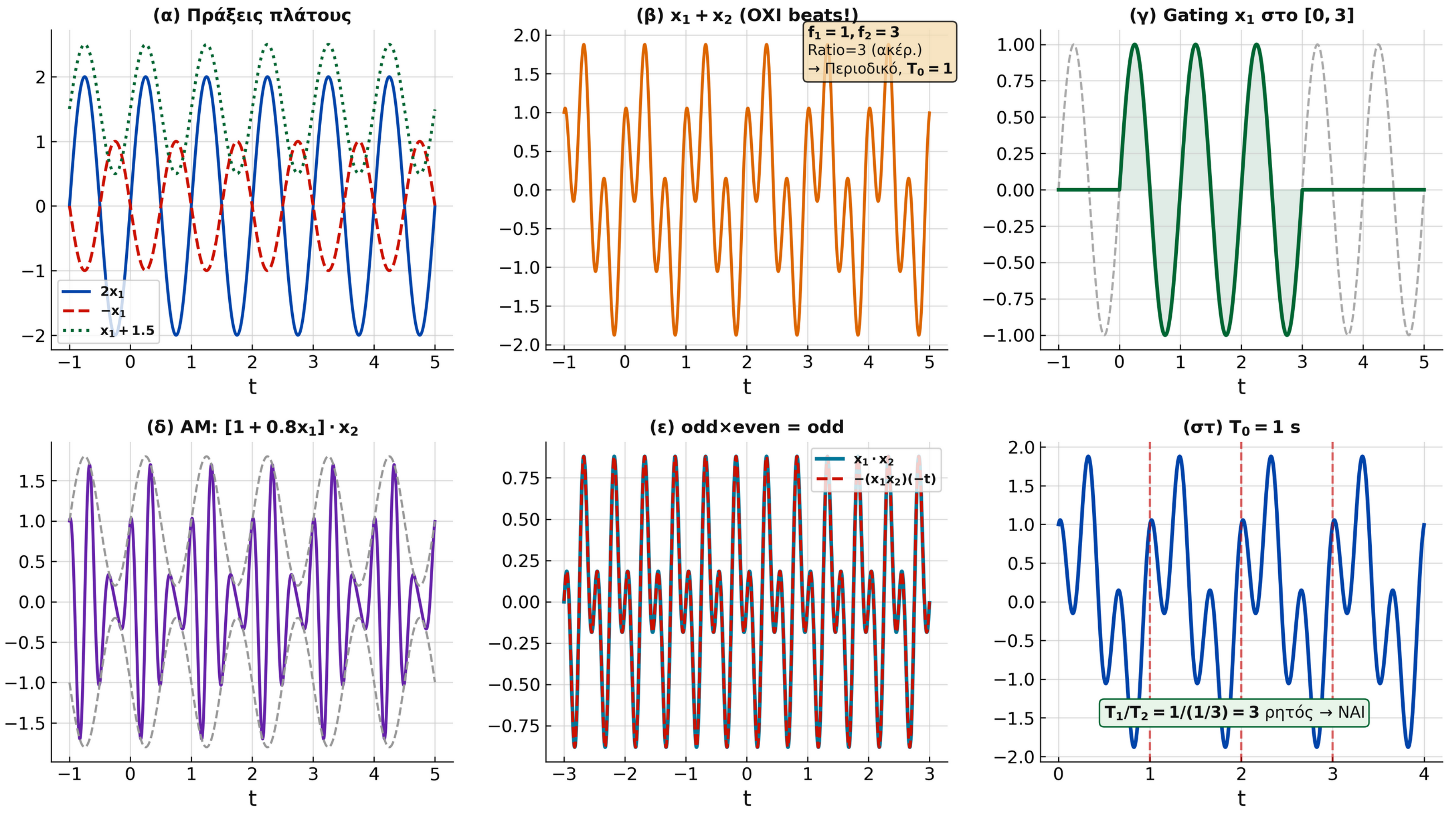
(ε) x_1 = odd, x_2 = even.
Τι είναι $x_1 \cdot x_2$;

(στ) Περιοδικότητα x_1+x_2:
$T_1=1$, $T_2=1/3$. Βρείτε T_0.

Πράξεις πλάτους + modulation: κλιμάκωση, πρόσθεση, gating, AM, even×odd, περιοδικότητα αθροίσματος

Άσκηση 2: Λύση

```
clc; clear all; close all;
t = -1:0.001:5;
x1 = sin(2*pi*t);
x2 = cos(6*pi*t);

% (α) πράξεις πλάτους
y_2x = 2*x1;  y_neg = -x1;  y_dc = x1 + 1.5;

% (β) άθροισμα (ΟΧΙ beats: f2/f1=3)
y_sum = x1 + x2;

% (γ) gating [0,3]
gate = (t>=0) - (t>=3);
y_gated = x1 .* gate;

% (δ) AM modulation
m_am = (1 + 0.8*x1) .* x2;

figure;
subplot(3,2,1);
plot(t,x1,'k--','LineWidth',1.2); hold on;
plot(t,y_2x,'LineWidth',2); grid on;
title('(α1) 2x_1(t)'); xlabel('t');
legend('x_1','2x_1');
subplot(3,2,2);
plot(t,x1,'k--','LineWidth',1.2); hold on;
plot(t,y_neg,'LineWidth',2); grid on;
title('(α2) -x_1(t)'); xlabel('t');
subplot(3,2,3);
plot(t,x1,'k--','LineWidth',1.2); hold on;
plot(t,y_dc,'LineWidth',2); grid on;
title('(α3) x_1+1.5'); xlabel('t');
subplot(3,2,4);
plot(t,y_sum,'LineWidth',2); grid on;
title('(β) x_1+x_2'); xlabel('t');
subplot(3,2,5);
plot(t,y_gated,'LineWidth',2); grid on;
title('(γ) Gated x_1'); xlabel('t');
subplot(3,2,6);
plot(t,m_am,'LineWidth',2); grid on;
title('(δ) AM signal'); xlabel('t');


% (ε) odd×even = odd
% (στ) T1=1, T2=1/3, ratio=3 → T0=1 s
```



Επεξήγηση:

(α) $2x_1$ = διπλάσιο πλάτος, $-x_1$ = αντιστροφή, x_1+1.5 = DC offset ανεβάζει τη μέση γραμμή.
(β) f_1=1, f_2=3 → ratio=3 (ακέραιος, όχι κοντινές συχνότητες), ΟΧΙ αλλά σύνθετη κυματομορφή,
ΝΑΙ περιοδική.

(γ) Gating: κόβει το σήμα στο [0,3] → μηδέν παντού αλλού.
(δ) AM: η χαμηλόσυχνη x_1 διαμορφώνει το πλάτος της x_2 → η περιβάλλουσα ακολουθεί το 1+0.8sin.
(ε) sin=odd, cos=even → odd×even = odd (αντισυμμετρικό!).
(στ) T_1/T_2 = 1/(1/3) = 3 ρητός → T_0=1 s.

(β) ratio=3 (ρητός). (ε) odd×even=odd. (στ) T_0=1 s.

Άσκηση 3: RC Transform Chain

Δίνεται: $x(t) = 10 \cdot e^{(-t/\tau)} \cdot u(t)$
(V_0=10, τ=0.1 s = RC σταθερά)

(α) Σχεδιάστε: $x(t)$, $x(-t)$, $x(t-0.5)$

(β) Σχεδιάστε $x(3t-1.5)$.
Σωστή σειρά: shift 0.5 → scale ×3

(γ) Gating: $x(t) \cdot [u(t) - u(t-0.3)]$

(δ) Even/Odd αποσύνθεση.
Τι τύπος συμμετρίας;

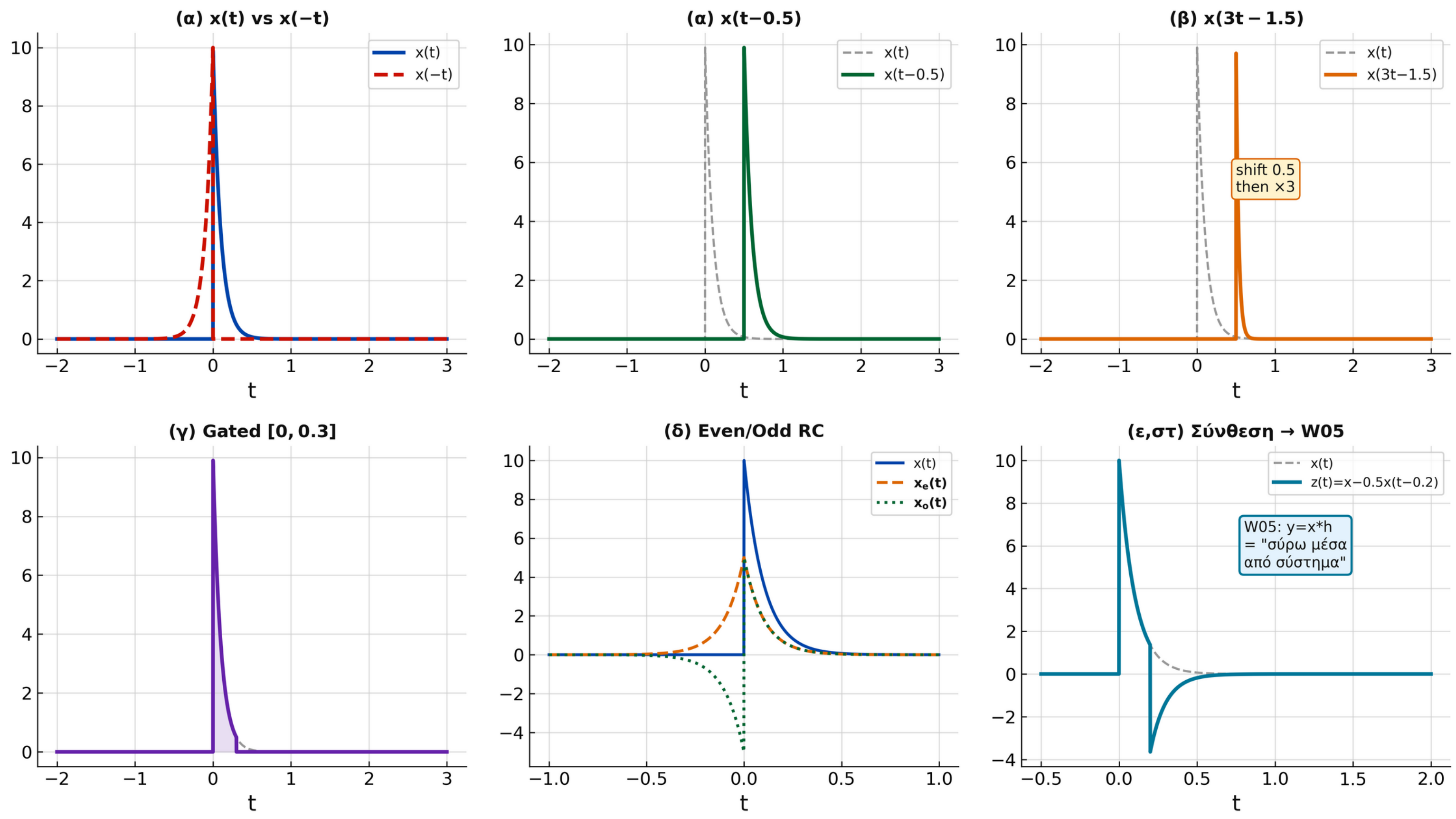
(ε) Σύνθεση: $z(t) = x(t) - 0.5 \cdot x(t-0.2)$
Σχεδιάστε.

(στ) Bridge → W05:
«Στο W05, αυτό θα είναι $y(t) = x * h$»
(Convolution: flip + shift + multiply!)

RC exponential → ανάκλαση, μετατόπιση, κλιμάκωση, gating, even/odd, σύνθεση → γέφυρα W05

Άσκηση 3: Λύση

```
clear; close all; clc;

V0 = 10;
tau = 0.1;
t = -2:0.001:3;

x = V0 * exp(-t/tau) .* (t>=0);
x_ref = V0 * exp(t/tau) .* (t<=0);
x_sh = V0 * exp(-(t-0.5)/tau) .* (t>=0.5);
x_combo = V0 * exp(-(3*t-1.5)/tau) .* (3*t-1.5>=0);

gate = (t>=0) - (t>=0.3);
x_gated = x .* gate;

te = -3:0.001:3;
x0 = V0 * exp(-te/tau) .* (te>=0);
xf = x0(end:-1:1);
xe = 0.5 * (x0 + xf);
xo = 0.5 * (x0 - xf);

z = x - 0.5 * V0 * exp(-(t-0.2)/tau) .* (t>=0.2);

figure;
plot(t, x, 'LineWidth', 2); hold on;
plot(t, z, 'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('t'); ylabel('Amplitude');
title('RC transform chain');
legend('x(t)', 'z(t)');

% z(t) = σταθμισμένο άθροισμα μετατοπισμένων αντιγράφων
% Αυτό κάνει η Συνέλιξη (W05)!
```



z(t) = σταθμισμένο άθροισμα μετατοπισμένων αντιγράφων → Αυτό κάνει η Συνέλιξη (W05)!

Σύνοψη: Μέθοδοι Επίλυσης Α-ΣΤ

Α **Σύνθεση Βηματικών**
Δ = νέα − παλιά → $\Delta \cdot u(t-a)$

Β **Σύνθεση Ράμπας**
Αλλαγή κλίσης → $\pm r(t-a)$. Envelope.

Γ **Even/Odd**
$x_e=\frac{1}{2}[x+x(-t)]$, $x_o=\frac{1}{2}[x-x(-t)]$

Δ **Περιοδικότητα**
CT: $T_0=2\pi/\omega$, DT: $N=2\pi/\omega_0\in\mathbb{Z}$

Ε **$x(at-b)$**
ΠΡΩΤΑ shift b/a, ΜΕΤΑ scale a

ΣΤ **Πράξεις Πλάτους**
$c \cdot x$, x_1+x_2, DC, gating, AM

Σύνδεση → W05:

Σύνθεση = "χτίζω σήμα"

Συνέλιξη = "σύρω μέσα σε σύστημα"

flip + shift + multiply + integrate

→ W05 Συνέλιξη

Κάθε μέθοδος = 3 βήματα: Σχεδιάστε → Εφαρμόστε τον τύπο → Επαλήθευση με κώδικα!

Συχνά Λάθη & Αντιπαραδείγματα

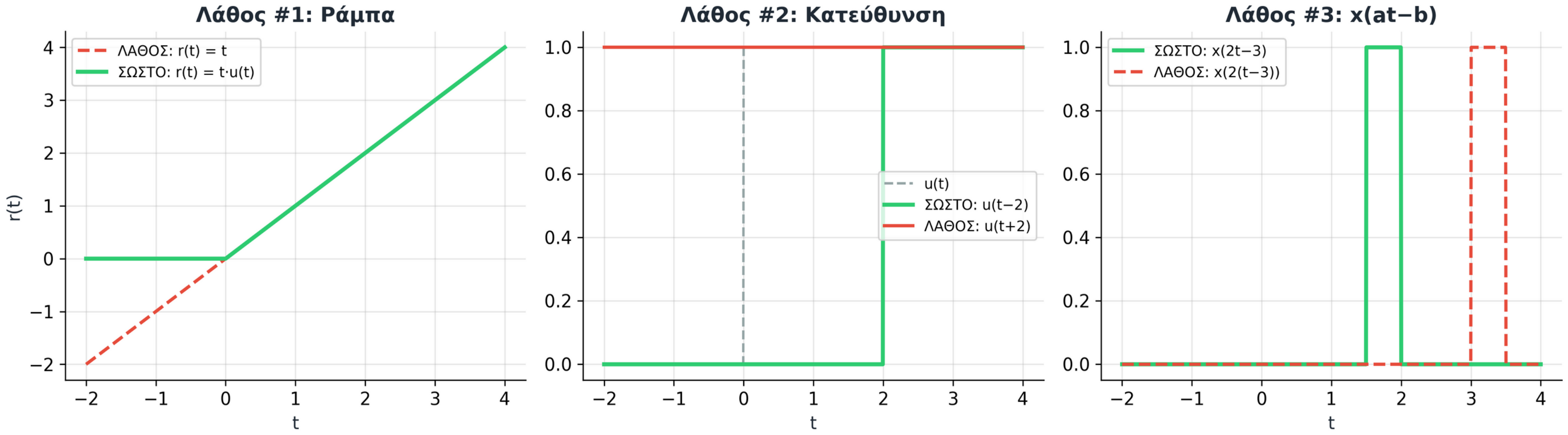
ΛΑΘΟΣ: r(t) = t   ΣΩΣΤΟ: r(t) = t·u(t)
Η ράμπα ΔΕΝ ξεκινά στο −∞ — ξεκινά στο t=0!

ΛΑΘΟΣ: x(at−b): scale πρώτα, shift μετά
ΣΩΣΤΟ: ΠΡΩΤΑ shift b/a, ΜΕΤΑ scale a
x(2t−3): shift 1.5, scale 2 → ΣΩΣΤΟ
scale 2, shift 3 → x(2t−6) ≠ x(2t−3)!

ΛΑΘΟΣ: $x_e = x + x(-t)$
ΣΩΣΤΟ: $x_e = ½[x + x(-t)]$
Το ½ διασφαλίζει ότι $x_e + x_o = x(t)$.

ΛΑΘΟΣ: sin(n) «μοιάζει» περιοδικό
ΣΩΣΤΟ: N = 2π ≈ 6.28 ∉ ℤ → ΟΧΙ!

ΛΑΘΟΣ: Gating: u(t)·u(t−T)
ΣΩΣΤΟ: Gating: u(t) − u(t−T)



5 κλασικά λάθη: ράμπα χωρίς u(t), σειρά scale/shift, ½ στο even/odd, sin(n) ≠ periodic, gating αφαίρεση ≠ γινόμενο.

Ασκήσεις για το Σπίτι (Άλυτες)

1. Κατασκευάστε piecewise σήμα:
   $x(t) = 2$ για $0 \le t < 1$, $x(t) = -1$ για $1 \le t < 3$, $x(t) = 3$ για $t \ge 3$.
   Γράψτε ως Σ βηματικών. Επαλήθευσε με Octave.

2. Αποσυνθέστε σε even/odd:
   $x(t) = t \cdot e^{(-2t)} \cdot u(t)$
   Βρείτε $x_e(t)$, $x_o(t)$. Σχεδιάστε και τα τρία.
   Χρησιμοποιήστε τον αλγόριθμο 3 βημάτων.

3. Ελέγξτε περιοδικότητα:
   α) CT: $x(t) = \sin(3t) + \cos(5t) \rightarrow T_0=$;
   β) DT: $x[n] = \cos(\pi n/4) + \sin(\pi n/6) \rightarrow N=$;
   γ) DT: $x[n] = \cos(n) \rightarrow$ Περιοδικό;

4. Μετασχηματισμός:
   Για $x(t) = u(t)-u(t-3)$, σχεδιάστε:
   $x(t-2)$, $x(-t)$, $x(2t-1)$, $x(0.5t+1)$.
   Verify κάθε βήμα με Octave.

Ανακεφαλαίωση Εβδομάδας 4

Piecewise Σύνθεση
u(t) → αλλαγή στάθμης | r(t) → αλλαγή κλίσης

Gating
$x(t)\cdot[u(t-a)-u(t-b)]$ = σήμα σε παράθυρο

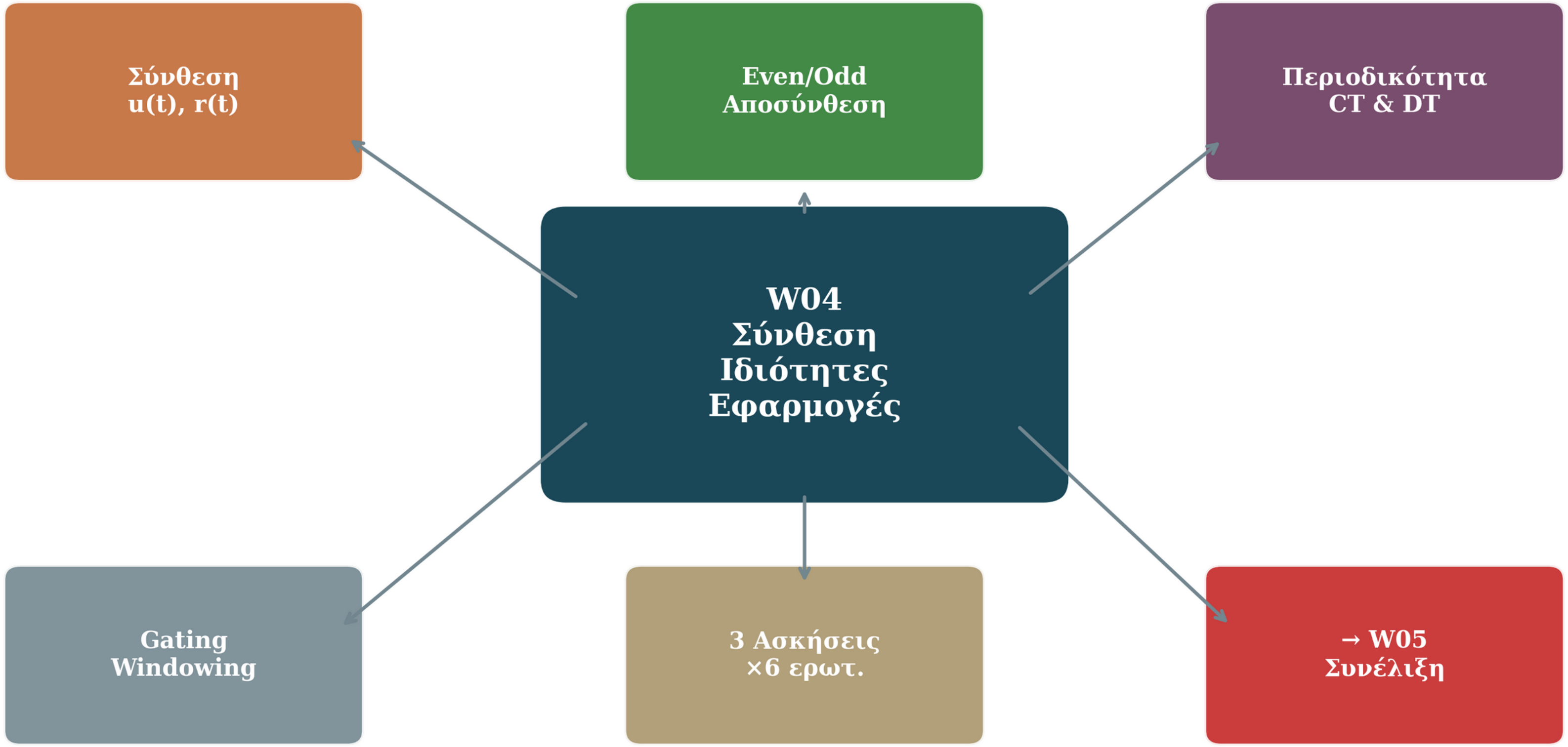
Even/Odd
$x_e=\frac{1}{2}[x+x(-t)]$ | $x_o=\frac{1}{2}[x-x(-t)]$
Test: $\max|x-x(-t)| \approx 0$ → even

Περιοδικότητα
CT: $T_0=2\pi/\omega$ (πάντα) | DT: $N=2\pi/\omega_0 \in \mathbb{Z}$

Μετασχηματισμοί
x(at−b): ΠΡΩΤΑ shift b/a, ΜΕΤΑ scale a

Πράξεις Πλάτους
$c\cdot x$, x_1+x_2, DC offset, gating, AM

Εβδομάδα 5: Συνέλιξη — flip+shift+multiply+integrate



Σύνθεση + Ιδιότητες + Εφαρμογές = η εργαλειοθήκη για W05 Συνέλιξη.

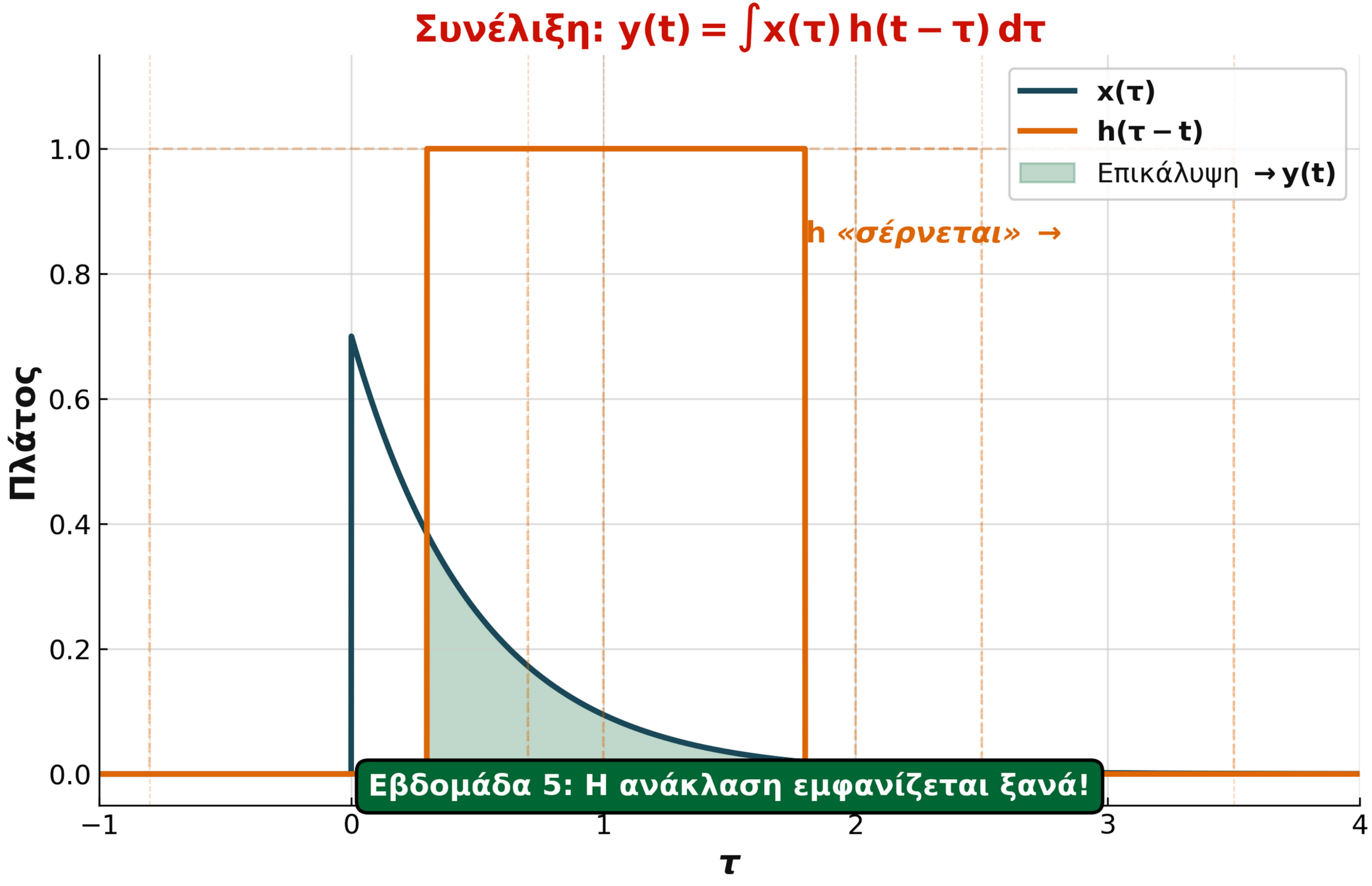
Τι Έρχεται: Roadmap

Εβδομάδα 5: Συνέλιξη (Convolution)
→ Η βασική πράξη των LTI συστημάτων
→ h(t) * x(t): «σύρω το σήμα μέσα από σύστημα»

Εβδομάδα 6: Σειρές Fourier
→ Ανάλυση σήματος σε ημιτονικές συνιστώσες
→ Even/Odd shortcuts (αυτά που μάθαμε σήμερα!)
→ Ενέργεια/Ισχύς crash course

Εβδομάδα 7: Μετασχ. Fourier
→ Φασματική ανάλυση, AM πλήρης, fft/ifft

Συνέλιξη:
$y(t) = \int x(\tau) \cdot h(t-\tau)\, d\tau$
= flip h → shift → multiply → integrate
= ΑΚΡΙΒΩΣ ό,τι μάθαμε σε W03+W04!



W05 Συνέλιξη = flip + shift + multiply + integrate → βασίζόμαστε στην γνώση από W03 και W04!

Αναφορές & Links

[1] Oppenheim & Willsky
Signals and Systems, 2nd ed., Prentice Hall, 1997.
Κεφ. 1: Σήματα & Ιδιότητες.

[2] Μ. Παρασκευάς
Σήματα & Συστήματα με MATLAB/Octave, 3η Εκδ. (Τζιόλα, 2022)
Εύδοξος: 68402690

[3] Ν. Ασημάκης & Μ. Αδάμ
Σήματα και Συστήματα (Κάλλιπος, 2015) — ΔΩΡΕΑΝ
openbook.gr/simata-systimata

[4] GNU Octave
https://docs.octave.org/latest/

[5] Μαριάς & Χατζάκη
Σημειώσεις Μαθήματος, ΕΛΜΕΠΑ 2021

Μιγαδικό Εκθετικό: Τι Είναι & Γιατί μας Χρειάζεται

Πρόβλημα: Πώς περιγράφουμε ταλάντωση που «σβήνει»;

Ξέρουμε ήδη:

- sin(ωt) = ταλάντωση (σταθερό πλάτος, για πάντα)
- e^{-t}/τ = εκθετική απόσβεση (μειώνεται, χωρίς ταλάντωση)
- **$e^{-t}/\tau \cdot \sin(\omega t)$ = αποσβένον ημίτονο (ταλάντωση που σβήνει)**

Η μαθηματική ενοποίηση — μιγαδικό εκθετικό:

Ορίζουμε **s = σ + jω** (μιγαδικός αριθμός, j = √(−1))

Τότε: $e^{st} = e^{\sigma t} \cdot e^{j\omega t} = e^{\sigma t} \cdot [\cos(\omega t) + j\cdot\sin(\omega t)]$

Δηλαδή e^{st} ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΚΑΙ απόσβεση ΚΑΙ ταλάντωση σε ΜΙΑ έκφραση!

Τι ελέγχει ο σ (πραγματικό μέρος);

- σ < 0 → πλάτος μειώνεται → ΑΠΟΣΒΕΣΗ (φυσικό: χορδή, RC κύκλωμα)
- σ = 0 → πλάτος σταθερό → ΜΟΝΙΜΗ ταλάντωση (ιδανικό)
- **σ > 0 → πλάτος αυξάνεται → ΑΣΤΑΘΕΙΑ (πρόβλημα!)**

Γιατί μας χρειάζεται; Στο W09 (Laplace), ΟΛΟΙ οι μετασχηματισμοί χρησιμοποιούν τη μεταβλητή **s**. Η θέση του **s** στο μιγαδικό επίπεδο **μας λέει αν ένα σύστημα είναι ευσταθές ή ασταθές!**

e^{st} με s = σ+jω: ενοποιεί απόσβεση (σ) + ταλάντωση (ω) σε μία έκφραση. Βάση του Laplace (W09).

ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Παράρτημα: Αποσβένον Ημίτονο: Από Φυσική σε Μιγαδικό Εκθετικό

Τι συμβαίνει όταν ένα ημίτονο «σβήνει»;

Στη φύση, καμία ταλάντωση δεν κρατάει για πάντα.
Μια χορδή κιθάρας, ένα κύκλωμα RC, ένα ελατήριο,
όλα χάνουν ενέργεια. Το πλάτος μειώνεται εκθετικά:

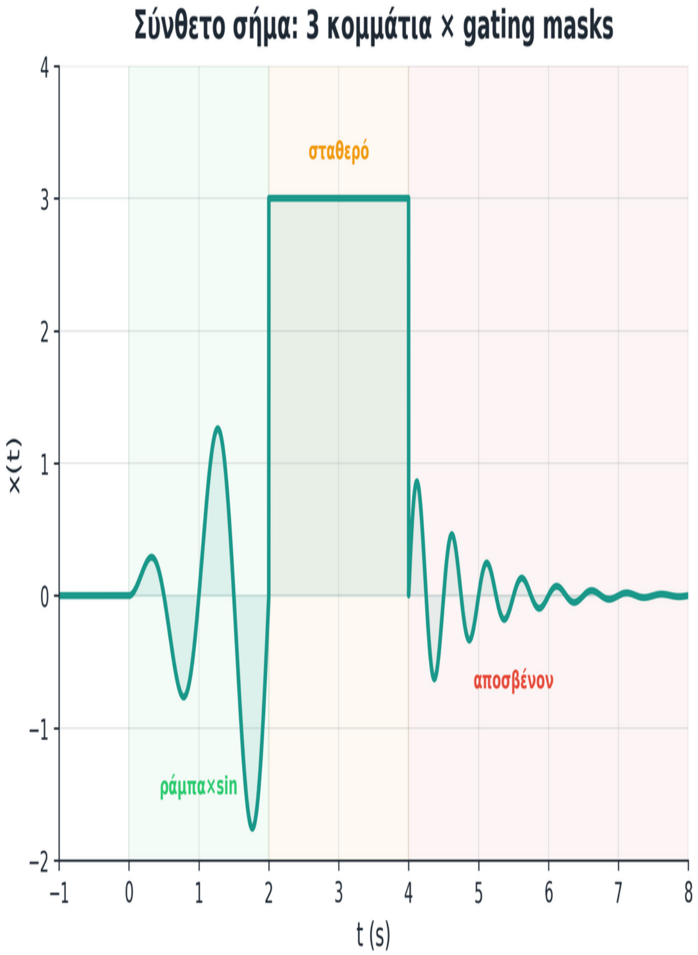
$$x(t) = e^{(-t/\tau)} \cdot \sin(2\pi f_0 t) \cdot u(t)$$

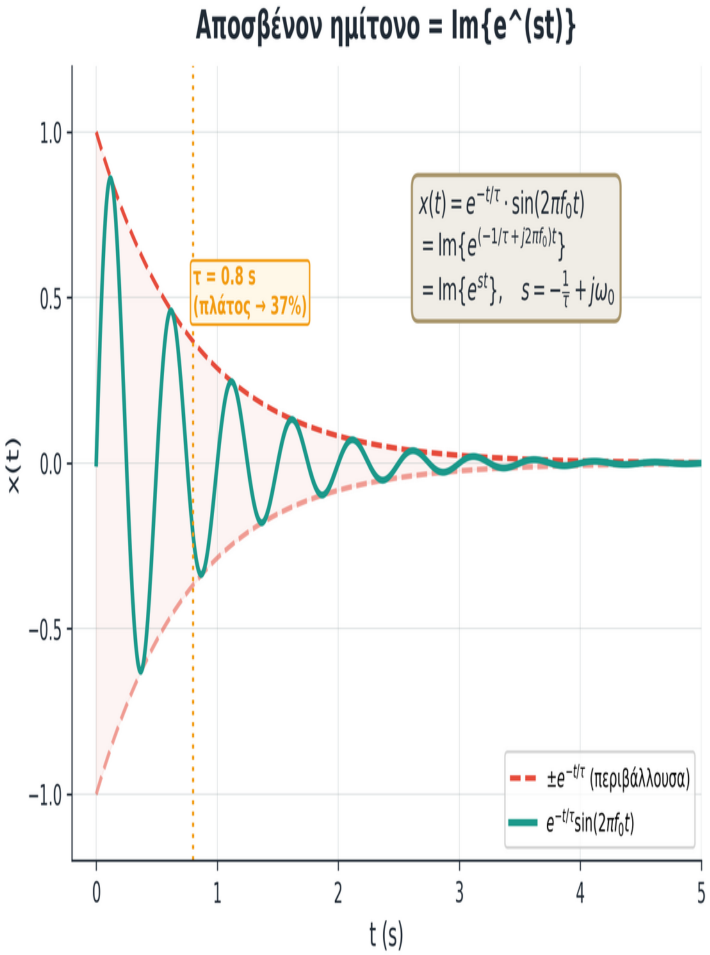
Η εκθετική e^(−t/τ) λειτουργεί ως περιβάλλουσα:
δεν αλλάζει τη συχνότητα, μόνο «σφίγγει» το πλάτος.

Η μαθηματική σύνδεση — μιγαδικό εκθετικό:
e^(st), όπου $s = -1/\tau + j\omega_0$
Το φανταστικό μέρος Im{e^(st)} δίνει ακριβώς
το αποσβένον ημίτονο!

Αυτό θα γίνει κεντρικό εργαλείο στο W09 (Laplace):
$s = \sigma + j\omega$ → $\sigma < 0$ = απόσβεση
$\sigma = 0$ = μόνιμη ταλάντωση
$\sigma > 0$ = αστάθεια!

Παράμετρος τ: στο t = τ, πλάτος → 37% (1/e).
Μικρό τ = γρήγορη απόσβεση (overdamped).
Μεγάλο τ = αργή απόσβεση (underdamped).

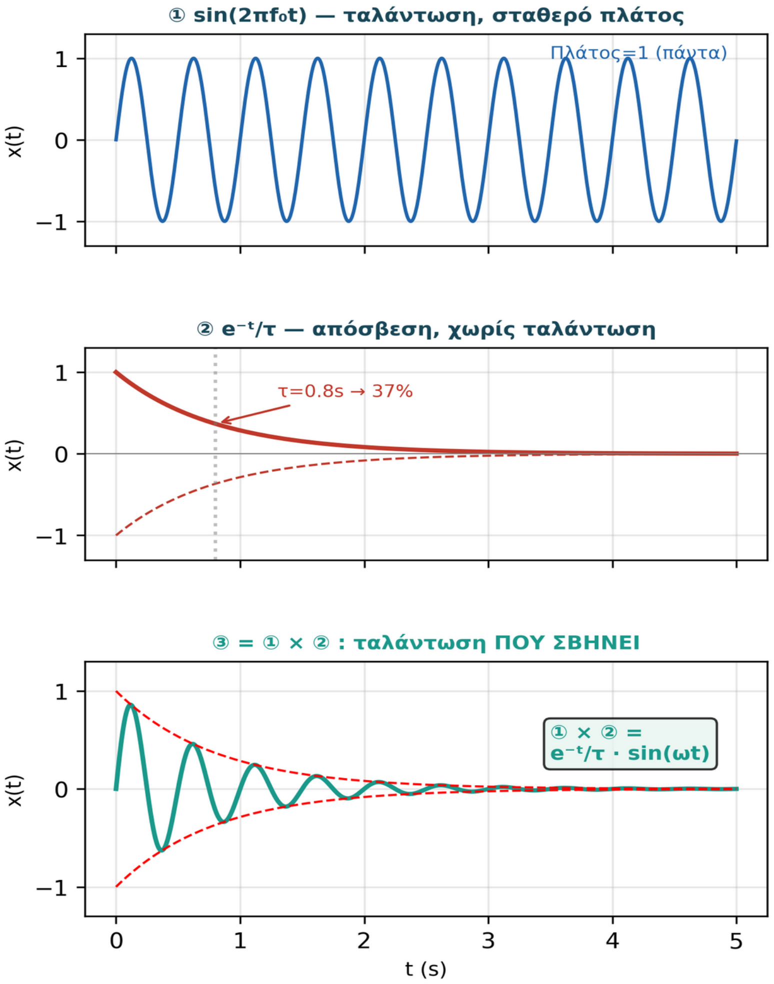


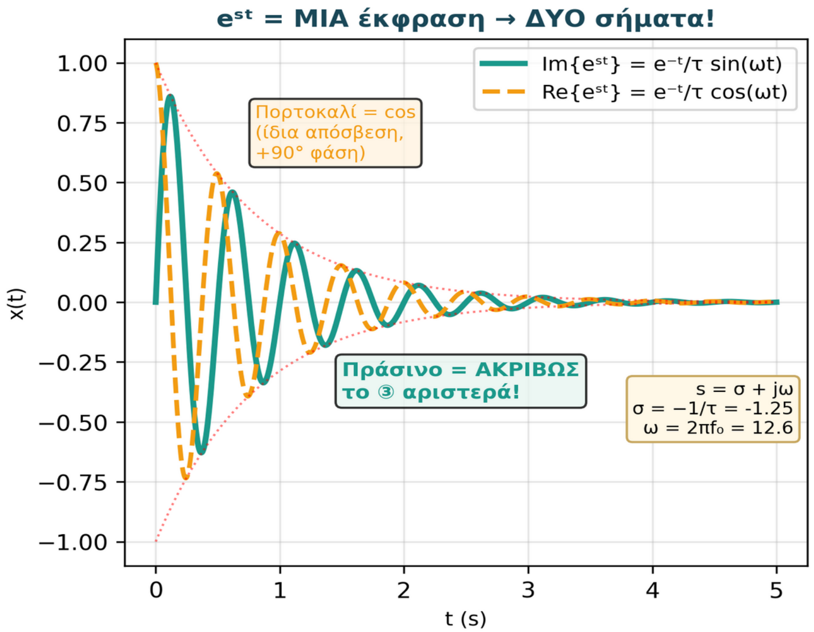


Αποσβένον ημίτονο = Im{e^(st)} με s μιγαδικό. Η περιβάλλουσα e^(−t/τ) ελέγχει πόσο γρήγορα «σβήνει».

Κώδικας: Αποσβένον Ημίτονο & Μιγαδικό Εκθετικό

```
clear; close all; clc;
% === Αποσβένον Ημίτονο: e^(-t/τ)·sin(2πf0t)·u(t) ===
tau = 0.8;                  % χρόνος απόσβεσης (s)
f0 = 2;                     % συχνότητα ταλάντωσης
(Hz)
t = 0:0.001:5;              % χρονικός άξονας

env = exp(-t/tau);          % περιβάλλουσα
x = env .* sin(2*pi*f0*t); % αποσβένον ημίτονο

% s = σ + jω, όπου σ = -1/τ, ω = 2πf0
sigma = -1/tau;
omega = 2*pi*f0;
s = sigma + 1j*omega;
z = exp(s*t);               % μιγαδικό εκθετικό

figure;
subplot(1,2,1);
plot(t, x, 'LineWidth', 2); hold on;
plot(t, env, 'r--', t, -env, 'r--');
xlabel('t (s)'); ylabel('x(t)');
title('Αποσβένον ημίτονο');
legend('x(t)', '+env(t)', '-env(t)');
grid on;

subplot(1,2,2);
plot(t, imag(z), 'LineWidth', 2); hold on;
plot(t, real(z), '--', 'Color', [0.9 0.6 0]);
xlabel('t (s)'); title('Im\{e^{st}\}');
legend('Im(e^{st})', 'Re(e^{st})');
grid on;
```





Euler: $e^{st} = e^{(\sigma t)} \cdot [\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)]$

$Re\{e^{st}\} = e^{(\sigma t)} \cdot \cos(\omega t)$ ← πορτοκαλί
$Im\{e^{st}\} = e^{(\sigma t)} \cdot \sin(\omega t)$ ← πράσινο = το φυσικό σήμα!

Γιατί χρειάζεται; Στο Laplace (W09): $H(s) \cdot e^{st} = H(s) \cdot e^{st}$
→ e^{st} είναι eigenfunction! Ένα σύστημα LTI «βλέπει» μόνο e^{st}.

Im{e^(st)} με s = σ+jω: σ<0 = απόσβεση, σ=0 = μόνιμη, σ>0 = αστάθεια. Το W09 (Laplace) βασίζεται σε αυτό!