

Σήματα και Συστήματα

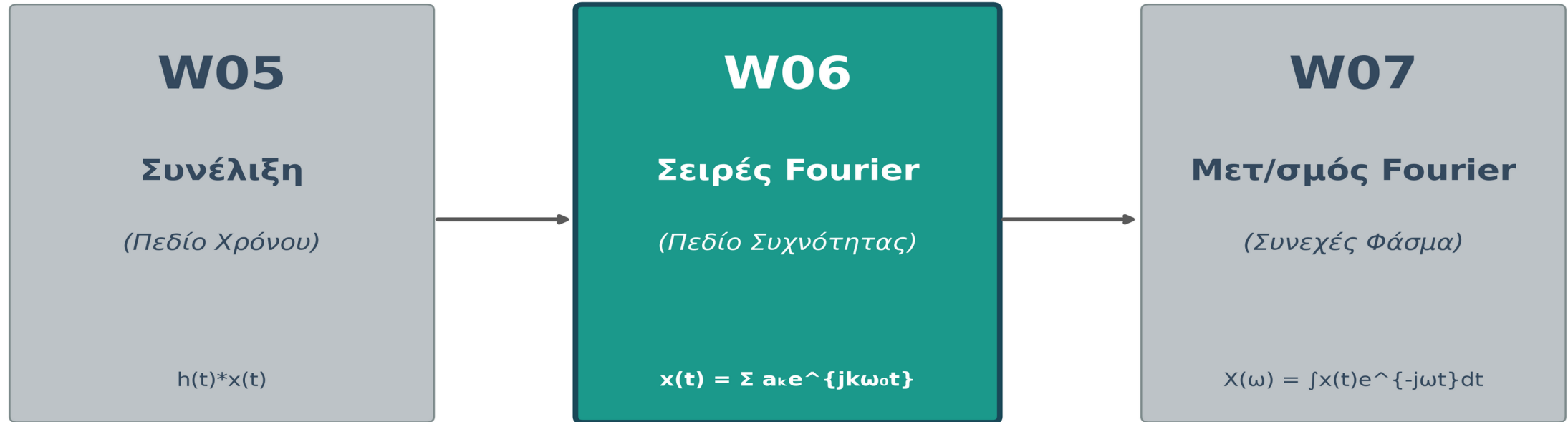
Εβδομάδα 6: Σειρές Fourier · Από χρόνο σε συχνότητα

Ιωάννης Στεφανής

(εκπαιδευτικό υλικό για το εργαστηριακό μάθημα)

4.004 | ΕΛΜΕΠΑ ΗΜΜΥ | Εαρινό 2025-26

▼ ΣΗΜΕΡΑ



Στην W05 μάθαμε να μετατρέπουμε σήμα μέσω συστήματος (συνέλιξη). Σήμερα W06: ίδιο σήμα · διαφορετική περιγραφή. Στο W07 περνάμε σε aperiodic σήματα με Fourier Transform.

ΓΕΦΥΡΑ μάθηματος:

W03 (κατηγοριοποίηση σημάτων: συμμετρίες, ενέργεια, περιοδικότητα) → W04 (LTI σύστημα $y=h*x$, κρουστική $h(t)$) → W05 (πλήρης συνέλιξη και RC) →

W06 σήμερα:

περιοδικά σήματα $x(t)$ ως άθροισμα αρμονικών $e^{j\omega_0 t}$. Επόμενη: W07 → ίδιο εργαλείο σε aperiodic σήματα (CFT).

	Σήμα x στον χρόνο	Φάσμα X στη συχνότητα	Παράδειγμα	Εβδομάδα
FS (Σειρά Fourier)	συνεχές + ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ $x(t)$, περίοδος T_0	ΔΙΑΚΡΙΤΟ + άπειρο a_k στα $k \cdot f_0$	τετραγωνικό κύμα RC pulse train	W06 (σήμερα)
CFT / FT (Continuous FT)	συνεχές + APERIODIC $x(t)$, $-\infty < t < \infty$	ΣΥΝΕΧΕΣ $X(\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$	μονός παλμός $\text{rect}(t/\tau) \rightarrow \text{sinc}$	W07
DTFT (Discrete-Time FT)	ΔΙΑΚΡΙΤΟ + aperiodic $x[n]$, n ακέραιος	συνεχές + ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ $X(e^{j\omega})$, 2π περιοδικό	discrete pulse $x[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$	(προαιρετικό)
DFT / FFT (Discrete Fourier T.)	ΔΙΑΚΡΙΤΟ + ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ $x[n]$, $n=0..N-1$	ΔΙΑΚΡΙΤΟ + ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ $X[k]$, $k=0..N-1$	sampled audio fft(y) σε Octave	W08

ΚΑΝΟΝΑΣ: ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ \leftrightarrow ΔΙΑΚΡΙΤΟ · APERIODIC \leftrightarrow ΣΥΝΕΧΕΣ (μεταξύ χρόνου και συχνότητας)

W06 = FS: ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ σήμα $x(t)$ στον χρόνο \rightarrow ΔΙΑΚΡΙΤΟ φάσμα a_k στα $k \cdot f_0$.

Ιστορικό (1822): ο Joseph Fourier ανακάλυψε αυτή τη σύνθεση επιλύοντας τη heat equation · partial differential equation θερμότητας σε στερεό. Δηλ. η FS γεννήθηκε από φυσικό πρόβλημα, όχι από επεξεργασία σημάτων.

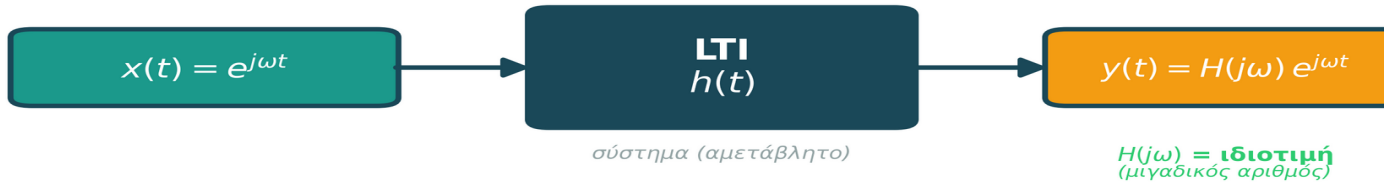
Σήμερα: audio compression (MP3), MRI, climate modeling.

Eigenfunction property · η αιτιολογία πίσω από όλη τη συχνοτική ανάλυση

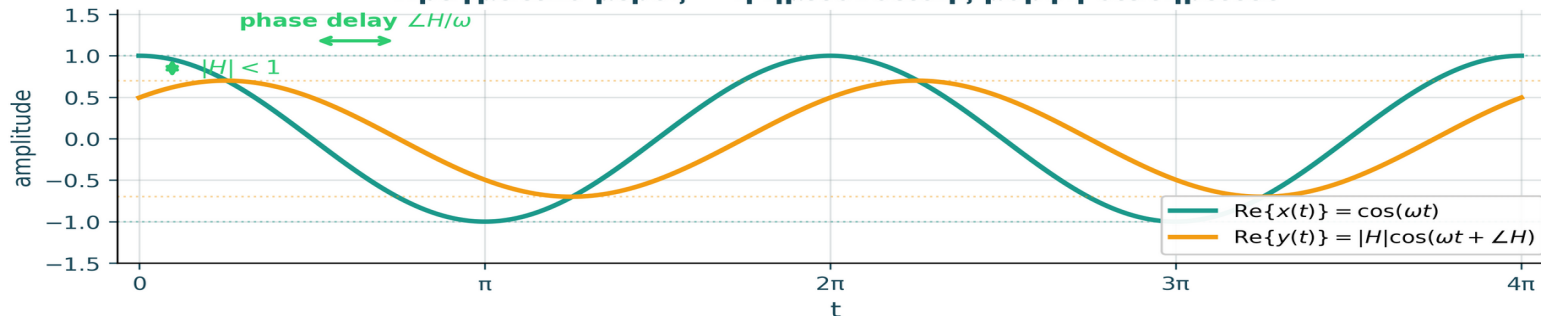
- ΤΙ: εισάγουμε $e^{j\omega t}$ σε LTI \rightarrow έξοδος = $H(j\omega) \cdot e^{j\omega t}$. Ίδια μορφή, αλλαγμένο πλάτος/φάση. Το $H(j\omega)$ λέγεται απόκριση συχνότητας.
- ΠΩΣ: αν $x(t) = \sum a_k \cdot e^{j k \omega_0 t}$ (Σειρά Fourier), τότε αμέσως $y(t) = \sum a_k \cdot H(j k \omega_0) \cdot e^{j k \omega_0 t}$. Κάθε αρμονική περνάει ανεξάρτητα.
- ΓΙΑΤΙ είναι θεμελιώδες: η συνέλιξη $y = h * x$ στον χρόνο γίνεται ΑΠΛΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$ στη συχνότητα. Διαλέγουμε ημίτονα ως φυσικά building blocks γι' αυτό ακριβώς.

Eigenfunction property

ίδια μορφή στην έξοδο — μόνο πλάτος/φάση αλλάζει



Πραγματικό μέρος — η ημιτονοειδής μορφή διατηρείται



Πρακτική σημασία:

- κάθε αρμονική «βλέπει» μόνο το $H(j\omega)$ στη ΔΙΚΗ της συχνότητα
- κανένα cross-talk μεταξύ αρμονικών σε LTI
- gain $|H|$ και phase $\angle H$ είναι αρκετά
- ΣΥΝΔΕΣΗ W05: $y = h * x \Rightarrow Y = H \cdot X$
- ΣΥΝΔΕΣΗ W07: ίδιο σε συνεχές φάσμα

Ιστορικό (1822):

- Joseph Fourier ανακάλυψε αυτή τη σύνθεση επιλύοντας τη συνάρτηση θερμότητας (PDE θερμότητας).

Συμπέρασμα:

η FS μετατρέπει συνέλιξη σε πολλαπλασιασμό. Γι' αυτό η συχνοτική ανάλυση είναι το πιο φυσικό εργαλείο για LTI συστήματα · εξετάζουμε ΜΙΑ συχνότητα τη φορά, και κάθε αρμονική είναι ανεξάρτητη.

Πρώτη έννοια Fourier: DC = μέση τιμή

DC = σταθερή συνιστώσα
= μέση τιμή σήματος στον χρόνο

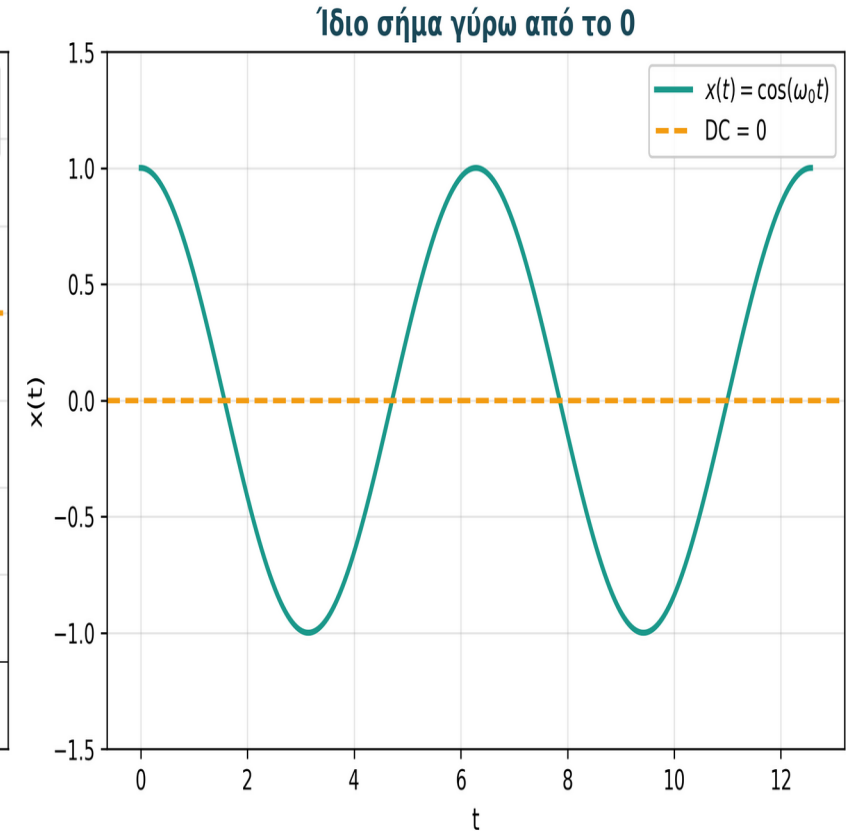
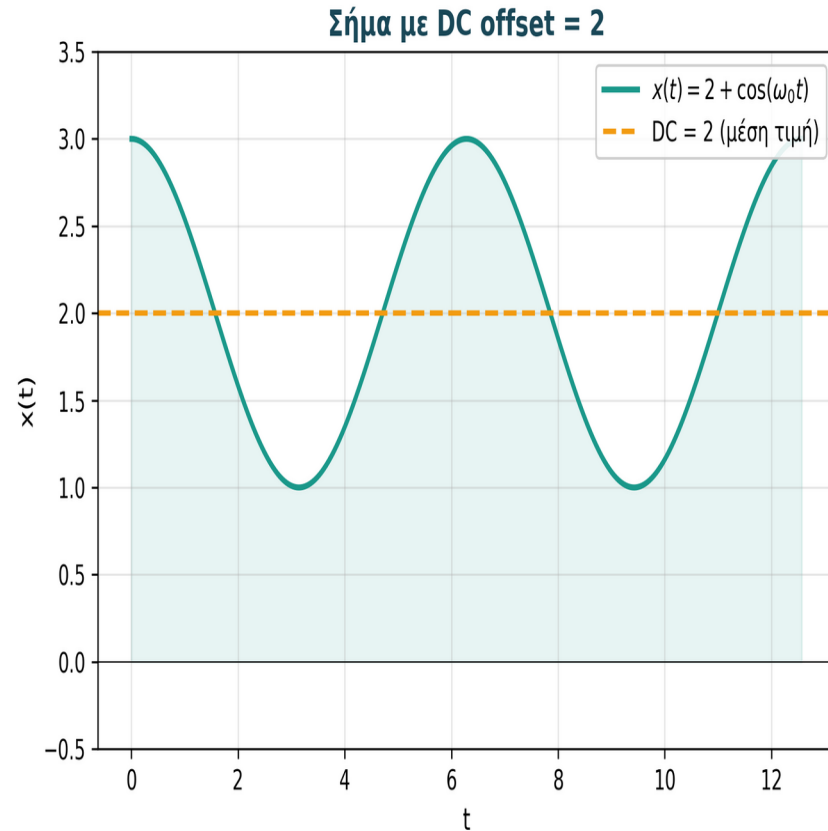
Τύπος:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

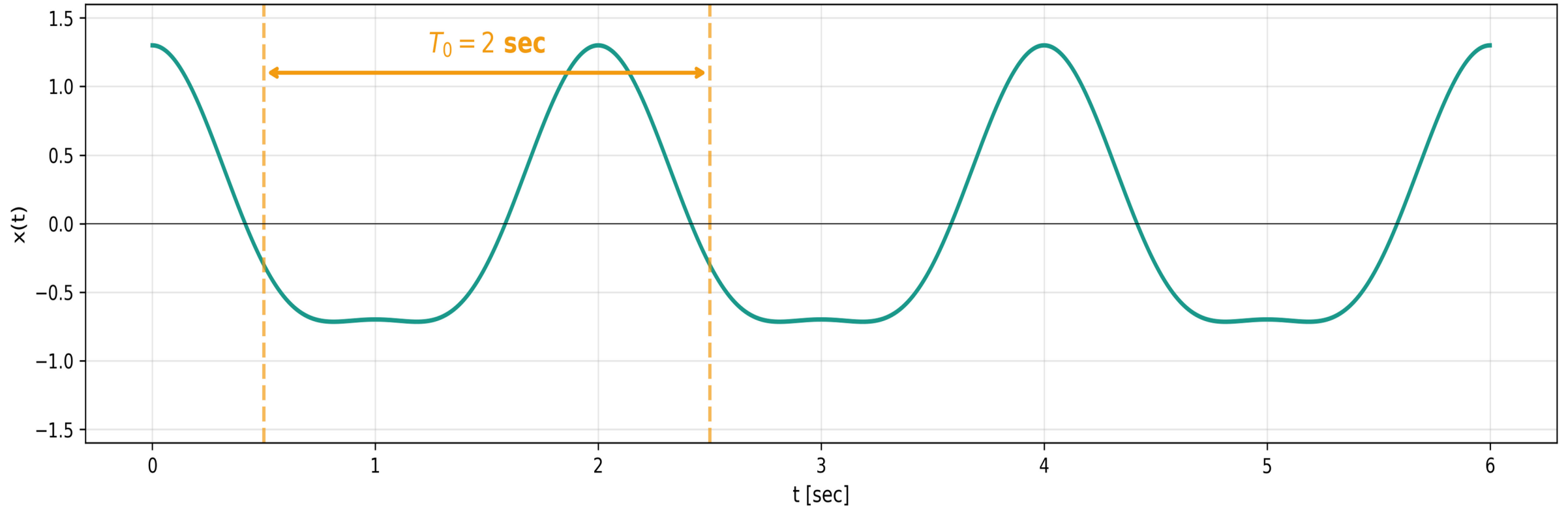
Παραδείγματα:

- $x(t) = 2 + \cos(\omega_0 t)$
→ DC = 2
- $x(t) = \cos(\omega_0 t)$
→ DC = 0

Στην FS: DC = αρμονική $k=0$



DC = μέση τιμή σήματος μέσα σε μία περίοδο · ΟΧΙ "συνεχές".
 ΓΙΑΤΙ μηδενίζονται sin/cos: το ολοκλήρωμά τους πάνω σε μια περίοδο = 0.
 ΠΟΥ: αν $a_0 = 0$, το σήμα ταλαντώνεται γύρω από το 0 · δεν είναι μηδέν.

Περίοδος T_0 : η μικρότερη επανάληψη του σήματος

$$T_0 = \text{περίοδος [sec]} \quad \bullet \quad f_0 = 1/T_0 \text{ [Hz]} \quad \bullet \quad \omega_0 = 2\pi \cdot f_0 = 2\pi/T_0 \text{ [rad/sec]}$$

$$\text{Παράδειγμα: } T_0 = 2 \text{ sec} \rightarrow f_0 = 0.5 \text{ Hz} \rightarrow \omega_0 = \pi \text{ rad/sec}$$

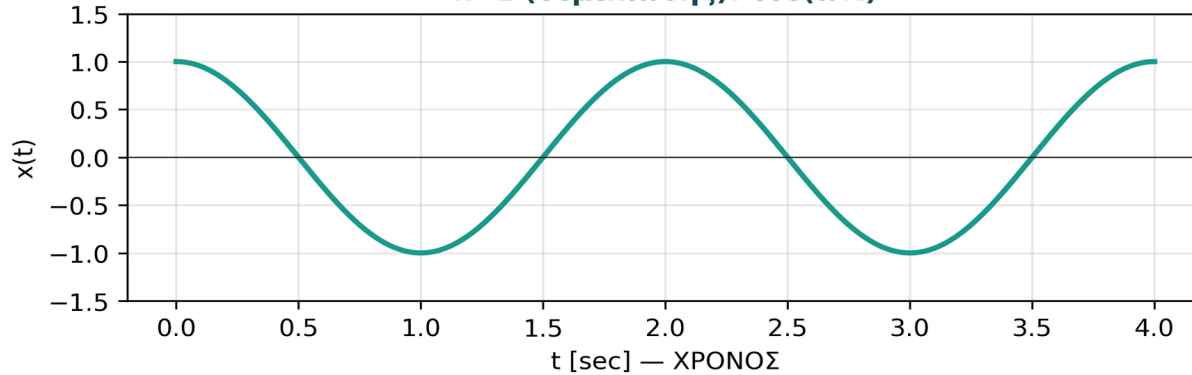
Τρεις διαφορετικοί τρόποι περιγραφής · όχι τρεις διαφορετικές έννοιες.
 Οι ηλεκτρολόγοι χρησιμοποιούν Hz, οι μαθηματικοί ω , οι φυσικοί T_0 .
 ΠΟΤΕ $\omega_0=1$: όταν $T_0=2\pi$ · βολική σύμβαση εδώ για απλούστερους τύπους.

Αρμονικές: ακέραια πολλαπλάσια του f_0

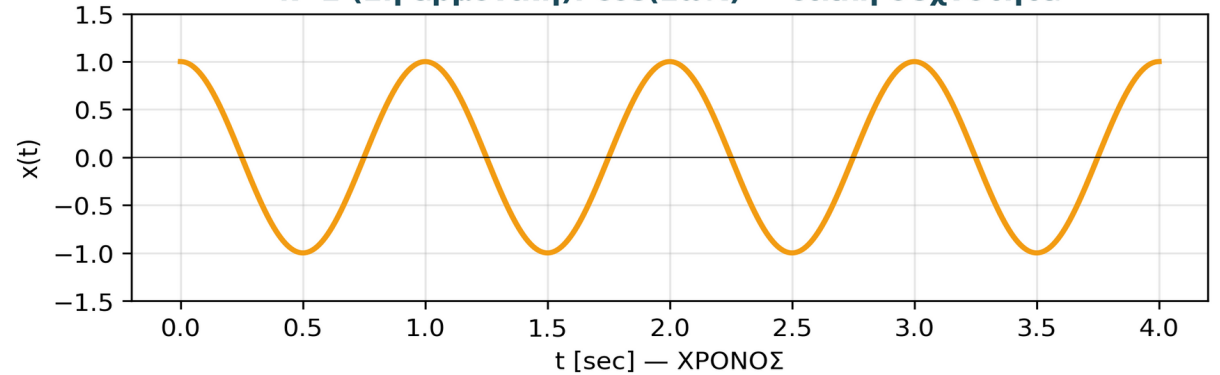
k -στή αρμονική: $x_k(t) = A_k \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t + \varphi_k)$ · $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (ΑΚΕΡΑΙΟΙ μόνο)

Αρμονικές = ακέραια πολλαπλάσια του f_0 · 4 αναπαραστάσεις

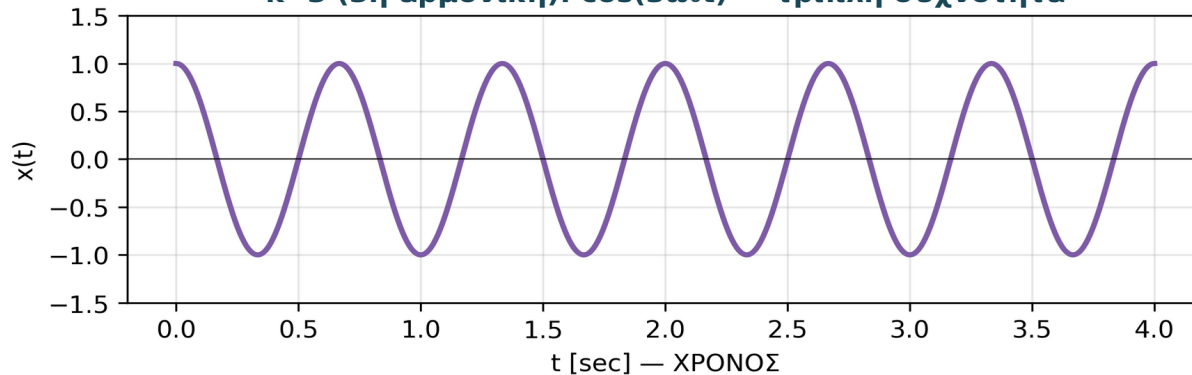
$k=1$ (θεμελιώδης): $\cos(\omega_0 t)$



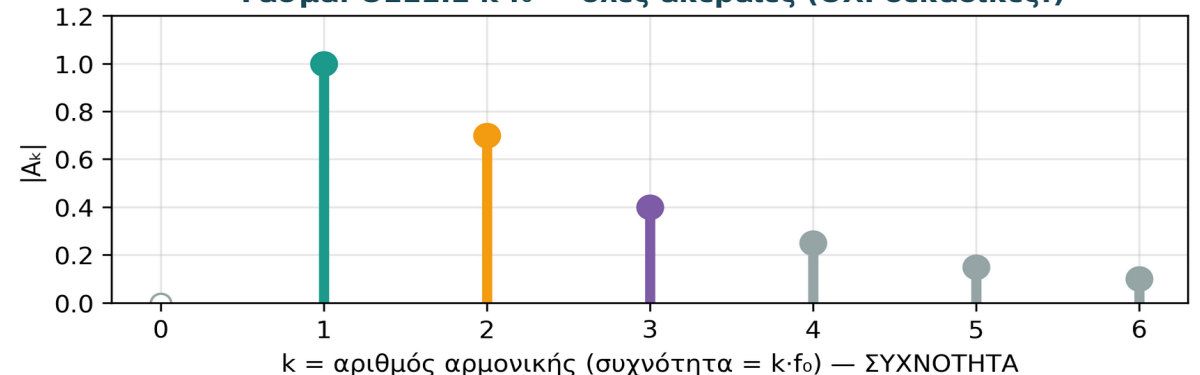
$k=2$ (2η αρμονική): $\cos(2\omega_0 t)$ — διπλή συχνότητα



$k=3$ (3η αρμονική): $\cos(3\omega_0 t)$ — τριπλή συχνότητα



Φάσμα: ΘΕΣΕΙΣ $k \cdot f_0$ — όλες ακέραιες (ΟΧΙ δεκαδικές!)

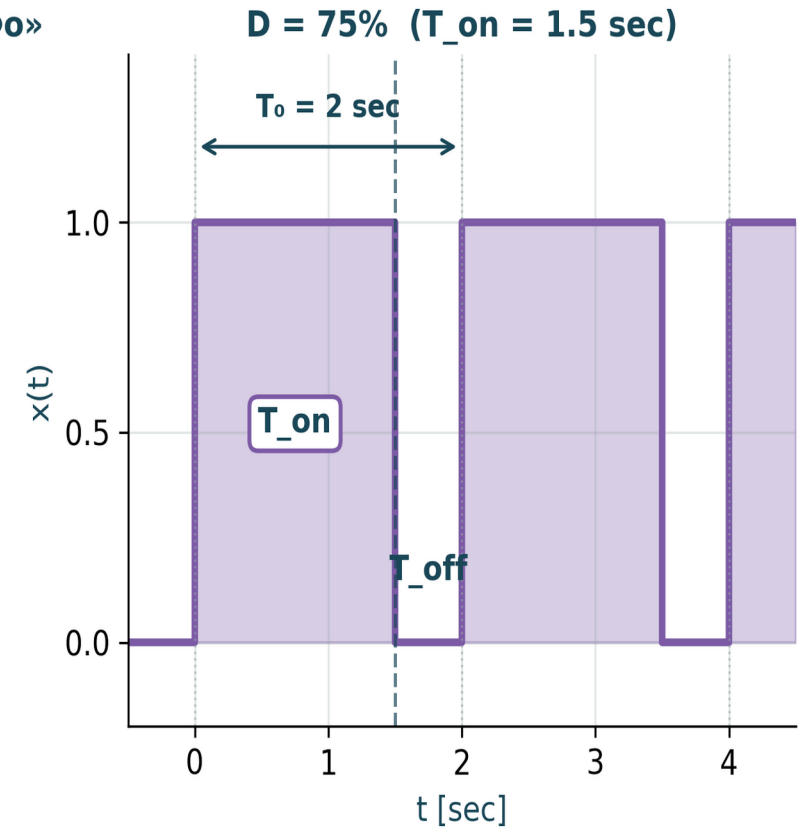
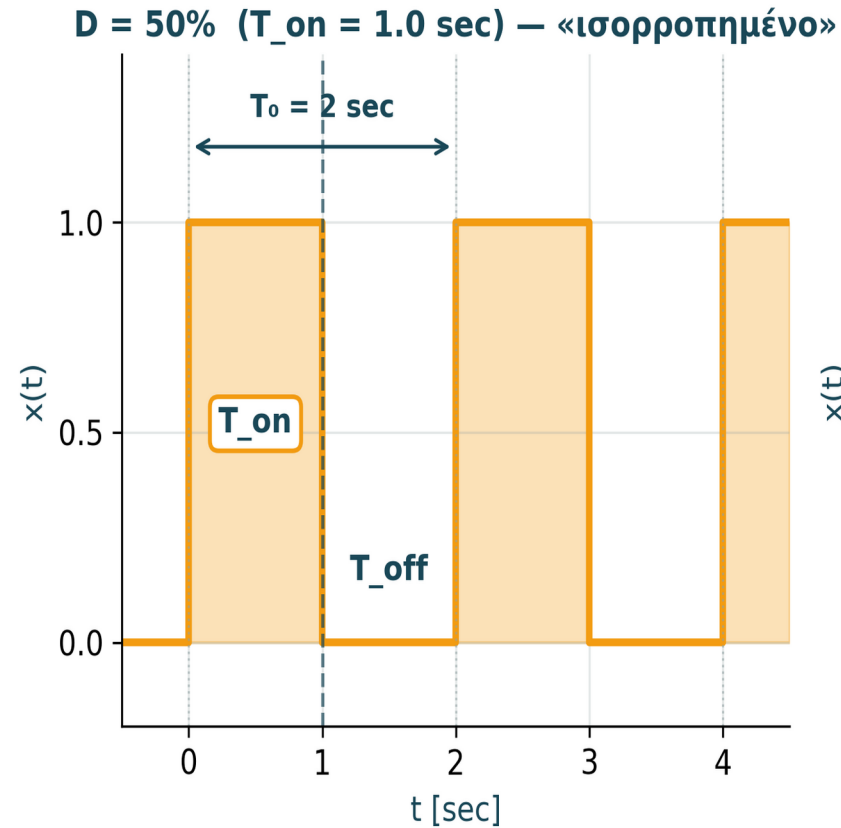
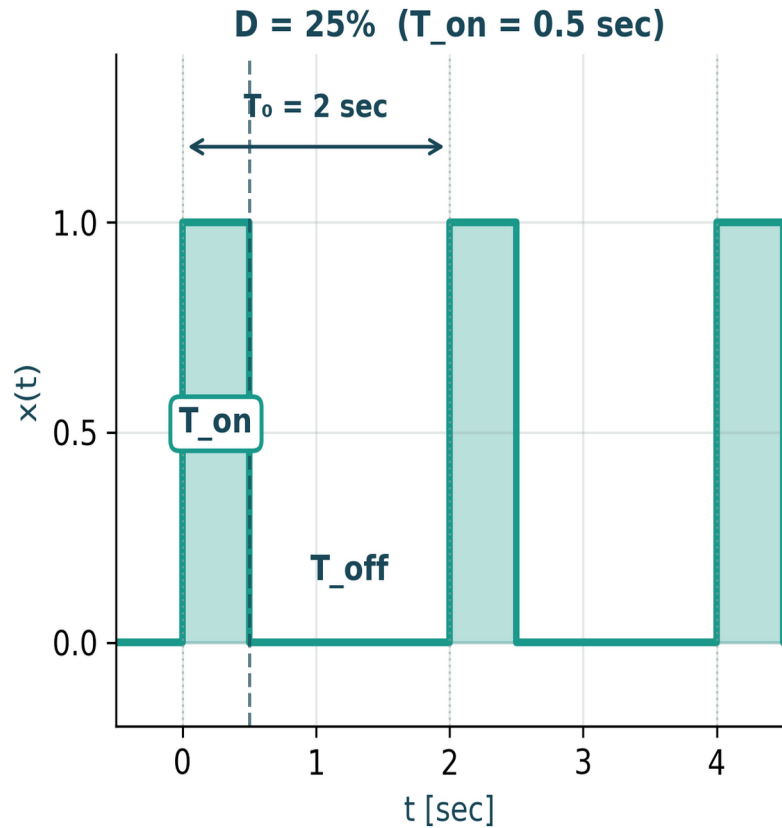


4 panels: $\cos(\omega_0 t)$, $\cos(2\omega_0 t)$, $\cos(3\omega_0 t)$ στον χρόνο · stems φάσματος στο $k=0, 1, \dots, 6$.

ΓΙΑΤΙ ακέραια k : το σήμα είναι περιοδικό (FS) · **μόνο ακέραια πολλαπλάσια του f_0** .

Στο εργαστήριο: η T_0 ΔΙΝΕΤΑΙ. Οι αρμονικές μετρώνται ως $k \cdot f_0$ με $k = 0, 1, 2, \dots$ και ΔΕΝ αλλάζουμε T_0 στη μέση της άσκησης.

Duty cycle D · Ορισμός & ορολογία (απαραίτητο για τους ορθογώνιους παλμούς)



ΟΡΙΣΜΟΣ: $D = T_{on} / T_0 =$ ποσοστό περιόδου που το σήμα είναι στην «υψηλή» τιμή (συνήθως 1).

ΟΡΟΛΟΓΙΑ: $T_{on} =$ «duration» στην υψηλή τιμή · $T_{off} = T_0 - T_{on}$ · D εκφράζεται συχνά ως %.

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΤΙΜΕΣ: D = 50% (square wave «ισορροπημένο») · D = 1/3 (33.3%, αραιό) · D = 25% (πολύ αραιό).

ΓΙΑΤΙ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Το D καθορίζει ΠΟΙΕΣ αρμονικές μηδενίζονται. Στο D=50% π.χ. ΟΛΕΣ οι άρτιες είναι μηδέν (θα το δούμε αμέσως μετά)!

ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ: «D=50%» \neq «μηδενική μέση τιμή» · η μέση τιμή = $D \cdot 1 = 0.5$, όχι 0. Για μηδενική μέση χρειαζόμαστε bipolar (-1 / +1).

ΟΡΙΟ $D \rightarrow 0$ (W08 bridge): $T_{on} \rightarrow 0$ με σταθερό εμβαδόν $A \cdot T_{on} \Rightarrow$ ακολουθία impulses (Dirac comb) · βασικό για sampling.

Ορισμός:

$$D = T_{\text{on}} / T_0 \text{ (ο λόγος του χρόνου που το σήμα είναι ON προς την περίοδο)} \cdot D \in [0, 1] \cdot D\% = 100 \cdot D$$

Εκφώνηση:

Δίνεται περιοδική παλμοσειρά στον ΧΡΟΝΟ με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Πλάτος (amplitude): $A = 2$
- Διάρκεια ON: $T_{\text{on}} = 1 \text{ sec}$
- Περίοδος: $T_0 = 4 \text{ sec} \rightarrow \text{Duty cycle } D = T_{\text{on}}/T_0 = 1/4 = 25\%$

Να υπολογιστούν αναλυτικά οι συντελεστές Fourier a_0 (DC) και a_k ($k=1,2,3,\dots$) της εκθετικής FS.

Λύση • Βήμα 1: a_0 (DC)

$$a_0 = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot dt = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_{\text{on}}} A \cdot dt = A \cdot (T_{\text{on}}/T_0) = A \cdot D$$

$$\text{Αντικατάσταση: } a_0 = 2 \cdot 0.25 = 0.5$$

Το DC = πλάτος × duty cycle. Διαισθητικά: η μέση τιμή = το ύψος του παλμού × ο χρόνος που είναι ON.

ΓΙΑΤΙ ισχύει: το ολοκλήρωμα του $x(t)$ σε μία περίοδο = $A \cdot T_{\text{on}}$ (εμβαδόν παλμού).

ΕΠΟΜΕΝΟ slide: αναλυτικός υπολογισμός των a_k για $k \geq 1$ + plot φάσματος.

sinc · ορισμός, ιδιότητες & envelope φάσματος ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ παλμού

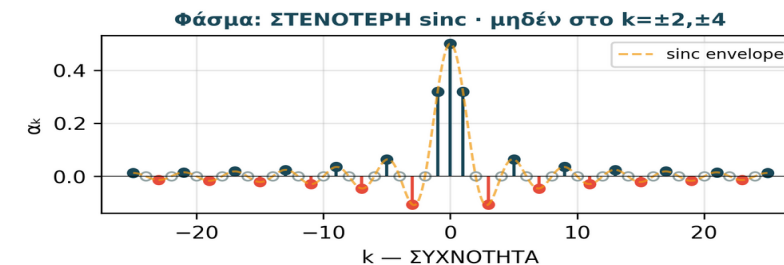
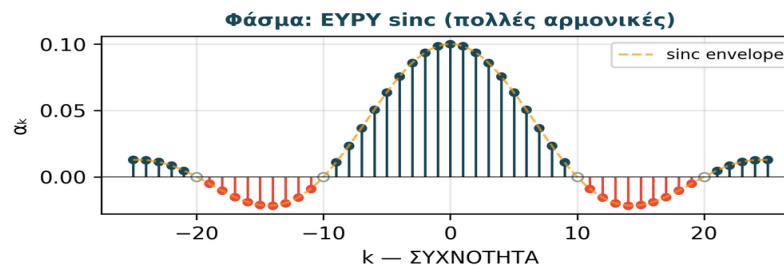
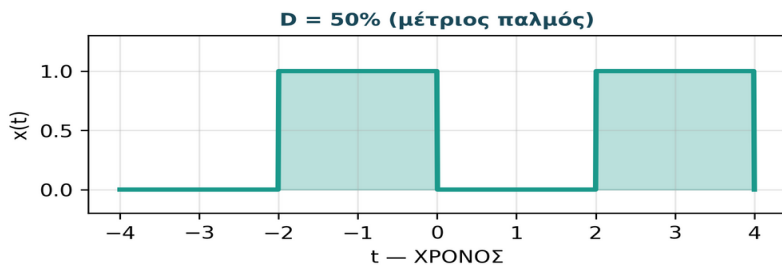
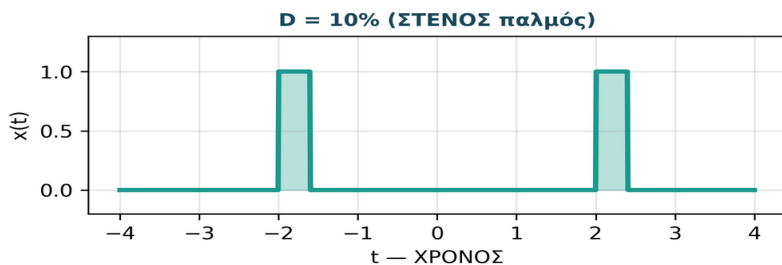
ΟΡΙΣΜΟΣ: $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t) / (\pi t)$ με $\text{sinc}(0) = 1$ (όριο L'Hôpital). Άρτια συνάρτηση · μηδενίζεται σε ακέραια $t = \pm 1, \pm 2, \dots$ · φθίνει αργά ως $1/(\pi t)$.

ΣΥΝΔΕΣΗ FS: για παλμοσειρά duty cycle D , $\alpha_k = A \cdot D \cdot \text{sinc}(kD) \cdot e^{-j\pi k D}$. Η $|\alpha_k|$ ακολουθεί την περιβάλλουσα $|\text{sinc}(kD)|$ στις ακέραιες θέσεις k .

ΠΡΟΣΟΧΗ: τα plots κάτω δείχνουν $|\alpha_k|$ (εκθετικό μέτρο). Για $k > 0$: $A_k = 2 \cdot |\alpha_k| = 2 \cdot A \cdot D \cdot |\text{sinc}(kD)|$.

Διαφορετικό $D \rightarrow$ διαφορετικό sinc envelope: μεγαλύτερο $D \rightarrow$ στενότερη sinc \rightarrow λιγότερες σημαντικές αρμονικές. (W02 σύνδεση: η sinc εμφανίστηκε ως σήμα, εδώ ως ΦΑΣΜΑ.)

Sinc envelope: το duty στον χρόνο καθορίζει το πλάτος sinc στη συχνότητα



ΧΡΟΝΟΣ: στενός παλμός

FS

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ: ευρύ φάσμα sinc

ΧΡΟΝΟΣ: ευρύς παλμός

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ: στενό φάσμα

ΑΡΧΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ time ↔ frequency: «στενό σε ένα → ευρύ στο άλλο»

sinc envelope: το ΥΨΟΣ ορίζεται από $A \cdot D$, το ΠΛΑΤΟΣ του κύριου λοβού από $1/D$ · αντίστροφη σχέση.

ΑΡΧΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ: στενό σε ένα πεδίο ↔ ευρύ στο άλλο. Ισχύει αμφίδρομα (time ↔ frequency).

ΠΟΥ θα συνεχίσει: στο W07 το ίδιο sinc εμφανίζεται ΣΥΝΕΧΕΣ για aperiodic παλμό (rect ↔ sinc ζεύγος).

```
% sinc envelope · 3 duty cycles
T0 = 4; w0 = 2*pi/T0;
Ns = 5000; dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt);

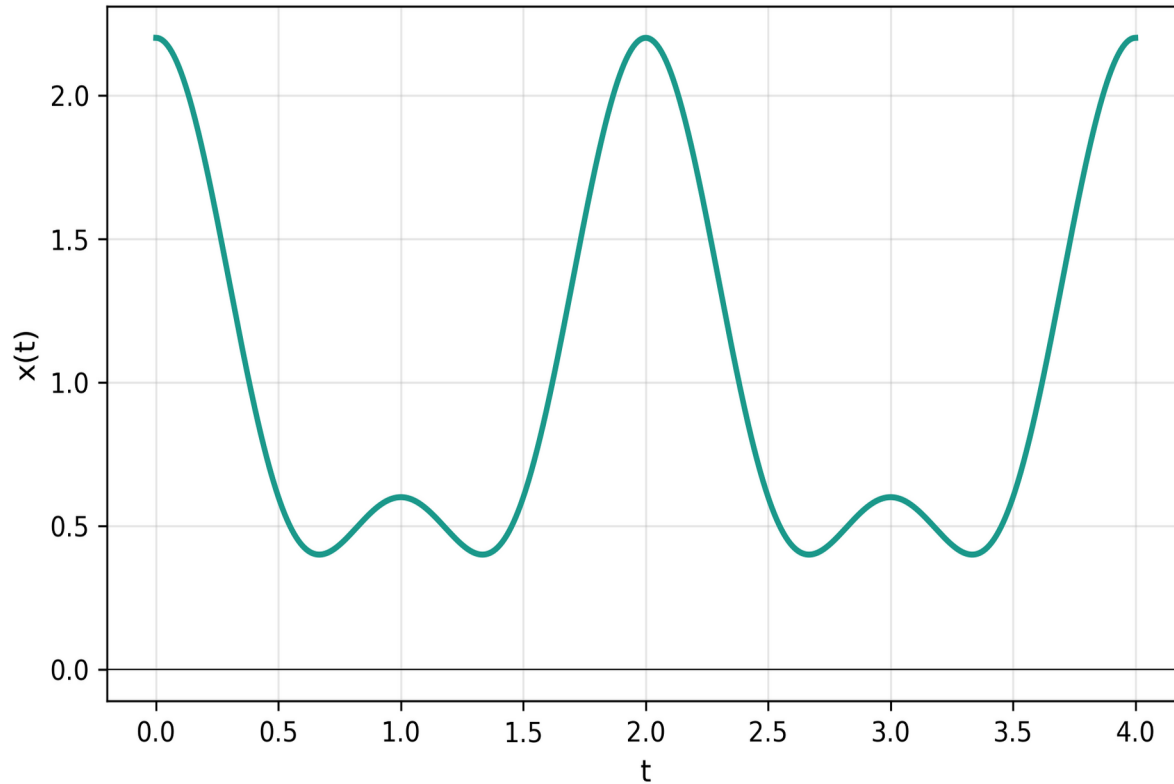
% Custom normalized sinc:
function y = sincN(x)
    y = ones(size(x));
    i = abs(x) > 1e-12;
    y(i) = sin(pi*x(i))./(pi*x(i));
endfunction

pulse = @(t,T0,D) double(mod(t,T0) < D*T0);
fcoeff = @(x,k,t,T0,w0) ...
    (1/T0)*trapz(t,x.*exp(-1i*k*w0*t));

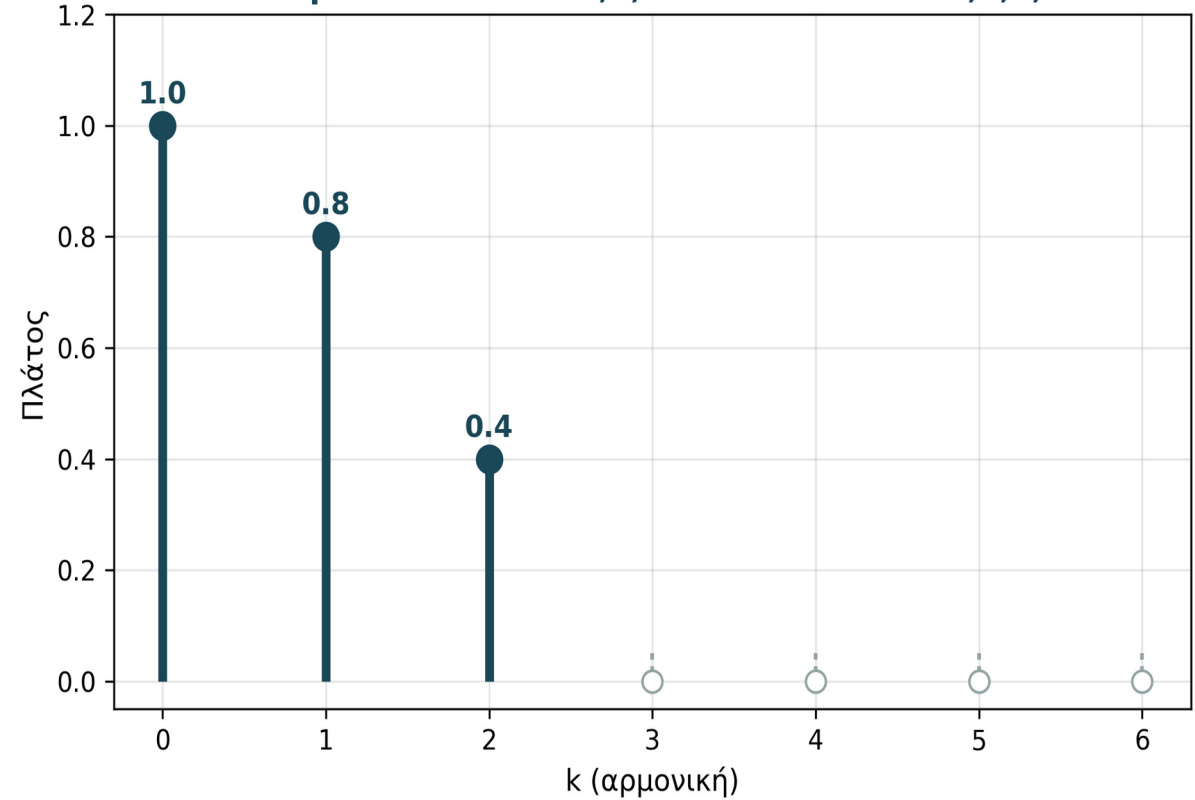
figure; idx = 1;
for D = [0.10, 0.25, 0.50]
    x = pulse(t,T0,D);
    for k = -15:15
        a(k+16) = fcoeff(x,k,t,T0,w0);
    end
    subplot(3,1,idx);
    stem(-15:15, abs(a),'filled');
    hold on;
    kc = linspace(-15,15,500);
    plot(kc, D*abs(sincN(kc*D)), 'r--');
    title(sprintf('D=%0.2f · |αk|', D));
    xlabel('k'); ylabel('|αk|');
    idx = idx + 1;
end
```

Λεξιλόγιο αρμονικών: διαθέσιμες/ενεργές + άρτιες/περιττές

$$x(t) = 1 + 0.8\cos(\omega_0 t) + 0.4\cos(2\omega_0 t)$$



Φάσμα: ΕΝΕΡΓΕΣ $k=0,1,2$ · ΑΝΕΝΕΡΓΕΣ $k=3,4,5,6$



ΕΝΝΟΙΑ 1 · Διαθέσιμες θέσεις: όλα τα $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (άπειρες) · Ενεργή αρμονική: αυτή με συντελεστή $A_k \neq 0$

Παράδειγμα: $x(t) = 1 + 0.8 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t) \rightarrow$ ΕΝΕΡΓΕΣ $k=0,1,2$ · ΑΝΕΝΕΡΓΕΣ $k=3, 4, 5, \dots$ κ.ο.κ.

ΕΝΝΟΙΑ 2 · Άρτιες αρμονικές: $k = 2, 4, 6, \dots$ · Περιττές αρμονικές: $k = 1, 3, 5, \dots$ · $k=0 = \text{DC}$

ΠΡΟΣΟΧΗ: «άρτια αρμονική» = δείκτης k άρτιος. ΟΧΙ συμμετρία της συνάρτησης $x(t)$. Είναι ΑΛΛΟ θέμα (συμμετρία στο σ22).

ΚΑΝΟΝΕΣ:

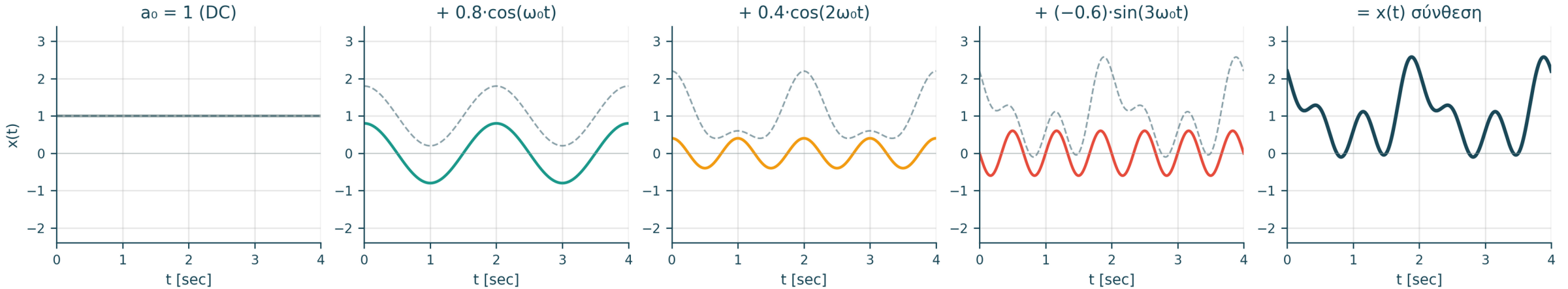
(α) Αν $A_k = 0$, η k -στή αρμονική ΔΕΝ υπάρχει στο σήμα. (β) «Τετραγωνικός μηδενίζει τις άρτιες» αναφέρεται στον δείκτη k , όχι στη συμμετρία της συνάρτησης. ΓΙΑΤΙ έχει σημασία: bandwidth, filtering, ποιες αρμονικές κρατάμε.

Τύπος Fourier Series: τι σημαίνει κάθε όρος

Τριγωνομετρική μορφή: $x(t) = a_0 + \sum_{k=-1}^{\infty} [b_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + c_k \cdot \sin(k\omega_0 t)]$

Εκθετική μορφή: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ (ίδιο σήμα, άλλη γραφή)

ΣΗΜΑ: $x(t) = 1 + 0.8 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t) - 0.6 \cdot \sin(3\omega_0 t)$, $T_0=2$, $\omega_0=\pi$



ΟΛΟ το σήμα $x(t)$ (δεξιά) προκύπτει από άθροιση DC + 3 αρμονικές. Πλήρης γραμμή = όρος. Διακεκομμένη = σωρευτικό άθροισμα.

a_0 (DC)

Μέση τιμή του σήματος
 $a_0 = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_0} x(t) dt$

$b_k \cdot \cos(k\omega_0 t)$

k -στή \cos συνιστώσα
 $b_k = (2/T_0) \cdot \int x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt$

$c_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$

k -στή \sin συνιστώσα
 $c_k = (2/T_0) \cdot \int x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt$

a_k (εκθετικός)

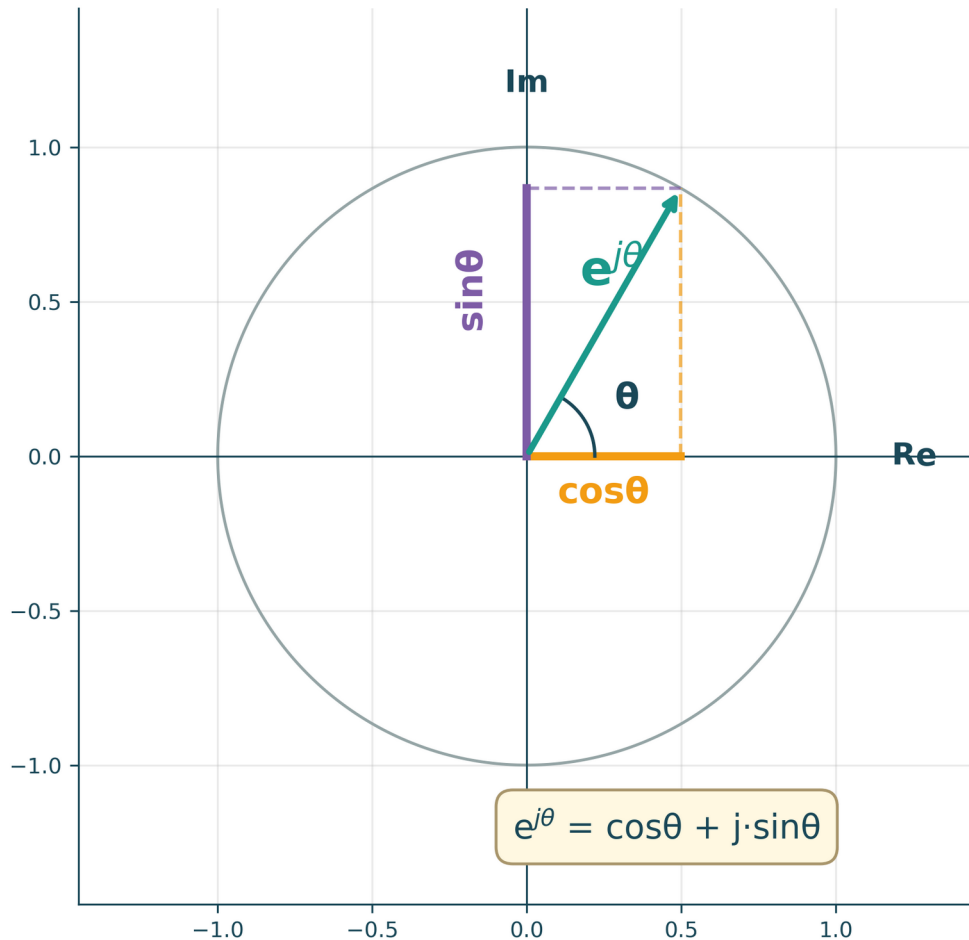
Μιγαδικός συντελεστής
 $a_k = (b_k - jc_k)/2$
 $k = -\infty..+\infty$

ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ο τύπος: αποσυνθέτει το $x(t)$ σε άθροισμα DC + \cos/\sin (τριγ.) ή σε άθροισμα μιγαδικών εκθετικών (εκθ.). Ίδια πληροφορία, δύο γραφές.

ΓΙΑΤΙ τρεις όροι (a_0 , b_k , c_k): $a_0 = DC$ · $b_k =$ βάρος $\cos(k\omega_0 t)$ · $c_k =$ βάρος $\sin(k\omega_0 t)$. ΣΕ ΛΙΓΟ: εργαλεία υπολογισμού (Euler, trapz) και πώς εμφανίζεται ως φάσμα διακριτών γραμμών.

Ταυτότητες Euler πριν από τους μιγαδικούς συντελεστές

Euler ως εργαλείο: από \cos/\sin σε μιγαδικά εκθετικά $e^{(jk\omega_0 t)}$ — χωρίς ολοκλήρωμα.



Μοναδιαίος κύκλος · $e^{(j\theta)}$ ως διάνυσμα στο μιγαδικό επίπεδο.

Βασικές ταυτότητες Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos\theta - j \cdot \sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$\sin\theta = \frac{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}{(2j)}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2j} \cdot e^{j\theta} + \frac{1}{2j} \cdot e^{-j\theta} \quad (\text{ισοδύναμη: } j \text{ στους συντελεστές})$$

Γιατί εμφανίζεται το j : ο όρος $1/(2j)$ στον τύπο του \sin βάζει το j στους \sin -συντελεστές.

Για πραγματικά σήματα όμως ισχύει $a_{-k} = a_k^*$ — τα ζεύγη $\pm k$ επιστρέφουν πραγματικό άθροισμα.

Παράδειγμα: μετατροπή $\cos+\sin \rightarrow$ εκθετικά

$$\text{Δίνεται: } x(t) = 2 \cdot \cos(3\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)$$

$$2 \cdot \cos(3\omega_0 t) = e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t} \quad \rightarrow \alpha_3 = 1, \alpha_{-3} = 1$$

$$-\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} \cdot e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} \cdot e^{-j\omega_0 t} \quad \rightarrow \alpha_1 = +0.5j, \alpha_{-1} = -0.5j$$

Έλεγχος Hermitian: $\alpha_{-3} = \alpha_3^*$ OK · $\alpha_{-1} = \alpha_1^*$ OK (το σήμα είναι ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ).

Euler = ΓΕΦΥΡΑ τριγωνομετρικής \leftrightarrow εκθετικής FS. Όλη η μετατροπή γίνεται με αλγεβρικές πράξεις · ΧΩΡΙΣ ξανά ολοκλήρωση.

Αναλυτική μέθοδος: πρώτα Euler, μετά ακ

Αναγνώριση ακ από γνωστές ταυτότητες και έλεγχος με συζυγή ζεύγη.

Κανόνας εργασίας

1. Αναγνωρίζω τη μορφή του σήματος. 2. Εφαρμόζω Euler ή ταυτότητα γινομένου/ισχύος. 3. Ταυτίζω τον όρο $e^{jk\omega_0 t}$. 4. Ελέγχω $a_{-k} = a_k^*$ για πραγματικό $x(t)$.

Παρ. 1 · cos

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{-1} = \frac{1}{2}$$

άλλα $a_k = 0$

Παρ. 2 · sin

$$x(t) = 3\sin(2\omega_0 t)$$

$$3\sin(2\omega_0 t) = -1.5j \cdot e^{j2\omega_0 t} + 1.5j \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_2 = -1.5j, a_{-2} = +1.5j$$

Παρ. 3 · γινόμενο

$$x(t) = 2 + \cos(\omega_0 t)\cos(2\omega_0 t)$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\cos(A-B) + \frac{1}{2}\cos(A+B)$$

$$x(t) = 2 + \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\cos(3\omega_0 t)$$

$$a_0 = 2, a_{\pm 1} = \frac{1}{4}, a_{\pm 3} = \frac{1}{4}$$

Παρ. 4 · cos²

$$x(t) = \cos^2(\omega_0 t)$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j2\omega_0 t} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega_0 t}$$

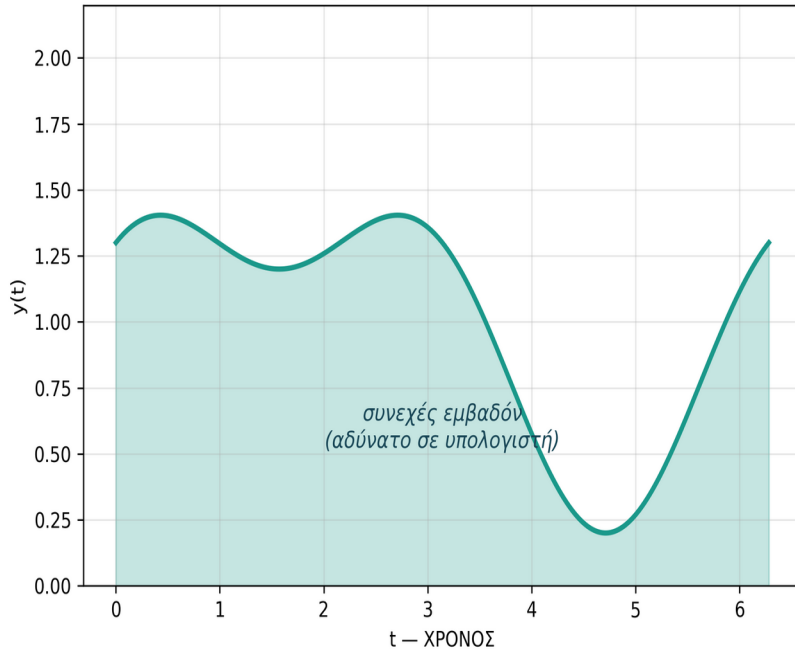
$$a_0 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4}, a_{-2} = \frac{1}{4}$$

Πότε χρησιμοποιώ τι

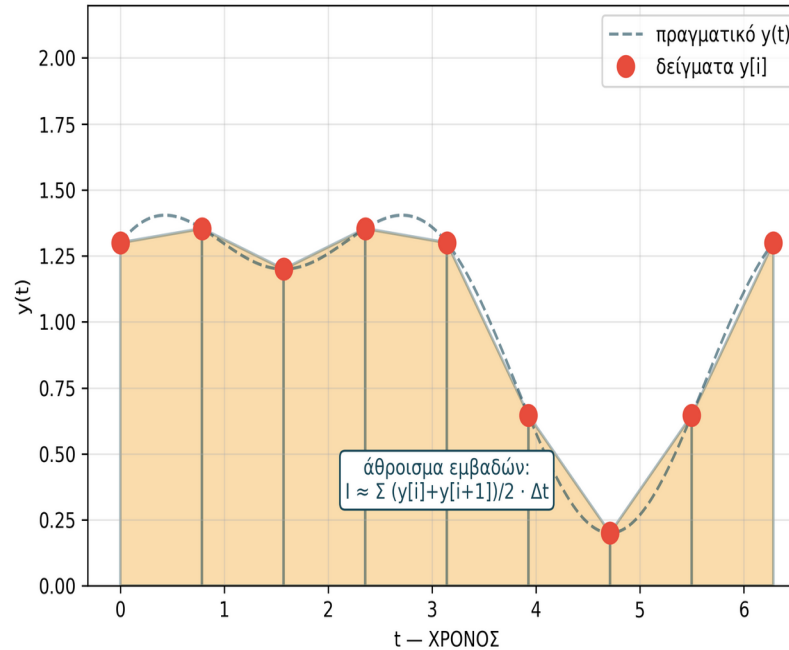
Αναλυτική μέθοδος: πρώτη επιλογή όταν το σήμα είναι άθροισμα αρμονικών, γινόμενο που απλοποιείται, ή δύναμη sin/cos με γνωστή ταυτότητα.

Numerical με trapz: όταν έχω δείγματα, τμηματικό σήμα ή θέλω επαλήθευση των αναλυτικών αποτελεσμάτων. Αν δεν έχω πλήρη περίοδο, οι συντελεστές αλλοιώνονται.

trapez: το ολοκλήρωμα όταν έχω δείγματα

ΤΕΛΕΙΟ ολοκλήρωμα: $\int y(t)dt =$ συνεχές εμβαδόν

trapez: άθροισμα 8 τραπεζίων = ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ



ΓΙΑΤΙ χρειάζεται:

Οι Fourier συντελεστές είναι ολοκληρώματα. Στον υπολογιστή έχουμε ΔΕΙΓΜΑΤΑ · όχι συνεχή σήματα · άρα προσεγγιστική μέθοδος.

ΠΟΥ μπαίνει στους τύπους:

Στα a_0, b_k, c_k ως ολοκλήρωμα και στην ισχύ $P = (1/T) \int |x|^2$.

ΠΟΤΕ χρησιμοποιείται:

Όταν έχω sampled σήμα (vector) ή σήμα ορισμένο τμηματικά.

ΠΩΣ: $I = \text{trapez}(t, y)$;

(t πρώτο · grid 0:dt:(T-dt))

Δεν χρειάζεται pkg load
το trapez είναι core Octave.

```
% Παράδειγμα: c1 του τετραγωνικού 50% παλμού
% (αναλυτικό αποτέλεσμα: c1 = 2/π ≈ 0.6366)
```

```
T0 = 2;
w0 = pi;
Ns = 5000;
dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt); % πλήρης περίοδος (όχι endpoint T0 · διπλή μέτρηση)
```

```
x = double(t < 1); % τετραγωνικός 50%
```

```
c1 = (2/T0) * trapez(t, x.*sin(w0*t));
```

```
fprintf('c1 = %.5f\n', c1);
fprintf('2/π = %.5f\n', 2/pi);
% Αποτέλεσμα: c1 ≈ 0.6366
```

4.004 Σήματα και Συστήματα

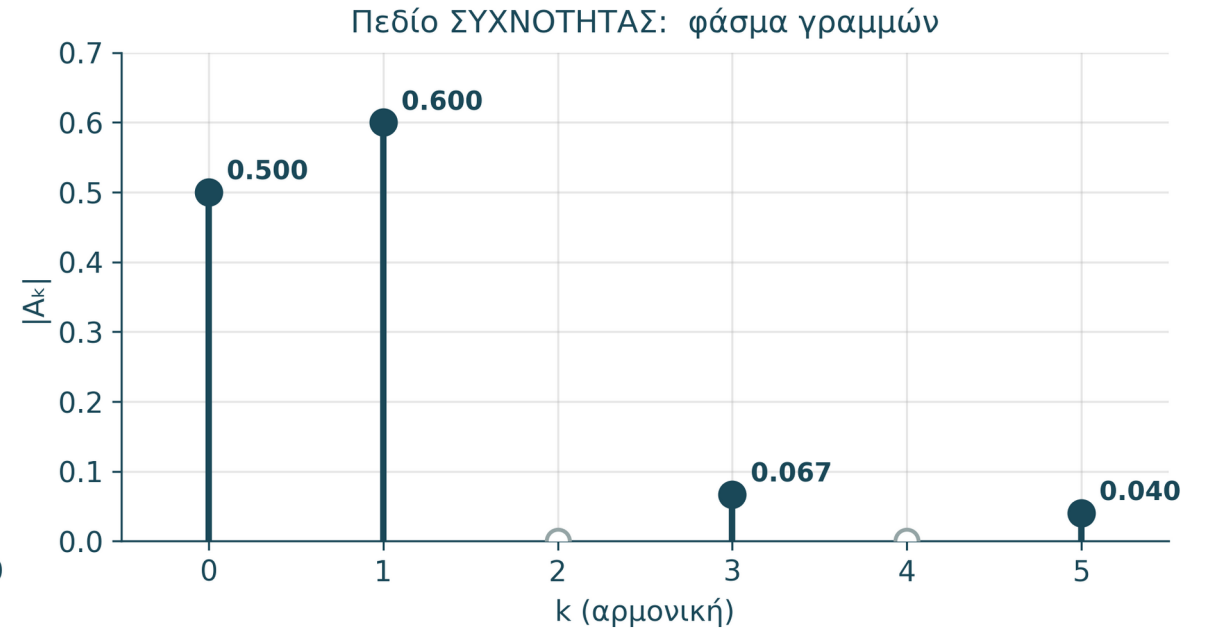
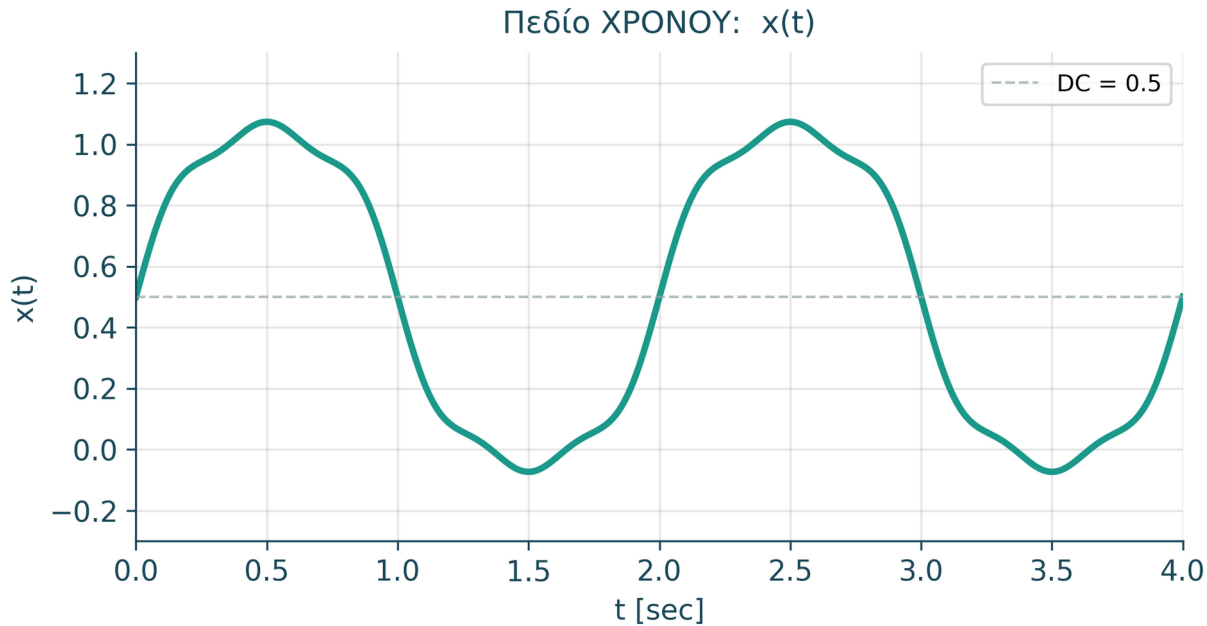
trapez = αριθμητικό ολοκλήρωμα μέσω κανόνα τραπεζίων (όχι Fourier).

ΓΙΑΤΙ τραπέζια: απλούστερη μέθοδος, αρκετά ακριβής για ομαλά σήματα.

ΠΡΟΣΟΧΗ: το αποτέλεσμα εξαρτάται από σωστό grid (πυκνότητα Δt) και ΠΛΗΡΗ περίοδο.

Φάσμα FS: το σήμα ως διακριτές γραμμές στις συχνότητες

Παράδειγμα: $x(t) = 0.5 + 0.6 \cdot \sin(\omega_0 t) + 0.0667 \cdot \sin(3\omega_0 t) + 0.04 \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots$ (περιοδικό · μόνο περιττές · $1/k$ decay)



αριστερά συνεχές $x(t)$ στον χρόνο · δεξιά το ΙΔΙΟ σήμα ως ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ γραμμές στις συχνότητες $k \cdot f_0$ (γκρι κύκλοι = ανενεργές αρμονικές).

Διαβάζοντας ένα φάσμα γραμμών · συμβάσεις πλάτους

- Άξονας x = ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (k ή $k \cdot f_0$ ή $k \cdot \omega_0$) • Άξονας y = ΠΛΑΤΟΣ A_k ή ΦΑΣΗ $\angle a_k$
- $k = 0$ (DC): $A_0 = a_0 = a_0$ (χωρίς factor 2) • $k > 0$: $A_k = \sqrt{(b_k^2 + c_k^2)} = 2 \cdot |a_k|$ (τριγωνομετρικό = $2 \times$ εκθετικό)
- Στα plots ΠΑΝΤΑ διευκρινίζουμε: «Φάσμα A_k » (τριγ.) ή «Φάσμα $|a_k|$ » (εκθ.) ή «Φάσμα P_k » (ισχύς).

Κάθε γραμμή = θέση $k \cdot f_0$ + ύψος (A_k τριγ. ή $|a_k|$ εκθ.) + φάση $\angle a_k$. ΓΙΑΤΙ διακριτό: το σήμα είναι περιοδικό (FS) · μόνο ακέραια πολλαπλάσια του f_0 . ΠΟΥ θα δούμε φάση αναλυτικά: μέσω εκθετικής FS και μιγαδικών a_k (ενότητα Two-sided / Hermitian).

Παλμοσειρά $A=2$, $D=1/4$ - συντελεστές a_k και φάσμα

Λυμένη παλμοσειρά: από χρόνο \rightarrow φάσμα \cdot sinc envelope \cdot μηδενισμοί.

Εκφώνηση + βήματα

Δίνεται παλμοσειρά:

$A = 2$ [μονάδες]

$T_0 = 4$ sec

$T_{on} = 1$ sec

Ζητούνται: a_0 , a_k , μηδενισμοί, plot $|a_k|$

Βήμα 1: $D = T_{on}/T_0 = 1/4$

Βήμα 2: $a_0 = A \cdot D = 0.5$

Βήμα 3 ($k \neq 0$):

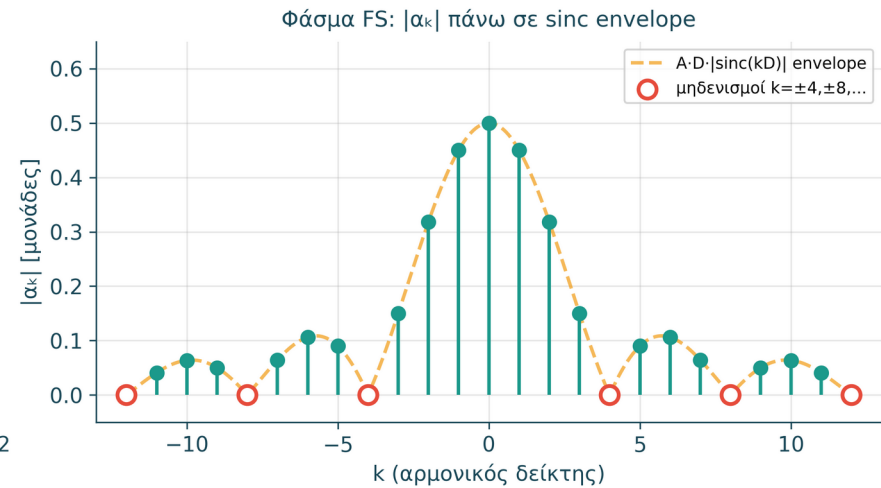
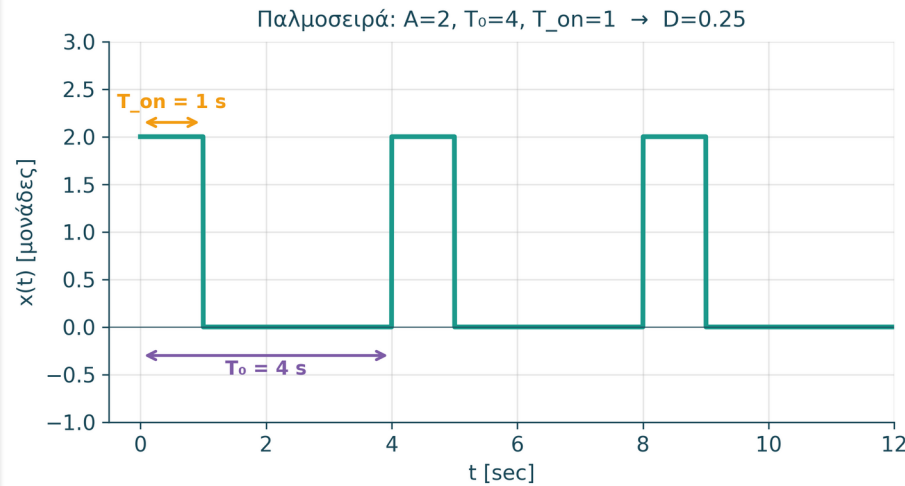
$$a_k = A \cdot D \cdot \text{sinc}(kD) \cdot e^{-j\pi k^2 A}$$

Άρα εδώ:

$$a_k = 0.5 \cdot \text{sinc}(k/4) \cdot e^{-j\pi k^2}$$

Μηδενισμοί:

$$\text{sinc}(k/4) = 0 \rightarrow k = \pm 4, \pm 8, \pm 12, \dots$$



επάνω $x(t)$ σε χρόνο (sec) \cdot δεξιά $|a_k|$ πάνω σε sinc envelope \cdot κόκκινοι κύκλοι = μηδενισμοί.

Ανάγνωση αποτελέσματος

- Το D καθορίζει το πλάτος DC και το sinc envelope. • Οι γραμμές υπάρχουν μόνο σε ακέραια k .
- Μηδενισμοί από kD ακέραιο (όχι από άρτιο/περιττό). • Ενδεικτικά: $|a_1| \approx 0.45$, $|a_2| \approx 0.32$, $|a_3| \approx 0.15$, $|a_4| = 0$.

ΚΑΝΟΝΑΣ για παλμοσειρά: $a_0 = A \cdot D$, $|a_k| = A \cdot D \cdot |\text{sinc}(kD)|$.

Τα zeros του sinc δίνουν τις αρμονικές που λείπουν \cdot γρήγορος έλεγχος ορθότητας στο εργαστήριο.

Ισχύς FS - one-sided τριγωνομετρική σύμβαση

One-sided ισχύς όταν δουλεύουμε με a_0, b_k, c_k και $k \geq 0$.

Τύποι one-sided

Σύμβαση:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \cos(k\omega_0 t) + c_k \sin(k\omega_0 t)]$$

Πλάτος αρμονικής:

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2}$$

Ισχύς:

$$P_0 = a_0^2$$

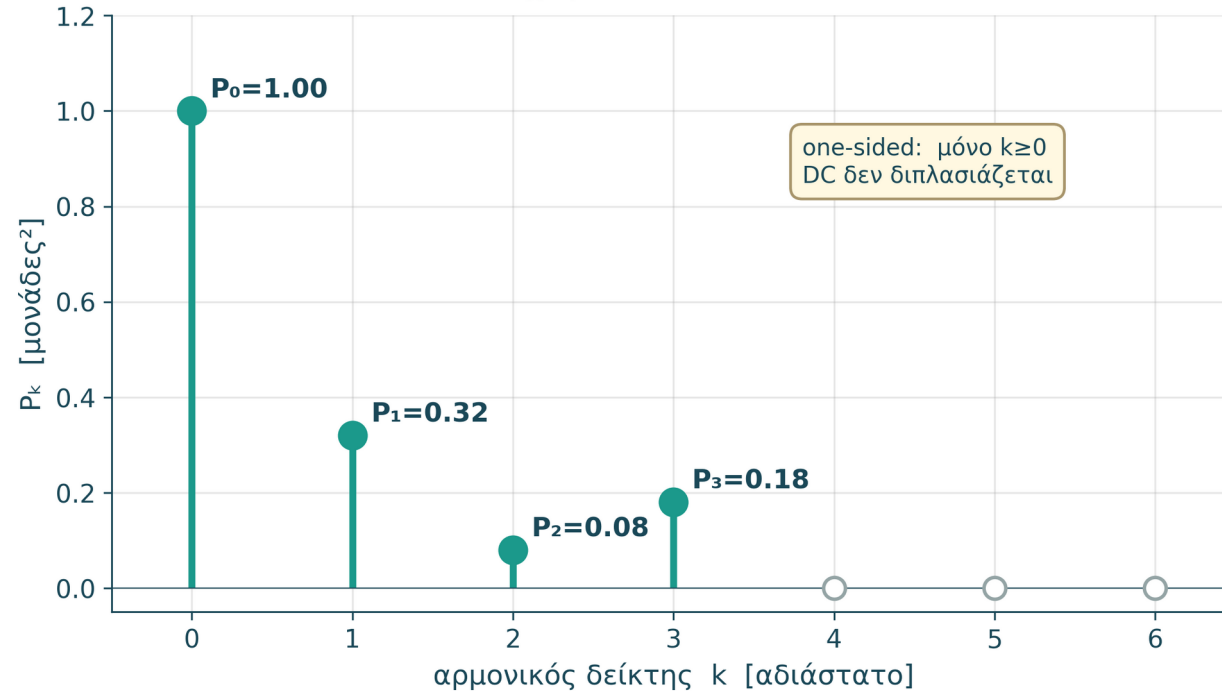
$$P_k = \frac{1}{2}(b_k^2 + c_k^2) = \frac{1}{2} \cdot A_k^2, \quad k \geq 1$$

Συνολικά:

$$P_{\text{total}} = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k$$

Το $\frac{1}{2}$ στον P_k επειδή η μέση τιμή \cos^2 (και \sin^2) σε μία περίοδο είναι $\frac{1}{2}$. Το DC ΔΕΝ παίρνει $\frac{1}{2}$.

One-sided ισχύς: $P_0, P_1, P_2, P_3 \cdot \sum P_k = 1.58$



one-sided φάσμα ισχύος P_k · μόνο $k \geq 0$ · DC δεν διπλασιάζεται.

Πότε

- a_0, b_k, c_k
- plot $k \geq 0$
- ισχύς ανά φυσική αρμονική
- Parseval τριγ. μορφή

ΚΑΝΟΝΑΣ one-sided: $P_0 = a_0^2$ (χωρίς factor) · $P_k = \frac{1}{2} \cdot A_k^2$ για $k \geq 1$. $P_{\text{total}} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (b_k^2 + c_k^2)$.

Σύνδεση με two-sided (επόμενο slide): η ίδια ισχύς γράφεται με a_k σε θετικές+αρνητικές συχνότητες (χωρίς $\frac{1}{2}$).

Ισχύς FS - two-sided εκθετική σύμβαση και μετατροπή

Two-sided ισχύς όταν δουλεύουμε με μιγαδικούς a_k και ζεύγη $\pm k$.

Τύποι two-sided

Σύμβαση:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega_0 t}$$

Ισχύς:

$$P_{\text{total}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Δεν υπάρχει $\frac{1}{2}$.

Για πραγματικό $x(t)$:

$$a_{-k} = a_k^*$$

Μετατροπή σε one-sided:

$$P_{0,\text{one}} = |a_0|^2$$

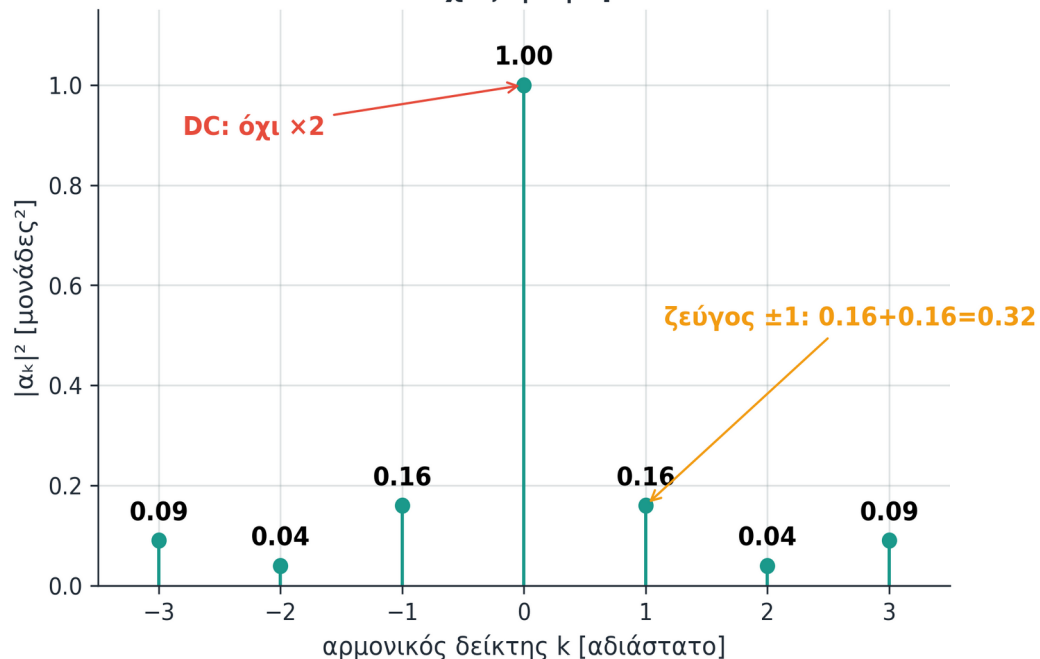
$$P_{k,\text{one}} = |a_k|^2 + |a_{-k}|^2$$

$$= 2|a_k|^2 \text{ για } k \geq 1$$

Προσοχή: το DC δεν διπλασιάζεται ποτέ.

Two-sided διάγραμμα

Two-sided ισχύς: $|a_k|^2$ για $k = -3 \dots +3$



Two-sided ισχύς $|a_k|^2$. Άξονας x: k [αδιάστατο]. Άξονας y: ισχύς σε μονάδες².

Αντιστοίχιση με one-sided

- One-sided: μαζεύω το ζεύγος $\pm k$ σε μία γραμμή.
- Two-sided: κρατώ χωριστά $+k$ και $-k$.
- $A_k = 2|a_k|$ για $k \geq 1$.
- $P_{k,\text{one}} = 2|a_k|^2$ για πραγματικά σήματα.

Κανόνες επιλογής

Αν η άσκηση μιλά για $\text{fft}()$ ή a_k , σκέφτομαι two-sided. Αν μιλά για a_0, b_k, c_k και $k \geq 0$, σκέφτομαι one-sided.

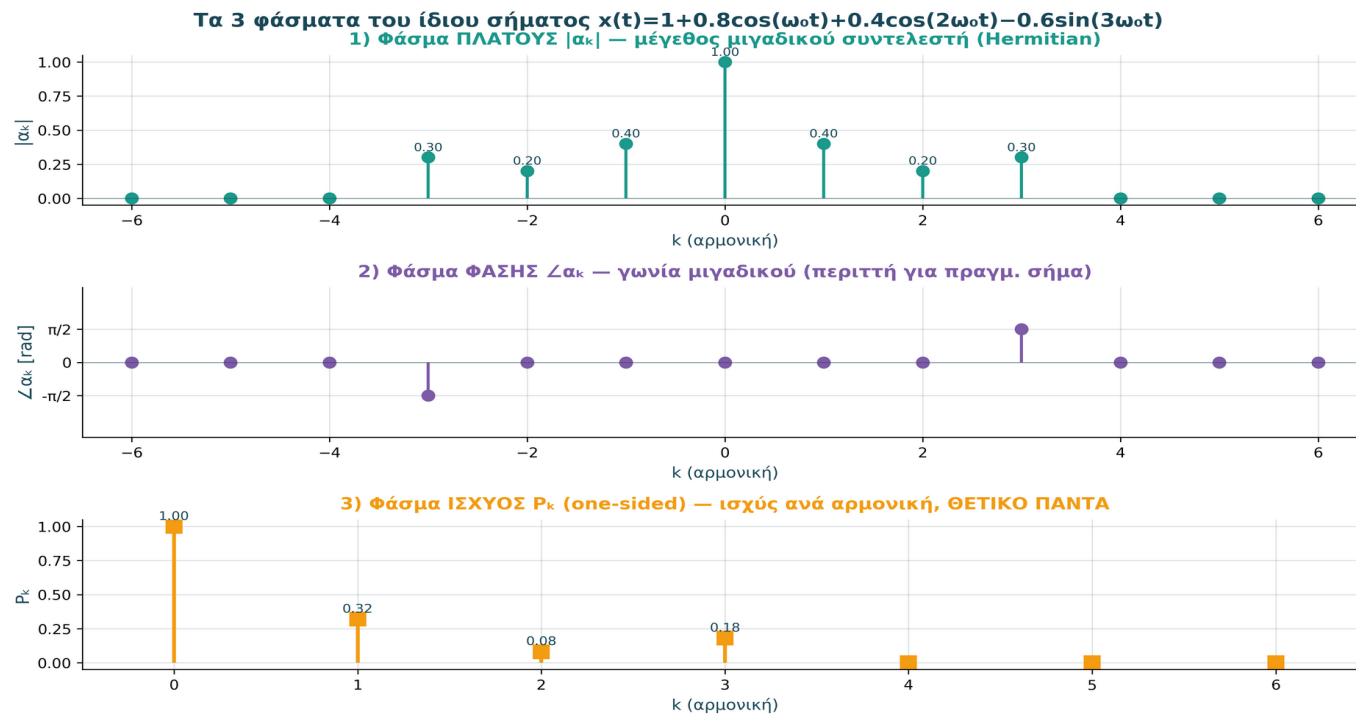
Από τους ίδιους συντελεστές a_k προκύπτουν 3 διαφορετικά φάσματα · επιλέγεις ανάλογα με την ερώτηση

- ΦΑΣΜΑ ΠΛΑΤΟΥΣ (amplitude/magnitude): $|a_k|$ στους μιγαδικούς ή $A_k = \sqrt{(b_k^2 + c_k^2)}$ στους τριγωνομετρικούς. Δείχνει «πόσο σημαντική» είναι κάθε αρμονική. Πάντα ≥ 0 . Hermitian συμμετρία: $|a_{-k}| = |a_k|$.

ΦΑΣΜΑ ΦΑΣΗΣ (phase): $\angle a_k = \text{atan2}(\text{Im}\{a_k\}, \text{Re}\{a_k\})$. Δείχνει χρονική μετατόπιση κάθε αρμονικής. Για ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ $x(t)$ είναι ΠΕΡΙΤΤΟ: $\angle a_{-k} = -\angle a_k$. Καθαρό $\cos(k\omega_0 t)$: $\angle a_k = 0$. Καθαρό $+\sin(k\omega_0 t)$: $\angle a_{+k} = -\pi/2$, $\angle a_{-k} = +\pi/2$ (πρόσημα αντιστρέφονται για $-\sin$).

ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ (power): $P_k = |a_k|^2$ (two-sided) ή $P_0 = a_0^2$, $P_k = \frac{1}{2}(b_k^2 + c_k^2)$ για $k \geq 1$ (one-sided trig). Πάντα ΘΕΤΙΚΟ. Συνδέεται με Parseval: $P_{\text{time}} = \sum P_k$.

ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ: Όλα προέρχονται από τους ίδιους a_k . Δεν είναι «διαφορετικά» αποτελέσματα · είναι 3 ΟΨΕΙΣ της ίδιας πληροφορίας: μέγεθος + φάση = πλήρης μιγαδική περιγραφή. Ισχύς = μέγεθος².



ΟΡΟΛΟΓΙΑ:

«φάσμα συχνοτήτων»
= γενικός όρος
(οποιαδήποτε αναπαράσταση
ως προς συχνότητα)

ΠΟΤΕ ΧΡΗΣΙΜΟ:

ΠΛΑΤΟΣ:

- τι ακούγεται/φαίνεται
- filter analysis (Bode)

ΦΑΣΗ:

- χρονική μετατόπιση
- distortion analysis
- phase-only signals

ΙΣΧΥΣ:

- Parseval bandwidth
- SNR calculations
- audio loudness

Πρακτικός

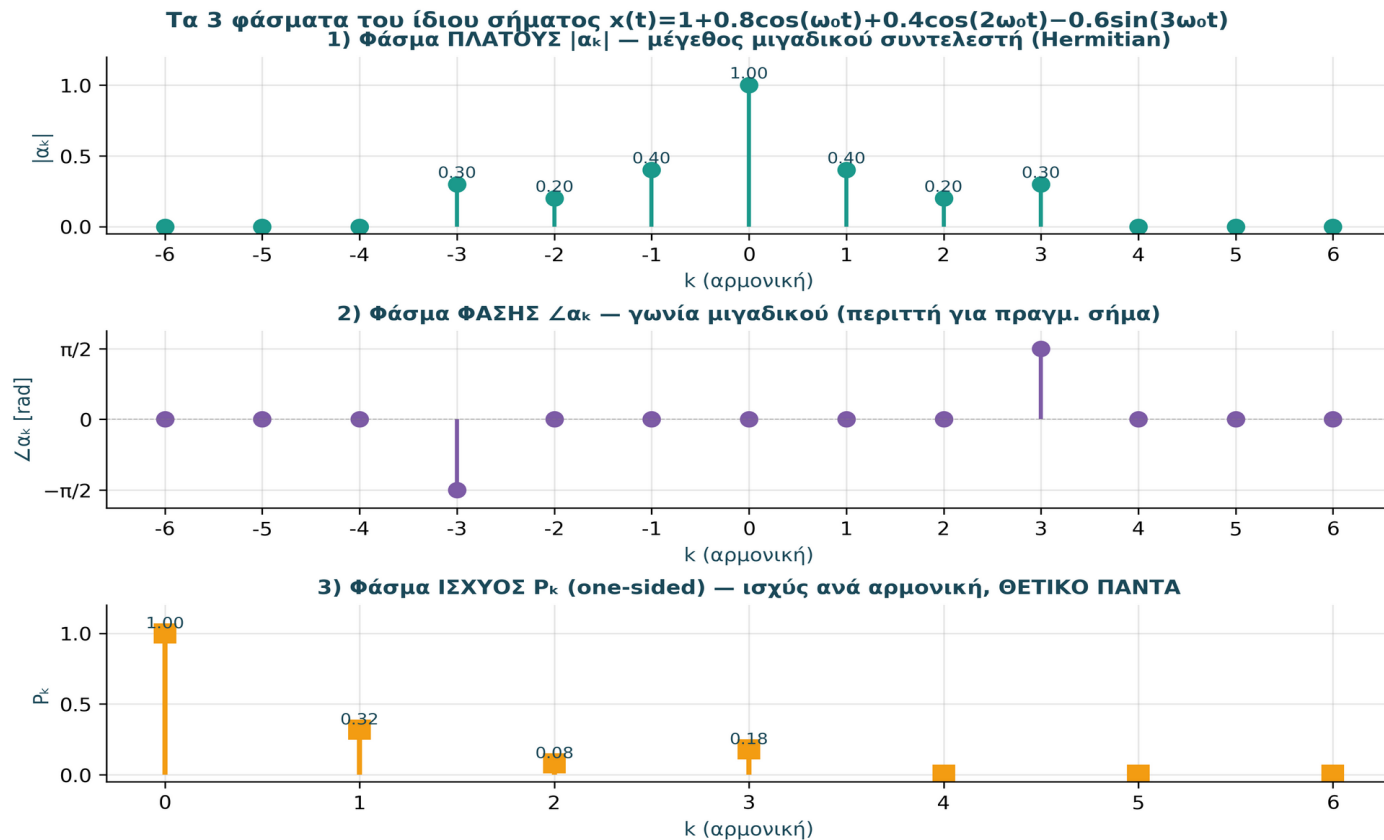
σε εργαστήριο/spectrum analyzer βλέπεις ΠΛΑΤΟΣ συνήθως. Σε filter design ΠΛΑΤΟΣ + ΦΑΣΗ. Σε ισχύ/SNR/bandwidth ανάλυση → ΙΣΧΥΣ.
Όλα παράγονται από τους ίδιους a_k · επόμενο slide: code που τα υπολογίζει όλα μαζί.

Από ακ → πλάτος, φάση, ισχύς

- ΣΗΜΑ: $x(t) = 1 + 0.8 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t) - 0.6 \cdot \sin(3\omega_0 t)$, $T_0=2$, $\omega_0=\pi$.

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: Υπολόγισε exponential ακ μέσω trapz, μετά παράγαγε κάθε ένα από τα 3 φάσματα ΞΕΧΩΡΙΣΤΑ.

ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΑ: $|a_0|=1$, $|a_{\pm 1}|=0.4$, $|a_{\pm 2}|=0.2$, $|a_{\pm 3}|=0.3$ (Hermitian). Φάση: $\cos \rightarrow 0$, $\sin \rightarrow \pm\pi/2$. $P_0=1.0$, $P_1=0.32$, $P_2=0.08$, $P_3=0.18$.



%OCTAVE:

```
clear; close all; clc;
```

```
T0 = 2; w0 = 2*pi/T0;
```

```
Ns = 5000; dt = T0/Ns;
```

```
t = 0:dt:(T0-dt);
```

```
x = 1 + 0.8*cos(w0*t) ...
    + 0.4*cos(2*w0*t) ...
    - 0.6*sin(3*w0*t);
```

```
N = 6;
```

```
a = zeros(1, 2*N+1);
```

```
for idx = 1:length(a)
```

```
    k = idx - N - 1;
```

```
    a(idx) = (1/T0)* ...
```

```
        trapz(t, x.* ...
```

```
            exp(-1i*k*w0*t));
```

```
endfor
```

```
% τα 3 φάσματα:
```

```
mag = abs(a);
```

```
ph = angle(a);
```

```
% η φάση δεν ορίζεται όταν |a_k|=0:
```

```
ph(mag < 1e-9) = NaN;
```

```
P_one = abs(a(N+1)).^2;
```

```
P_one(2:N+1) = ...
```

```
    2*abs(a(N+2:end)).^2;
```

```
figure;
```

```
subplot(3,1,1); stem(-N:N, mag);
```

```
subplot(3,1,2); stem(-N:N, ph);
```

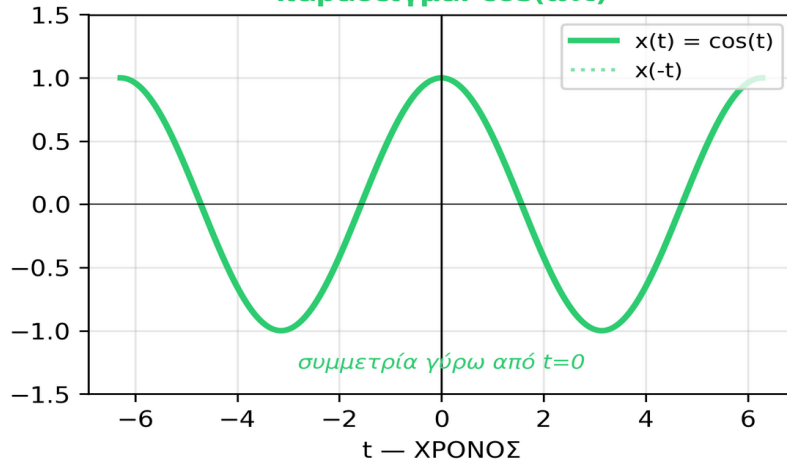
```
subplot(3,1,3); stem(0:N, P_one);
```

Στο επόμενο slide θα δούμε τη συμμετρία (W04 σύνδεση): πραγματικό σήμα → άρτιο πλάτος + περιττή φάση. ΣΥΝΔΕΞΗ προς Parseval: $\sum P_{one} = P_{time}$.

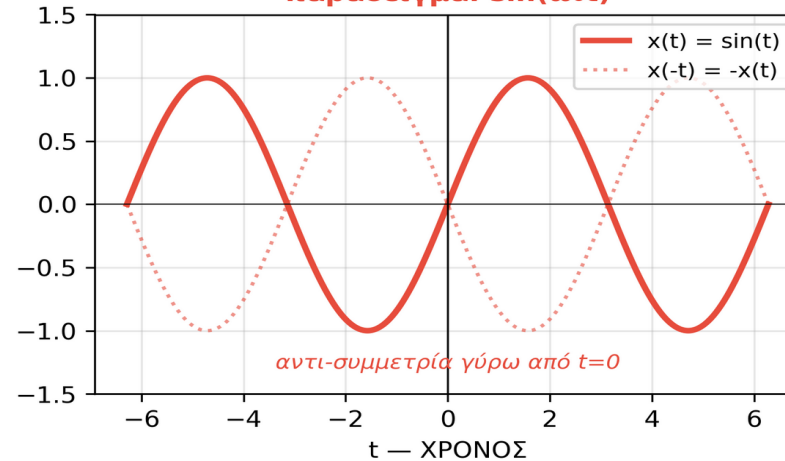
Συμμετρία σήματος → ποιοι Fourier συντελεστές μηδενίζονται

3 τύποι συμμετρίας σήματος → καθορίζουν ποιοι Fourier συντελεστές μηδενίζονται

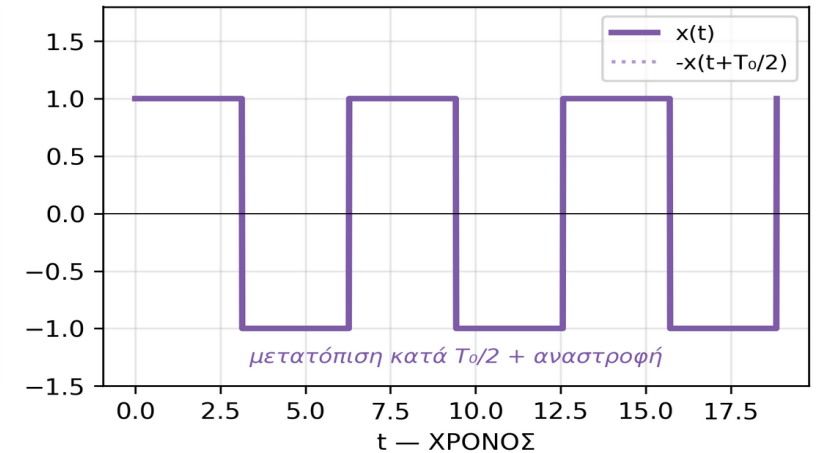
ΑΡΤΙΑ συνάρτηση
 $x(-t) = x(t)$
 παράδειγμα: $\cos(\omega t)$



ΠΕΡΙΤΤΗ συνάρτηση
 $x(-t) = -x(t)$
 παράδειγμα: $\sin(\omega t)$



HALF-WAVE συμμετρία
 $x(t+T_0/2) = -x(t)$
 παράδειγμα: τετραγωνικό



Συνέπεια στους Fourier συντελεστές + ΓΙΑΤΙ:

- ΑΡΤΙΑ συνάρτηση $x(-t)=x(t) \rightarrow c_k = 0 \forall k$ • ΓΙΑΤΙ: το γινόμενο $x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t)$ είναι ΠΕΡΙΤΤΟ \rightarrow ολοκλήρωμα σε $[-T/2, T/2] = 0$
- ΠΕΡΙΤΤΗ συνάρτηση $x(-t)=-x(t) \rightarrow b_k = 0 \forall k, a_0 = 0$ • ΓΙΑΤΙ: ομοίως, το γινόμενο $x \cdot \cos$ είναι περιττό \rightarrow ολοκλήρωμα = 0
- HALF-WAVE συμμετρία $x(t+T_0/2) = -x(t) \rightarrow$ άρτιες αρμονικές μηδενίζονται ($k=2,4,6,\dots$)
 ΠΡΟΣΟΧΗ: η συνθήκη ΔΕΝ ισχύει στο x απευθείας. Εφαρμόζεται στο $x_{ac} = x - a_0$ (μετά αφαίρεση DC).
 π.χ. 0/1 παλμός: $x(0.1)=1, x(0.6)=0 \neq -1$. ΑΛΛΑ $x_{ac}(0.1)=+\frac{1}{2}, x_{ac}(0.6)=-\frac{1}{2}$ OK \rightarrow άρτιες AC μηδενίζονται.

ΠΟΥ χρησιμοποιείται:

- 1) ΕΞΕΤΑΣΗ: σχεδίαση πρώτα · συμμετρία \rightarrow ποια c_k ή b_k μηδενίζονται προτού ολοκληρώσετε. Σώζει 50-70% χρόνο.
- 2) ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ: από φάσμα φάσης $\rightarrow 0$ παντού = άρτιο $\cdot \pm\pi/2 =$ περιττό \cdot λείπουν άρτιες αρμονικές = half-wave.
- 3) ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ: σήμα ΧΩΡΙΣ 2η αρμονική \rightarrow φτιάξε half-wave (όλες οι άρτιες μηδενίζονται αυτόματα).

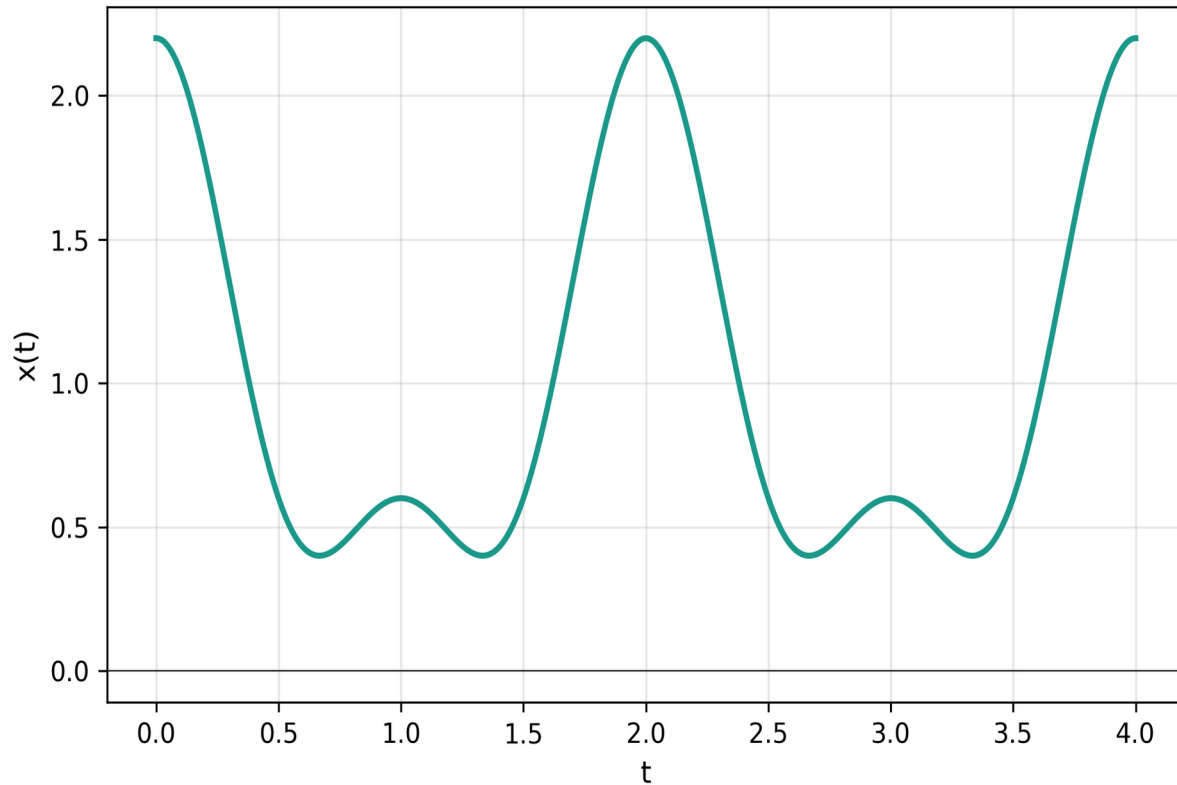
Ενότητα 1

Αντιπαραδείγματα + Άσκηση Α

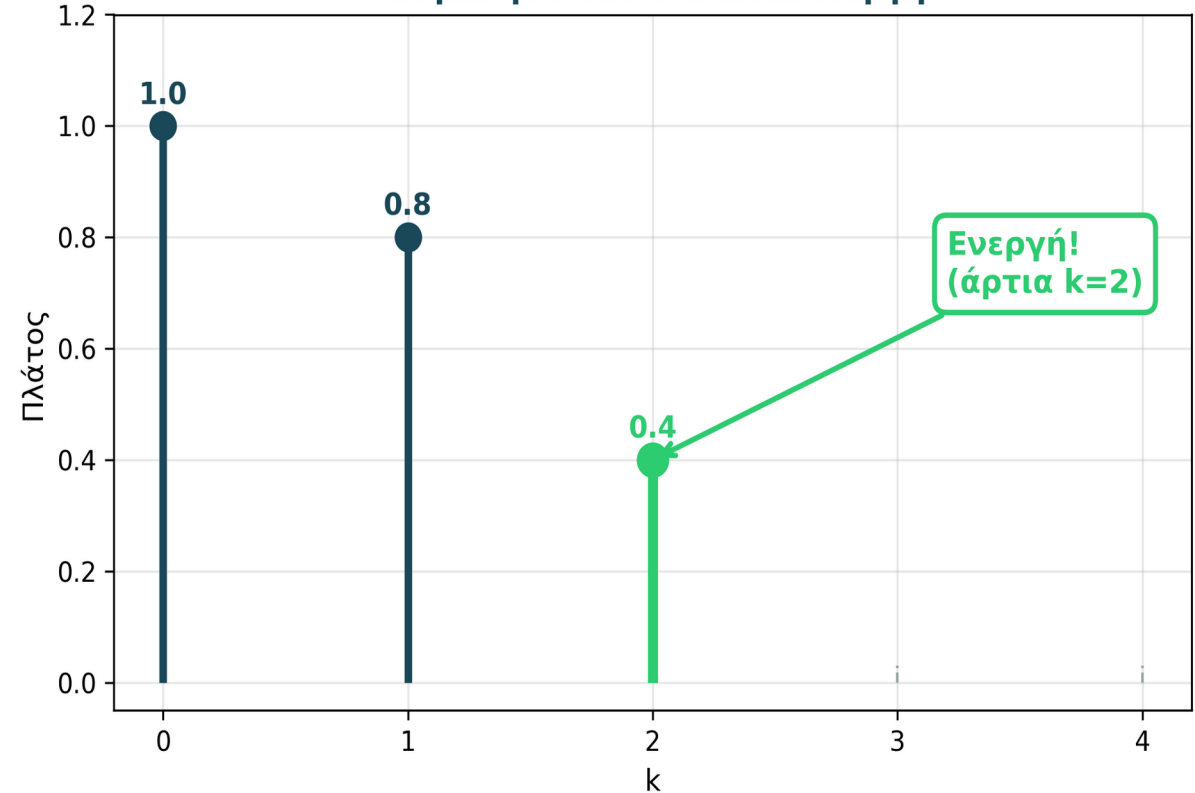
Αναιρώντας λάθος γενικεύσεις · Πρώτη πλήρης Fourier ανάλυση

Οι άρτιες αρμονικές δεν μηδενίζονται πάντα

$$x(t) = 1 + 0.8\cos(\omega_0 t) + 0.4\cos(2\omega_0 t)$$



Φάσμα: η ΑΡΤΙΑ $k=2$ είναι ενεργή!



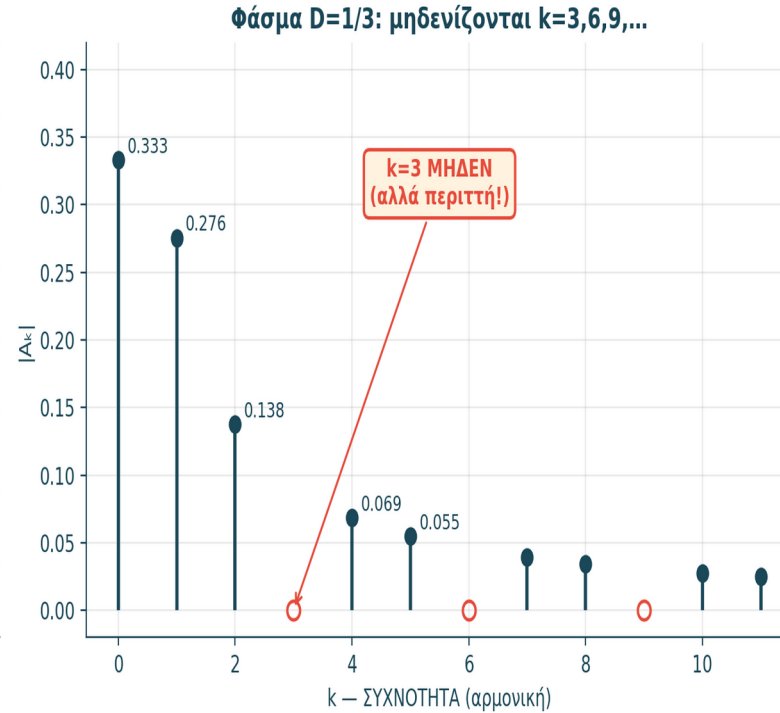
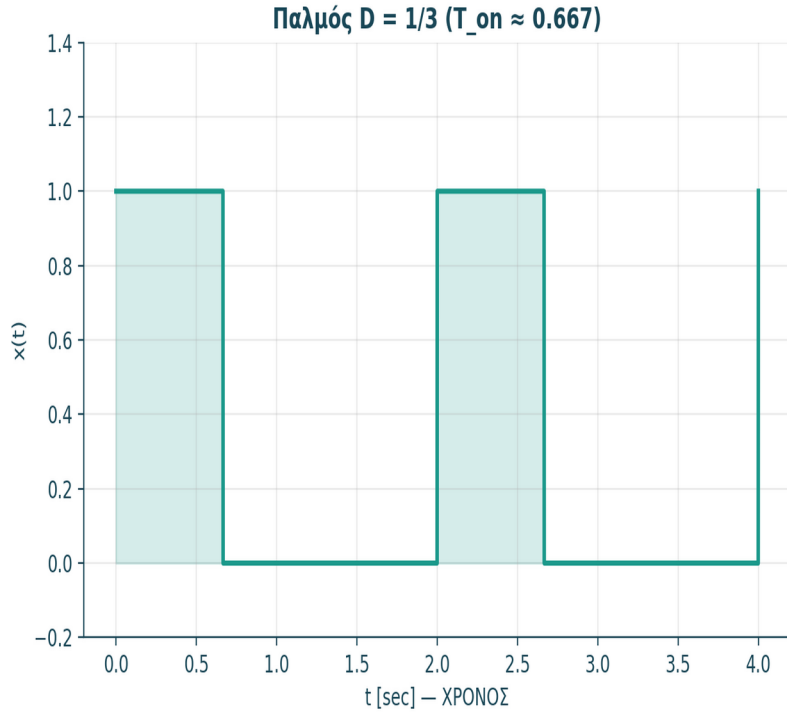
$x(t) = 1 + 0.8 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t)$ · η $k=2$ είναι ΑΡΤΙΑ ΚΑΙ ενεργή
Αριστερά: $x(t)$ στον ΧΡΟΝΟ · Δεξιά: φάσμα A_k στη ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

ΛΑΘΟΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ: «οι άρτιες αρμονικές μηδενίζονται». Στην οικογένεια ορθογώνιων παλμών 0/A, αυτό εμφανίζεται ΕΙΔΙΚΑ για $D=50\%$ (half-wave στο AC μέρος). Άλλες συμμετρίες/duty cycles → άλλα μοτίβα.

ΓΙΑΤΙ ισχύει εδώ: εμείς το ΦΤΙΑΞΑΜΕ έτσι · ο συντελεστής $b_2=0.4$ είναι ενεργός.

ΚΑΝΟΝΑΣ: η k -στή αρμονική υπάρχει αν $A_k \neq 0$ · τίποτα άλλο δεν αρκεί.

Οι περιττές αρμονικές δεν είναι πάντα ενεργές



ΓΙΑΤΙ μηδενίζονται;

Συντελεστής παλμού:

$A_k = 2 \cdot A \cdot D \cdot |\text{sinc}(kD)|$ για $k > 0$
 (μηδενισμοί: $kD = \text{ακέραιος}$)
 όπου $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$

Μηδενίζεται όταν:

$\sin(k\pi D) = 0$
 $\implies k\pi D = n\pi$ (n ακέραιος $\neq 0$)
 $\implies k \cdot D = n$
 $\implies k = n/D$

Για $D = 1/3$:

$k = n / (1/3) = 3n$
 $k = 3, 6, 9, \dots$

Άρα η ΠΕΡΙΤΤΗ $k=3$
 μηδενίζεται για $D=1/3$.

Γενικός κανόνας:

Για παλμό με duty D , μηδενίζονται οι αρμονικές $k = n/D$ (όταν είναι ακέραιες).

$D = 1/2 \rightarrow k = 2, 4, 6, \dots$ (άρτιες) · $D = 1/3 \rightarrow k = 3, 6, 9, \dots$ · $D = 1/4 \rightarrow k = 4, 8, 12, \dots$

$D = 1/5 \rightarrow k = 5, 10, 15, \dots$ · Συμπέρασμα: το pattern μηδενισμών εξαρτάται ΑΠΟΛΥΤΑ από το duty cycle.

ΛΑΘΟΣ ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ 2: «περιττές αρμονικές πάντα μένουν» · $D=1/3$ σπάει αυτό.

ΓΙΑΤΙ μηδενίζονται: στις θέσεις όπου $kD = \text{ακέραιος}$, η $\text{sinc}(kD)$ έχει zero crossing.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: μη γενικεύεις από έναν παλμό. Έλεγξε συμμετρία + duty cycle, μετά επιβεβαίωσε με trapz ή αναλυτικό τύπο.

Άσκηση Α · Τριγωνομετρική ανάλυση πλάτους και ισχύος

Εκφώνηση:

Δίνεται περιοδικό σήμα στον ΧΡΟΝΟ που γράφεται αναλυτικά ως άθροισμα τριών αρμονικών συν μία DC συνιστώσα:

$$x(t) = 1 + 0.8 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t) - 0.6 \cdot \sin(3\omega_0 t)$$

Δίνεται ότι $T_0 = 2 \text{ sec} \rightarrow$ επομένως $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi \text{ rad/sec}$.

Σκοπός: να εξάγουμε το τριγωνομετρικό φάσμα πλάτους A_k , να επαληθεύσουμε το θεώρημα Parseval, και να δούμε τι συμβαίνει αν αφαιρέσουμε μία αρμονική.

Ζητούμενα (A1 → A8):

- A1. Να υπολογιστούν θεωρητικά f_0 και ω_0 .
- A2. Να γραφτεί χάρτης αρμονικών για $k = 0..6$.
- A3. Να εντοπιστούν οι ΕΝΕΡΓΕΣ αρμονικές.
- A4. Plot 5 panels: DC, $k=1$, $k=2$, $k=3$, και συνολικό $x(t)$.
- A5. Να υπολογιστούν αριθμητικά a_0 , b_k , c_k με trapz.
- A6. Μέση ισχύς: $P = (1/T_0) \cdot \int |x|^2 dt$ στον χρόνο.
- A7. Επαλήθευση Parseval (mini-preview · πλήρης θεωρία στο σ42): $P_{\text{χρόνος}} = (1/T_0) \int |x|^2 dt = P_{\text{FS}} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (b_k^2 + c_k^2)$.
- A8. Πόση ισχύς χάνεται αν αφαιρέσω την $k=2$;

Συχνή ερώτηση:

«Μπορεί η αρμονική να είναι μη ακέραιη (π.χ. $k = 1.5$);»

ΟΧΙ · στις FS οι αρμονικές είναι ΠΑΝΤΑ ακέραιες θέσεις $k \cdot f_0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Στο εργαστήριο η T_0 δίνεται. Άρα οι επιτρεπτές θέσεις FS είναι μόνο $k \cdot f_0$ με ακέραιο k .

Μη ακέραιη θέση = όχι αρμονική της δοσμένης T_0 .

(Aperiodic σήμα \rightarrow W07.)

Τριγωνομετρική ανάλυση: από σήμα \rightarrow χάρτης αρμονικών \rightarrow συντελεστές με trapz \rightarrow πλάτος A_p + ισχύς + Parseval.
ΠΩΣ θα τη λύσουμε: σύνθεση πρώτα (slide επόμενη A1-A4), ανάλυση μετά (A5-A8) με επαλήθευση Parseval.

Επίλυση:

A1: $f_0 = 1/T_0 = 0.5 \text{ Hz} \cdot \omega_0 = \pi \text{ rad/sec}$

A2: χάρτης $k = 0..6$

A3: ενεργές $k = \{0, 1, 2, 3\}$

```
% Άσκηση Α · Σύνθεση & Plot
clear; close all; clc;

T0 = 2;           % περίοδος [sec]
f0 = 1/T0;       % θεμελιώδης [Hz]
w0 = 2*pi*f0;    % γωνιακή [rad/sec]

fprintf('f0 = %.3f Hz\n', f0);
fprintf('w0 = %.3f rad/s\n', w0);

t = linspace(0, 2*T0, 4000);

x_dc = 1*ones(size(t)); % k=0 (DC)
x_1 = 0.8*cos(1*w0*t); % k=1
x_2 = 0.4*cos(2*w0*t); % k=2 (ΑΡΤΙΑ ενεργή!)
x_3 = -0.6*sin(3*w0*t); % k=3

x = x_dc + x_1 + x_2 + x_3; % σύνθεση

% Plot 5 αρμονικές + αποτέλεσμα
figure;
subplot(5,1,1); plot(t,x_dc,'k'); title('DC (k=0)');
subplot(5,1,2); plot(t,x_1,'b'); title('k=1');
subplot(5,1,3); plot(t,x_2,'g'); title('k=2 (άρτια!)');
subplot(5,1,4); plot(t,x_3,'m'); title('k=3');
subplot(5,1,5); plot(t,x,'k','LineWidth',2);
title('x(t) σύνολο'); xlabel('t [sec]');
```

Χάρτης αρμονικών:

k	f_k [Hz]	Όρος	Ενεργή;
0	0	DC = 1	Ναι
1	0.5	$0.8 \cdot \cos(\omega_0 t)$	Ναι
2	1.0	$0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t)$	Ναι ΑΡΤΙΑ!
3	1.5	$-0.6 \cdot \sin(3\omega_0 t)$	Ναι
4	2.0	—	Όχι
5	2.5	—	Όχι
6	3.0	—	Όχι

Σύνθεση από γνωστά μέρη: DC + 3 αρμονικές → ένα σύνθετο σήμα στον ΧΡΟΝΟ.

ΓΙΑΤΙ έτσι: όταν ξέρεις τους συντελεστές, η σύνθεση είναι εύκολη.

ΠΩΣ θα γυρίσω πίσω (ανάλυση); επόμενο slide με trapz.

Άσκηση A (A5-A8) · Συντελεστές με trapz + Ισχύς

A5: $a_0=(1/T)\int x dt$, $b_k=(2/T)\int x \cdot \cos(k\omega_0 t)dt$, $c_k=(2/T)\int x \cdot \sin(k\omega_0 t)dt$ · A7: $P=a_0^2+1/2\sum(b_k^2+c_k^2)$

```
% Άσκηση A - Ανάλυση συντελεστών + Plot
%φάσματος

clear; close all; clc;

% Ορισμός περιόδου και θεμελιώδους
%συχνότητας
T0 = 2;           % περίοδος [sec]
f0 = 1/T0;       % θεμελιώδης συχνότητα
[Hz]
w0 = 2*pi*f0;    % γωνιακή συχνότητα
[rad/sec]

Kmax = 6;

% Grid για trapz
Ns = 5000;
dt = T0/Ns;

% Για ολοκλήρωση σε πλήρη περίοδο
%αποφεύγουμε το endpoint T0.
% Τα t=0 και t=T0 είναι το ίδιο περιοδικό
%σημείο.
% Αν βάλουμε και τα δύο, μετράμε διπλά το
%άκρο
%της περιόδου.

t1 = 0:dt:(T0-dt);

% Σήμα
x1 = 1 ...
    + 0.8*cos(w0*t1) ...
    + 0.4*cos(2*w0*t1) ...
    - 0.6*sin(3*w0*t1);
```

```
% DC συνιστώσα
a0 = (1/T0)*trapz(t1, x1);

% Fourier συντελεστές
b = zeros(1,Kmax);
c = zeros(1,Kmax);
A = zeros(1,Kmax);

for k = 1:Kmax
    b(k) = (2/T0)*trapz(t1,
        x1.*cos(k*w0*t1));
    c(k) = (2/T0)*trapz(t1,
        x1.*sin(k*w0*t1));
    A(k) = sqrt(b(k)^2 + c(k)^2);
endfor

% Ισχύς και Parseval
P_time = (1/T0)*trapz(t1,
    abs(x1).^2);
P_fs_K = a0^2 + 0.5*sum(b.^2 + c.^2);

% Plot - ΧΡΟΝΟΣ + ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
figure;

subplot(2,1,1);
plot(t1, x1, 'b', 'LineWidth', 1.5);
title('x(t) στον ΧΡΟΝΟ');
xlabel('t [sec]');
```

```
ylabel('x(t)');
grid on;
xlim([0 T0]);

A_plot = zeros(1,Kmax+1);
A_plot(1) = abs(a0);           % DC magnitude
A_plot(2:end) = A;           % A_k για k =
1..Kmax

subplot(2,1,2);
stem(0:Kmax, A_plot, 'filled');
title('Φάσμα τριγωνομετρικού πλάτους
A_k');
xlabel('k');
ylabel('A_k');
grid on;
xlim([-0.5 Kmax+0.5]);
ylim([0 1.2*max(A_plot)]);

% Εκτύπωση αποτελεσμάτων
fprintf('a0 = %.6f\n', a0);
fprintf('P_time = %.6f\n', P_time);
fprintf('P_fs_K = %.6f\n\n', P_fs_K);

fprintf(' k           b_k           c_k
A_k\n');
for k = 1:Kmax
    fprintf('%2d   %9.5f %9.5f %9.5f\n',
        k, b(k), c(k), A(k));
endfor
```

Αποτελέσματα:

$a_0 = 1.000$

$b_1 = 0.800$

$b_2 = 0.400$

$c_3 = -0.600$

υπόλοιπα ≈ 0

$A_1 = 0.800$

$A_2 = 0.400$ (ΑΡΤΙΑ!)

$A_3 = 0.600$

$P_{time} = 1.580$

$P_{fs_K} = 1.580$

A8: αν αφαιρέσω $k=2$,
χάνω $\frac{1}{2} \cdot (0.4)^2 = 0.08$
ποσοστό: 5.06%

Ο Fourier συντελεστής = το «βάρος» κάθε αρμονικής στο σύνθετο σήμα.
ΓΙΑΤΙ $b_2 \neq 0$: επειδή το σήμα ΕΧΕΙ όρο $0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t)$ · η άρτια $k=2$ ΥΠΑΡΧΕΙ.
ΠΟΥ ισχύει η ισχύς: $P_{time} = P_{fs_K}$ αν K_{max} καλύπτει όλες τις μη μηδενικές αρμονικές.

Ενότητα 2

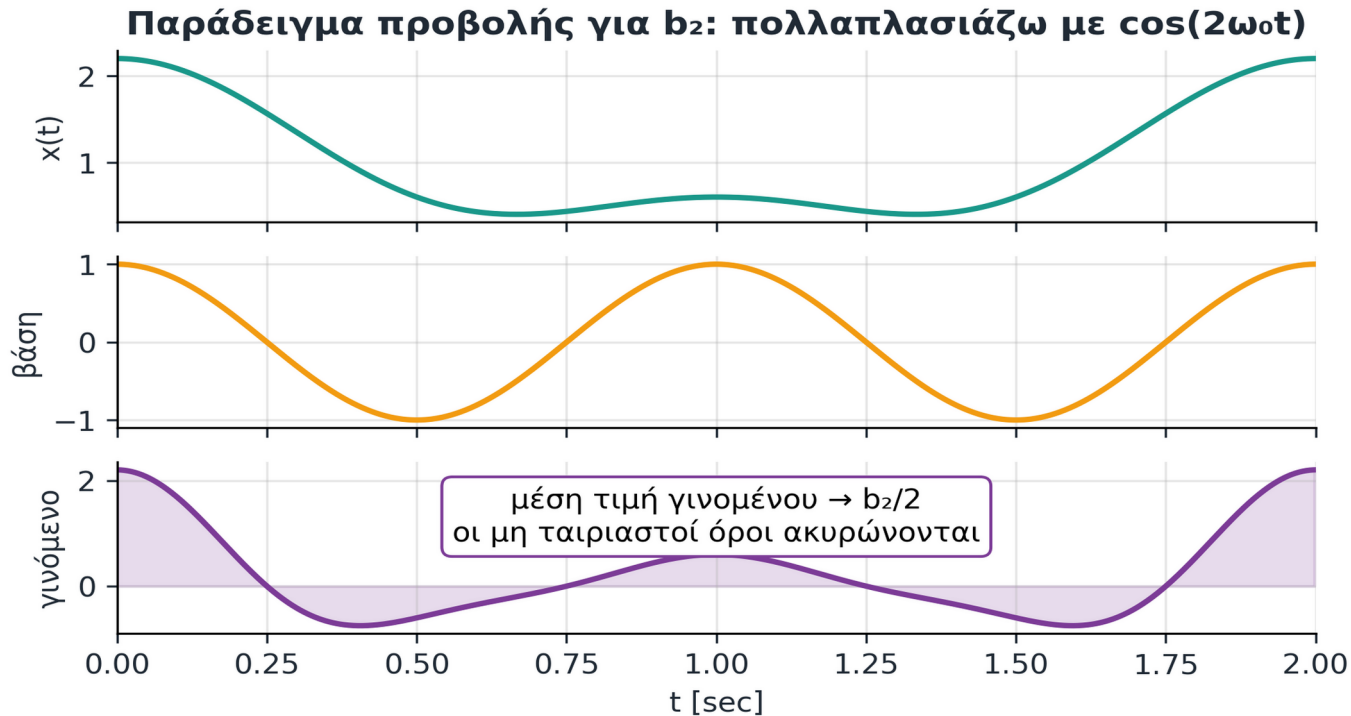
Συντελεστές + Ορθογωννικότητα + Άσκηση Β

Από σήμα σε συντελεστές · γιατί τα ολοκληρώματα δουλεύουν

Ορθογωνικότητα - πότε εμφανίζεται και πώς τη χρησιμοποιώ

Η FS δουλεύει επειδή κάθε αρμονική απομονώνεται σαν προβολή.

Εκφώνηση: Για $x(t)=1+0.8\cos(\omega_0 t)+0.4\cos(2\omega_0 t)$, δείξε γιατί ο υπολογισμός του b_2 κρατά μόνο τον όρο $\cos(2\omega_0 t)$ και μηδενίζει τους υπόλοιπους.



Πού τη συναντάμε στη FS

1. Στους τύπους b_k και c_k : απομονώνω μία συχνότητα.
2. Στο Parseval: μηδενίζονται οι διασταυρούμενοι όροι.
3. Στο FFT όταν το παράθυρο περιέχει ακέραιο αριθμό περιόδων.
4. Στο leakage όταν αυτό ΔΕΝ ισχύει.

Γρήγορη πρακτική

Δίνεται $x(t)=2\sin(3\omega_0 t)+5\cos(4\omega_0 t)$.
Μη μηδενικοί: $c_3=2$, $b_4=5$.
Όλοι οι άλλοι συντελεστές είναι 0.

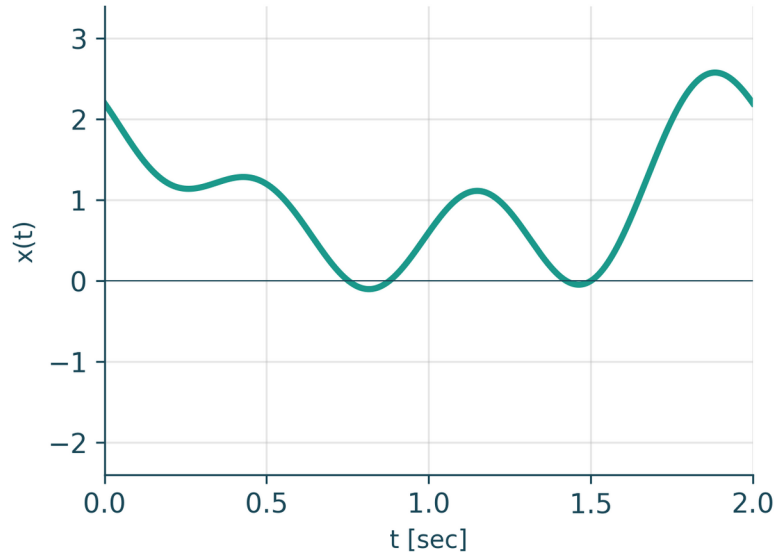
Κανόνας: η ορθογωνικότητα δεν λέει ότι «μηδενίζονται αρμονικές». Λέει ότι όταν προβάλλω σε μία βάση, οι άλλες βάσεις δίνουν ολοκλήρωμα 0.

Πώς βρίσκω τα βάρη; Γιατί οι συντελεστές είναι ολοκληρώματα

Οι τύποι είναι ΠΡΟΒΟΛΕΣ του σήματος πάνω σε ορθογώνιες βάσεις.

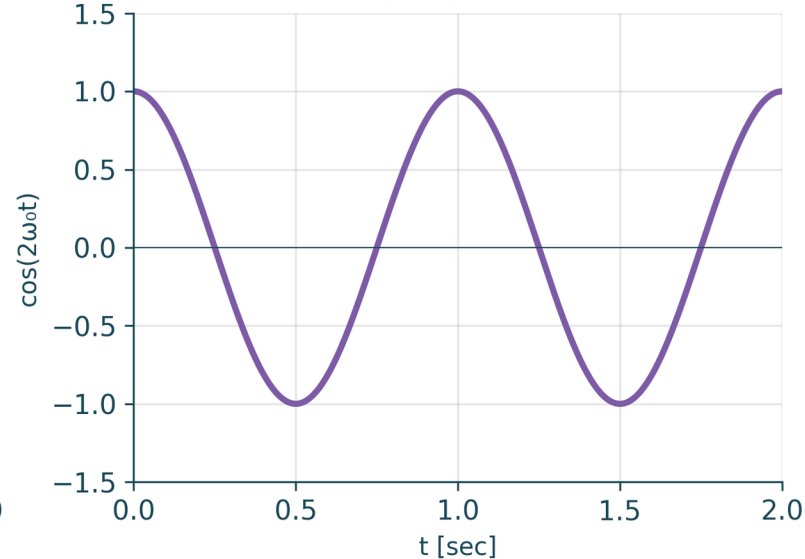
ΣΤΟΧΟΣ: να δούμε γεωμετρικά γιατί $b_k = (2/T_0) \cdot \int x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt$ βρίσκει ακριβώς το «βάρος» της $\cos(k\omega_0 t)$.

1) Το σήμα $x(t)$

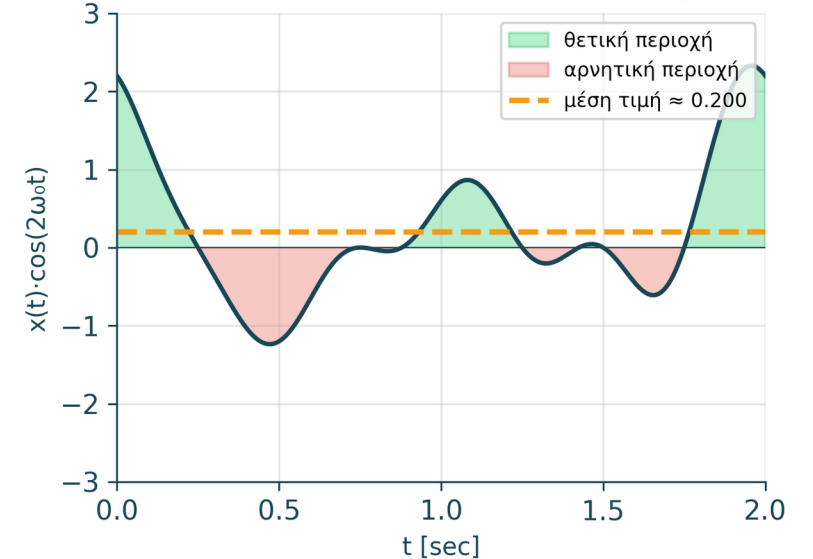


1) το σήμα $x(t)$ · 2) η βάση $\cos(2\omega_0 t)$ · 3) το γινόμενο τους (πράσινο = θετικές περιοχές, κόκκινο = αρνητικές). Η ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ του γινομένου $\approx b_2/2 = 0.20$.

2) Η βάση $\cos(2\omega_0 t)$



3) Γινόμενο $x(t) \cdot \cos(2\omega_0 t) \rightarrow b_2 = 2 \cdot \text{avg} = 0.40$



Σύνθεση

$x(t) = a_0 + \sum [b_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + c_k \cdot \sin(k\omega_0 t)]$
 b_k = βάρος της $\cos(k\omega_0 t)$ βάσης.

Ανάλυση (projection)

$b_k = (2/T_0) \cdot \int x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt$
 Ο τύπος μετράει μέσο γινόμενο σε μία περίοδο.

Συχνά λάθη

Λάθος T_0 ή μη πλήρης περίοδος \rightarrow leakage.
 Endpoint $t=T_0$ στο grid \rightarrow διπλή μέτρηση.

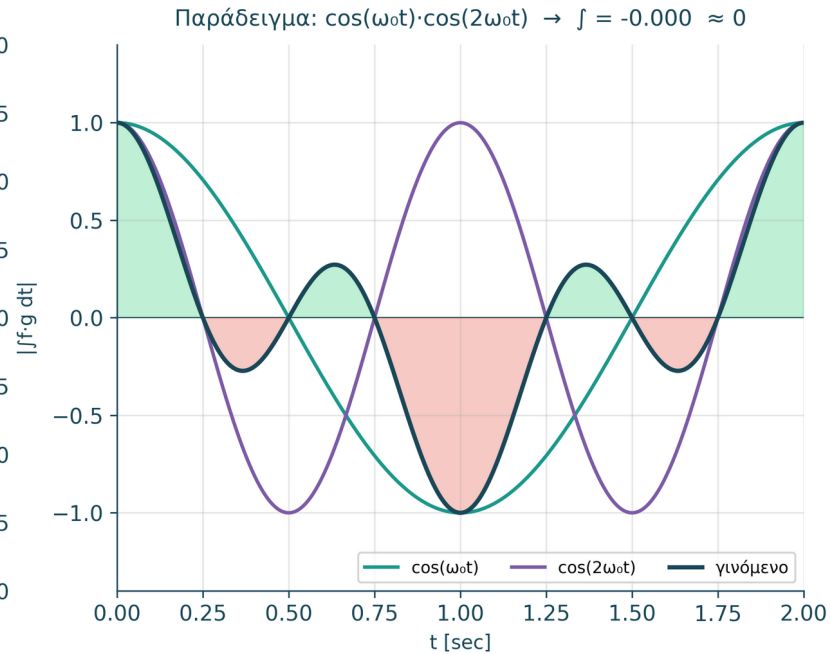
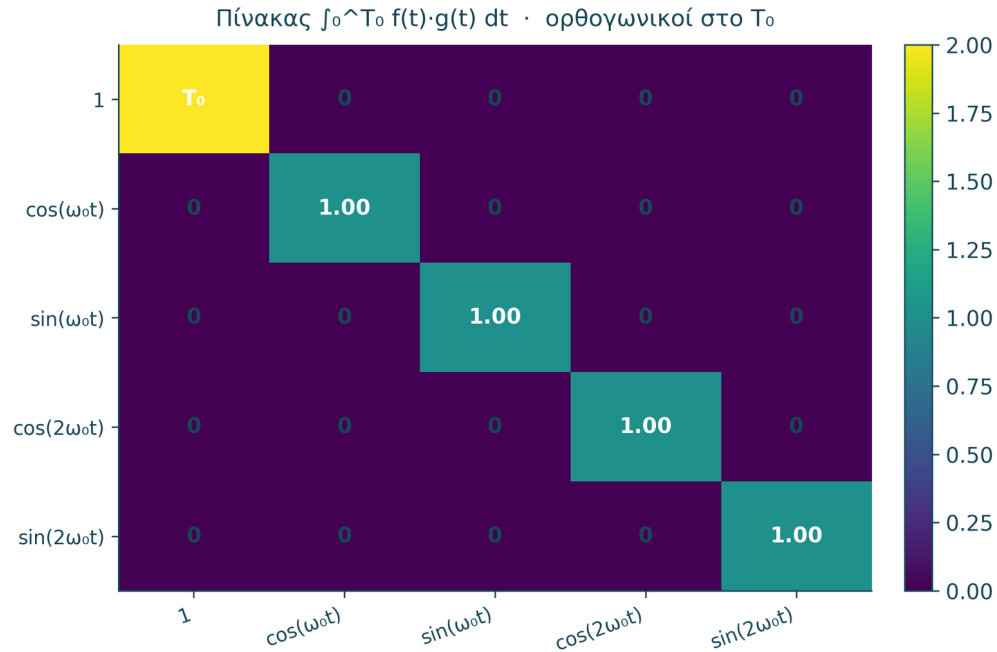
Ο τύπος του b_k μετράει «πόση $\cos(k\omega_0 t)$ υπάρχει στο $x(t)$ ». Είναι ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ · όχι αυθαίρετος ορισμός.

Διαδικασία: 1) Πολλαπλασιάζω σήμα \times βάση · 2) Παίρνω μέση τιμή σε πλήρη περίοδο · 3) Οι μη ταιριαστές αρμονικές ακυρώνονται μόνες τους.

Ορθογωνικότητα ημιτονοειδών - σωστοί ισχυρισμοί

Τι ακριβώς μηδενίζεται · και τι όχι.

ΕΚΦΩΝΗΣΗ ελέγχου: να εξηγηθεί γιατί το b_2 επιβιώνει όταν το $x(t)$ περιέχει $\cos(2\omega_0 t)$, μέσω του πίνακα ολοκληρωμάτων.



αριστερά πίνακας εσωτερικών γινομένων $\int_0^{T_0} f \cdot g dt$ — μόνο η διαγώνιος επιβιώνει (T_0 για DC, $T_0/2 = 1$ για \cos/\sin). Δεξιά παράδειγμα $\cos(\omega_0 t) \cdot \cos(2\omega_0 t)$: θετικές και αρνητικές περιοχές ίσου εμβαδού \rightarrow ολοκλήρωμα μηδέν.

Σωστοί ισχυρισμοί για $m, n \geq 1$

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cdot \cos(n\omega_0 t) dt = T_0/2 \text{ αν } m=n, \text{ αλλιώς } 0$$

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = T_0/2 \text{ αν } m=n, \text{ αλλιώς } 0$$

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cdot \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \text{ πάντα}$$

Παράδειγμα στην FS

Αν $x(t) = 1 + 0.8 \cdot \cos(\omega_0 t) + 0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t)$, τότε στον b_2 επιβιώνει μόνο το $0.4 \cdot \cos(2\omega_0 t)$.
Οι DC και $\cos(\omega_0 t)$ όροι έχουν προβολή 0 πάνω στη $\cos(2\omega_0 t)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: δεν μηδενίζονται οι ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ γενικά — μηδενίζονται οι ΠΡΟΒΟΛΕΣ σε λάθος βάση.

Άσκηση Β · Επαλήθευση συντελεστών με trapz + Μονάδες

Εκφώνηση:

Δίνεται περιοδικό σήμα τάσης στον ΧΡΟΝΟ με περίοδο $T_0 = 2 \text{ sec}$, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi \text{ rad/sec}$:

$$x(t) [\text{V}] = 0.5 + 1.2 \cdot \cos(\omega_0 t) - 0.7 \cdot \sin(2\omega_0 t) + 0.3 \cdot \cos(4\omega_0 t)$$

Μονάδες μέτρησης:

$x(t)$: τάση [V]

t : χρόνος [sec]

T_0 : περίοδος [sec]

ω_0 : γωνιακή συχνότητα [rad/sec]

a_0, b_k, c_k, A_k : τάση [V]

P (μέση ισχύς): [V^2] (αν $R=1\Omega$)

Ζητούμενα (numerical με trapz, $k = 1, \dots, 6$):

B1. Να υπολογιστεί ο a_0 (DC) [V].

B2. Να υπολογιστούν b_k και c_k για $k = 1 \dots 6$.

B3. Να υπολογιστεί το πλάτος $A_k = \sqrt{(b_k^2 + c_k^2)}$ [V].

B4. Να εντοπιστούν οι ΕΝΕΡΓΕΣ αρμονικές.

B5. Να υπολογιστεί η μέση ισχύς:

(α) από χρόνο: $P = (1/T_0) \cdot \int |x|^2 dt$

(β) από συντελεστές: $P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (b_k^2 + c_k^2)$

Παρατήρηση: εδώ $k=3$ είναι ΜΗ-ΕΝΕΡΓΗ

αλλά $k=4$ είναι ΕΝΕΡΓΗ

Επανάληψη μεθοδολογίας με νέο σήμα · αλλά εδώ είναι επαλήθευση συντελεστών: γνωρίζουμε αναλυτικά το σήμα και επαληθεύουμε numerical το $x(t)$ σε δείγματα.

Μονάδες: όλοι οι Fourier συντελεστές κρατούν τις ΙΔΙΕΣ μονάδες με το σήμα · εδώ Volts.

ΠΟΤΕ ≈ 0 : αν $|A_k| < 1e-3 \cdot \max(|A|)$ → αριθμητικό μηδέν (numerical noise από trapz).

Άσκηση Β - τύποι, κώδικας και έλεγχος Parseval

$$x(t) [V] = 0.5 + 1.2 \cdot \cos(\omega_0 t) - 0.7 \cdot \sin(2\omega_0 t) + 0.3 \cdot \cos(4\omega_0 t), \quad T_0 = 2 \text{ sec}, \quad \omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi \text{ rad/sec}$$

Τυπολόγιο:

$$a_0 = (1/T_0) \int x(t) dt$$

$$b_k = (2/T_0) \int x(t) \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$c_k = (2/T_0) \int x(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

$$A_k = \sqrt{(b_k^2 + c_k^2)}$$

$$P_{\text{time}} = (1/T_0) \int |x|^2 dt$$

$$P_{\text{FS}} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (b_k^2 + c_k^2)$$

Αποτελέσματα

$$a_0 = 0.500$$

$$A_1 = 1.200, A_2 = 0.700, A_3 = 0, A_4 = 0.300$$

Ενεργές αρμονικές: $k=1,2,4$

$$P_{\text{time}} = 1.260 \text{ V}^2, P_{\text{FS}} = 1.260 \text{ V}^2$$

Σχόλιο: το ίδιο αποτέλεσμα ισχύος δεν ελέγχει μόνο του φάση και πρόσημα. Ελέγχει όμως ότι η κατανομή ισχύος είναι συνεπής.

```
T0 = 2; w0 = 2*pi/T0;
Ns = 5000; dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt);
x = 0.5 + 1.2*cos(w0*t) ...
    -0.7*sin(2*w0*t) ...
    +0.3*cos(4*w0*t);

a0 = (1/T0)*trapz(t,x);
Kmax = 6;
for k = 1:Kmax
    b(k) = (2/T0)*trapz(t,x.*cos(k*w0*t));
    c(k) = (2/T0)*trapz(t,x.*sin(k*w0*t));
    A(k) = sqrt(b(k)^2+c(k)^2);
endfor
P_t = (1/T0)*trapz(t,abs(x).^2);
P_f = a0^2 + 0.5*sum(b.^2+c.^2);
```

Σωστή ανάγνωση

Δεν υπάρχει κανόνας «μόνο περιττές» ή «μόνο άρτιες». Το συγκεκριμένο σήμα κατασκευάστηκε με $k=1,2,4$. Η ορθογωνικότητα απλώς μας επιτρέπει να τα ανακτήσουμε καθαρά με trapz.

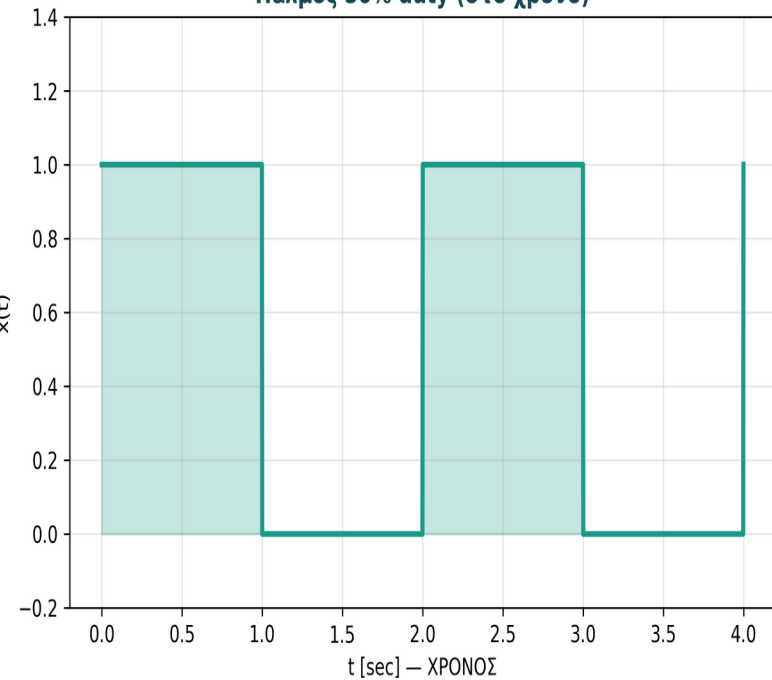
Ενότητα 3

Παλμοσειρές: Duty cycle, ανασύνθεση & Gibbs

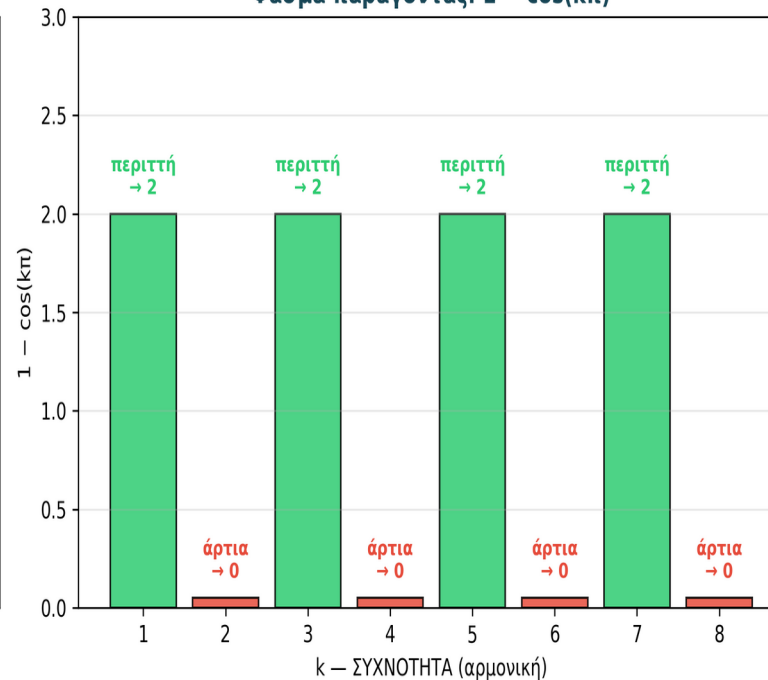
Πώς το duty αλλάζει το φάσμα · εφαρμογή sinc · Reconstruction

Γιατί ο 50% παλμός μηδενίζει τις άρτιες; (πλήρης παραγωγή)

Παλμός 50% duty (στο χρόνο)



Φάσμα παράγοντας: $1 - \cos(k\pi)$



Παραγωγή α_k :

Παλμός 50%, $A=1$, $T_{on}=T_0/2$:

$$\begin{aligned}\alpha_k &= (1/T_0) \int_0^{T_0/2} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= (1/T_0) \cdot [e^{-jk\omega_0 t} / (-jk\omega_0)]_0^{T_0/2} \\ &= (1 - e^{-jk\pi}) / (j \cdot 2\pi k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Με } e^{-jk\pi} &= \cos(k\pi) - j \cdot \sin(k\pi) \\ &= \cos(k\pi) \quad (\sin(k\pi)=0) \\ &= (-1)^k\end{aligned}$$

Άρα:

$$\alpha_k = (1 - (-1)^k) / (j \cdot 2\pi k)$$

- k άρτιο: $(-1)^k = 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 \rightarrow \alpha_k = 0$
- k περιττό: $(-1)^k = -1 \rightarrow 1 - (-1) = 2 \rightarrow \alpha_k = 2 / (j \cdot 2\pi k) = 1 / (j\pi k)$

Τελικός τύπος + c_k form:

$\alpha_k = 1 / (j\pi k)$ για k περιττό = $2 / (j \cdot 2\pi k)$ · εκθετική μορφή

$c_k = -2 \cdot \text{Im}\{\alpha_k\} = +2 / (\pi k)$ για k περιττό · τριγωνομετρική (sin) μορφή

$b_k = 2 \cdot \text{Re}\{\alpha_k\} = 0$ (η συγκεκριμένη αρχή χρόνου δίνει sine series, ΟΧΙ άρτια συνάρτηση)

Επομένως: $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \sin(\omega_0 t) + \frac{2}{3\pi} \cdot \sin(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi} \cdot \sin(5\omega_0 t) + \dots$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ: 0/1 unipolar 50%: $a_0 = \frac{1}{2}$, $c_k = 2 / (\pi k)$ (το μάθημα) vs ± 1 bipolar 50%: $a_0 = 0$, $c_k = 4 / (\pi k)$

Παραγωγή αναλυτικά: $\alpha_k = (1 - (-1)^k) / (j \cdot 2\pi k)$. Άρτιο $k \rightarrow 0$. Περιττό $k \rightarrow 2 / (j\pi k \cdot 2) = 1 / (j\pi k)$.

ΓΙΑΤΙ μηδενίζονται άρτιες: το $(-1)^k$ για άρτιο k δίνει 1, άρα αριθμητής $1 - 1 = 0$.

ΠΟΥ φαίνεται: επόμενα slides · sinc envelope + Άσκηση Γ + Reconstruction.

Άσκηση Γ · Πώς το duty cycle αλλάζει το φάσμα (D=50% vs D=1/3)

Εκφώνηση:

Δίνονται δύο περιοδικοί τετραγωνικοί παλμοί στον ΧΡΟΝΟ, και οι δύο με ίδια περίοδο $T_0 = 2 \text{ sec}$ και πλάτος $A = 1$:

$x_1(t)$: duty $D_1 = 50\%$ ($T_{\text{on}} = 1.0 \text{ sec}$) · «ισορροπημένο 50%» ($T_{\text{on}} = T_{\text{off}} = T_0/2$)

$x_2(t)$: duty $D_2 = 1/3$ ($T_{\text{on}} \approx 0.667 \text{ sec}$) · «ασύμμετρος»: $T_{\text{on}} \neq T_{\text{off}}$ ($T_{\text{off}} = 2 \cdot T_{\text{on}}$)

Όπου «ασύμμετρος» = ο χρόνος ON δεν είναι ίσος με τον χρόνο OFF μέσα σε μία περίοδο. Σ

Σκοπός: να αποδείξουμε με numerical υπολογισμό ότι το pattern μηδενισμών των αρμονικών εξαρτάται από το duty cycle · ΟΧΙ απλώς από «αν είναι τετραγωνικό σήμα».

Ζητούμενα · υπολόγισε με trapz, $k = 1, \dots, 12$:

- Γ1. Υπολογισμός a_0 (DC) για κάθε σήμα.
- Γ2. Υπολογισμός $A_k = \sqrt{(b_k^2 + c_k^2)}$ για κάθε σήμα.
- Γ3. Πίνακας: ποιες αρμονικές μηδενίζονται στο D=50% και ποιες στο D=1/3;
- Γ4. Υπάρχει ΠΕΡΙΤΤΗ αρμονική που μηδενίζεται; (Γενική γνώμη: ΟΧΙ · αλλά ισχύει;)
- Γ5. Plot 4-grid: x_1 ΧΡΟΝΟΣ + A_k ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ + x_2 ΧΡΟΝΟΣ + A_k ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ για D=50% και για D=1/3.
- Γ6. Επαλήθευση: $a_k = A \cdot D \cdot \text{sinc}(kD)$ · μηδενίζεται στις θέσεις $kD = \text{ακέραιος}$.

Τι να προσέξουμε:

- Πλήρης περίοδος στο grid:
 $t = 0 : T_0/N_s : T_0 - dt$
- Αριθμητικό μηδέν:
 $|a_k| < 1e-3 \iff \approx 0$
- Μην γενικεύεις από D=50% σε όλα τα D!
- Συνήθης παρανόηση:
«τετραγωνικός = μόνο περιττές αρμονικές»
ισχύει ΜΟΝΟ για D=50%.
- Εφαρμογή: σχεδιασμός φίλτρων με γνώση φάσματος.

Στόχος: να εξαλειφθεί η λάθος ιδέα «ο τετραγωνικός μηδενίζει πάντα τις άρτιες». Ισχύει ΜΟΝΟ για D=50%.

ΓΙΑΤΙ σπάει: για D=1/3, η περιττή $k=3$ μηδενίζεται ($\text{sinc}(1) = 0$).

ΠΩΣ: numerical με trapz για $k=1..12$ + 4-plot grid + αναλυτική επαλήθευση μέσω sinc.

Άσκηση Γ · Code πλήρες + 4-plot grid + Παράμετροι

Τι βλέπουμε στα 4 plots:

- $x_1(t)$ Duty Cycle =50% στον ΧΡΟΝΟ
- A_k φάσμα D=50% (συχνότητα)
- $x_2(t)$ D=1/3 στον ΧΡΟΝΟ
- A_k φάσμα D=1/3 (συχνότητα)

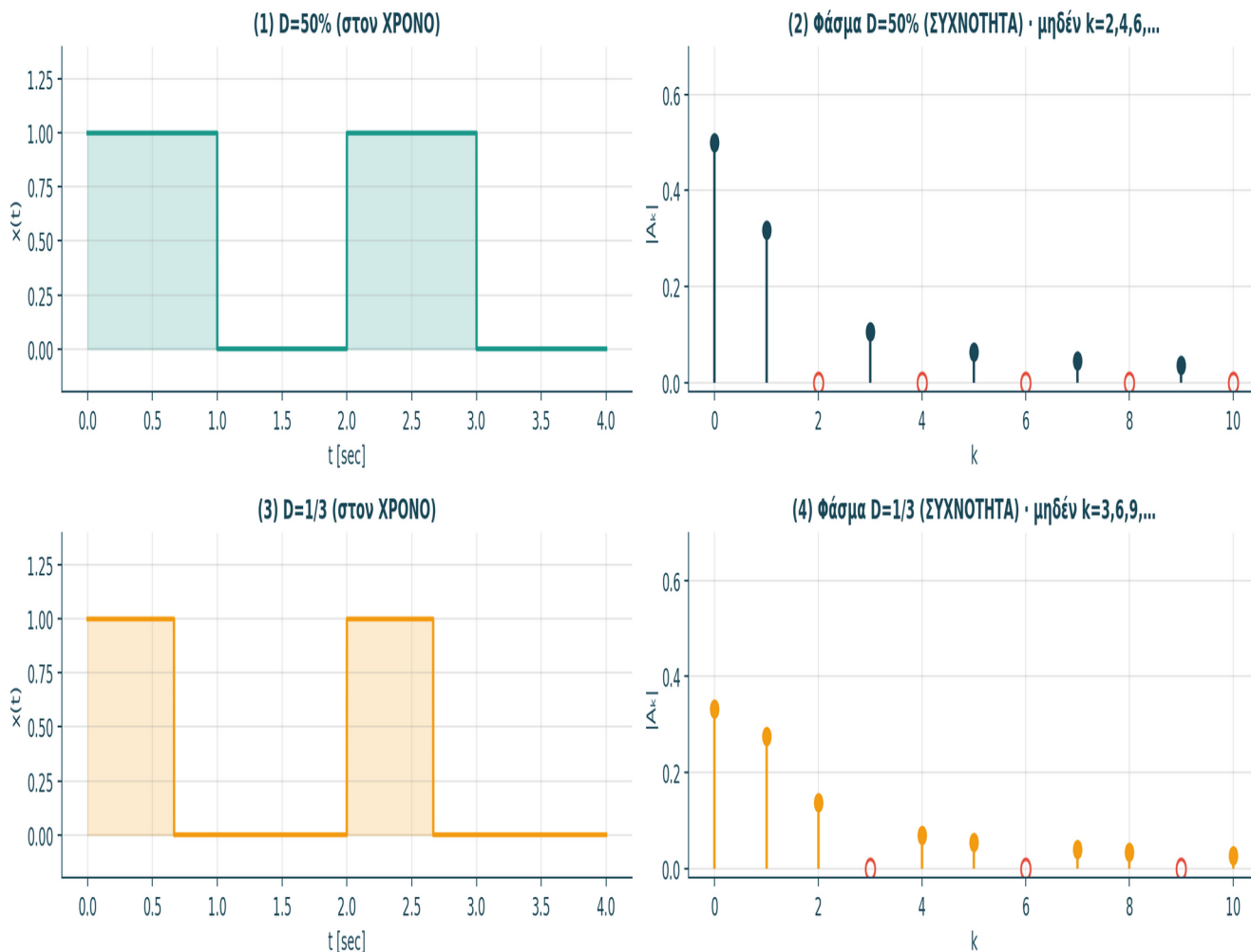
```
% Άσκηση Γ · Σύγκριση 50% vs 1/3 (πλήρες με 4-plot grid)
T0 = 2; w0 = 2*pi/T0;
Ns = 5000; dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt);

D1 = 0.50;      D2 = 1/3;
x1 = double(t < D1*T0); x2 = double(t < D2*T0);

Kmax = 12;
A1 = zeros(1,Kmax+1); A2 = zeros(1,Kmax+1);
A1(1) = (1/T0)*trapz(t, x1);
A2(1) = (1/T0)*trapz(t, x2);
for k = 1:Kmax
    b1 = (2/T0)*trapz(t, x1.*cos(k*w0*t));
    c1 = (2/T0)*trapz(t, x1.*sin(k*w0*t));
    A1(k+1) = sqrt(b1^2 + c1^2);
    b2 = (2/T0)*trapz(t, x2.*cos(k*w0*t));
    c2 = (2/T0)*trapz(t, x2.*sin(k*w0*t));
    A2(k+1) = sqrt(b2^2 + c2^2);
end

figure;
subplot(2,2,1); plot(t,x1,'b','LineWidth',2);
    title('D=50% (χρόνος)'); xlabel('t [sec]');
ymax = 1.1*max([A1(:); A2(:)]);
subplot(2,2,2); stem(0:Kmax,A1,'b','filled'); ylim([0 ymax]);
    title('A_k D=50%'); xlabel('k'); grid on;
subplot(2,2,3); plot(t,x2,'r','LineWidth',2);
    title('D=1/3 (χρόνος)'); xlabel('t [sec]');
subplot(2,2,4); stem(0:Kmax,A2,'r','filled'); ylim([0 ymax]);
    title('A_k D=1/3'); xlabel('k'); grid on;
```

Σύγκριση φασμάτων: 4 panels για 2 παλμούς · ΧΡΟΝΟΣ vs ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



Σύγκριση: D=50% μηδενίζει άρτιες · D=1/3 μηδενίζει k=3,6,9,...

ΓΙΑΤΙ διαφορά: pattern μηδενισμών εξαρτάται από την $\sin(k\pi D)$.

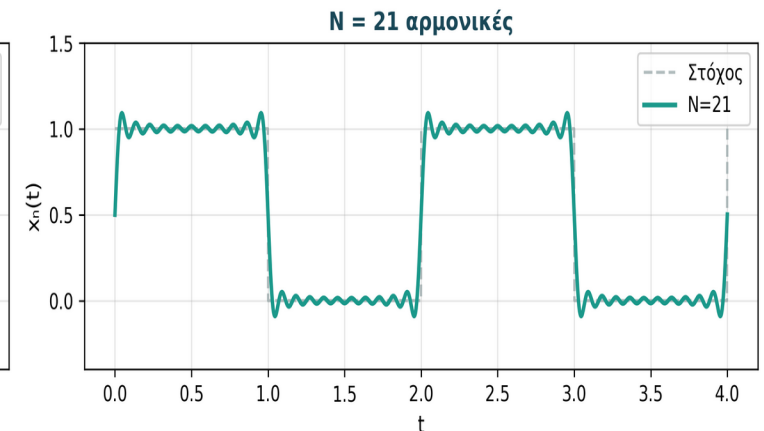
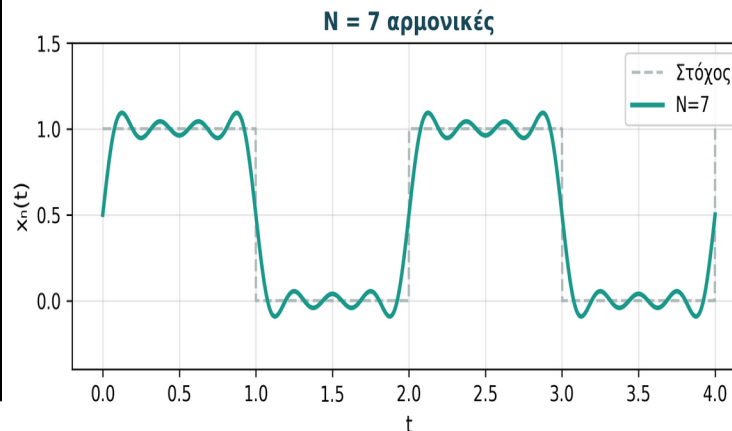
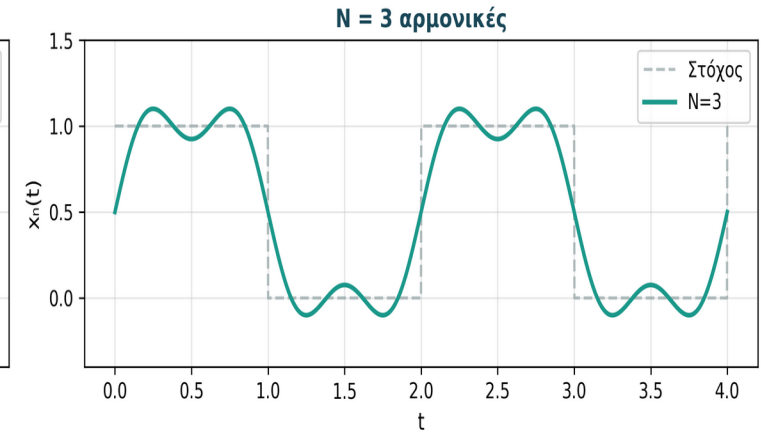
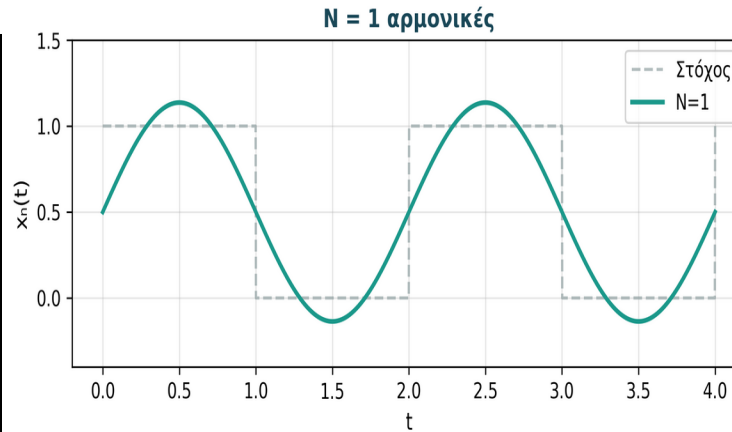
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: ΔΥΟ μηχανισμοί δίνουν μηδενικούς συντελεστές: συμμετρία (κατηγορίες) + duty cycle (sinc zeros).

Άσκηση Δ · Ανακατασκευή τετραγωνικού (N=1,3,7,21)

Δημιούργησε παλμό 50% με $T_0=2$: $x(t)=1$ για $0 \leq t < 1$, $x(t)=0$ για $1 \leq t < 2$. Συντελεστές: $a_0=1/2$, $c_k=2/(k\pi)$ για k περιττό, αλλιώς 0.
Plot $x_n(t)$ στον ΧΡΟΝΟ για $N=1, 3, 7, 21$ αρμονικές.

```
% Άσκηση Δ · Reconstruction
T0 = 2; w0 = pi;
Ns = 5000; dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt);
x_exact = double(mod(t,T0) < 1);

figure;
idx = 1;
for N = [1 3 7 21]
    xN = 0.5 * ones(size(t));
    for k = 1:2:N
        xN = xN + (2/(k*pi))*sin(k*w0*t);
    end
    subplot(2,2,idx);
    plot(t, x_exact, 'k--', 'LineWidth', 1.2); hold on;
    plot(t, xN, 'b', 'LineWidth', 1.8);
    ylim([-0.25 1.25]);
    if idx == 1, legend('x(t)', 'x_N(t)'); end
    title(sprintf('N=%d',N));
    xlabel('t [sec]'); grid on;
    idx = idx + 1;
end
```



$N=1,3,7,21$: όσο αυξάνονται οι αρμονικές η προσέγγιση γίνεται καλύτερη · αλλά οι ΑΚΜΕΣ μένουν προβληματικές.

ΓΙΑΤΙ προβλήματα στις ακμές: ασυνέχεια \rightarrow άπειρος όρος αρμονικών για ακρίβεια.

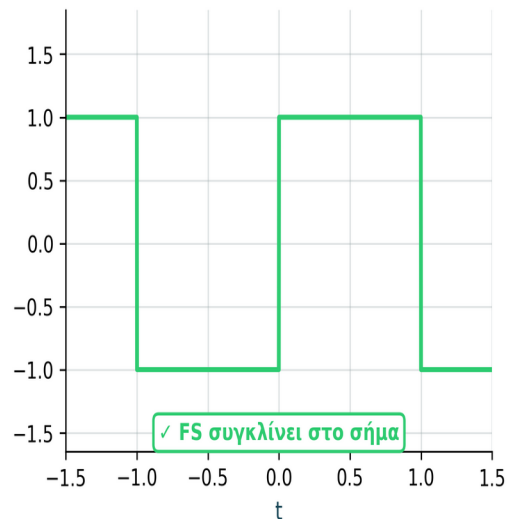
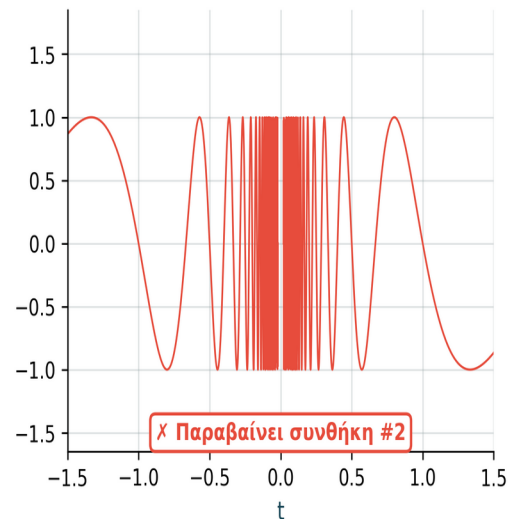
ΠΟΥ θα δούμε: επόμενο slide · Gibbs phenomenon.

Λίγη Θεωρία: Οι 3 ικανές συνθήκες για ύπαρξη και σύγκλιση της FS

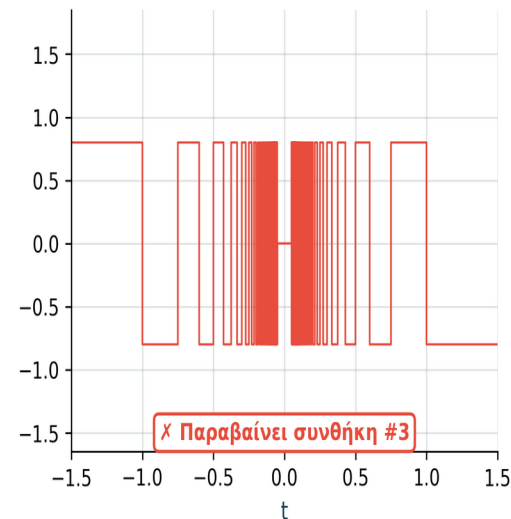
- ΣΥΝΘΗΚΗ #1 (weak Dirichlet): $\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty \rightarrow$ πεπερασμένη ολοκληρωμένη απόλυτη τιμή ανά περίοδο. Εξασφαλίζει πεπερασμένους ακ.
- ΣΥΝΘΗΚΗ #2: πεπερασμένος αριθμός maxima/minima σε κάθε περίοδο. Σήματα όπως $\sin(2\pi/t)$ γύρω από $t=0$ ΑΠΟΤΥΓΧΑΝΟΥΝ.
- ΣΥΝΘΗΚΗ #3: πεπερασμένος αριθμός πεπερασμένων ασυνεχειών σε κάθε περίοδο. Όχι «άπειρα jumps».
- ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Αν και οι 3 ικανοποιούνται, η FS συγκλίνει στο σήμα στα σημεία συνέχειας ΚΑΙ στη μέση τιμή των πλευρικών ορίων στα άλματα.

Συνθήκες Dirichlet – πότε δουλεύει η Σειρά Fourier

✓ Τετραγωνικός παλμός

✗ $\sin(2\pi/t)$ – άπειρα extrema

✗ Άπειρα jumps γύρω από t=0



ΠΟΥ ΕΦΑΡΜΟΖΟΝΤΑΙ:

- * τετραγωνικός παλμός
- * τριγωνικός
- * ημίτονο, σύνθεση ημιτόνων
- * RC pulse train
- * τα περισσότερα πρακτικά σήματα μηχανικού/εργαστηρίου

ΠΟΥ ΑΠΟΤΥΓΧΑΝΟΥΝ:

- ✗ $\sin(2\pi/t)$ γύρω από 0
 - ✗ άπειρα jumps σε διάστημα
- (θεωρητικά • όχι πρακτικά)

ΣΤΑ ΑΛΜΑΤΑ:

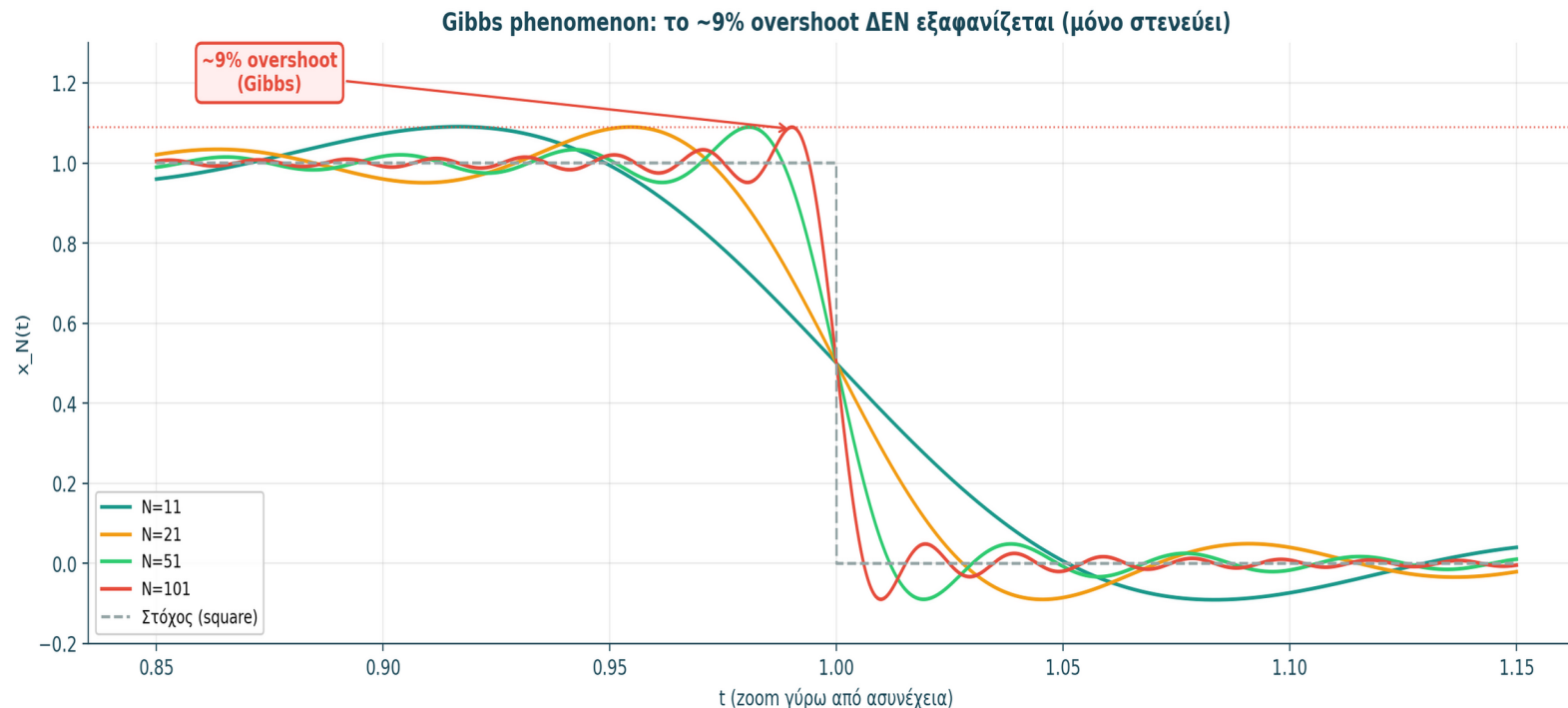
$$FS = (x(t^-) + x(t^+))/2$$

Σύνδεση με W03 (κατηγοριοποίηση σημάτων):

τα σήματα που μας ενδιαφέρουν ως μηχανικοί (πεπερασμένη ενέργεια ανά περίοδο, ομαλά τμηματικά) ικανοποιούν αυτόματα Dirichlet.

Gibbs phenomenon • αναλυτικά:

- ΓΙΑΤΙ εμφανίζεται: η FS προσεγγίζει το σήμα με ομαλές sin/cos. Σε σημείο ασυνέχειας (απότομο άλμα), οι αρμονικές «πάνε πιο πάνω» πριν στραφούν προς τη σωστή τιμή · overshoot (υπερύψωση) αναπόφευκτο.
- ΠΟΣΟ είναι: ~8.95% του ύψους του άλματος. Από που βγαίνει: **ολοκλήρωμα $\text{Si}(\pi) = \int(0..\pi) \sin(x)/x dx \approx 1.8519$** , και $(\text{Si}(\pi)/\pi) - 1/2 \approx 0.0895$. Αυτή είναι η **ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ** τιμή της υπερύψωσης ως $N \rightarrow \infty$.
- ΠΟΥ εμφανίζεται: ΜΟΝΟ σε σημεία ασυνέχειας · ομαλά σήματα ΔΕΝ έχουν Gibbs.
- ΠΩΣ συμπεριφέρεται με N: η ΠΕΡΙΟΧΗ της υπερύψωσης στενεύει, το ΥΨΟΣ ~9% μένει σταθερό.



```
% Gibbs ~9% · γιατί ΔΕΝ
% εξαφανίζεται με μεγάλο N
T0 = 2; w0 = pi;
t = linspace(0.85, 1.15, 2000);

figure; hold on;
for N = [11 21 51 101]
    xN = 0.5*ones(size(t));
    for k = 1:2:N
        xN = xN+(2/(k*pi))*sin(k*w0*t);
    end
    plot(t, xN, 'LineWidth', 1.4);
end
% Reference lines: ±9% του άλματος
plot([min(t) max(t)],[1.0895 1.0895],'r--');
plot([min(t) max(t)],[ -0.0895 -0.0895],'r--');
text(0.86, 1.10, '+9%');
text(0.86, -0.06, '-9%');
legend('N=11', 'N=21', 'N=51', 'N=101');
xlabel('t [sec]'); ylabel('x_N(t)');
```

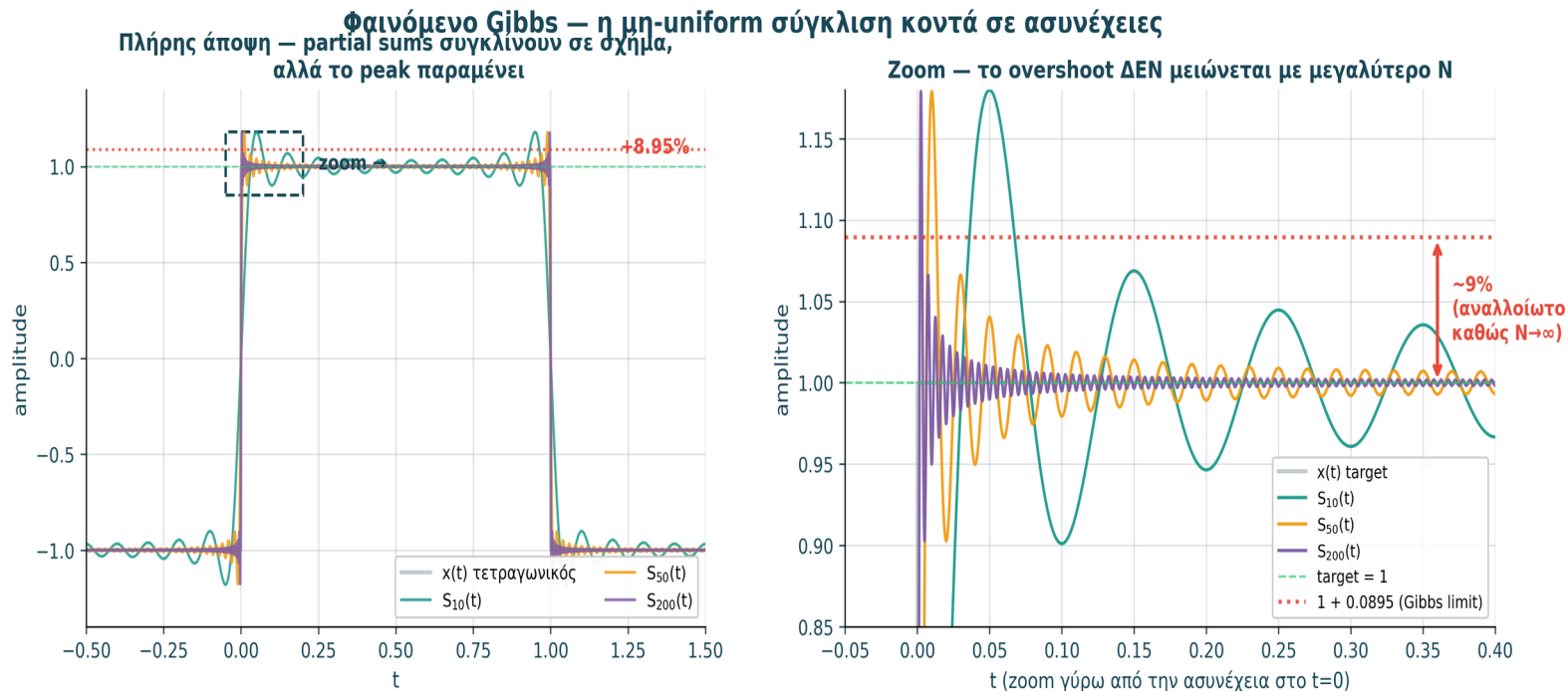
Gibbs = ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ αποτέλεσμα · όχι bug του κώδικα. Το ~9% προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\text{Si}(\pi) \approx 1.8519$.

ΓΙΑΤΙ ΔΕΝ φεύγει: η ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ σύγκλιση αποτυγχάνει κοντά στο άλμα. Στο ίδιο το σημείο ασυνέχειας, η FS συγκλίνει στη μέση των πλευρικών ορίων.

ΠΩΣ το αντιμετωπίζω: filtering για να εξομαλυνθούν οι άκρες, ή χρήση συναρτήσεων χωρίς ασυνέχειες όπου είναι δυνατόν.

Η μη-uniform σύγκλιση γύρω από ασυνέχειες · ποσοτική ανάλυση

- Τι συμβαίνει: κοντά σε σημείο ασυνέχειας, η partial sum $S_N(t)$ πέφτει σε MONIMO overshoot πάνω από το επίπεδο που πρέπει. Όσο μεγαλύτερο N , τόσο στενότερο peak · ΟΧΙ μικρότερο.
- ΠΩΣ μετριέται: Gibbs constant $G \approx 0.0894898\dots$ Για jump amplitude Δ , peak overshoot = $G \cdot \Delta$. Στο bipolar $[-1,+1]$ ($\Delta=2$): peak ≈ 1.179 . Στο unipolar $[0,1]$ ($\Delta=1$): peak ≈ 1.0895 .
- ΓΙΑΤΙ δεν εξαφανίζεται: η σύγκλιση ΕΙΝΑΙ L^2 (ολική ενέργεια σφάλματος $\rightarrow 0$) αλλά ΟΧΙ uniform. Το peak παραμένει ~9%, αλλά «κρύβεται» σε όλο και πιο μικρή χρονική περιοχή · ενέργειά του γίνεται μηδέν.



Gibbs constant:

$$G = (1/\pi) \cdot \text{Si}(\pi) - \frac{1}{2}$$

$$G \approx 0.0894898\dots$$

ΠΑΓΙΔΑ:

"More harmonics \rightarrow less overshoot" \rightarrow ΛΑΘΟΣ. Το peak μένει σταθερό, μόνο στενεύει.

Πρακτική λύση:

- windows (Hann, Hamming) · μειώνουν peak με τίμημα stopband attenuation.
- εμφανίζεται και σε digital filter design (FIR brick-wall \rightarrow ringing).

Σύνδεση W08:

Στη φασματική ανάλυση χρησιμοποιούμε windows (Hann, Hamming, Blackman) που είναι «μαλακές» εκδοχές του τετραγωνικού window · ακριβώς για να αποφύγουμε αυτό το ringing. Το ίδιο φαινόμενο εμφανίζεται και σε filter design (το «brick-wall» ideal filter δίνει ringing στο πεδίο του χρόνου).

Ενότητα 4

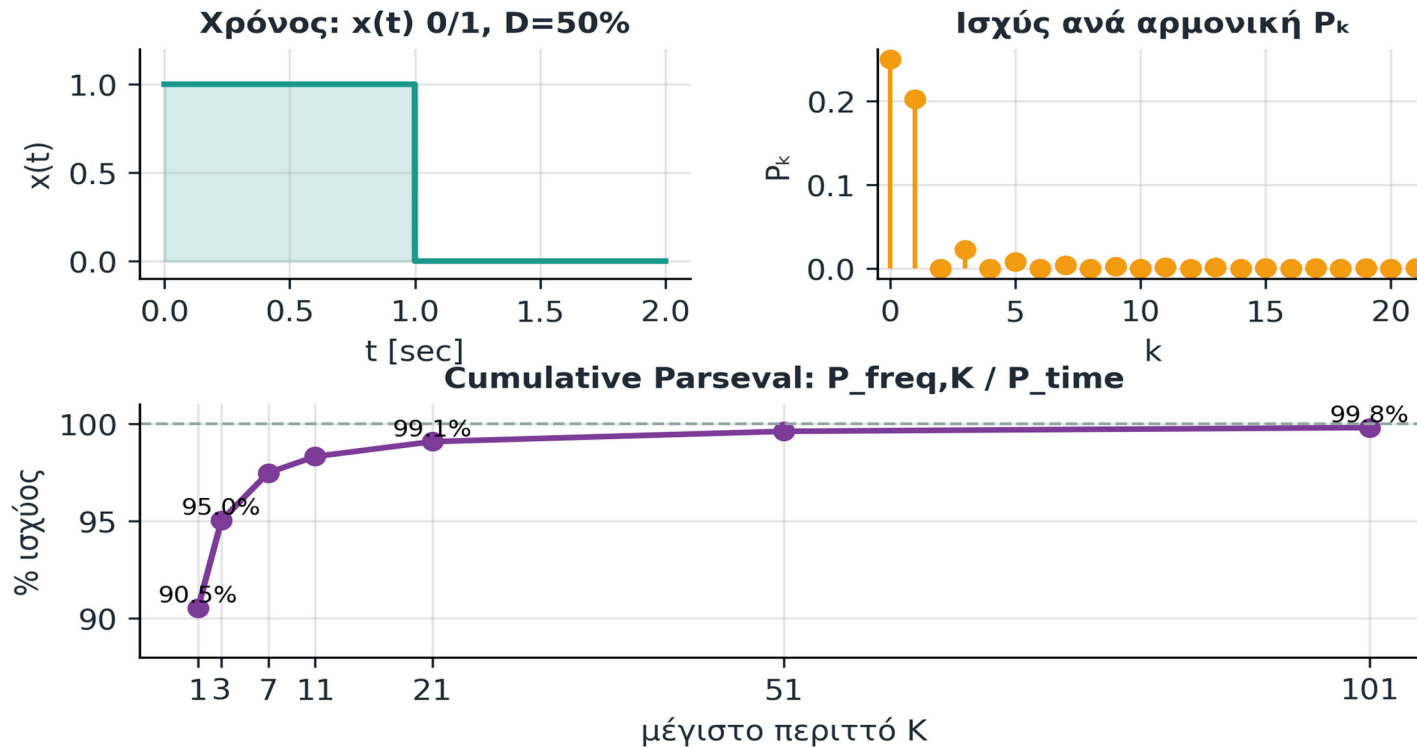
Parseval + Εκθετική + RC + W07

Ισχύς · Εκθετική FS · Καθρεπτισμός · Γέφυρα Fourier Transform

Parseval - αριθμητικό παράδειγμα με τετραγωνικό παλμό 50%

Χρόνος, φάσμα ισχύος και cumulative power στο ίδιο slide.

Εκφώνηση: Δίνεται 0/1 τετραγωνικός παλμός με $A=1$, $T_0=2$ sec, $D=50\%$. Να υπολογιστεί P_{time} , να υπολογιστεί $P_{freq,K}$ από τους συντελεστές και να σχεδιαστεί η cumulative ισχύς για $K=1,3,7,11,21,51,101$.



Θεωρητικά

$$P_{time} = (1/T_0) \int |x(t)|^2 dt = 1/2$$

$$a_0 = 1/2$$

$$c_k = 2/(\pi k) \text{ για } k \text{ περιττό}$$

$$c_k = 0 \text{ για } k \text{ άρτιο}$$

$$P_{freq,K} = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum c_k^2$$

Αριθμητικά

$$K=1 \rightarrow 90.53\%$$

$$K=3 \rightarrow 95.03\%$$

$$K=21 \rightarrow 99.08\%$$

$$K=101 \rightarrow 99.80\%$$

Πλήρης ισότητα μόνο στο $K \rightarrow \infty$.

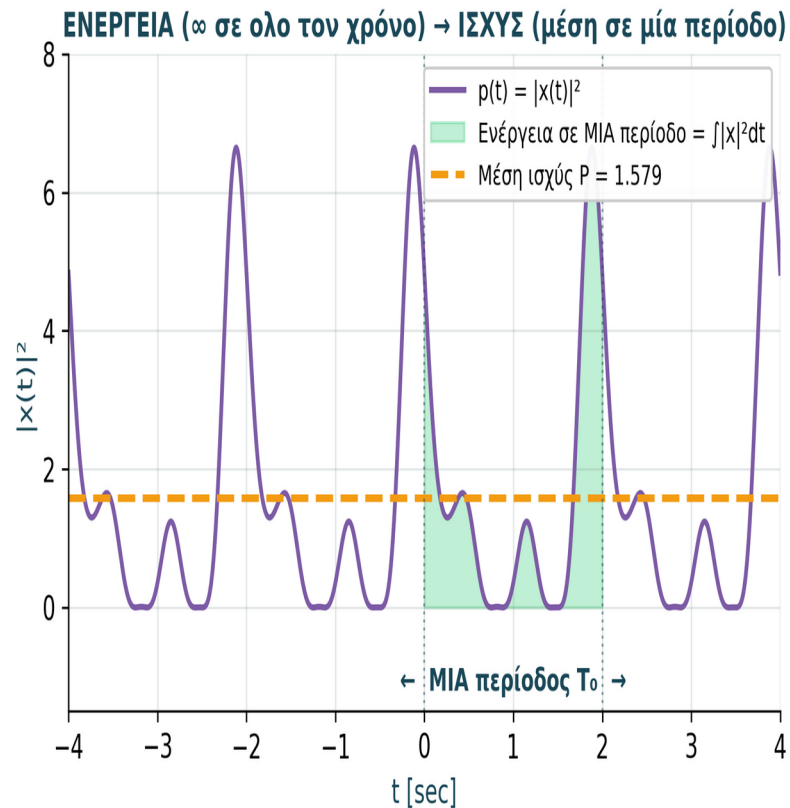
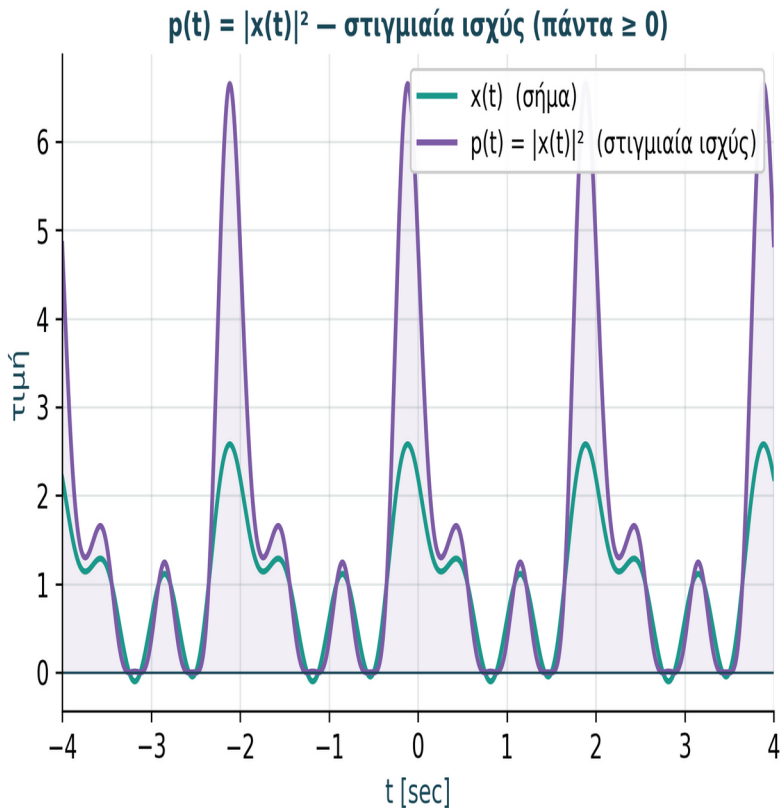
Ερμηνεία: η ασυνέχεια κάνει τους συντελεστές να πέφτουν αργά ως $1/k$, άρα η ισχύς συγκλίνει ως $1/k^2$. Το Parseval δεν αλλάζει την ισχύ - αλλάζει μόνο την περιγραφή της.

ΤΙ • ΓΙΑΤΙ • ΠΟΤΕ:

ΤΙ: Στα περιοδικά σήματα μιλάμε για ΜΕΣΗ ΙΣΧΥ P (όχι ολική ενέργεια E).

ΓΙΑΤΙ: $E = \int |x|^2 dt$ σε όλο τον χρόνο = ∞ • άχρηστο μέγεθος για περιοδικά.

ΠΟΤΕ: Σε κάθε περιοδικό σήμα $\rightarrow P = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_0} |x|^2 dt$ (μέση σε 1 περίοδο).



ΟΡΙΣΜΟΙ:

Στιγμιαία ισχύς:

$$p(t) = |x(t)|^2$$

(≥ 0 ΠΑΝΤΑ, $R=1\Omega$)

Ενέργεια σε ΜΙΑ περίοδο:

$$E_T = \int_0^{T_0} |x|^2 dt$$

(πεπερασμένη)

Μέση ισχύς:

$$P = E_T / T_0$$

(πεπερασμένη)

Συνολική ενέργεια:

$$E_{-\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 dt = \infty$$

ΑΧΡΗΣΤΟ

Σήμα A ($T_0=2$):

$$P = 1.579 \checkmark$$

$$E_{-\infty} = \infty$$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ σήματα: **άπειρη ενέργεια** αλλά **ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗ μέση ισχύς**. Δουλεύουμε ΠΑΝΤΑ με P ισχύ, ποτέ με $E_{-\infty}$.

Γραφικό: αριστερά $x(t)$ και η $p(t)=|x(t)|^2$ (πάντα ≥ 0). Δεξιά: ΕΝΕΡΓΕΙΑ σε μία περίοδο = πράσινο εμβαδό • ΜΕΣΗ ΙΣΧΥΣ = πορτοκαλί διακεκομμένη.

ΕΠΟΜΕΝΟ slide (σ42): Parseval θεωρία • γιατί η ισχύς διατηρείται από χρόνο σε FS συντελεστές.

Τριγωνομετρική σύμβαση:

$$P = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^2 + c_k^2)$$

Όροι: DC + $\frac{1}{2} \times$ σύνολο (cos+sin)

Το $\frac{1}{2}$ προέρχεται από ορθογωνικότητα $\cos^2/\sin^2 = T_0/2$

Εκθετική σύμβαση:

$$P = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

Όροι: όλοι οι μιγαδικοί συντελεστές

ΧΩΡΙΣ $\frac{1}{2}$ (γιατί συμμετρικό άθροισμα) σε $k = -\infty \dots +\infty$

ΓΙΑΤΙ ισχύει η διατήρηση ισχύος;

Η FS είναι ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ μετασχηματισμός: μεταφέρει το σήμα σε «νέα βάση» (αρμονικές) ΧΩΡΙΣ απώλεια. Τι είναι «μεταφορά σε νέα βάση»: όπως ένα διάνυσμα μπορεί να γραφτεί σε σύστημα συντεταγμένων (X, Y) ή μετά από περιστροφή σε νέο (X', Y') · ΟΥΤΕ το διάνυσμα ούτε το μήκος του αλλάζουν, μόνο οι ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.

Στη FS: το σήμα $X(t)$ είναι ένα «διάνυσμα» στον χώρο σημάτων. Η νέα βάση = **όλα τα $\cos(k\omega_0 t) + \sin(k\omega_0 t)$** . Οι αρμονικές A_k είναι οι «νέες συντεταγμένες». Το «μήκος²» = ισχύς διατηρείται (Parseval).

Συχνά λάθη που πρέπει να αποφύγεις:

- Ξεχνάς το $\frac{1}{2}$ στους $b^2 + c^2$ · υπερεκτίμηση P_{freq} κατά 2x.
- Χρησιμοποιείς εκθετική σύμβαση και υπολογίζεις $P = \frac{1}{2} \cdot \sum |a_k|^2$ · η εκθετική ΔΕΝ έχει $\frac{1}{2}$.
- Ολοκληρώνεις πάνω σε ΛΑΘΟΣ T_0 → η ισχύς θα είναι λάθος.
- Χρησιμοποιείς πεπερασμένο K χωρίς να ελέγξεις σύγκλιση (συχνά <99% με 10 αρμονικές).
- ΚΑΛΗ ΠΡΑΚΤΙΚΗ: να συγκρίνεις P_{time} vs P_{freq} για επαλήθευση.

Parseval = ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ μετασχηματισμός FS διατηρεί την ισχύ · όπως περιστροφή διατηρεί το μήκος διανύσματος.

ΑΝΑΓΚΑΙΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ συνέπειας: $P_{\text{time}} \neq P_{\text{freq}}$ → σίγουρα λάθος. $P_{\text{time}} = P_{\text{freq}}$ → ΠΙΘΑΝΟΝ σωστά (εναλλαγές προσήμου/φάσης περνούν).

Με πεπερασμένο K : $P_{\text{freq}_K} = a_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^K (b_k^2 + c_k^2) \leq P_{\text{time}}$. Πλήρης ισότητα μόνο όταν K καλύπτει όλες τις μη-μηδενικές αρμονικές.

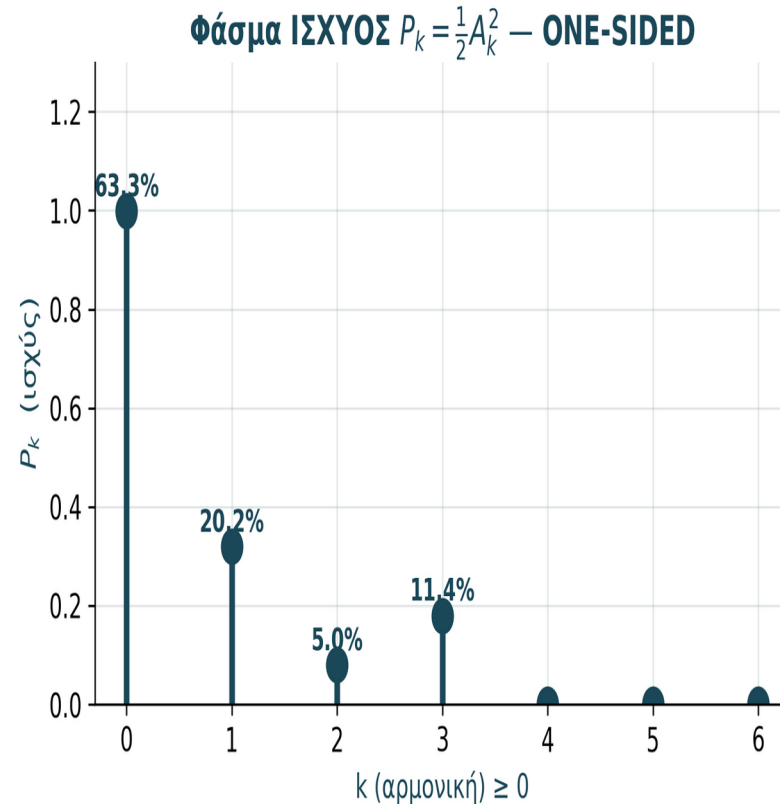
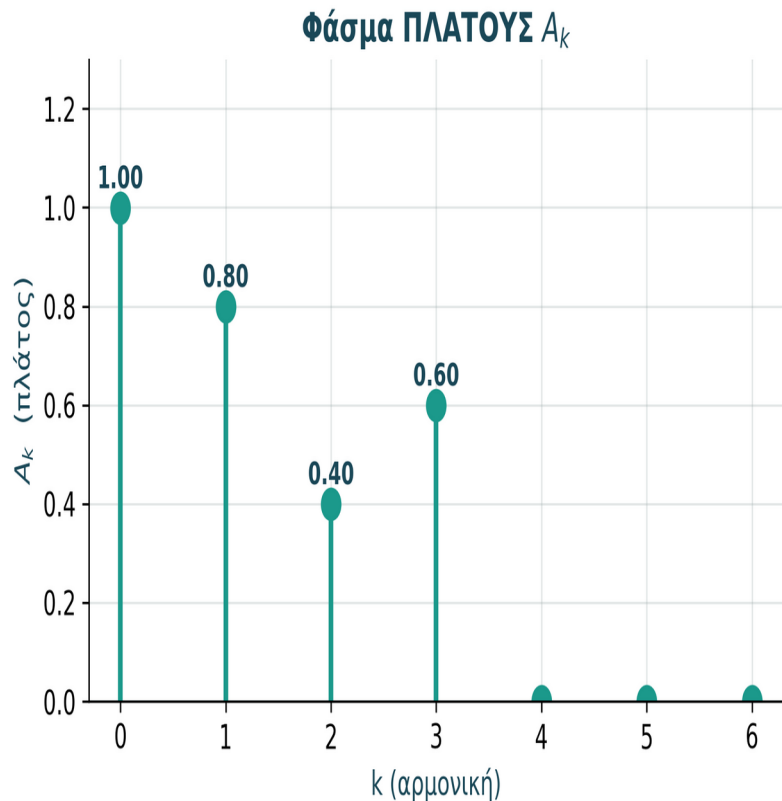
Φάσμα Ισχύος P_k (ONE-SIDED) • η ισχύς ανά αρμονική

ΤΙ • ΠΩΣ • ΠΟΤΕ • ΓΙΑΤΙ:

ΤΙ: P_k = το «βάρος» σε ισχύ της k-στής αρμονικής. ΠΟΤΕ: One-sided σύμβαση = ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ FS, $k \geq 0$.

ΠΩΣ: $P_0 = a_0^2$ (DC, χωρίς $\frac{1}{2}$) • $P_k = \frac{1}{2} \cdot (b_k^2 + c_k^2) = \frac{1}{2} \cdot A_k^2$ για $k \geq 1$ • $P_{total} = \sum P_k = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (b_k^2 + c_k^2)$

ΓΙΑΤΙ $\frac{1}{2}$: από ορθογωνικότητα $\langle \cos^2(k\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle \sin^2(k\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{2}$. Ο όρος DC είναι σταθερά $\rightarrow \langle a_0^2 \rangle = a_0^2$ (όχι $\frac{1}{2} \cdot a_0^2$).



Σήμα A ($T_0=2$):
 $x(t) = 1 + 0.8\cos(\omega_0 t)$
 $+ 0.4\cos(2\omega_0 t)$
 $- 0.6\sin(3\omega_0 t)$

Συντελεστές:
 $a_0 = 1.0$
 $b_1 = 0.8 \rightarrow A_1 = 0.8$
 $b_2 = 0.4 \rightarrow A_2 = 0.4$
 $c_3 = -0.6 \rightarrow A_3 = 0.6$

Πίνακας P_k :
 $P_0 = (1.0)^2 = 1.000$
 $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 0.8^2 = 0.320$
 $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 0.4^2 = 0.080$
 $P_3 = \frac{1}{2} \cdot 0.6^2 = 0.180$

$\sum P_k = 1.580$
 $P_{time} = 1.579 \checkmark$

% συμβολή:
 $P_0 \rightarrow 63.3\%$ (DC!)
 $P_1 \rightarrow 20.2\%$
 $P_2 \rightarrow 5.0\%$
 $P_3 \rightarrow 11.4\%$

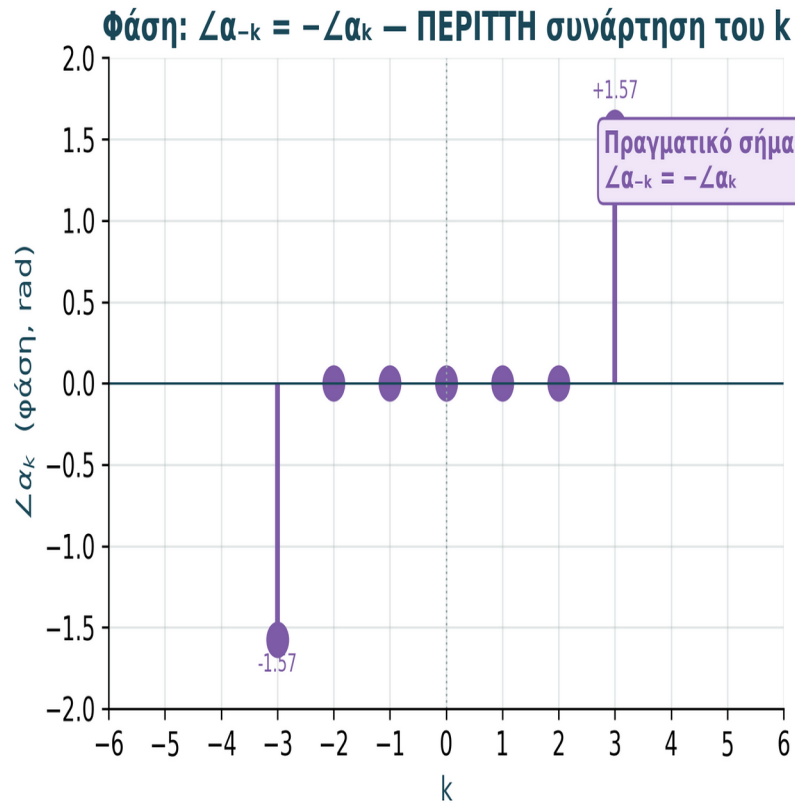
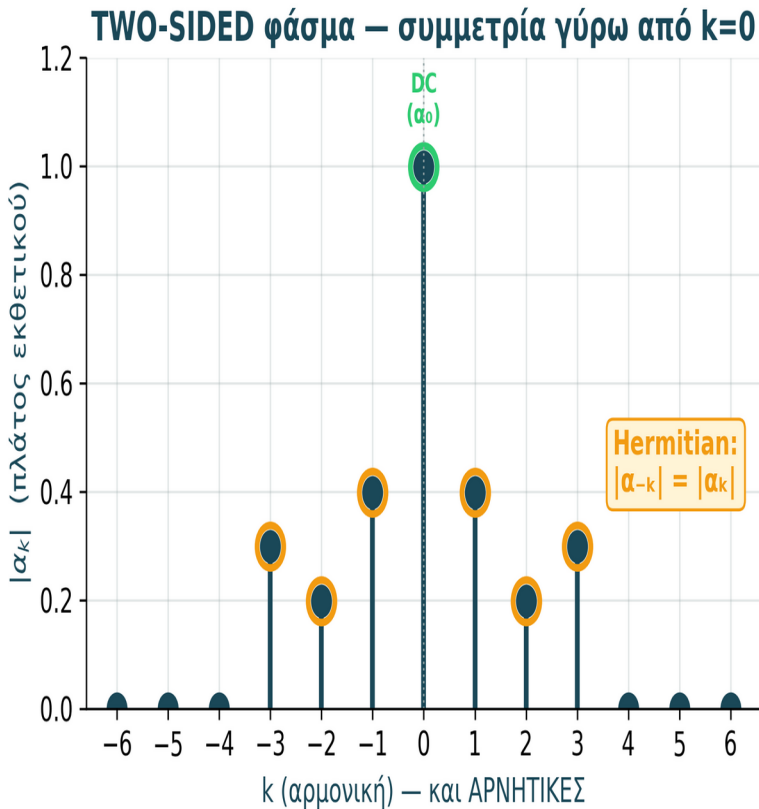
ΟΝΟΜΑΤΟΛΟΓΙΑ: P_k = «φάσμα ισχύος» (power spectrum) ή «line spectrum» • διακριτές γραμμές στις ακέραιες θέσεις $k \cdot f_0$.

ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ: Από το stem plot P_k vs k βλέπω ΑΜΕΣΩΣ ποια αρμονική κουβαλάει την περισσότερη ισχύ. Εδώ: DC κυριαρχεί (63%).

ΕΠΟΜΕΝΟ slide (σ44): η ίδια ισχύς απλωμένη σε ΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΕΣ συχνότητες (two-sided) • γιατί συμβαίνει.

Two-sided φάσμα & Hermitian • θεωρία και 3 παραδείγματα

ΤΙ: Two-sided = εκθετική FS με μιγαδικά a_k για $k = -\infty \dots +\infty$. Φάσμα $|a_k|$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ γύρω από $k=0$.
 ΠΩΣ: Hermitian: $|a_{-k}| = |a_k|$ (ΑΡΤΙΟ), $\angle a_{-k} = -\angle a_k$ (ΠΕΡΙΤΤΟ) • επειδή $a_{-k} = a_k^*$ για ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ $x(t)$.
 ΓΙΑΤΙ: αρνητικές συχνότητες = ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ μέσο, εξισορροπούν τις θετικές \rightarrow πραγματικό $x(t)$.



ΣΧΕΣΗ $A_k \leftrightarrow |a_k|$:
 $A_0 = a_0 = a_0$
 $A_k = 2 \cdot |a_k| \quad (k \geq 1)$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΣΧΥΟΣ:
 Two-sided (όλα τα k):
 $P = \sum_{k=-\infty, \dots, \infty} |a_k|^2$
 ΧΩΡΙΣ $\frac{1}{2}$

One-sided ($k \geq 0$):
 $P = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum A_k^2$
 ΜΕ $\frac{1}{2}$

ΣΥΝΔΕΣΗ:
 $P_{k_one} = 2 \cdot |a_k|^2$
 $(k \geq 1)$
 $P_0 = |a_0|^2$ (όχι $\times 2!$)

ΠΟΤΕ ΧΡΗΣΙΜΟ:
 Two-sided: `fft()` output

One-sided: μηχανικοί,
 spectrum analyzer,
 bandwidth analysis

3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ • να «βλέπεις» την Hermitian σε δράση:

Παρ.1 $\cos(\omega_0 t)$: $a_{\pm 1} = \frac{1}{2} \rightarrow A_1 = 1$ • Παρ.2 $\sin(2\omega_0 t)$: $a_{\pm 2} = \mp j/2 \rightarrow A_2 = 1$ • Παρ.3 $DC + 2\cos$: $a_0 = 1, a_{\pm 1} = 0.4, a_{\pm 2} = 0.2 \rightarrow A_0 = 1, A_1 = 0.8, A_2 = 0.4$.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ Two-sided \rightarrow One-sided: πέταξε αρνητικές, διπλασίασε τις θετικές ($k > 0$). Το DC ΔΕΝ διπλασιάζεται.

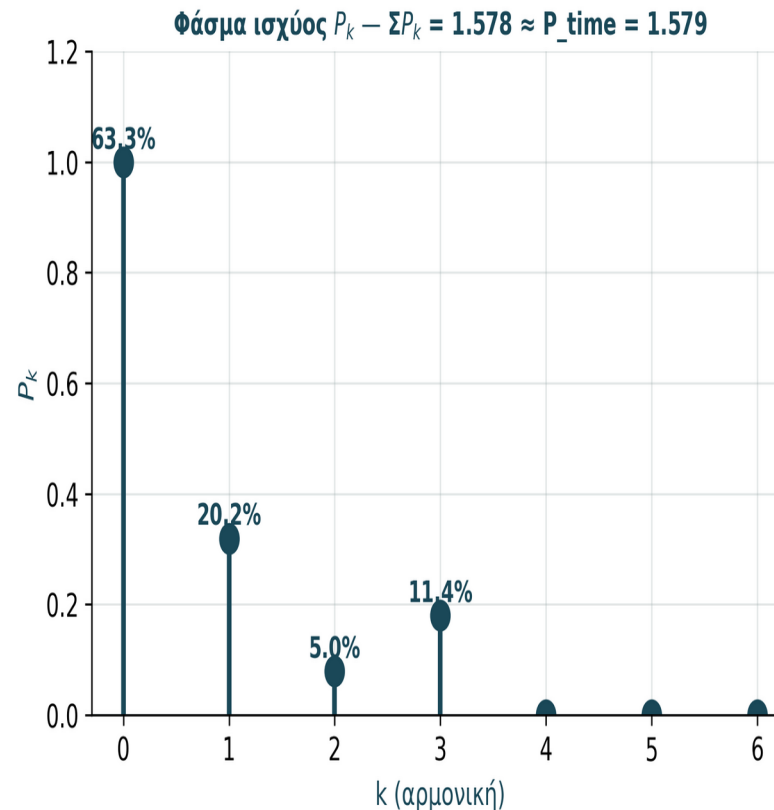
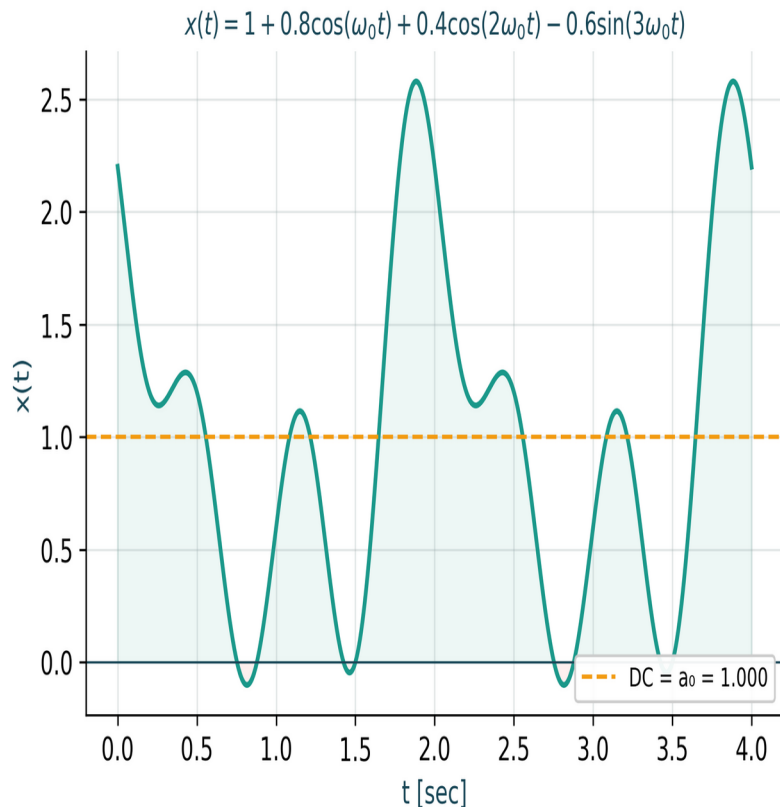
Άσκηση Ε · Φάσμα ισχύος του σήματος Α (πλήρης ανάλυση)

Εκφώνηση + Ζητούμενα:

Δίνεται περιοδικό σήμα τάσης $x(t) = 1 + 0.8\cos(\omega_0 t) + 0.4\cos(2\omega_0 t) - 0.6\sin(3\omega_0 t)$ με $T_0 = 2$ sec, $\omega_0 = \pi$ rad/s.

Ζητούμενα (Octave/trapz, $k = 0..6$): E1) A_k πλάτος E2) P_k one-sided E3) Επαλήθευση Parseval $P_time = \sum P_k$

E4) % συμβολή P_k/P_total ανά αρμονική. E5) Plot $x(t) + P_k$ stem. E6) Σχόλιο: ΠΟΙΑ αρμονική κυριαρχεί;



```
% Άσκηση Ε · λύση
T0 = 2; w0 = 2*pi/T0;
Ns = 5000; dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt);

x = 1 + 0.8*cos(w0*t) ...
    + 0.4*cos(2*w0*t) ...
    - 0.6*sin(3*w0*t);

% E1+E2: A_k + P_k
a0 = (1/T0)*trapz(t, x);
Kmax = 6;
P = zeros(1, Kmax+1);
P(1) = a0^2; % P_0
for k = 1:Kmax
    bk = (2/T0)*trapz(t, x.*cos(k*w0*t));
    ck = (2/T0)*trapz(t, x.*sin(k*w0*t));
    Ak = sqrt(bk^2 + ck^2);
    P(k+1) = 0.5 * Ak^2; % P_k
end

% E3: Parseval check
P_t = (1/T0)*trapz(t, x.^2);
% P_t = 1.579, sum(P) = 1.578 ✓

% E4: ποσοστά
pct = 100*P/P_t;
% [63.3 20.2 5.0 11.4 0 0 0]
```

ΕΞΑΓΟΜΕΝΟ: $P_k = [1.000, 0.320, 0.080, 0.180, 0, 0, 0]$. Σύνολο = 1.580 $\approx P_time = 1.579$ (residual $1e-3$ από trapz). Parseval

Plot: αριστερά $x(t)$ σε 2 περιόδους + DC reference (πορτοκαλί), δεξιά P_k stem με % συμβολή ανά αρμονική.

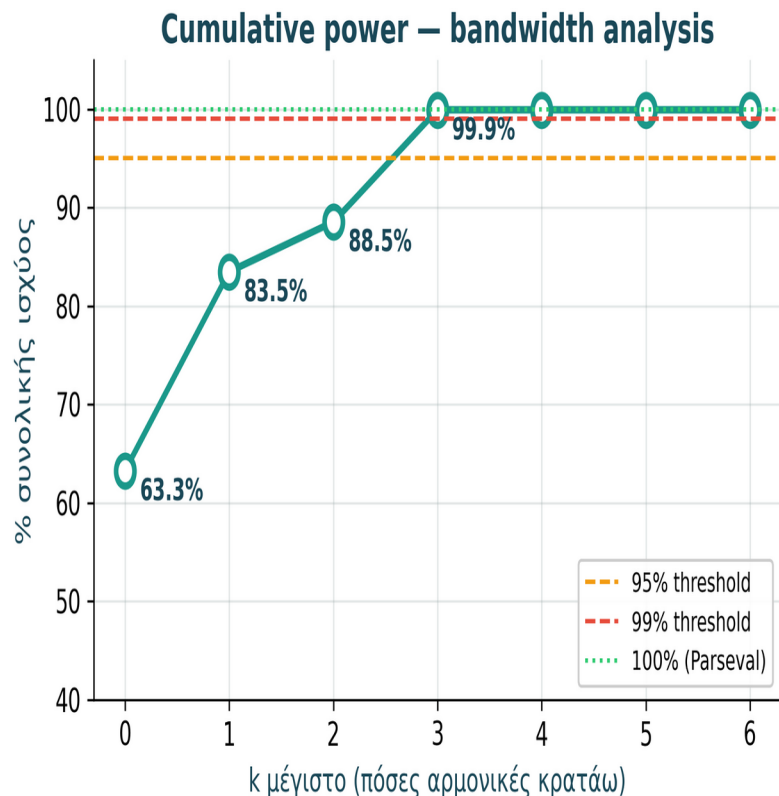
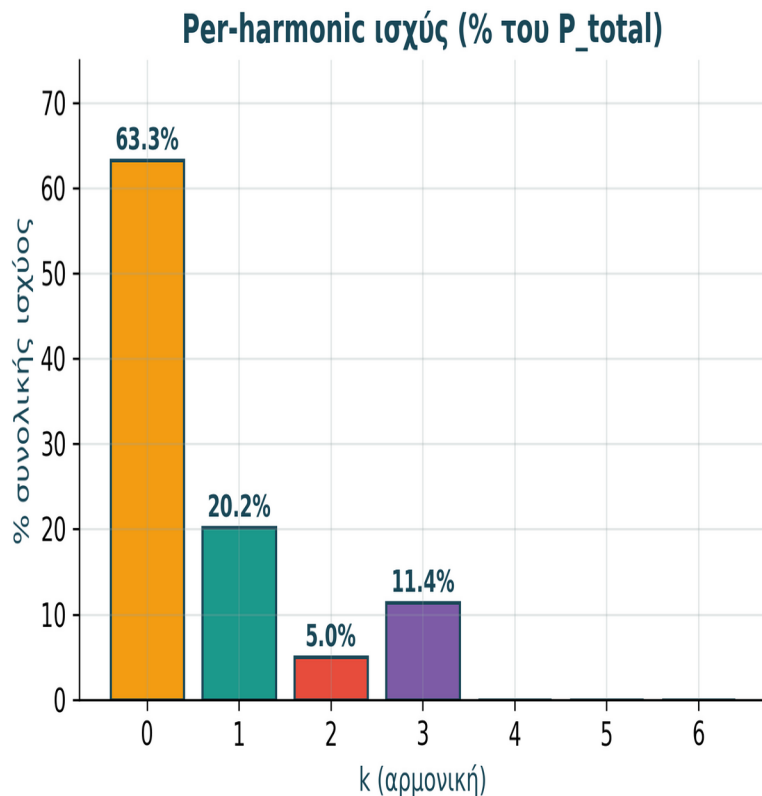
E6: DC κυριαρχεί (63.3%). $k=1$ δεύτερη (20.2%). $k=3$ (11.4%) > $k=2$ (5.0%) ΠΑΡΑ τη μεγαλύτερη θέση · ισχύς \neq θέση αρμονικής (εξαρτάται από A_k).

ΤΙ · ΠΩΣ · ΠΟΤΕ · ΓΙΑΤΙ:

ΤΙ: «Bandwidth» = ελάχιστος αριθμός αρμονικών για Χ% της συνολικής ισχύος (συμπίεση αναπαράστασης σήματος).

ΠΩΣ: Αθροίζω σταδιακά P_k από $k=0$, συγκρίνω με 95%, 99% thresholds. Όταν περάσω → αυτό είναι το bandwidth.

ΠΟΤΕ: Σχεδιασμός φίλτρων, συμπίεση δεδομένων (audio/εικόνα), τηλεπικοινωνίες · λιγότερες αρμονικές, ίδια ποιότητα.



Cumulative ισχύς · σήμα A:
 DC ($k=0$): $\Sigma P=1.000 \rightarrow 63.3\%$
 + $k=1$: 1.320 $\rightarrow 83.5\%$
 + $k=2$: 1.400 $\rightarrow 88.5\% < 95\%$
 + $k=3$: 1.580 $\rightarrow 99.9\% \checkmark > 99\%$

BANDWIDTHS:

B(95%): $k_{max}=3$

B(99%): $k_{max}=3$

(ίδια 4 components: DC, $k=1$, $k=2$, $k=3$ · σήμα A είναι finite-spectrum)

ΣΥΓΚΡΙΣΗ:

Σήμα A: $k_{max}=3 \rightarrow 99.9\%$

Τετρ. 50%:

$k_{max} \approx 21$ για $\sim 99\%$

$k_{max} = 101$ για $\sim 99.8\%$

(αργή $1/k$ σύγκλιση)

ΓΙΑΤΙ διαφορετικά bandwidth: το σήμα A έχει ΜΟΝΟ 4 ενεργές αρμονικές (FINITE). Το τετραγωνικό 50% (σ_{47}) έχει άπειρες · πέφτουν ως $1/k$.

ΣΥΜΠΙΕΣΗ: Αν αφαιρέσω την μικρότερη $k=2$, χάνω 5% ισχύος αλλά κερδίζω 25% στις μεταδιδόμενες αρμονικές. Trade-off παντού.

ΕΠΟΜΕΝΟ (σ_{47}): τετραγωνικός 50% · αργή σύγκλιση. Για 99% αρκεί $k_{max} \approx 21$ (όχι 51) · για 99.8% χρειάζεται $k = 101$.

Parseval τετραγωνικού 50% - κώδικας για τα plots

Το προηγούμενο slide δείχνει τα plots. Εδώ είναι ο κώδικας που τα παράγει.

Εκφώνηση υλοποίησης: Να γραφτεί Octave code που υπολογίζει P_{time} , $P_{freq,K}$, σχεδιάζει $x(t)$, P_k και cumulative $P_{freq,K}/P_{time}$.

```
% Parseval 0/1 square pulse, T0=2, D=50%
T0 = 2; w0 = pi; Ns = 5000; dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt);
x = double(t < 1);
P_time = (1/T0)*trapz(t, x.^2); % ≈ 0.5

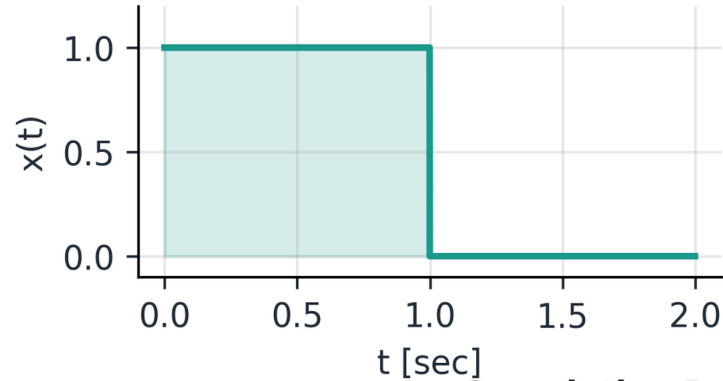
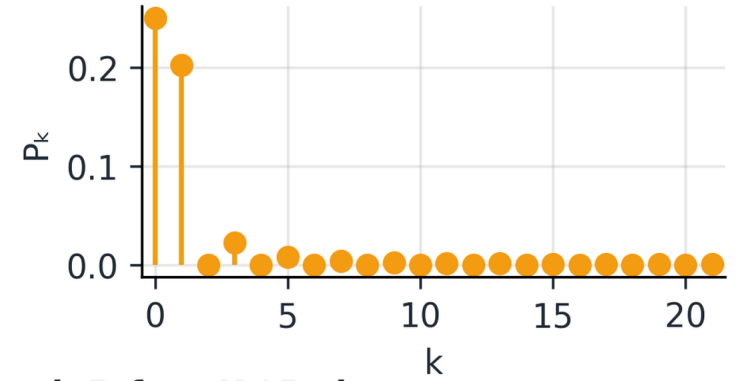
Klist = [1 3 7 11 21 51 101];
ratio = zeros(size(Klist));
for i = 1:length(Klist)
    K = Klist(i);
    P_freq = 0.25; % a0^2, a0=0.5
    for k = 1:2:K
        ck = 2/(pi*k); % odd harmonics only
        P_freq = P_freq + 0.5*ck^2;
    endfor
    ratio(i) = P_freq/P_time;
endfor

figure;
subplot(3,1,1); plot(t,x); title('x(t)');
subplot(3,1,2); stem(0:21,Pk); title('P_k');
subplot(3,1,3); plot(Klist,100*ratio,'o-');
ylabel('% ισχύος'); xlabel('K'); grid on;
```

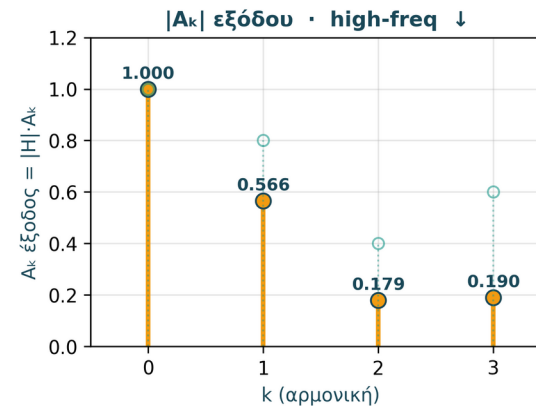
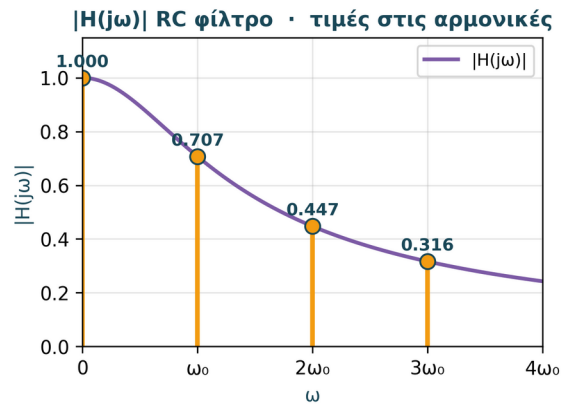
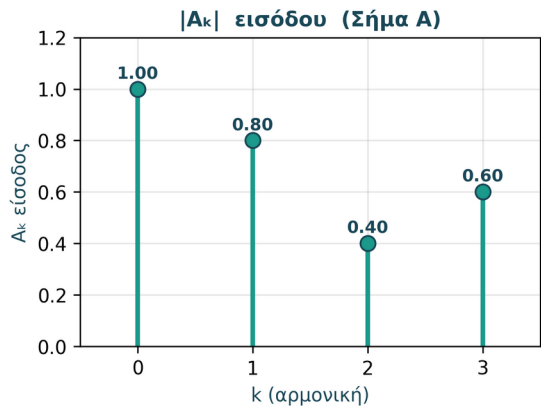
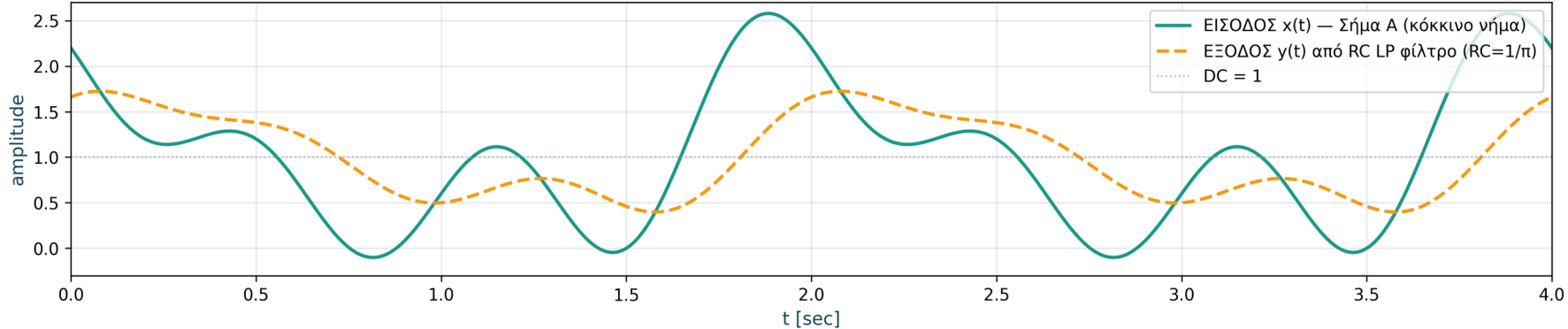
Expected output

$P_{time} \approx 0.5$

$K=1$: 90.53%, $K=3$: 95.03%, $K=21$: 99.08%, $K=101$: 99.80%

Χρόνος: $x(t)$ 0/1, $D=50\%$ Ισχύς ανά αρμονική P_k Cumulative Parseval: $P_{freq,K} / P_{time}$ 

Σημείωση: αν το plot δεν ταιριάζει με τα ποσοστά, έλεγξε ότι χρησιμοποιείς μόνο περιττά k και ότι δεν διπλασιάζεις το DC.

RC νήμα με W05 • LTI φιλτράρισμα FS • $Y_k = \alpha_k \cdot H(jk\omega_0)$ EIGENFUNCTION: $x(t) = \sum \alpha_k \cdot e^{(jk\omega_0 t)} \rightarrow$ LTI με $h(t) \rightarrow y(t) = \sum \alpha_k \cdot H(jk\omega_0) \cdot e^{(jk\omega_0 t)}$ ΣΥΝΕΠΕΙΑ: πλάτος $\rightarrow |\alpha_k| \cdot |H(jk\omega_0)|$ • φάση $\rightarrow \angle \alpha_k + \angle H(jk\omega_0)$ • ισχύς $\rightarrow |\alpha_k|^2 \cdot |H(jk\omega_0)|^2$ • ίδια συχνότητα διατηρείταιLTI φιλτράρισμα FS (eigenfunction in action) • $Y_k = \alpha_k \cdot H(jk\omega_0)$
Πεδίο χρόνου: $x(t) \rightarrow$ RC LTI $\rightarrow y(t)$ • ίδιες αρμονικές, αλλαγμένα πλάτη + φάσεις

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

(Σήμα A • $RC = 1/\pi$)

k	$ H(jk\omega_0) $	$\angle H$ [°]	A_{k_in}	A_{k_out}
0	1.000	0.0	1.00	1.000
1	0.707	-45.0	0.80	0.566
2	0.447	-63.4	0.40	0.179
3	0.316	-71.6	0.60	0.190

 $P_{in_total} = 1.580$ $P_{out_total} = 1.194$

ratio = 0.756 (24% χάθηκε)

KEY: $Y_k = \alpha_k \cdot H(jk\omega_0)$

- DC pass
- HF attenuated
- φάση μετατοπίζεται

ΣΥΝΟΨΗ: ίδιες αρμονικές, αλλαγμένα πλάτη + φάσεις • το LTI ΔΕΝ δημιουργεί νέες συχνότητες • RC LP φίλτρο: DC pass, high-freq attenuate.

ΓΕΦΥΡΑ: Στο εργαστήριο θα φιλτράρουμε σήματα. Στο W08 θα δούμε DFT/FFT, στο W09 το $H(s)$ μέσω Laplace.◆ Πιο γενικά: $y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$ (συνέλιξη χρόνου = πολλαπλασιασμός συχνότητας - W07 bridge)

Εκθετική Fourier Series · Λυμένη: $\cos(\omega_0 t) + 2\sin(2\omega_0 t)$

Τύπος εκθετικής FS:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad \text{όπου} \quad a_k = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Σύνδεση με W03 : η εκθετική $e^{jk\omega_0 t}$ είναι ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ συστημάτων LTI · αν εισέλθει, βγαίνει ΙΔΙΑ μορφής, μόνο πολλαπλασιασμένη με $H(jk\omega_0)$.

Γι' αυτό είναι «φυσική» επιλογή για το φάσμα.

Εκφώνηση:

Δίνεται $x(t) = \cos(\omega_0 t) + 2 \cdot \sin(2\omega_0 t)$ με $T_0 = 2\pi$, $\omega_0 = 1$.

Να υπολογιστούν οι εκθετικοί a_k για $k = -3, \dots, +3$ (α) Αναλυτικά με Euler, (β) Αριθμητικά με trapz.

Λύση με Euler:

Euler ταυτότητες:

$$\cos(\theta) = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})/2$$

$$\sin(\theta) = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/(2j)$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2\sin(2\omega_0 t) = (1/j)e^{j2\omega_0 t} - (1/j)e^{-j2\omega_0 t} = -j \cdot e^{j2\omega_0 t} + j \cdot e^{-j2\omega_0 t}$$

$$\rightarrow a_2 = -j, \quad a_{-2} = +j$$

Όλα τα άλλα $a_k = 0$

```
% Numerical επαλήθευση με trapz
T = 2*pi; w0 = 1;
Ns = 5000; dt = T/Ns;
t = 0:dt:(T-dt); % πλήρης περίοδος
x = cos(w0*t) + 2*sin(2*w0*t);

a = zeros(1, 7);
for k = -3:3
    a(k+4) = (1/T)*trapz(t, ...
        x.*exp(-1i*k*w0*t));
end

% Mask phase όπου |αk|≈0
mag = abs(a); phase = angle(a);
tol = 1e-6;
phase(mag < tol) = NaN;

figure;
subplot(2,1,1);
stem(-3:3, mag, 'filled');
title('|αk|'); xlabel('k');
subplot(2,1,2);
stem(-3:3, phase, 'filled');
title('∠αk μόνο όπου |αk|≠0');
xlabel('k'); ylabel('rad');

% Αποτέλεσμα:
% k=±2: |α|=1, ∠α=∓π/2
% k=±1: |α|=1/2, ∠α=0
% k= 0: 0 (phase = NaN)
```

Εκθετική FS = ΤΡΕΙΣ πληροφορίες σε ΕΝΑ τύπο με μιγαδικά a_k . Πλάτος + φάση σε μία τιμή.

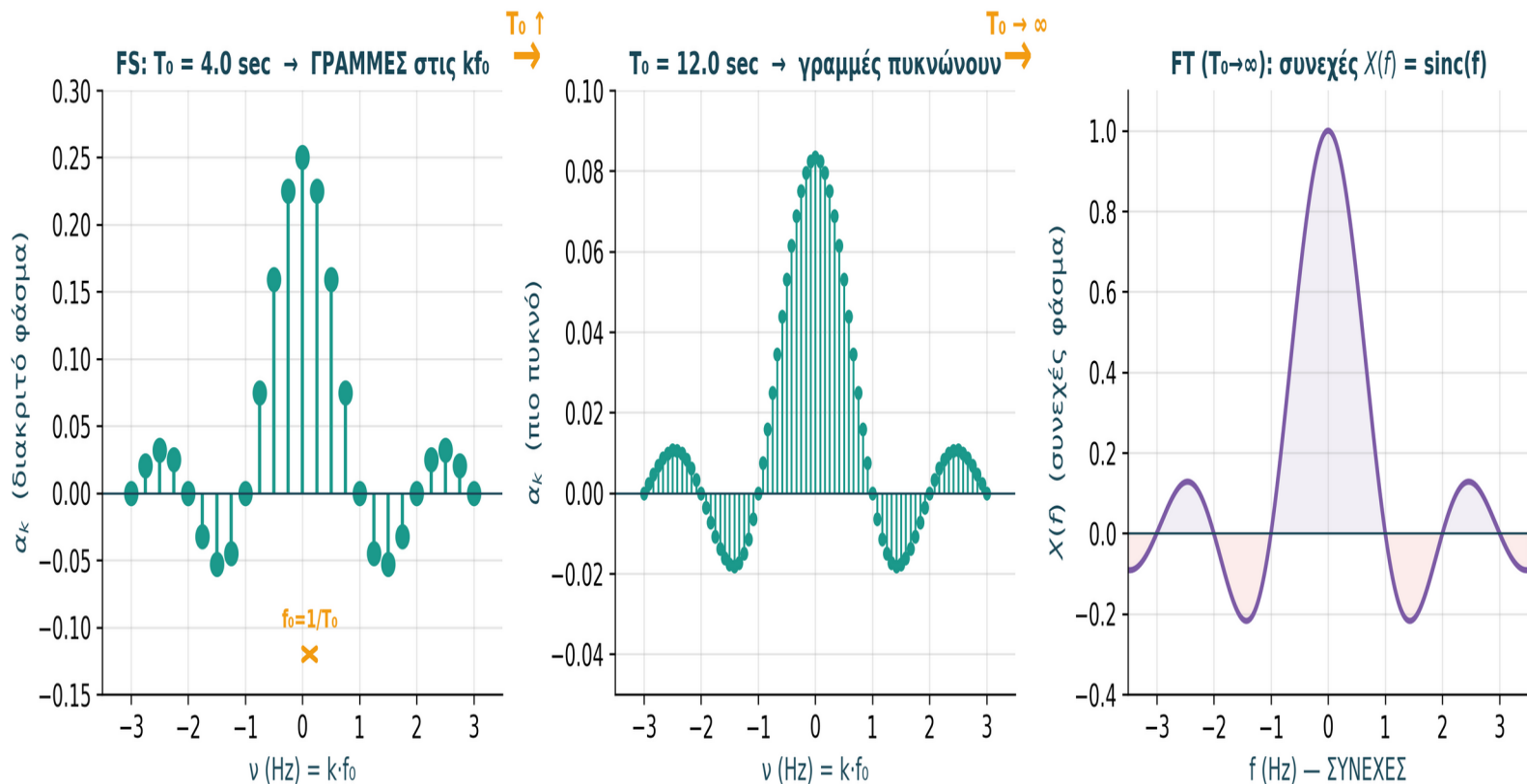
Σύνδεση τριγωνομετρική ↔ εκθετική: $a_k = (b_k - jc_k)/2$ για $k \geq 1$, $a_0 = a_0$, $a_{-k} = a_k^*$.

Τι συμβαίνει στο φάσμα ισχύος όταν περνάω από ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ (FS) σε ΑΠΕΡΙΟΔΙΚΟ (FT) σήμα;

Η FS υπάρχει ΜΟΝΟ για περιοδικά. Όταν $T_0 \rightarrow \infty$ (μια περίοδος = όλος ο άξονας), δεν υπάρχει περιοδικότητα.

Φασματικά: spacing γραμμών $f_0 = 1/T_0$. $T_0 \uparrow \rightarrow$ γραμμές πυκνώνουν. Στο όριο: ΣΥΝΕΧΗΣ καμπύλη $X(f)$.

Πρακτικά: single rect \rightarrow FT (συνεχές sinc). Periodic rect \rightarrow FS (γραμμές sinc στις kf_0). Ίδια envelope.



ΣΥΓΚΡΙΣΗ:

	FS	FT
Σήμα:	περιοδ.	απεριοδ.
Φάσμα:	γραμμές	συνεχές
Δείκτης:	$k \in \mathbb{Z}$	$f \in \mathbb{R}$

ΦΑΣΜΑ ΙΣΧΥΟΣ:

FS: $P_k = \frac{1}{2} A_k^2$
 (διακριτή ισχύς ανά αρμονική)
 $\sum P_k = P_{total}$

FT: energy density
 $|X(f)|^2$ (συνεχής)
 $\int |X(f)|^2 df = E$

ΟΡΙΟ $T_0 \rightarrow \infty$:

$f_0 = 1/T_0$ μικραίνει
 \rightarrow οι γραμμές της FS πυκνώνουν
 \rightarrow στο όριο: ΣΥΝΕΧΕΣ $X(f)$ (ίδιο sinc envelope!)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

periodic pulse train:
 FS γραμμές πάνω σε sinc envelope
 single pulse:
 FT συνεχής sinc

ΟΠΤΙΚΑ: στα 3 panels ίδιο σχήμα (sinc envelope), αλλάζει η πυκνότητα. $T_0=4$: αραιές. $T_0=12$: 3x πιο πυκνές. $T_0=\infty$: ΣΥΝΕΧΕΣ. ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ: η Octave fft() προσομοιώνει FS όταν το σήμα έχει ολόκληρο αριθμό περιόδων. Στο W07 θα δούμε FT μέσω fft(). ΕΠΟΜΕΝΟ slide: επίσημη γέφυρα \rightarrow W07 με αναλυτικές εξισώσεις και RC ως filter στη συχνότητα.

Γέφυρα → W07: όσο $T_0 \rightarrow \infty$, το φάσμα γίνεται συνεχές $X(f)$

Τι θα δούμε στο W07 (Fourier Transform):

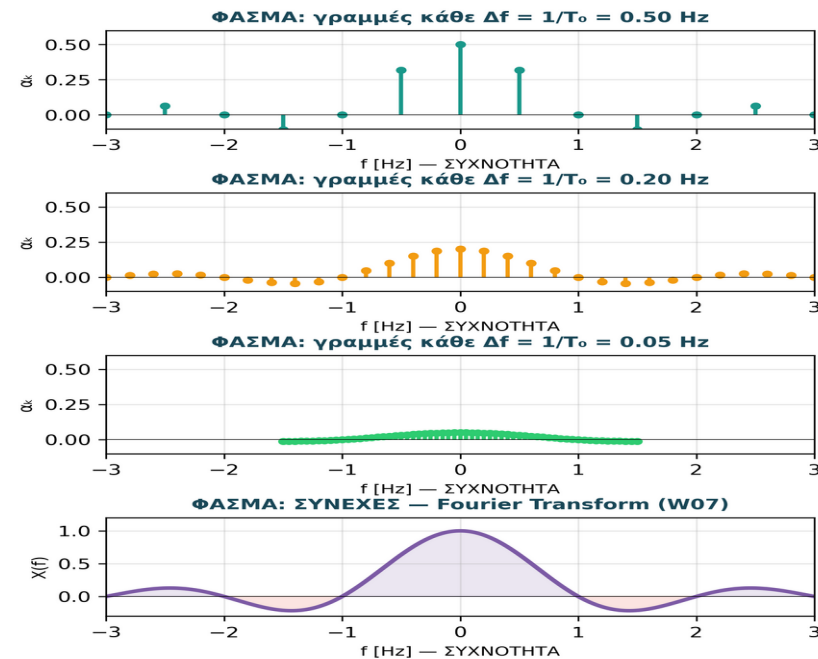
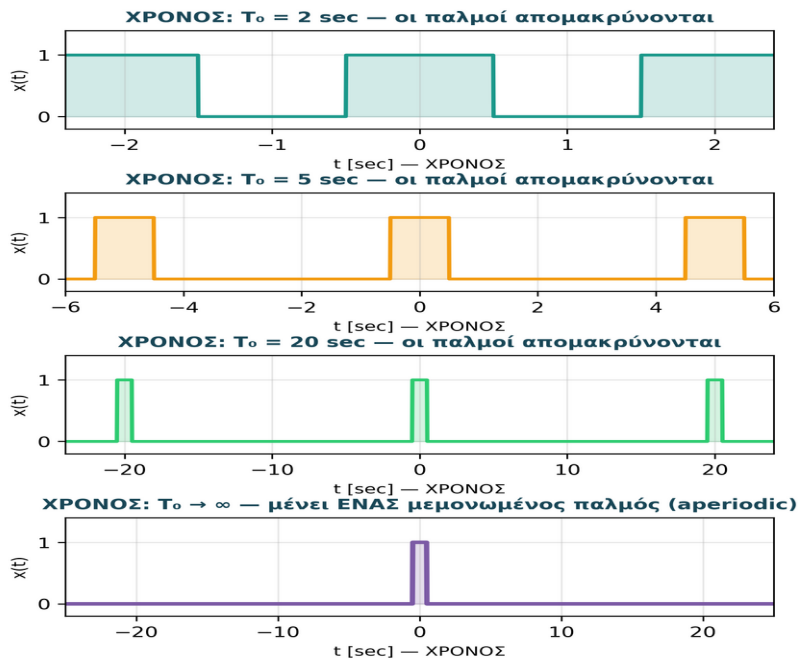
Στις FS (W06) έχουμε ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ σήματα → ΔΙΑΚΡΙΤΟ φάσμα στις θέσεις $kf_0 = k/T_0$.

Όσο μεγαλώνει η περίοδος T_0 , η απόσταση μεταξύ γραμμών $1/T_0$ μειώνεται → οι γραμμές πυκνώνουν.

Στο όριο $T_0 \rightarrow \infty$, το σήμα γίνεται APERIODIC (μεμονωμένος παλμός) και το φάσμα γίνεται ΣΥΝΕΧΕΣ:

FS: $a_k \cdot$ διακριτές γραμμές \implies FT: $X(f) \cdot$ συνεχής συνάρτηση συχνότητας

Από Fourier Series → Fourier Transform: τι αλλάζει σε ΧΡΟΝΟ και ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ



Κεντρική ιδέα W07: όσο μεγαλώνει T_0 , η περίοδος εξαφανίζεται και το σήμα γίνεται μεμονωμένος παλμός.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ στο φάσμα: οι αρμονικές πυκνώνουν · στο όριο, γίνεται συνεχής συνάρτηση $X(f)$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: $T_0 \rightarrow \infty \implies \omega_0 \rightarrow 0 \implies \sum_k \rightarrow \int d\omega$ και $T_0 \cdot a_k \rightarrow X(k\omega_0)$. Αυτό είναι ο Fourier Transform του W07.

Παράρτημα

Π1-Π17 · Επιπλέον υλικό · Λύσεις · Άλυτες ασκήσεις · Αναφορές

Π1: Τρεις ισοδύναμες μορφές FS · από κοινό σήμα

ΣΤΟΧΟΣ: Πώς από ένα ΚΟΙΝΟ σήμα $x(t)$ προκύπτουν τρεις διαφορετικές γραφές της FS · τριγωνομετρική, εκθετική, πλάτους-φάσης.

Δεδομένο σήμα στον ΧΡΟΝΟ:

$$x(t) = 2 + 3 \cdot \cos(\omega_0 t) + 4 \cdot \sin(2\omega_0 t) \quad (\text{αυτή είναι η ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ μορφή · έτσι μας το δίνει συνήθως η εκφώνηση})$$

Τριγωνομετρική (a_0, b_k, c_k)

$$x(t) = a_0 + \sum (b_k \cos + c_k \sin)$$

Ταυτίζοντας όρους:

$$a_0 = 2 \text{ (DC)} \quad b_1 = 3 \text{ (}\cos(\omega_0 t)\text{)} \quad c_2 = 4 \text{ (}\sin(2\omega_0 t)\text{)}$$

όλα τα άλλα = 0

Εκθετική (α_k μιγαδικό)

$$x(t) = \sum \alpha_k \cdot e^{j k \omega_0 t}$$

Με Euler:

$$3 \cos(\omega_0 t) = 1.5 e^{j \omega_0 t} + 1.5 e^{-j \omega_0 t}$$

$$4 \sin(2\omega_0 t) = -2j \cdot e^{j 2 \omega_0 t} + 2j \cdot e^{-j 2 \omega_0 t}$$

$$\alpha_0 = 2 \quad \alpha_1 = \alpha_{-1} = 1.5 \quad \alpha_2 = -2j, \alpha_{-2} = +2j$$

Πλάτους-Φάσης (ημιτονοειδής)

$$x(t) = a_0 + \sum A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

$$A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2}$$

$$\varphi_k = \text{atan2}(-c_k, b_k)$$

$$A_1 = 3, \varphi_1 = 0^\circ \quad A_2 = 4, \varphi_2 = -90^\circ \quad (\text{γιατί } \sin = \cos(\theta - 90^\circ))$$

$$x(t) = 2 + 3 \cos(\omega_0 t) + 4 \cos(2\omega_0 t - 90^\circ)$$

Αμφίδρομες σχέσεις (μετατροπή ΠΑΝΤΟΥ ισοδύναμη):

$$(1) \rightarrow (2) \text{ Euler: } \cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}), \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \implies \alpha_k = (b_k - jc_k)/2, \alpha_0 = a_0, \alpha_{-k} = \alpha_k^*$$

$$(1) \rightarrow (3) \text{ Πλάτος+Φάση: } A_k = \sqrt{b_k^2 + c_k^2}, \varphi_k = \text{atan2}(-c_k, b_k)$$

$$(2) \rightarrow (3) \text{ Από μιγαδικό: } A_k = 2|\alpha_k| \text{ (}k \geq 1\text{)}, \varphi_k = \angle \alpha_k$$

Τρεις γραφές, ένα σήμα

ΓΙΑΤΙ τρεις: η Euler ταυτότητα $\cos = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$ μετατρέπει sums of cos/sin σε εκθετικές με μιγαδικούς συντελεστές.
Όλες είναι ΠΛΗΡΕΙΣ · έχουν την ίδια πληροφορία. Επιλέγεις τη μορφή που είναι πιο βολική για το πρόβλημα που λύνεις.

ΣΤΟΧΟΣ: Έτοιμο template σε Octave: φόρτωση τη συνάρτηση, βάλε το σήμα σου, πάρε plot + συντελεστές + ισχύ (Αποθήκευσε ως fs_template.m).

```

% =====
% Generic FS template · αντικατέστησε MONO τη συνάρτηση signal()
% =====
function fs_template(T0, signal_fn, Kmax)
    if nargin < 3, Kmax = 10; end
    w0 = 2*pi/T0;
    Ns = 5000; dt = T0/Ns;
    t = 0:dt:(T0-dt);
    x = signal_fn(t);

    % Συντελεστές
    a0 = (1/T0)*trapz(t, x);
    b = zeros(1,Kmax); c = zeros(1,Kmax); A = zeros(1,Kmax);
    for k = 1:Kmax
        b(k) = (2/T0)*trapz(t, x.*cos(k*w0*t));
        c(k) = (2/T0)*trapz(t, x.*sin(k*w0*t));
        A(k) = sqrt(b(k)^2 + c(k)^2);
    end

    % Parseval check
    P_time = (1/T0)*trapz(t, abs(x).^2);
    P_freq = a0^2 + 0.5*sum(b.^2 + c.^2);
    fprintf('P_time = %.4f, P_freq = %.4f\n', P_time, P_freq);

    % Πίνακας συντελεστών (B14):
    fprintf(' k      b_k      c_k      A_k      phi_k\n');
    fprintf(' 0     %9.5f      ---      ---      ---\n', a0);
    for k = 1:Kmax
        phi_k = atan2(-c(k), b(k));
        fprintf(' %2d     %9.5f     %9.5f     %9.5f     %+.4f\n', k, b(k), c(k), A(k), phi_k);
    end

    % Plot ΧΡΟΝΟΣ + ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (B13: stem dimension safety)
    A_plot = zeros(1,Kmax+1);
    A_plot(1) = abs(a0); A_plot(2:end) = A;
    figure;
    subplot(2,1,1); plot(t, x, 'b', 'LineWidth', 2);
        title('x(t) στον ΧΡΟΝΟ'); xlabel('t [sec]'); grid on;
    subplot(2,1,2); stem(0:Kmax, A_plot, 'filled');
        title('Φάσμα τριγωνομετρικού πλάτους A_k'); xlabel('k'); grid on;
    end

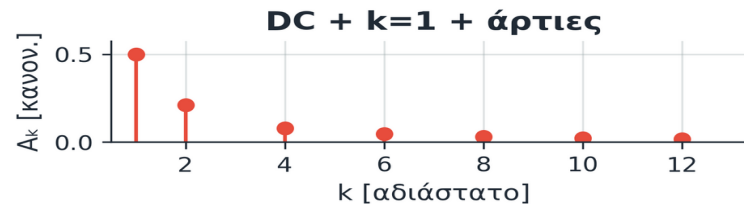
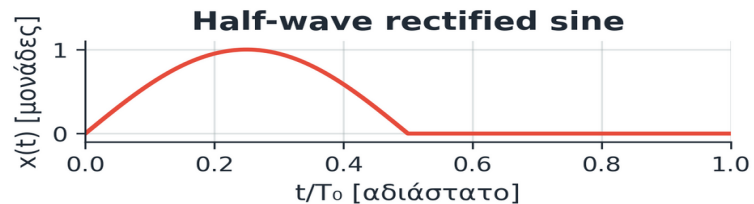
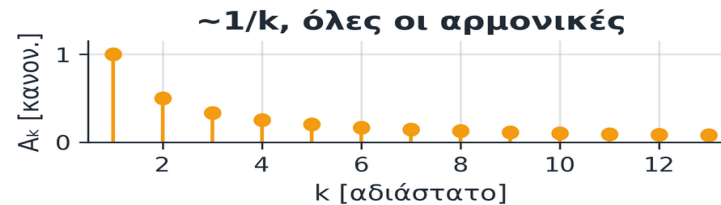
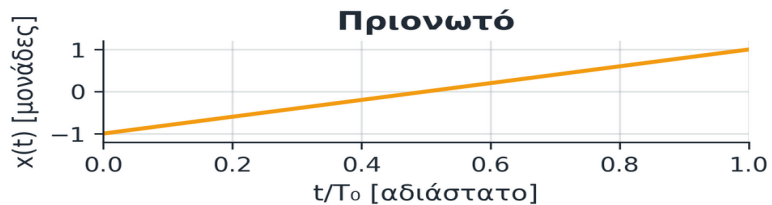
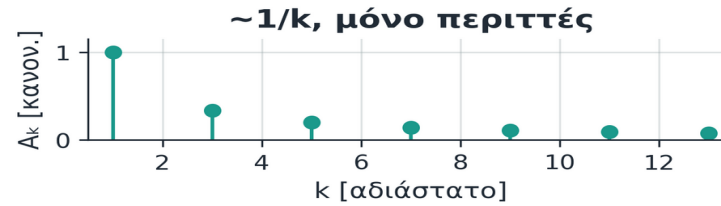
    % Παράδειγμα χρήσης:
    fs_template(2, @(t) double(mod(t,2) < 1)); % τετραγωνικός 50%
    fs_template(2*pi, @(t) sin(t).^3); % κυβική sin
    fs_template(4, @(t) max(sin(pi*t/2),0)); % half-wave

```

Reusable template · δουλεύει με ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ περιοδικό σήμα γραμμένο ως anonymous function.
 ΧΡΗΣΗ: αντικατέστησε MONO τη συνάρτηση signal_fn · όλα τα υπόλοιπα παραμένουν ίδια.
 ΠΡΟΣΟΧΗ: πρέπει η συνάρτηση να είναι περιοδική και να της δώσεις τη ΣΩΣΤΗ T_0 .

Π5: Κυματομορφές - συμμετρία, ομαλότητα και φασματική απομείωση

Plots κυματομορφών και φασματικής απομείωσης



αριστερά $x(t)$ ως προς t/T_0 [αδιάστατο], δεξιά κανονικοποιημένα A_k ως προς k [αδιάστατο].

Ορολογία

Λέμε αργή ή γρήγορη φασματική απομείωση.

Άλμα τιμής \rightarrow περίπου $1/k$.

Γωνία χωρίς άλμα \rightarrow περίπου $1/k^2$.

Πιο ομαλό σήμα \rightarrow ακόμη γρηγορότερη πτώση.

Τι χρησιμοποιώ στην πράξη

- Η συμμετρία λέει ποιες ομάδες αρμονικών μηδενίζονται.
- Η ομαλότητα λέει πόσο γρήγορα πέφτουν τα A_k .
- Αργή πτώση σημαίνει μεγαλύτερο bandwidth.
- Στο FFT ελέγχω duty cycle, DC offset, leakage και παράθυρο.

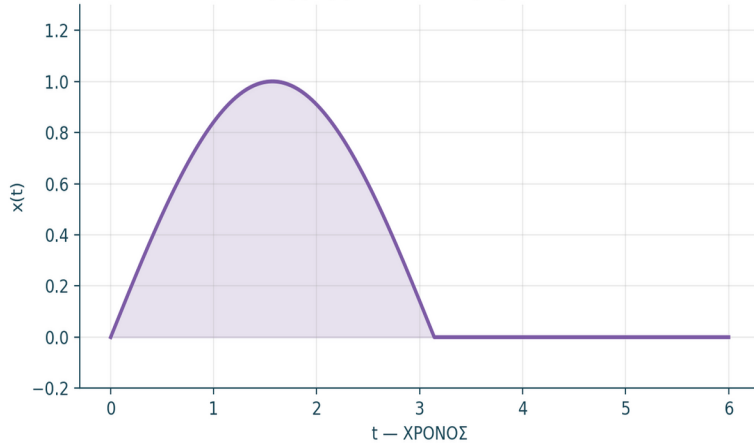
Π6: Half-wave Rectification + Impulse Train (πλήρης ανάπτυξη)

ΣΤΟΧΟΣ:

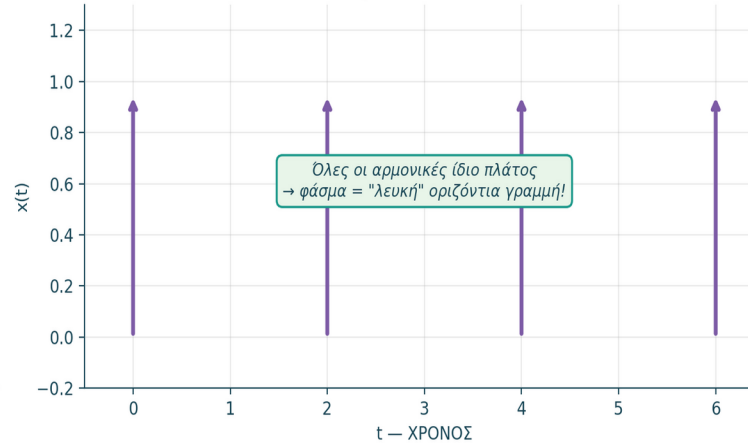
Δύο πραγματικά σήματα από ηλεκτρονικά: παραγωγή συντελεστών, εφαρμογές, κώδικας Octave.

Π8: Half-wave + Impulse train – δύο σήματα, διαφορετικά φάσματα

Half-wave rectification: $x(t) = \max(\sin(\omega_0 t), 0)$
Εφαρμογή: AC→DC σε τροφοδοτικά



Τρένο κρουστικών: $x(t) = \sum \delta(t - nT_0)$
Συντελεστές: $a_k = 1/T_0$ ΓΙΑ ΟΛΑ τα $k!$



```
% Half-wave με anonymous functions
T0 = 2*pi; w0 = 1;
Ns = 5000; dt = T0/Ns;
t = 0:dt:(T0-dt);
hw = @(t) max(sin(w0*t), 0);
x = hw(t);

% Συντελεστές
a0 = (1/T0)*trapz(t, x); % ≈ 1/π
b = zeros(1,6); c = zeros(1,6);
for k = 1:6
    b(k) = (2/T0)*trapz(t, x.*cos(k*w0*t));
    c(k) = (2/T0)*trapz(t, x.*sin(k*w0*t));
endfor
% Αναμενόμενα:
% c(1) ≈ 1/2 (η μόνη μη-μηδενική sin)
% c(k) ≈ 0 για k ≠ 1
% b(k) μη-μηδενικό μόνο για άρτια k
% π.χ. b(2) ≈ -2/(3π), b(4) ≈ -2/(15π)
```

Half-wave: παραγωγή τύπου & εφαρμογές

$x(t) = \max(\sin(\omega_0 t), 0)$ · μόνο θετικό μέρος.

$a_0 = (1/T_0) \cdot \int_0^{T_0/2} \sin(\omega_0 t) dt = 1/\pi \approx 0.318$

$b_k = -2/(\pi(4m^2 - 1))$ για $k = 2m$ άρτιο

$c_k = 1/2$ μόνο για $k=1$ (το αρχικό)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: AC→DC σε τροφοδοτικά (1ου βαθμού). Χρειάζεται filter.

Impulse train: σταθερό φάσμα · sampling theorem

$x(t) = \sum_n \delta(t - nT_0)$ · άπειρα δέλτα κάθε T_0 .

$a_k = (1/T_0) \cdot \int \delta(t) \cdot e^{-ik\omega_0 t} dt = 1/T_0$ ΣΤΑΘΕΡΟ $\forall k$

⇒ φάσμα = επίπεδη γραμμή (όλες οι αρμονικές ίδιες).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: sampling theorem (W08) · δειγματοληψία αναλογικού σήματος = πολλαπλασιασμός με impulse train.

ΣΤΟΧΟΣ: Συγκεντρωμένες πηγές: ελληνικά συγγράμματα, βιβλία, βίντεο μαθήματα, διαδραστικά εργαλεία.

Ελληνικά συγγράμματα:

- Σκόδρας, Α. · "Σήματα & Συστήματα", Πανεπιστήμιο Πατρών, 2014
- Καραγιάννης, Γ. · "Σήματα και Συστήματα", Εκδόσεις Συμμετρία
- Θεοδωρίδης, Σ. · "Επεξεργασία Σήματος", Εκδόσεις Παπασωτηρίου
- Μαρίας - Χατζάκη σημειώσεις μαθήματος

Διεθνή κλασικά:

- Oppenheim, A. V. & Willsky, A. S. "Signals and Systems" (2nd ed., Pearson 1997)
- Haykin, S. & Van Veen, B. "Signals and Systems" (2nd ed., Wiley 2005)

Βίντεο μαθήματα:

- 3Blue1Brown · "But what is a Fourier series?" [youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k](https://www.youtube.com/watch?v=r6sGWTCMz2k)
- MIT OCW 6.003 · Signals & Systems Lectures ocw.mit.edu/6-003

Διαδραστικά εργαλεία:

- Falstad Math · Fourier Series Visualizer falstad.com/fourier
- Desmos · Fourier Series Plotter desmos.com/calculator
- Octave Online · Run code in browser octave-online.net

- **Βασικές έννοιες:** DC, $T_0/f_0/\omega_0$, αρμονικές, duty cycle, φάσμα, συμμετρία
- **Διαθέσιμες vs Ενεργές:** k υπάρχει αν $A_k \neq 0$ · όχι αυτόματα
- **FS family:** FS / CFT / DTFT / DFT · W06 = FS (διακριτό φάσμα)
- **Τριγωνομετρική FS:** $x(t) = a_0 + \sum [b_k \cos + c_k \sin]$ με trapz
- **Ορθογωνικότητα:** $\cos(m) \cdot \cos(n) = T/2$ αν $m=n$, αλλιώς 0
- **Αντιπαράδειγματα:** άρτια $k=2$ ενεργή · περιττή $k=3$ μηδέν $D=1/3$
- **sinc envelope:** παλμός στον χρόνο \leftrightarrow sinc στη συχνότητα
- **Reconstruction:** $N=1,3,7,21 \rightarrow$ προσέγγιση τετραγωνικού
- **Gibbs:** ~9% overshoot · δεν εξαφανίζεται
- **Parseval:** $P_t = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum (b_k^2 + c_k^2)$ · ισχύς διατηρείται
- **Εκθετική FS:** $x(t) = \sum a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ · Hermitian
- **Bridge \rightarrow W07:** $T \rightarrow \infty \implies$ συνεχές φάσμα $X(\omega)$

W06 (σήμερα)

Σήμα: ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ

Φάσμα: ΔΙΑΚΡΙΤΟ (γραμμές στα kf_0)

Τύπος ανάλυσης:

$$a_k = (1/T) \cdot \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Σύνθεση:

$$x(t) = \sum_k a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Παραδείγματα:

τετραγ. κύμα, τρίγωνο,
πριονωτό, RC pulse train

W07 (επόμενη εβδομάδα)

Σήμα: Απεριοδικό

Φάσμα: ΣΥΝΕΧΕΣ $X(\omega)$ (όχι γραμμές!)

Τύπος ανάλυσης:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Σύνθεση:

$$x(t) = (1/2\pi) \cdot \int X(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Παραδείγματα:

μονός παλμός, sinc,
μη περιοδικά εκθετικά

Σύνδεση: $T \rightarrow \infty \implies \omega_0 \rightarrow 0 \implies \sum_k$ γίνεται $\int d\omega$. Στο όριο $T \rightarrow \infty$: $T \cdot a_k \rightarrow X(k\omega_0)$.

Convolution theorem: $y = x * h \iff Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$ · τα φίλτρα γίνονται πολλαπλασιασμός!