

ΕΛΜΕΠΑ — ΗΜΜΥ — 4.004 Σήματα και Συστήματα

Εβδομάδα 8

**Διακριτός Fourier (DFT/FFT),
Δειγματοληψία & Φασματική Ανάλυση**

Γιάννης Στεφανής

21 ερωτήματα σε 5 ενότητες — από δειγματοληψία έως φασματική ανάλυση

| Δειγματοληψία | FFT / IFFT | Parseval | Leakage / Win | Ανακεφαλαίωση / W09 |
|---|--|---|--|--|
| <p>Q1. Πότε χάνω πληροφορία; Q2. Πώς ορίζω F_s; Q3. Τι είναι aliasing; Q4. AAF/Recon — γιατί;</p> | <p>Q5. Από DTFT σε DFT; Q6. Magnitude vs phase; Q7. Coherent vs leakage; Q8. Two/One-sided; Q9. IFFT round-trip;</p> | <p>Q10. Ενέργεια time = freq; Q11. Δύο μορφές DFT/CTFT; Q12. Ενέργεια στην μπάντα των συχνοτήτων;</p> | <p>Q13. Γιατί leakage; Q14. Window mechanism; Q15. Trade-off mainlobe-SL; Q16. Απώλεια κορυφής;</p> | <p>Q17. $\Delta f = F_s/N$; Q18. ESD vs PSD; Q19. RC ανακεφαλαίωση 3 ways; Q20. Γέφυρα Laplace/Z; Q21. FFT vs conv();</p> |

21 ερωτήματα → 5 ενότητες → 4 ασκήσεις → 1 Ανακεφαλαίωση (RC)

5 πραγματικά προβλήματα που λύνουμε στο τέλος της εβδομάδας

1

Πώς υπολογίζω το φάσμα στον υπολογιστή;

Με `fft()`: υπολογίζει ΑΚΡΙΒΩΣ (έως float) τη DFT $X[k]$ — δείγματα του συνεχούς $X(\omega)$, όχι το ίδιο το $X(\omega)$.

→ σ20-σ28

2

Πότε χάνω πληροφορία στη δειγματοληψία;

Aliasing — όταν $F_s < 2 \cdot f_{\max}$. Η συχνότητα “κρύβεται” μέσα σε άλλη.

→ σ13-σ14

3

Πώς μετρώ ενέργεια σε ζώνη συχνοτήτων;

Parseval: $\sum |x[n]|^2 = (1/N) \sum |X[k]|^2$. Άρα ενέργεια time = ενέργεια freq.

→ σ49-σ53

4

Γιατί το φάσμα δείχνει “λάθος” κορυφές;

Spectral leakage + απώλεια κορυφής. Πρακτικά: το peak μπορεί να μοιάζει χαμηλότερο ή να “διασκορπίζεται”.

→ σ54-σ58

5

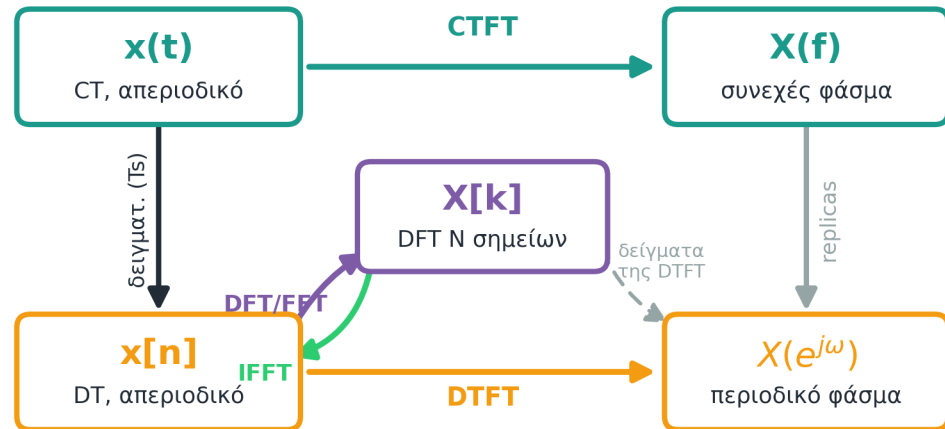
Πώς φιλτράρω στο πεδίο συχνότητας;

$X[k] \rightarrow \text{mask } H[k] \rightarrow \text{IFFT}$. Επεξεργασία στο φάσμα = επεξεργασία στον χρόνο (W05 link).

→ σ42-σ46

7 εργαλεία — 5 τύποι σήματος — ένας μετασχηματισμός για κάθε σκοπό

Parseval: η ενέργεια αναλλοίωτη σε ΟΛΟΥΣ τους μετασχηματισμούς



5 βασικοί τύποι σήματος ↔ 7 εργαλεία μετασχηματισμού

7 βασικά εργαλεία

| | |
|-----------------|-----------------------|
| FS | σειρά Fourier |
| CTFT | συνεχούς-χρόνου F.T. |
| DTFT | διακριτού-χρόνου F.T. |
| DFT | διακριτή F.T. (N-pt) |
| FFT | αλγόριθμος DFT |
| IFFT | αντίστροφη FFT |
| Parseval | ενέργεια invariant |

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Όλα τα εργαλεία αντιστοιχούν σε ζεύγη (signal type) ↔ (spectrum type).

ΠΡΟΣΕΧΩ

FFT DEN είναι νέος μετασχηματισμός — είναι αλγόριθμος της DFT ($O(N \log N)$).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ3 προβλήματα. Μετά σ5 W06+W07→W08.

W06: αρμονικές T_0 -περιοδικού. W07: γενίκευση σε απεριοδικό. W08: στον υπολογιστή — N δείγματα, N bins.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Συνέχιση από W06+W07 στον ΨΗΦΙΑΚΟ κόσμο:
N δείγματα → N bins.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν $N \rightarrow \infty$ τι θα συνέβαινε; (Επιστρέφουμε στην DTFT/CTFT;)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Πεπερασμένα δείγματα → πεπερασμένο φάσμα - αλλά με trade-offs (resolution, leakage).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για $F_s=1000$, $T=0.1s$: πόσα bins έχει η DFT;

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $N = F_s \cdot T = 1000 \cdot 0.1 = 100$ bins.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

W06=αρμονικές, W07= ω/f , W08=k (bin index) ή $k \cdot F_s/N$ (Hz).

ΠΡΟΣΕΧΩ

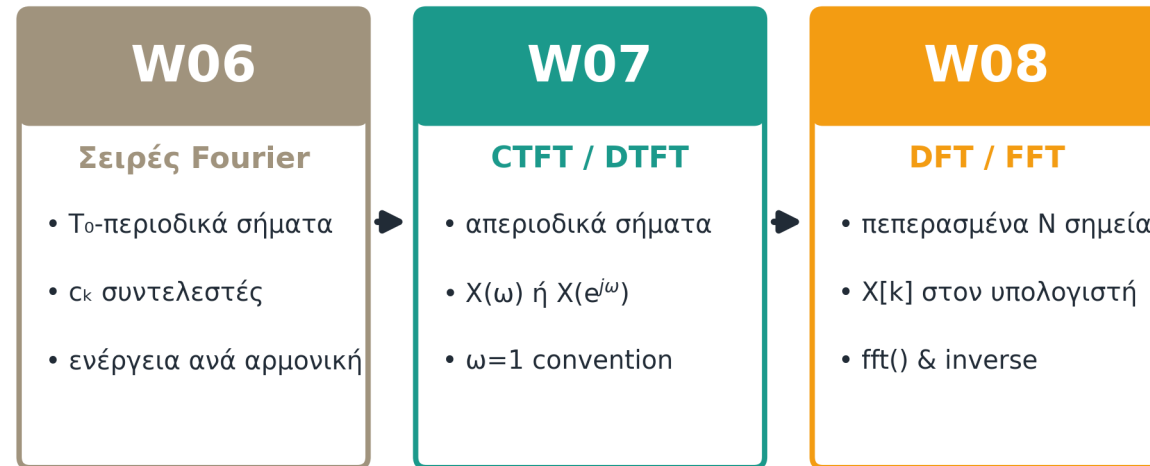
DFT ΔΕΝ είναι "discretization of CTFT". Είναι sampling της DTFT.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ4 τα 7 εργαλεία. Μετά σ6 οικογένεια Fourier.

γενίκευση
($T_0 \rightarrow \infty$)

πεπερασμένα
δείγματα



Η οικογένεια Fourier — 4 μετασχηματισμοί + 1 αλγόριθμος

W07

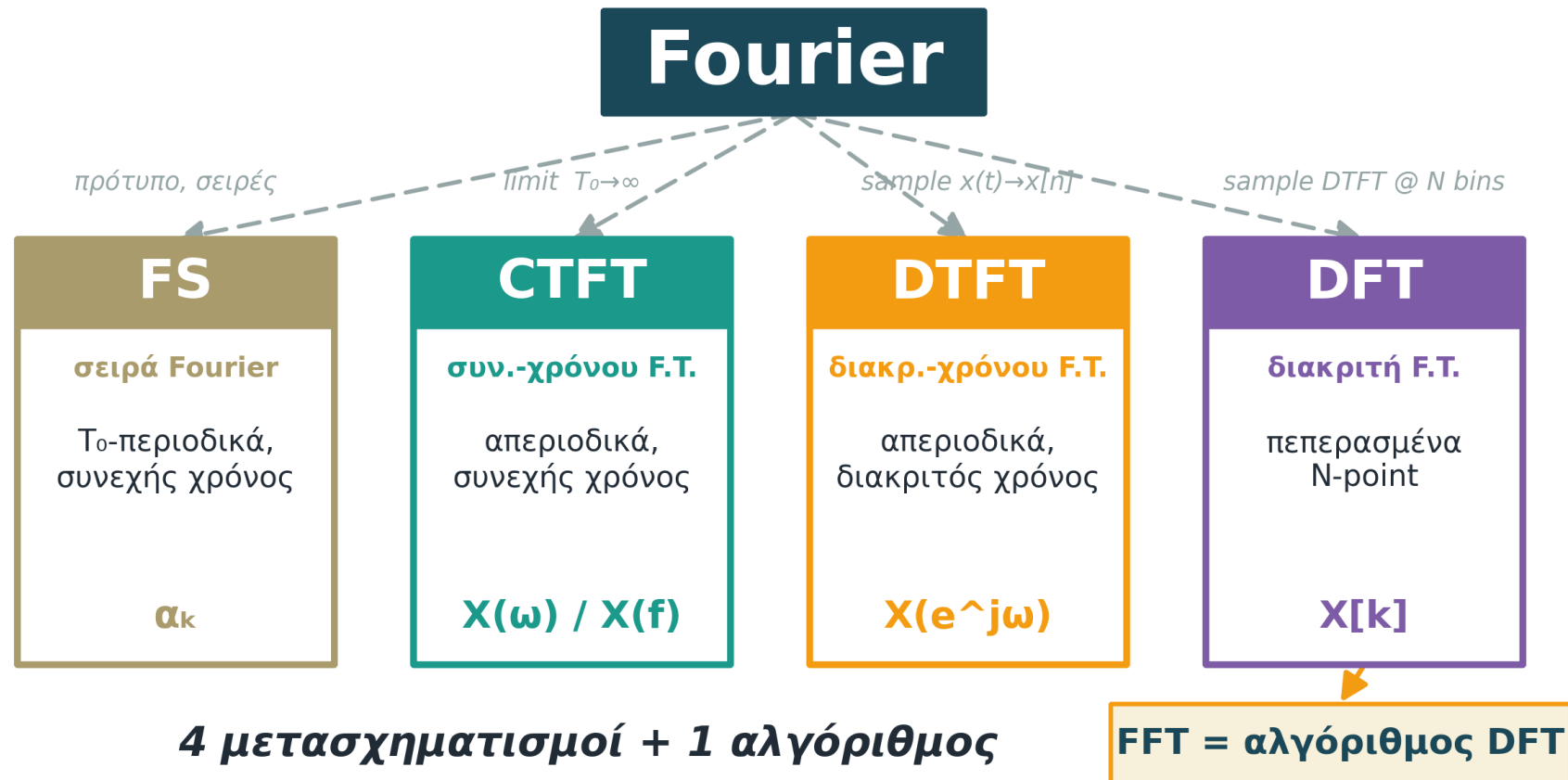
 $x[n]$ $X[k]$

window

PSD

W09

4 transforms (FS, CTFT, DTFT, DFT) διαφέρουν σε domain (CT/DT) και periodicity. FFT = γρήγορος αλγόριθμος του DFT.

**ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ**

2 διαστάσεις διάκρισης: domain (CT/DT) \times periodicity (periodic/apperiodic).

ΠΡΟΣΕΧΩ

Μερικά αρχεία γράφουν "FFT" ενώ εννοούν DFT. Ο αλγόριθμος δεν αλλάζει το αποτέλεσμα — μόνο τον χρόνο.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ5 W06+W07 \rightarrow W08. Μετά σ7 pipeline DSP.

Pipeline DSP: $x(t) \rightarrow x[n] \rightarrow x_w[n] \rightarrow X[k]$

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

5-stage pipeline για κάθε ψηφιακό φάσμα: AAF, ADC, παράθυρο, FFT, post-processing.

$$x(t) \rightarrow \text{AAF} \rightarrow \text{ADC}(F_s) \rightarrow x[n] \rightarrow x_w[n] \rightarrow \text{FFT}(N) \rightarrow X[k]$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Κάθε ψηφιακή ανάλυση φάσματος ΑΥΤΟ ακολουθεί. Όλα τα υπόλοιπα είναι παραλλαγές.

Τι βλέπουμε: η ίδια αλυσίδα που ακολουθεί ΚΑΘΕ ψηφιακή ανάλυση φάσματος. Το συνεχές σήμα περνά από φίλτρο → δειγματολήπτη → παράθυρο → FFT· κάθε κουτί είναι ένα στάδιο με δικό του ρόλο και trade-off.

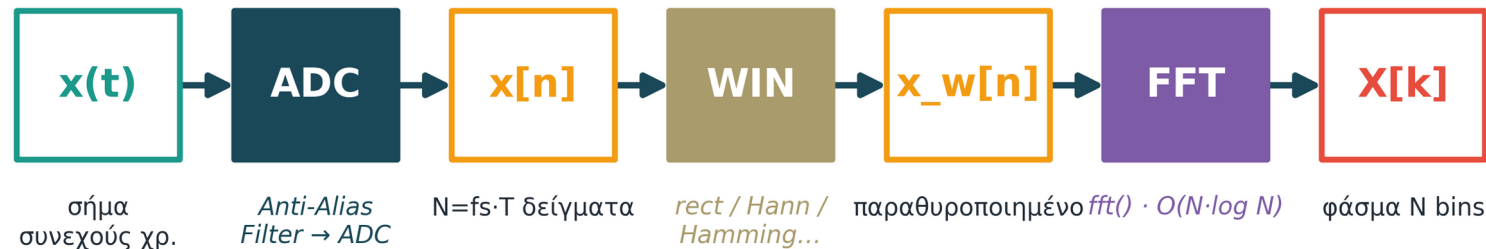
Pipeline ψηφιακής επεξεργασίας σήματος (DSP)

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι θα γίνει αν παραλείψεις AAF; (απάντηση: aliasing)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Κάθε στάδιο έχει trade-off: AAF=phase distortion, ADC=quantization, window=mainlobe widening.



σήμα συνεχούς χρ. *Anti-Alias Filter* → ADC $N=fs \cdot T$ δείγματα *rect / Hann / Hamming...* παραθυροποιημένο *fft()* · $O(N \cdot \log N)$ φάσμα N bins

Τι κάνει κάθε στάδιο:

- AAF — αντι-aliasing φίλτρο: κόβει συχνότητες $> F_s/2$ ΠΡΙΝ τη δειγματοληψία.
- ADC(F_s) — μετατροπή σε $x[n]$: N δείγματα με ρυθμό F_s .
- $x_w[n]$ — παράθυρο: σβήνει ομαλά τα άκρα του record → λιγότερη διαρροή.
- FFT(N) — φάσμα $X[k]$ σε N bins, $O(N \cdot \log N)$.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για $F_s=1000$, $N=1024$, $1 V_{rms}$ ημίτονο 100 Hz: το peak amplitude είναι $\sqrt{2} V$. Στο one-sided peak spectrum περιμένω $\sqrt{2} V$ · στο RMS spectrum περιμένω 1 V_{rms} .

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Πραγματικός χρόνος → bins. Ο μετασχηματισμός F_s/N μετατρέπει $k \rightarrow \text{Hz}$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Παράθυρο ΠΑΝΤΑ — η rect είναι default αλλά είναι όντως window.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ6 οικογένεια Fourier. Μετά σ8 3 παράμετροι.

Πριν το FFT: 3 σημαντικές παράμετροι

W07

x[n]

X[k]

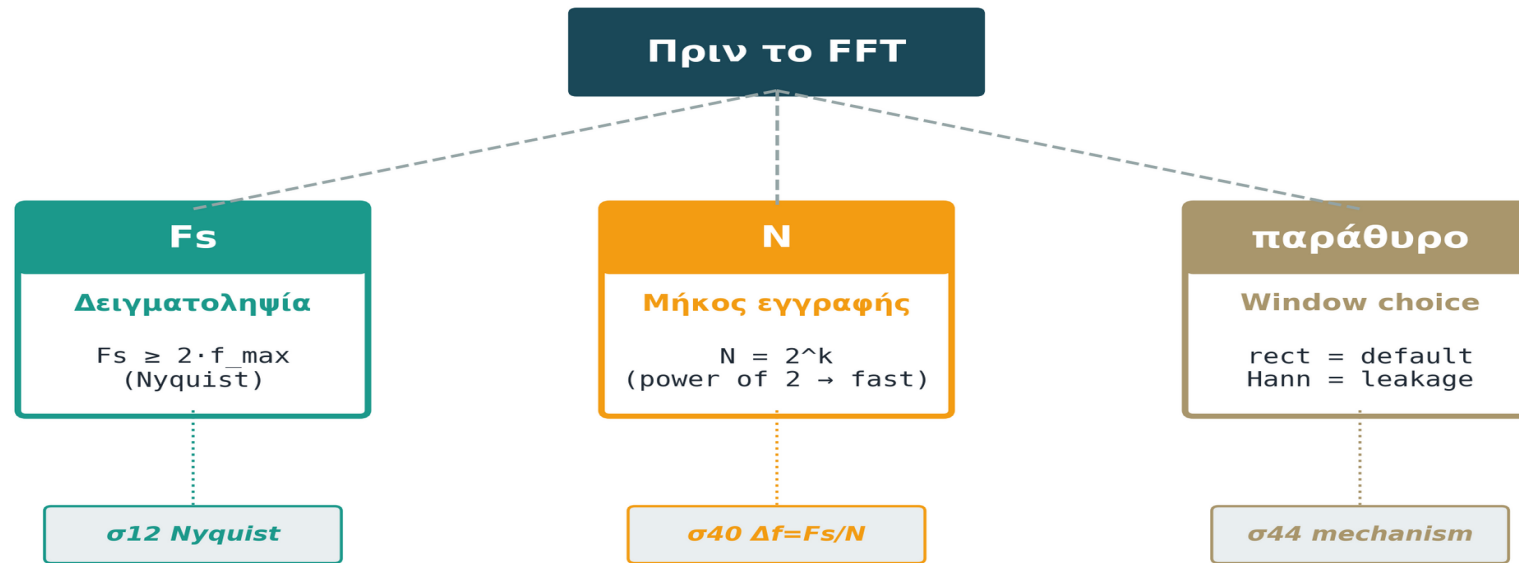
window

PSD

W09

3 επιλογές: F_s (rate), N (record length), παράθυρο (shape). Καθεμία δένει με τις άλλες.

Τι βλέπουμε: το μήκος εγγραφής N (και η διάρκεια $T = N/F_s$) ορίζει τη διακριτική ικανότητα $\Delta f = F_s/N = 1/T$. Λεπτό $\Delta f \rightarrow$ ΜΕΓΑΛΟ record \rightarrow «αργή» μέτρηση: για να ξεχωρίσεις κοντινές συχνότητες πρέπει να ηχογραφήσεις για πολλή ώρα (βλ. γράφημα σ47).



Όλες οι επιλογές αλληλεξαρτώνται. Ξεκίνα από f_{max} · μετά F_s · μετά N · μετά $window$.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

F_s σε Hz, N σε samples, $\Delta f = F_s/N$ σε Hz, window dimensionless.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Δεν υπάρχει "καλύτερη" επιλογή — όλες οι trade-offs.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ7 pipeline DSP. Μετά σ9 μήκος N, T .

Τι βλέπουμε: Το μήκος του record ορίζει $N=Fs \cdot T$ (πλήθος θυρίδων) και $\Delta f=1/T$ (ανάλυση). Ίδιο σήμα 60 & 64 Hz: μικρό record → μία θαμπή κορυφή· μεγάλο record → δύο διακριτές.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Πόσα δείγματα κρατάω (N) και για πόσο χρόνο (T) — και τι αλλάζει στο φάσμα.

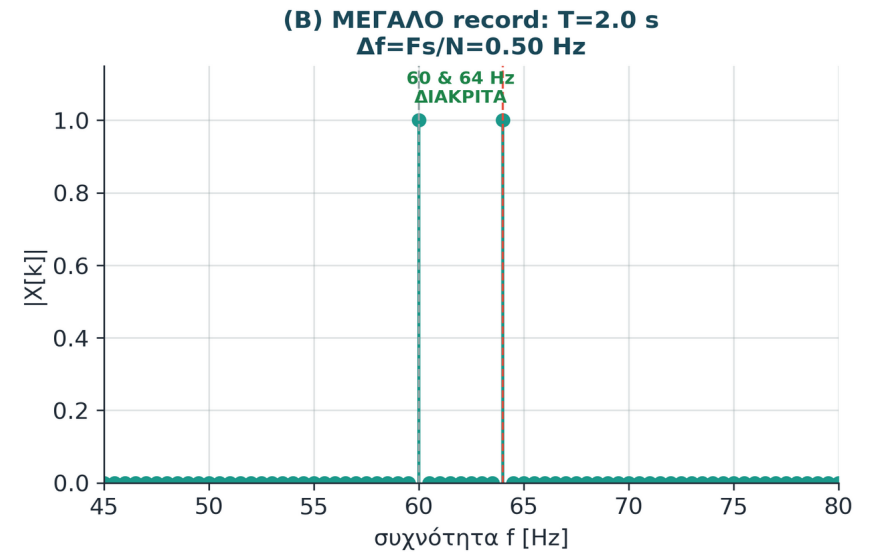
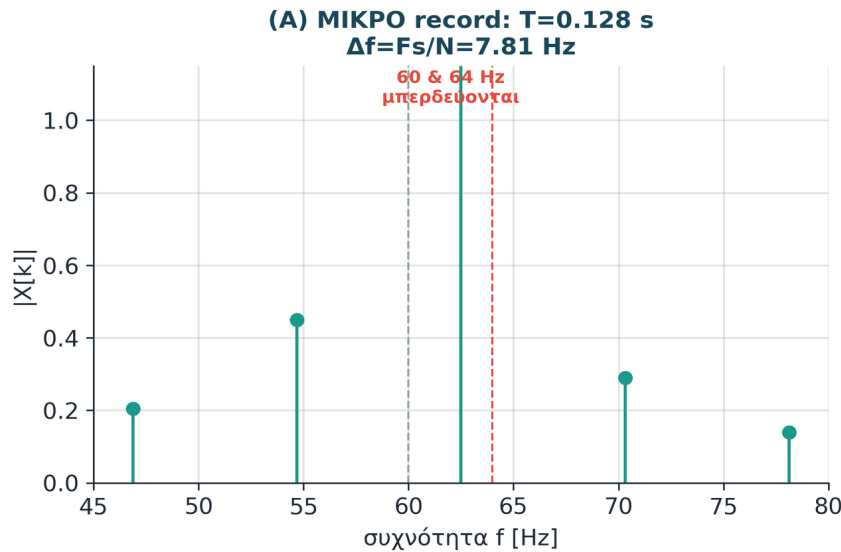
Μήκος εγγραφής → ανάλυση: $\Delta f = 1/T$ (ίδιο F_s , μεγαλύτερο $N=Fs \cdot T$ → οξύτερες κορυφές)

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν διπλασιάσω το T (ίδιο F_s), τι παθαίνει η ανάλυση Δf ;

ΕΞΗΓΗΣΗ

$\Delta f = F_s/N = 1/T$. Μεγαλύτερο T → μικρότερο Δf → ξεχωρίζουν πιο κοντινές συχνότητες. Το F_s ορίζει το εύρος (0... $F_s/2$), το T την ανάλυση.



ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για να ξεχωρίσεις 100.0 & 100.5 Hz, πόσο T;
✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\Delta f \leq 0.5 \text{ Hz} \rightarrow T \geq 1/\Delta f = 2 \text{ s}$.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$N=Fs \cdot T$ [δείγμ.] · $\Delta f = F_s/N = 1/T$ [Hz] · εύρος 0... $F_s/2$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Zero-padding αυξάνει N αλλά ΟΧΙ T → ΟΧΙ νέα ανάλυση (σ22, σ60).
Νέα ανάλυση μόνο με μεγαλύτερο πραγματικό record.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ8 3 παράμετροι. Μετά σ10 ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 — σ10-σ19

Δειγματοληψία

Δειγματοληψία · Nyquist · Αναδίπλωση · AAF/Reconstruction

Τι βλέπουμε: Δείχνουμε το πιο βασικό βήμα: παίρνουμε ένα συνεχές σήμα $x(t)$ και κρατάμε τις τιμές του μόνο στα χρονικά σημεία $t = 0, T_s, 2T_s, \dots$. Στο plot η κυανή καμπύλη είναι το συνεχές $x(t)$ και τα πορτοκαλί stems είναι τα δείγματα $x[n]$ στα σημεία αυτά. Η συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = 1/T_s$ καθορίζει την πυκνότητα: μεγαλύτερο F_s = πιο πυκνά δείγματα = πιο πιστή αναπαράσταση. Στην οθόνη $F_s=15$ Hz, σήμα 3 Hz: 5 δείγματα ανά περίοδο, αρκετά. Η πράξη φαίνεται απλή — αλλά γεννά όλα τα φαινόμενα της W08 (αντίγραφα, αναδίπλωση, διακριτική ικανότητα).

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Από συνεχές $x(t)$ → ακολουθία τιμών $x[n]$.
Καθαρά αριθμητικό sample.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν T_s μικραίνει (F_s αυξάνει), τι αλλάζει στο σχήμα του $x[n]$;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Πιο πυκνά samples → πιο πιστή απεικόνιση. Αλλά πιο πολλά δεδομένα.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για $F_s=1000$ και $f_{\text{signal}}=3$ Hz: πόσα samples ανά περίοδο σήματος;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\text{samples/period} = F_s/f = 1000/3 \approx 333$ δείγματα/περίοδο.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [s] συνεχές, n [sample index] διακριτό. $x[n]$ dimensionless ίδιο με $x(t)$.

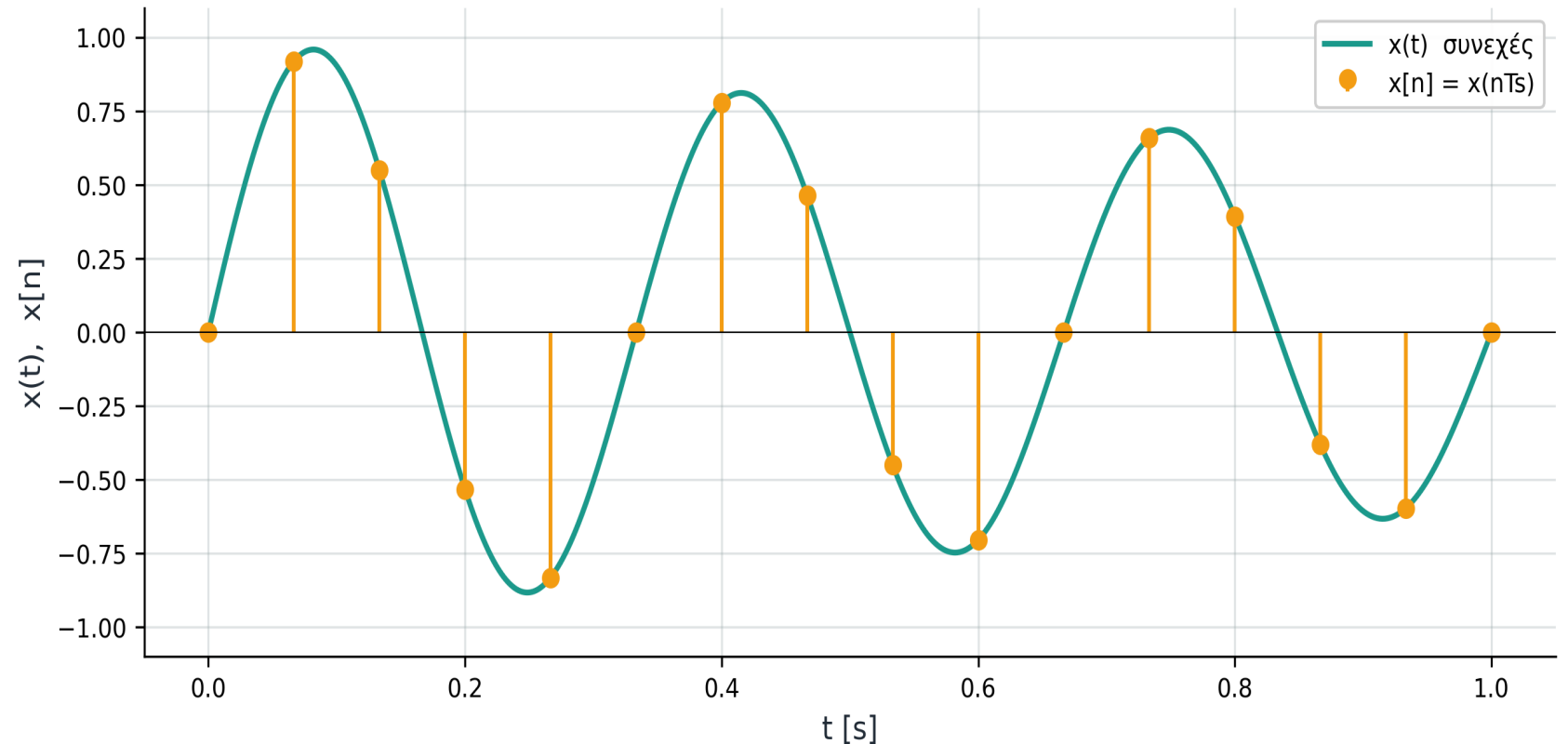
ΠΡΟΣΕΧΩ

Τα δείγματα είναι ΑΚΡΙΒΕΙΣ τιμές του $x(t)$ στα $t=n \cdot T_s$. Πλήρης ανακατασκευή **ΜΟΝΟ** αν το σήμα είναι **bandlimited & $F_s \geq 2 \cdot f_{\text{max}}$** (W07).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ10 ενότητα. Μετά σ12 replicas.

Δειγματοληψία: $x[n] = x(nT_s)$ ($F_s = 15$ Hz, $f_{\text{signal}} = 3$ Hz)



Δειγματοληψία → replicas (αντίγραφα) στο φάσμα

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Όταν δειγματοληπτείς στον χρόνο, στο φασματικό πεδίο συμβαίνει το εξής: το πρωτότυπο φάσμα $X(f)$ επαναλαμβάνεται κάθε F_s Hz, δημιουργώντας ΑΠΕΙΡΑ φασματικά αντίγραφα (replicas). Στο panel (A) $F_s=50 > 2 \cdot f_{max}$: τα αντίγραφα είναι αρκετά μακριά για να ΜΗΝ επικαλύπτονται — η πληροφορία είναι ανακτήσιμη με ένα LP φίλτρο. Στο panel (B) $F_s=20 < 2 \cdot f_{max}$: τα αντίγραφα ΕΠΙΚΑΛΥΠΤΟΝΤΑΙ (κόκκινη περιοχή) — η πληροφορία ανακατεύεται μη αναστρέψιμα. Η επικάλυψη είναι ΑΚΡΙΒΩΣ η αναδίπλωση συχνοτήτων (aliasing) — απλά τώρα τη βλέπεις φασματικά. Μαθηματικά: $X_p(f) = (1/T_s) \cdot \sum_k X(f - k \cdot F_s)$.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Φάσμα δειγματοληπτημένου σήματος = ΑΘΡΟΙΣΜΑ μετατοπισμένων αντιγράφων.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι θα συνέβαινε αν $F_s \nearrow \infty$; (απάντηση: τα αντίγραφα απομακρύνονται)

ΕΞΗΓΗΣΗ

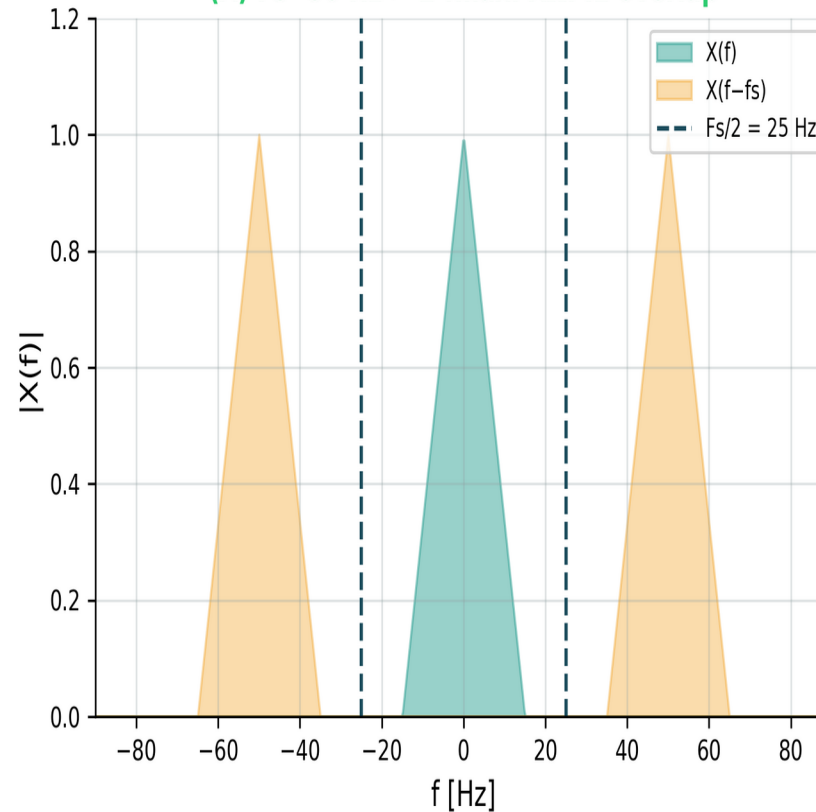
Πολλαπλασιασμός στον χρόνο με impulse train \leftrightarrow convolution στη συχνότητα με periodic Dirac comb.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

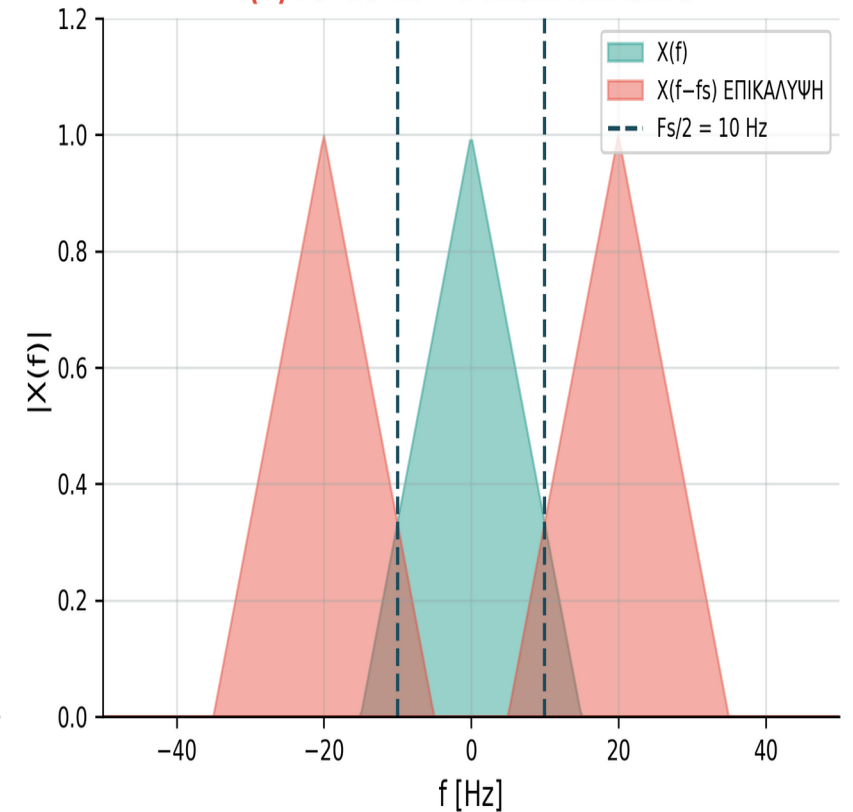
Αν $f_{max} = 50$ Hz, ποιο ελάχιστο F_s για να μην επικαλύπτονται;

✓ **ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** $F_{s_min} = 2 \cdot f_{max} = 100$ Hz (Nyquist· αυστηρά > 100).

(A) $F_s=50$ Hz $> 2 \cdot f_{max}$: ΧΩΡΙΣ overlap



(B) $F_s=20$ Hz $< 2 \cdot f_{max}$: ALIASING



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Άξονας: f [Hz] χωρίς fold. Αντίγραφα σε $\pm k \cdot F_s$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Πάντα φιλτράρω με AAF ΠΡΙΝ την δειγματοληψία για να αποτρέψω aliasing.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ11 δειγματοληψία x[n]. Μετά σ13 Nyquist.

Nyquist-Shannon: το ελάχιστο F_s

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Το κριτήριο Nyquist-Shannon ορίζει ΑΚΡΙΒΩΣ τότε η δειγματοληψία είναι ασφαλής: αν το σήμα είναι bandlimited με μέγιστη συχνότητα f_{\max} , χρειάζεται $F_s \geq 2 \cdot f_{\max}$ (θεωρητικό όριο- στην πράξη $F_s > 2 \cdot f_{\max}$ με guard band) για ΑΚΡΙΒΗ ανακατασκευή του πρωτότυπου από τα δείγματα. Στο plot, η αριστερή γραφική ($F_s \geq 2 \cdot f_{\max}$) δείχνει αντίγραφα χωρίς επικάλυψη → ασφαλές. Η δεξιά ($F_s < 2 \cdot f_{\max}$) δείχνει επικάλυψη → αναδίπλωση. Παράδειγμα CD audio: $F_s=44.1$ kHz, οπότε $f_{\text{Nyquist}} = 22.05$ kHz — αρκετά πάνω από τα 20 kHz της ανθρώπινης ακοής. Αν F_s επιλεγεί $< 2 \cdot f_{\max}$, ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ αλγόριθμος που να ανακτήσει την πληροφορία.
ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Πότε η δειγματοληψία διατηρεί ΟΛΗ την πληροφορία;

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν $F_s = 1.5 \cdot f_{\max}$ τι θα δω στο φάσμα;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Όταν $F_s < 2 \cdot f_{\max}$ τα replicas επικαλύπτονται → aliasing → ΑΝΕΠΑΝΟΡΘΩΤΗ απώλεια.

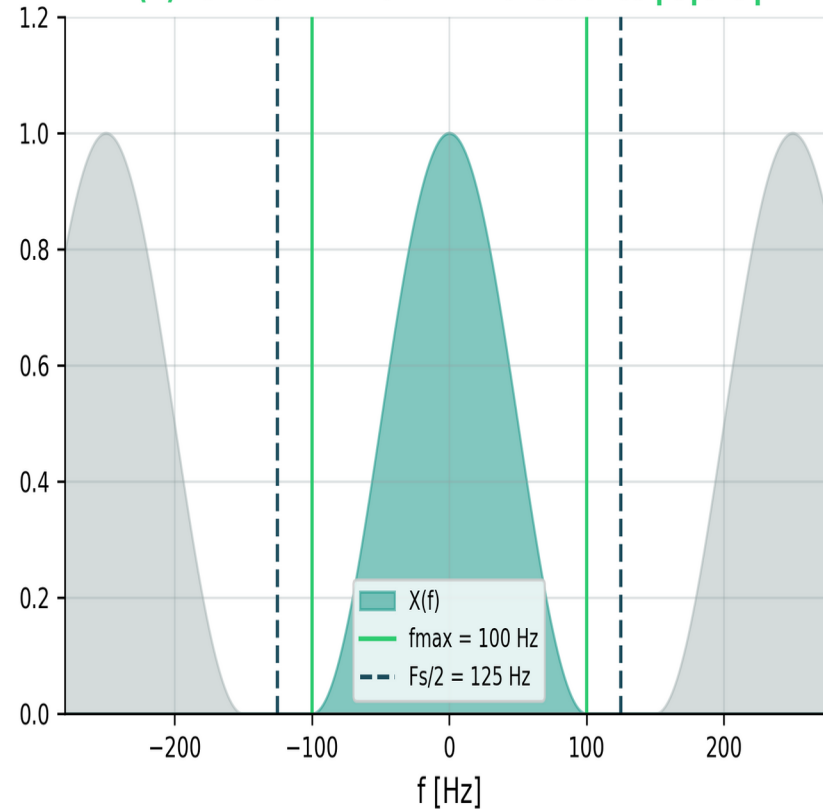
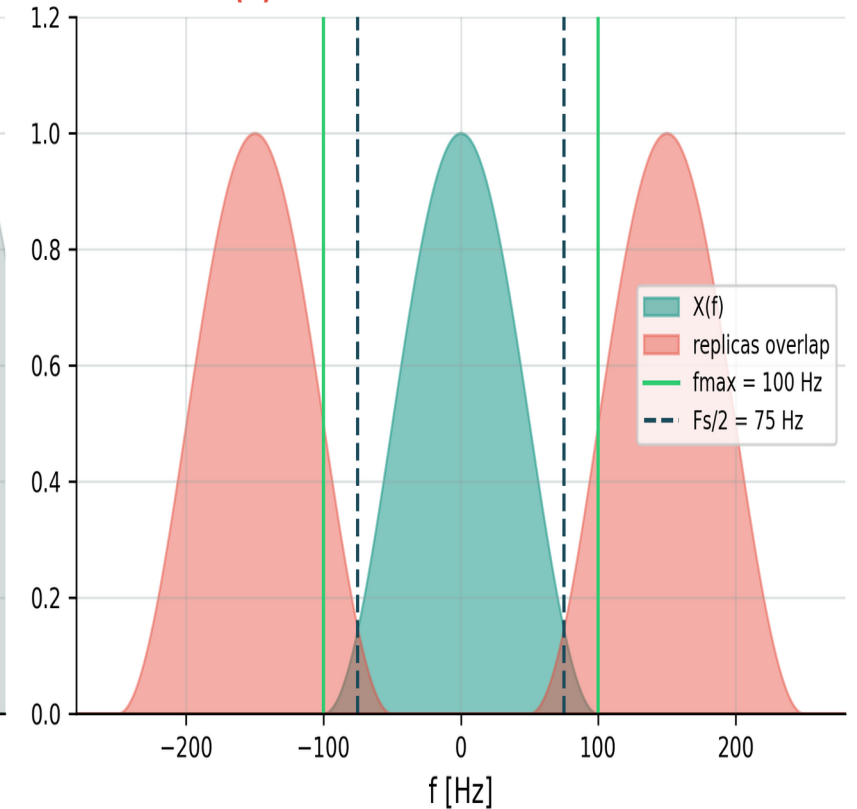
ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Sample-rate ηχητικού CD = 44.1 kHz. Ποιο το ανώτερο f_{\max} ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f_{\max} = F_s/2 = 44.1/2 = 22.05$ kHz.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$F_s/2 = \text{Nyquist frequency}$. $f_{\max} = \text{signal bandwidth}$.

(A) $F_s=250 \geq 2 \cdot f_{\max}$ ✓ Ανακατασκευή εφικτή(B) $F_s=150 < 2 \cdot f_{\max}$ ✗ ALIASING

ΠΡΟΣΕΧΩ

Η ισότητα $F_s=2 \cdot f_{\max}$ είναι οριακή — στην πράξη αφήνουμε guard band πάνω από $2 \cdot f_{\max}$ ώστε το AAF να έχει χώρο μετάβασης (εξαρτάται από το φίλτρο/εξασθένιση).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ12 replicas. Μετά σ14 aliasing παράδειγμα.

Aliasing — Παράδειγμα: 4 συχνότητες, $F_s = 100$ Hz

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Δείχνουμε τι συμβαίνει πρακτικά όταν παραβιάζουμε Nyquist. Έχουμε σήμα με 4 πραγματικές συχνότητες {25, 70, 160, 510} Hz, αλλά δειγματοληπούμε με $F_s=100$ Hz (πολύ χαμηλά). Με το fold formula υπολογίζουμε πού θα εμφανιστεί καθεμία στο $[0, 50]$: το 25 μένει στα 25 (καθαρό), το 70 → 30, το 160 → 40, το 510 → 10. Στο FFT plot βλέπεις 4 peaks στις aliased θέσεις — αλλά ΔΕΝ μπορούμε να μαντέψουμε από εδώ ποια ήταν τα πραγματικά f . Η μόνη λύση είναι το AAF πριν τη δειγματοληψία (σ16).

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Με $F_s=100$ Hz (Nyquist=50 Hz) και 4 sinusoids εκτός $[0,50]$, τι παρατηρώ;

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Ποιο f θα κάνει αναδίπλωση σε ποιο f_{alias} ;

ΕΞΗΓΗΣΗ

25→25 (δεν αναδιπλώνεται), 70→30, 160→40, 510→10.
Όλα “συμπίεζονται” στο $[0,50]$.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν αυξήσω F_s σε 200 Hz, ποιες θα είναι ΑΚΟΜΑ aliased;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Με $F_s=200$ Hz (Nyquist 100 Hz) παραμένουν aliased μόνο όσες $f>100$ Hz: 160→40 Hz, 510→90 Hz. Οι 25 & 70 Hz γίνονται πλέον καθαρές.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

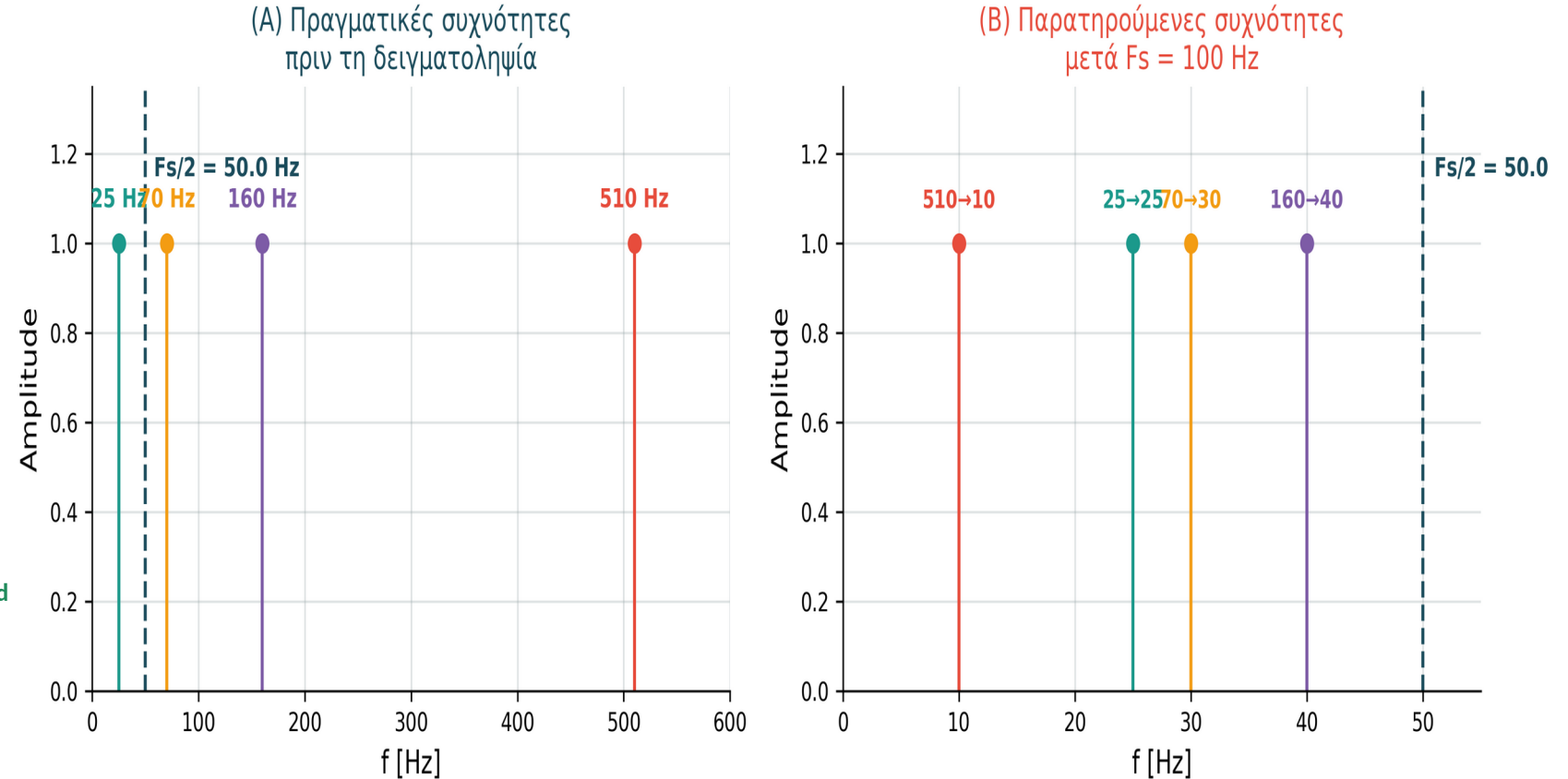
Άξονας πάντα f [Hz] φυσικό. Aliased peaks παραπλανούν.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Δεν μπορείς να ξεχωρίσεις aliased peak από πραγματικό. Μόνο AAF το αποτρέπει.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ13 Nyquist. Μετά σ15 πρόβλεψε.



Σενάριο: $f_1 = 80$ Hz, $f_2 = 130$ Hz, και κάποιος δειγματοληπτεί με $F_s = 200$ Hz

Πριν τη λύση, απάντησε νοερά:

1. Είναι Nyquist criterion ικανοποιημένο;
2. Σε ποιες παρατηρούμενες συχνότητες θα εμφανιστούν τα f_1, f_2 ;
3. Μπορεί ο δέκτης να ξεχωρίσει ποια είναι "πραγματική";

Άσκηση 1 — Aliasing prediction (Octave)

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

ΕΚΦΩΝΗΣΗ: Δίνεται σύνθετο σήμα $x(t) = \sin(2\pi \cdot 80 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot 130 \cdot t)$, με $f_1=80$ Hz και $f_2=130$ Hz. Το δειγματοληπτείς με $F_s=200$ Hz για $T=0.5$ s, άρα $N=100$ δείγματα. (α) Με βάση το κριτήριο Nyquist ($F_s/2 = 100$ Hz), πρόβλεψε ποια από τις δύο συχνότητες θα αναδιπλωθεί. (β) Υπολόγισε την ψευδώνυμη συχνότητα f_{alias} με το fold formula. (γ) Επαλήθευσε με `fft()` στον Octave: ποια peaks περιμένεις και σε ποιες συχνότητες; Δικαιολόγησε.

```
% Ex.1 – Aliasing prediction
Fs = 200;          % sample rate [Hz]
T = 0.5;          % record length [s]
N = round(Fs*T); % number of samples
t = (0:N-1)/Fs;   % n=0:N-1 → t=0, bins ευθυγραμμίζονται

f1 = 80;
f2 = 130;
x = sin(2*pi*f1*t) + sin(2*pi*f2*t);

X = fft(x); half = N/2 + 1;
P1 = abs(X(1:half))/N; P1(2:end-1)=2*P1(2:end-1);

freqs = (0:half-1)*Fs/N; % one-sided [0, Fs/2]
stem(freqs, P1, 'filled');
xlabel('f [Hz]'); ylabel('πλάτος');
title(sprintf('Fs=%d Hz, f_1=%d, f_2=%d', Fs, f1, f2));

% PROBLEM: f2=130 > Fs/2=100 → aliasing
% Expected: f1 at 80 Hz (clean)
%           f2=130 → f_alias = 200 - 130 = 70 Hz
```

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$f_1 = 80 < 100$ (Nyquist) → OK

$f_2 = 130 > 100$ → ALIAS

Με fold formula:

$f_2 \bmod 200 = 130$

$130 > 100 \Rightarrow$

$f_{\text{alias}} = 200 - 130 = 70$ Hz

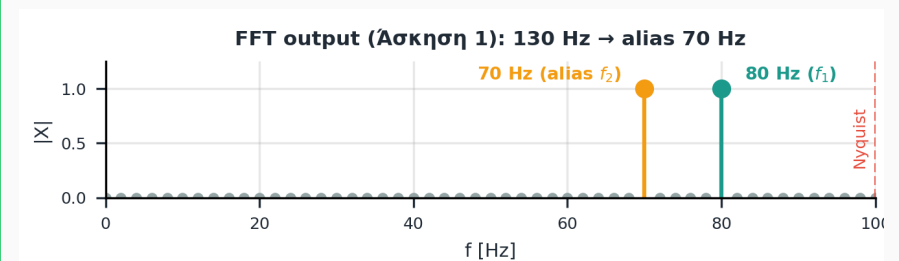
Στο FFT plot:

- peak στα 80 Hz (το πραγματικό f_1)
- peak στα 70 Hz (το aliased f_2)

Δεν διακρίνεις ποια είναι "πραγματική" χωρίς πρόσθετη πληροφορία.

Λύση: AAF με cutoff

στα 90 Hz θα έκοβε το f_2 .



Πριν σ16 Άσκηση 1 aliasing. Μετά σ18 AAF παράδειγμα.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Πριν από το ADC βάζω AAF για να αποφύγω aliasing.

Μετά το DAC βάζω φίλτρο ανακατασκευής για να αφαιρέσω τις φασματικές εικόνες.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν παραλείψω Recon-LP (φίλτρο ανακατασκευής) τι θα δω στο $\hat{X}(t)$;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Zero-order hold:

σκαλοπατωτή έξοδος στον χρόνο, φασματικές εικόνες γύρω από kFs, περίβλημα πλάτους τύπου sinc(fTs).

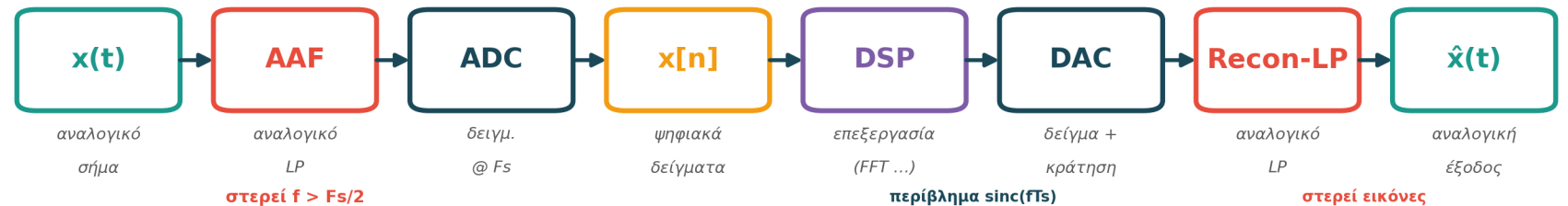
ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Συχνότητα cutoff του Reconstruction-LP (φίλτρο ανακατασκευής) για $F_s=44.1$ kHz audio CD;

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ιδανικό όριο $f_c = F_s/2 = 22.05$ kHz. Πρακτικά: passband ~20 kHz, με transition/stopband πριν τα 22.05 kHz.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Όλα τα φίλτρα: cutoff < $F_s/2$ (με guard band). ADC/DAC: ρυθμός = F_s .



ΠΡΟΣΕΧΩ

AAF (πριν) \neq Reconstruction-LP (μετά): δεν κάνουν την ίδια δουλειά. Το RC είναι ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ μοντέλο 1ης τάξης — όχι επαρκές πρακτικό AAF (θέλει φίλτρα υψηλότερης τάξης). Σύνδεση με τα φίλτρα της W04.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ14-16 aliasing. Μετά σ18: η αλυσίδα ADC→DAC (AAF + ανακατασκευή) σε παράδειγμα.

Τι βλέπουμε: Audio $F_s=44.1$ kHz (Nyquist 22.05). Χρήσιμος τόνος 8 kHz + ανεπιθύμητος 30 kHz. Χωρίς AAF το 30 αναδιπλώνεται στα $44.1-30=14.1$ kHz (ψευδής κορυφή). Με AAF (cutoff ~20 kHz) το 30 κόβεται ΠΡΙΝ τη δειγματοληψία → καθαρό.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Δύο αναλογικά φίλτρα: AAF πριν το ADC, Recon-LP μετά το DAC. Εδώ το παράδειγμα του AAF.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποια συχνότητα θα «πέσει» το 30 kHz αν ΔΕΝ βάλω AAF;

ΕΞΗΓΗΣΗ

AAF = αναλογικό χαμηλοπερατό ΠΡΙΝ το ADC: κόβει $f > F_s/2$ για να μην αναδιπλωθούν. Recon-LP = μετά το DAC: αφαιρεί τις φασματικές εικόνες γύρω από $k \cdot F_s$ (zero-order hold).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

$F_s=48$ kHz, τόνος 25 kHz χωρίς AAF: πού κάνει aliasing;

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $48-25=23$ kHz (μέσα στη ζώνη).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

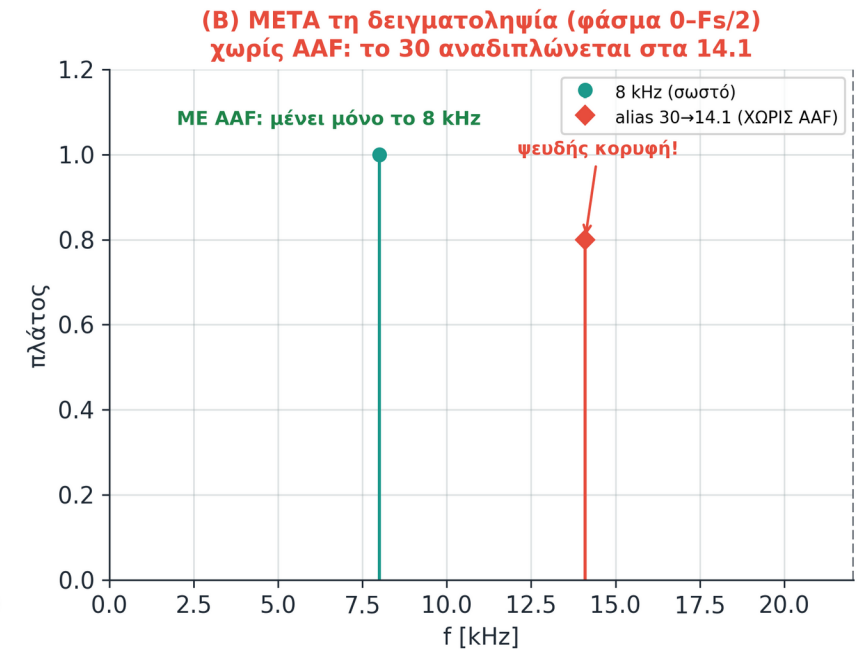
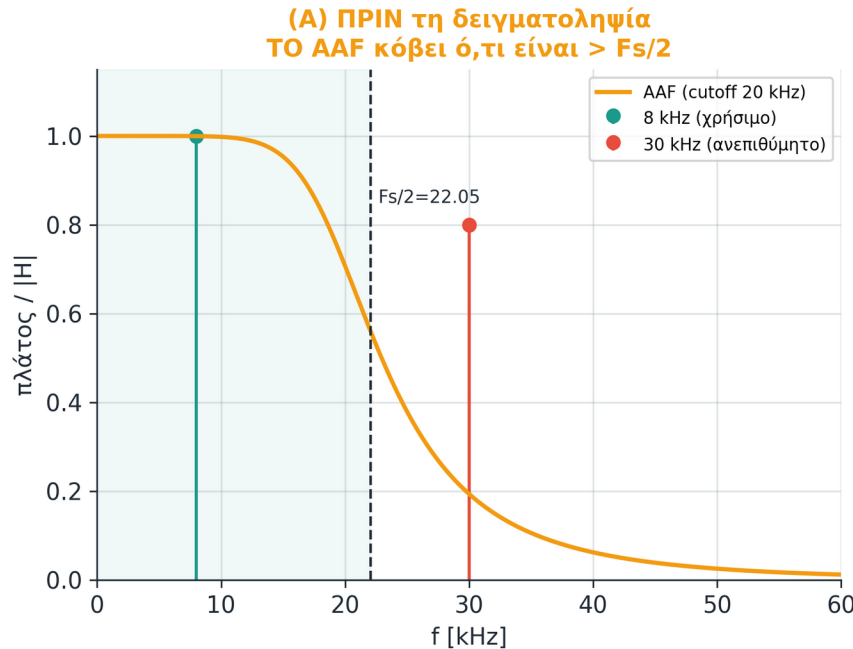
f [kHz]. AAF/Recon cutoff < $F_s/2$. Alias = $F_s - f$ (όταν $F_s/2 < f < F_s$).

ΠΡΟΣΕΧΩ

AAF (πριν) ≠ Recon-LP (μετά): διαφορετική δουλειά. Το aliasing δεν διορθώνεται με κώδικα — αν κάνει aliasing, χάθηκε (σ14).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ17 ADC/DAC AAF. Μετά σ19 Recon-LP.



Recon-LP μετά το DAC: κόβει τις φασματικές εικόνες

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Έξοδος DAC — ο τόνος 8 kHz εμφανίζεται ΚΑΙ ως «εικόνες» γύρω από κάθε πολλαπλάσιο του F_s (44.1, 88.2 kHz...), διαμορφωμένες από τον sinc φάκελο του zero-order-hold (ZOH). Το Recon-LP (χαμηλοπερατό μετά το DAC) κόβει $f > F_s/2$ και αφήνει μόνο τη baseband.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Έξοδος DAC με $F_s=44.1$ kHz, χρήσιμος τόνος 8 kHz.
Στόχος: αφαίρεση των φασματικών εικόνων πριν φτάσουν στο ηχείο.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Χωρίς Recon-LP, σε ποιες συχνότητες ακούγονται «φαντάσματα» του 8 kHz;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Το DAC κρατά κάθε δείγμα σταθερό (ZOH) → επανάληψη του φάσματος στα $k \cdot F_s$. Εικόνες στα $k \cdot F_s \pm f_0$ (π.χ. $44.1 \pm 8 = 36.1$ & 52.1 kHz). Το Recon-LP (cutoff $\approx F_s/2$) τις σβήνει. Είναι ο «καθρέφτης» του AAF: AAF πριν το ADC, Recon-LP μετά το DAC.

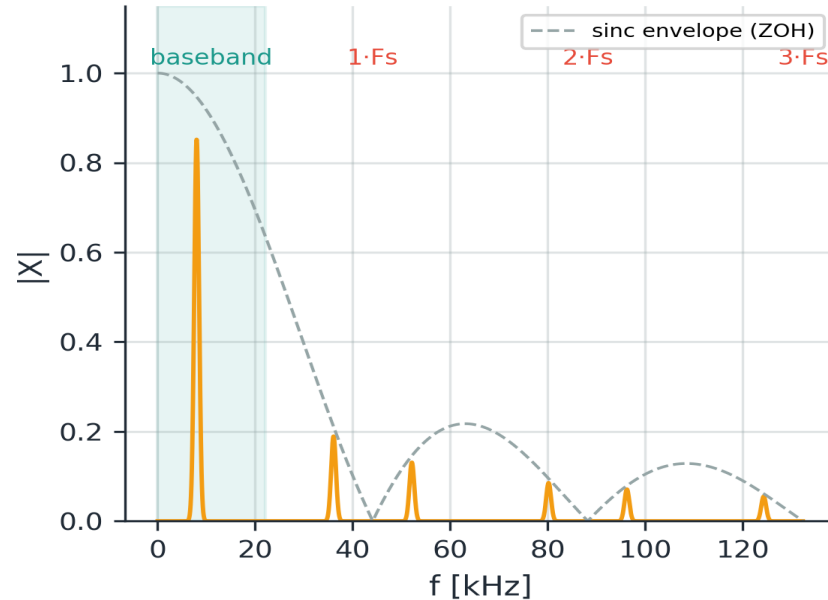
ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

$F_s=44.1$ kHz, τόνος 5 kHz. Πρώτη εικόνα;
✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $44.1-5 = 39.1$ kHz (και $44.1+5 = 49.1$ kHz).

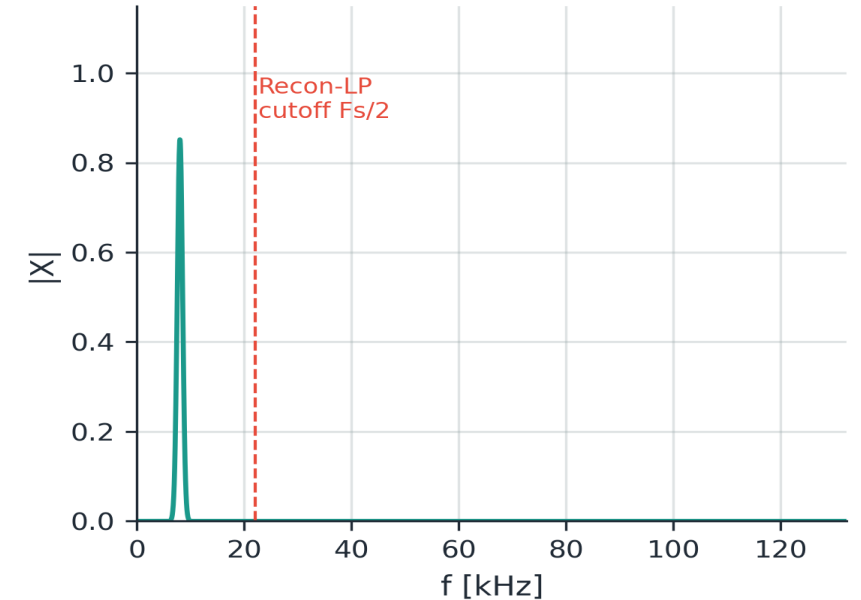
ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

f [kHz]. Φάκελος = $|\text{sinc}(f/F_s)|$. Recon-LP cutoff $< F_s/2$.

Έξοδος DAC (πριν Recon-LP)



Μετά Recon-LP (εικόνες κομμένες)



ΠΡΟΣΕΧΩ

ZOH ρίχνει και το πλάτος (sinc droop) — μερικά DAC βάζουν sinc-compensation. Recon-LP \neq AAF: άλλη θέση, ίδια ιδέα (κόψε $f > F_s/2$).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ18 AAF παράδειγμα. Μετά σ20 ΕΝΟΤΗΤΑ 2.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2 — σ20-σ48

FFT ανάλυση + IFFT

DTFT→DFT · Παράγοντες περιστροφής · Butterfly · Magnitude/Phase · Two/One-sided · IFFT

Από DTFT στη DFT: δειγματοληψία του φάσματος

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Η DFT ΔΕΝ είναι νέος μετασχηματισμός — είναι η DTFT δειγματοληπτημένη σε N σημεία. (A) το πεπερασμένο $x[n]=0.7^n$ ($M=8$). (B) η ΣΥΝΕΧΗΣ DTFT $|X(e^{j\omega})|$. (C) οι $N=8$ πορτοκαλί κουκίδες κάθονται ΑΚΡΙΒΩΣ πάνω στην πράσινη καμπύλη στα $\omega_k=2\pi k/N$.

$$X(e^{j\omega}) \rightarrow \text{δείγμα σε } \omega_k = 2\pi k/N \rightarrow X[k] = X(e^{j2\pi k/N})$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

DTFT συνεχές \rightarrow DFT = N ισαπέχοντα δείγματα της. Για πεπερασμένη ακολουθία μήκους M, η N-point DFT ($N \geq M$) την αναπαριστά χωρίς χρονική απώλεια.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν αυξήσω N (zero-padding), τι αλλάζει στο DFT;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Περισσότερα δείγματα της ΙΔΙΑΣ DTFT καμπύλης — δεν προστίθεται νέα πληροφορία.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

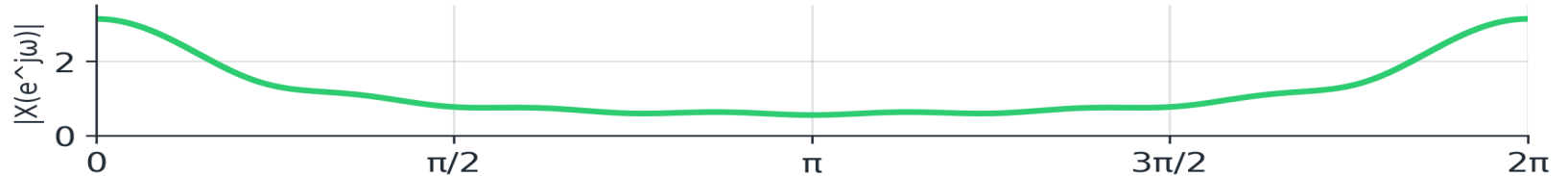
Δείξε μια πορτοκαλί κουκίδα και την πράσινη τιμή που κάθετα.

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: κάθε $X[k]=X(e^{j\omega_k})$ — η DFT είναι

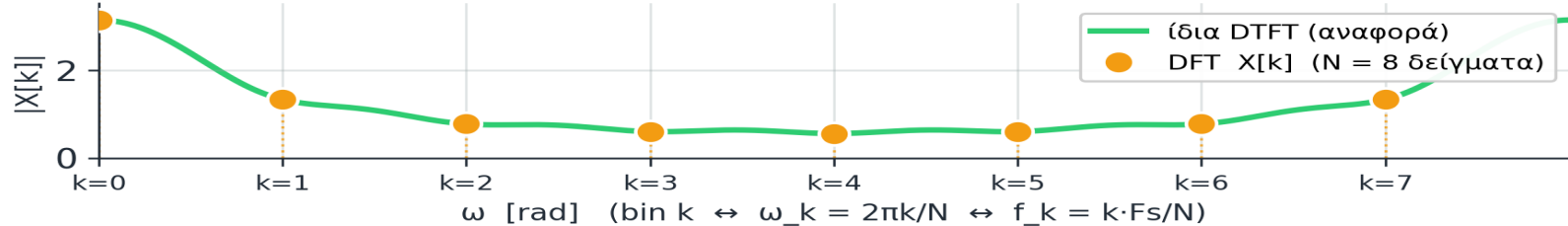
(A) πεπερασμένο σήμα $x[n] = 0.7^n$, $n = 0 \dots 7$ ($M = 8$ σημεία)



(B) η DTFT $|X(e^{j\omega})|$ — ΣΥΝΕΧΗΣ καμπύλη, περιοδική 2π



(C) DFT = N = 8 ΙΣΑΠΕΧΟΝΤΑ δείγματα της ΙΔΙΑΣ DTFT στα $\omega_k = 2\pi k/N$



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ω σε rad $\in [0, 2\pi]$. Bin $k \leftrightarrow \omega_k = 2\pi k/N \leftrightarrow f_k = k \cdot F_s/N$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

DFT είναι ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ: $X[k+N] = X[k]$. Πρόσεχουμε στα ψηλά k που "γυρίζουν" στις αρνητικές f.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ20 ενότητα. Μετά σ22 DFT bins / zero-pad.

DFT bins = δείγματα της DTFT. Zero-padding = πιο πυκνά δείγματα.

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Το zero-padding είναι πυκνότερη δειγματοληψία της DTFT (παρεμβολή στη συχνότητα): παίρνεις σήμα M σημείων, βάζεις $N-M$ μηδενικά στο τέλος, και υπολογίζεις N -point DFT ($N > M$). Στο plot βλέπεις την ΙΔΙΑ DTFT, αλλά δειγματοληπτημένη σε $N \gg M$ σημεία. Δεν αναδημιουργείς πληροφορία που δεν υπήρχε. Δεν βελτιώνεις την πραγματική διακριτική ικανότητα — αυτή ορίζεται από το μήκος T του πραγματικού record. Απλώς βλέπεις πιο συνεχές το ίδιο φάσμα. Χρήσιμο για να πιάσεις peaks που πέφτουν μεταξύ bins (βλ. σ52 απώλεια κορυφής).

$x[0..M-1]$ (M =record length) \rightarrow $+(N-M)$ μηδενικά \rightarrow N -pt DFT (N =FFT length, $N > M$)

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Σύνδεση με σ21: zero-pad = ΠΙΟ ΠΥΚΝΑ δείγματα της ΙΔΙΑΣ DTFT (όχι νέα πληροφορία). DFT $N=M$ (no pad) vs $N=4M$ (zero-padded): ίδια καμπύλη, διαφορετική πυκνότητα.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Για διπλάσιο zero-padding τι παρατηρώ;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Διπλάσια bins, αλλά όχι περισσότερη resolution. Resolution = $1/T$ (record length).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Έχω $M=64$ και θέλω $4\times$ πυκνότητα bins χωρίς αύξηση record time. Τι κάνω;

✓ **ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** Zero-pad σε $N=4\cdot M=256$: $4\times$ πυκνότητα bins χωρίς αύξηση χρόνου (φαινομενική, όχι πραγματική ανάλυση).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$\Delta\omega = 2\pi/N$ (bin spacing). f -bins = $k\cdot F_s/N$.

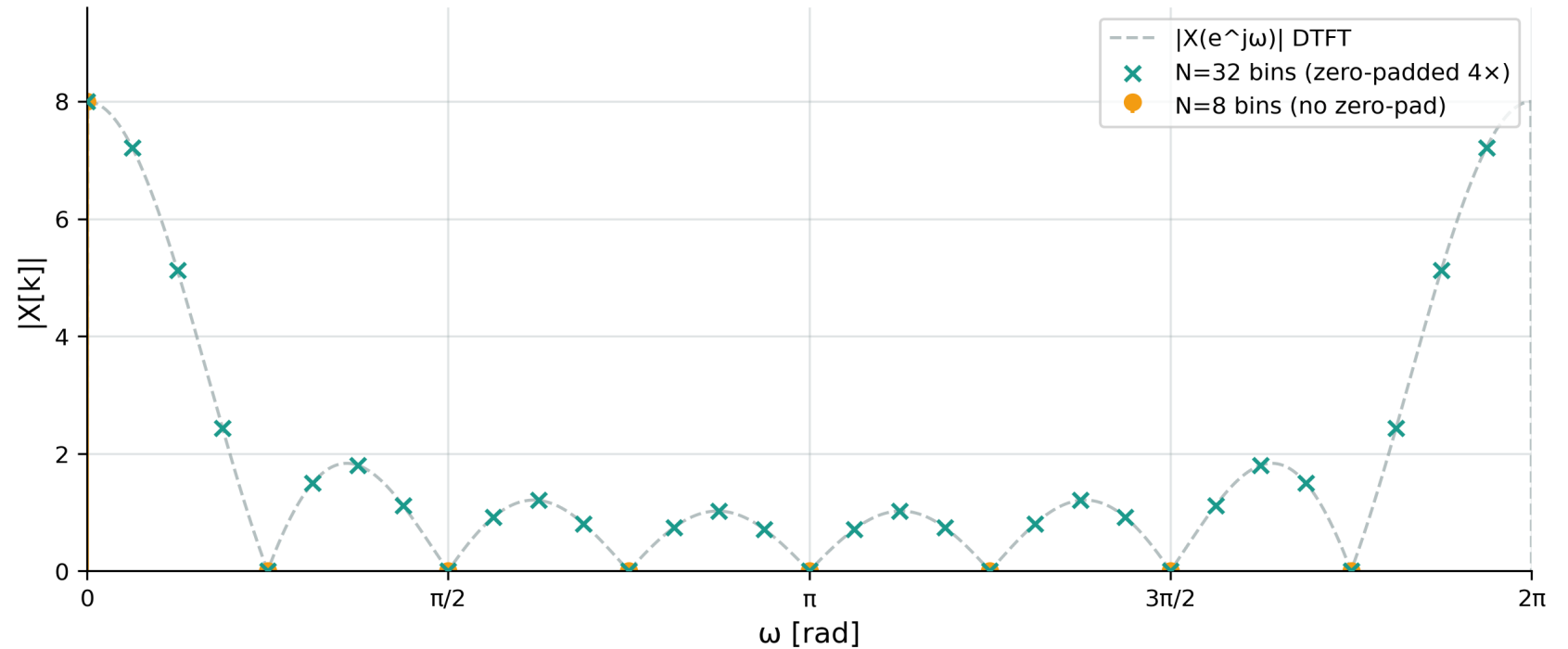
ΠΡΟΣΕΧΩ

Zero-padding \neq better resolution. Για resolution \rightarrow αύξηση T (καινούργια δεδομένα).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ21 DTFT \rightarrow DFT. Μετά σ23 twiddle· βαθύτερα Π1 (zero-pad: info vs resolution).

Zero-padding = ΠΥΚΝΟΤΕΡΗ δειγματοληψία της ίδιας DTFT (πιο πολλά bins, αλλά ίδιο πραγματικό φάσμα)



Παράγοντας στροφής (twiddle factor) W_N^k : η μηχανή του FFT

W07

$x[n]$

$X[k]$

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Οι παράγοντες στροφής $W_N^k = e^{-j \cdot 2\pi \cdot k/N}$ είναι περιστροφές στον μοναδιαίο κύκλο. Στο plot βλέπεις τις 8 διακριτές τιμές για $N=8$, στους κόμβους κάθε $\pi/4$. Η ταχύτητα της FFT προκύπτει από το γεγονός ότι αυτές οι περιστροφές έχουν συμμετρίες: $W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k$. Επομένως αν υπολογίσεις μία πεταλούδα FFT (σ24), παίρνεις 2 αποτελέσματα DFT για το κόστος ενός πολλαπλασιασμού. Συνδυάζοντας $\log_2(N)$ τέτοια στάδια, ο αλγόριθμος Cooley-Tukey φτάνει σε $O(N \log N)$ αντί για το $O(N^2)$ του ορισμού του DFT.

$$W_N^k = e^{-j \cdot 2\pi \cdot k/N} \rightarrow W_N^{(k+N/2)} = -W_N^k \quad (\text{symmetry})$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Οι παράγοντες στροφής είναι N-th roots of unity. Στην FFT αξιοποιείται η συμμετρία τους.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσοι μοναδιαίοι παράγοντες στροφής υπάρχουν για $N=8$;

ΕΞΗΓΗΣΗ

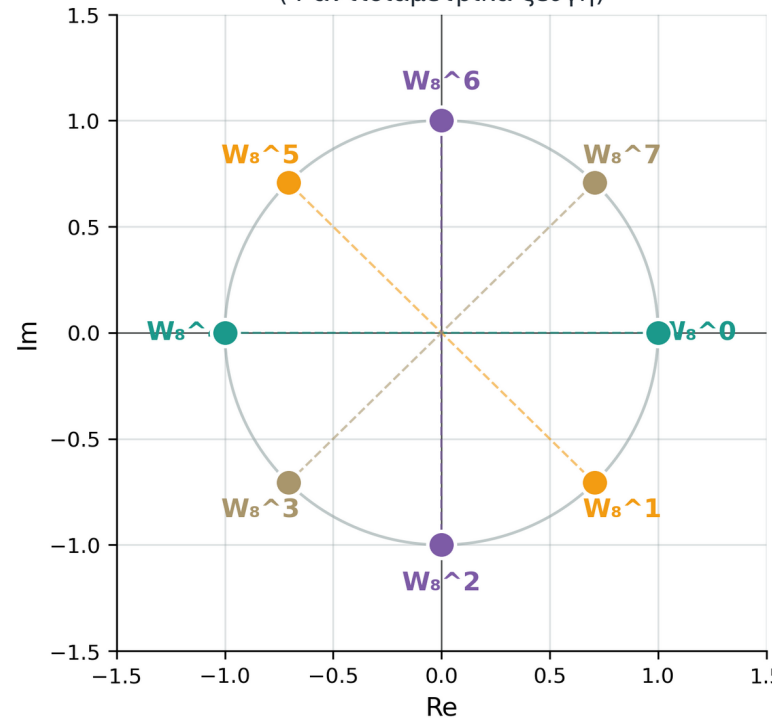
8 διακριτές τιμές (N-th roots of unity). Η συμμετρία $W^{(k+N/2)} = -W^k$ επιτρέπει επαναχρησιμοποίηση \rightarrow λιγότερες πράξεις, $O(N \cdot \log N)$.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Υπολόγισε W_8^3 σε πολική μορφή.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $W_8^3 = e^{-j \cdot 3\pi/4} = -0.707 - 0.707j$.

Twiddle factors W_8^k στον μοναδιαίο κύκλο (4 αντιδιαμετρικά ζεύγη)



ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ: $W_8^{(k+N/2)} = -W_8^k$
(αντίθετο σημείο στον κύκλο)

Τιμές των W_8^k :

| | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| W_8^0 1.000 0.000j | W_8^1 0.707 - 0.707j |
| W_8^2 0.000 - 1.000j | W_8^3 -0.707 - 0.707j |
| W_8^4 -1.000 0.000j | W_8^5 -0.707 0.707j |
| W_8^6 0.000 1.000j | W_8^7 0.707 0.707j |

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Re-Im plane. $|W| = 1$, $\arg(W) = -2\pi k/N$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΠΡΟΣΟΧΗ στο πρόσημο: $e^{-j \cdot \dots}$ όχι $e^{+j \cdot \dots}$. Είναι ο πυρήνας του DFT ορισμού.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ22 DFT bins / zero-pad. Μετά σ24 butterfly.

Το butterfly είναι το αρχικό block της Cooley-Tukey FFT. N samples $\rightarrow (N/2) \cdot \log_2(N)$ butterflies.

$$A = a + W_N^k \cdot b \quad ; \quad B = a - W_N^k \cdot b$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Ένα butterfly συνδυάζει 2 εισόδους a, b με έναν παράγοντα περιστροφής W . Είναι ο θεμελιώδης λίθος όλης της radix-2 FFT.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσα butterflies συνολικά χρειάζεται μια FFT για $N=8$;

ΕΞΗΓΗΣΗ

$(N/2) \cdot \log_2 N = 4 \cdot 3 = 12$. Κάθε στάδιο έχει $N/2=4$ butterflies, και υπάρχουν $\log_2 8=3$ στάδια.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για $N=1024$: πόσα butterflies; Σύγκρινε με τις $\sim N^2$ πράξεις του ευθέος DFT.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $(N/2) \cdot \log_2 N = 512 \cdot 10 = 5120$ butterflies (vs $\sim N^2 \approx 10^6$ ευθέος DFT).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Αξόνες: signal flow (left \rightarrow right). Vertices = arithmetic ops.

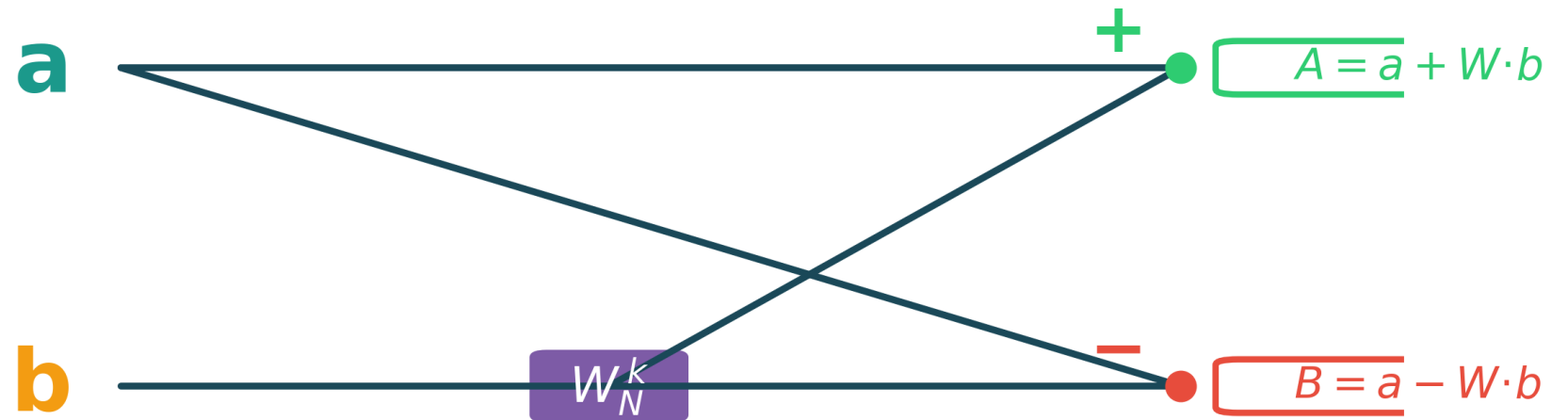
ΠΡΟΣΕΧΩ

Bit-reversed ordering: λεπτομέρεια συγκεκριμένων in-place radix-2 υλοποιήσεων — ΟΧΙ μαθηματική απαίτηση της FFT.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ_{23} twiddle factor. Μετά σ_{25} τι θα δούμε.

Το butterfly: 1 twiddle, 2 αθροιστές



Τι βλέπουμε: Πριν δούμε το πρώτο γράφημα FFT, μαθαίνουμε να ΔΙΑΒΑΖΟΥΜΕ τους άξονες. x: bin k → φυσική συχνότητα $f=k \cdot F_s/N$ [Hz]. y: η raw fft() δίνει $peak \approx N/2$ (χωρίς φυσικό νόημα) → $\div N$ → $\times 2$ στα AC bins = πλάτος του χρόνου → $20 \cdot \log_{10}$ για dB. «Κορυφή» = ένας τόνος· το ύψος της = το πλάτος του.

$$f_k = k \cdot F_s / N$$

$$| \text{πλάτος} = (2/N) \cdot |X[k]| \text{ (AC)} |$$

$$\text{dB} = 20 \cdot \log_{10}(\text{πλάτος})$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Στόχος: να ξέρεις τι σημαίνει κάθε άξονας ΠΡΙΝ δεις το πρώτο φάσμα στον επόμενο κώδικα (σ28).

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν ΔΕΝ διαιρέσω με N, τι ύψος θα έχει η κορυφή ενός τόνου πλάτους 1;

ΕΞΗΓΗΣΗ

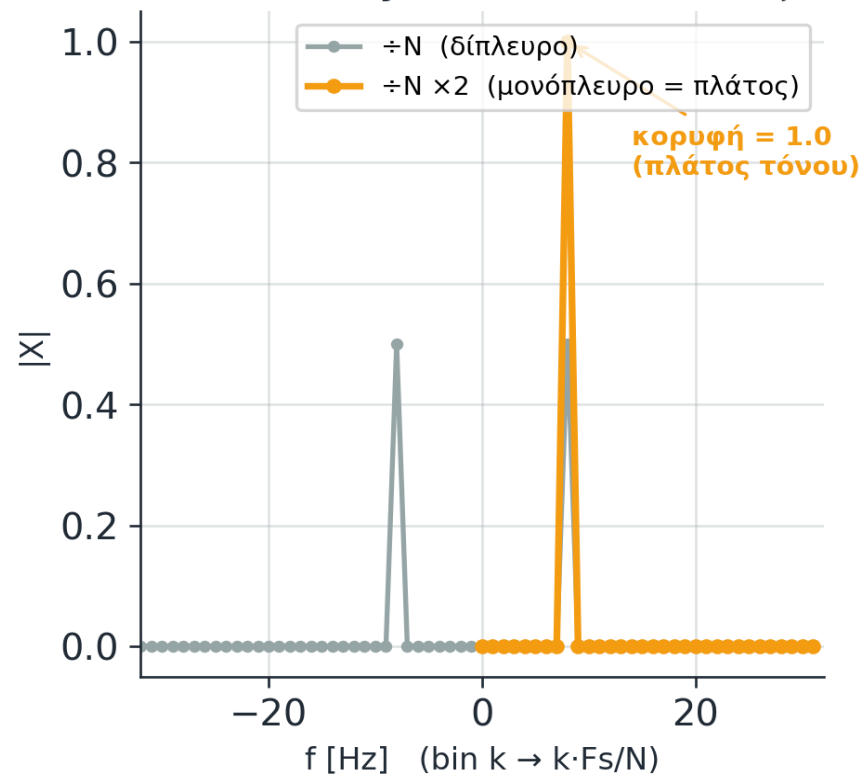
Χωρίς $\div N$ η κορυφή είναι $\approx N/2$ (π.χ. 512 για $N=1024$). Με $\div N \times 2$ γίνεται 1.0 = το πλάτος του χρόνου. Μονόπλευρο = κρατάμε $[0, F_s/2]$ και διπλασιάζουμε τα AC bins.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

$F_s=1000$, $N=1000$, κορυφή στο bin $k=50$. Σε ποια συχνότητα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f = k \cdot F_s / N = 50 \cdot 1000 / 1000 = 50$ Hz.

ο ΑΞΟΝΑΣ-y: από raw σε πλάτος



η ΣΚΑΛΑ κανονικοποίησης

raw fft(x)

$peak \approx N/2$ — χωρίς φυσικό νόημα

÷ N

κανονικοποίηση → πλάτος δίπλευρο

× 2 (AC bins)

δίπλωμα καθρέφτη = πλάτος χρόνου

20 · log₁₀(·)

σε dB → δυναμική περιοχή

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

x: f [Hz] = $k \cdot F_s / N$. y: πλάτος (μετά $\div N \times 2$) ή dB.

ΠΡΟΣΕΧΩ

DC ($k=0$) και Nyquist ($k=N/2$) ΔΕΝ διπλασιάζονται — δεν έχουν ζεύγος καθρέφτη.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ24 butterfly. Μετά σ26 ανατομία φάσματος.

Πώς διαβάζω ένα φάσμα FFT — η ανατομία

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Ένα τυπικό μονόπλευρο φάσμα με όλα τα χαρακτηριστικά: το bin DC (k=0)=μέση τιμή· κάθε κορυφή=ένας τόνος, με ύψος ίσο με το πλάτος του· το «πάτωμα θορύβου» (noise floor) χαμηλά· η άκρη Nyquist στα $F_s/2$ · και η απόσταση bins $\Delta f = F_s/N$.

$\Delta f = F_s/N$ (διακριτικότητα) | DC: $k=0$ | Nyquist: $k=N/2 \rightarrow F_s/2$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Σήμα: DC + 2 τόνοι (20 Hz, 60 Hz) + λίγος θόρυβος, $F_s=256$, $N=256$.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσες κορυφές περιμένεις και σε ποιες συχνότητες;

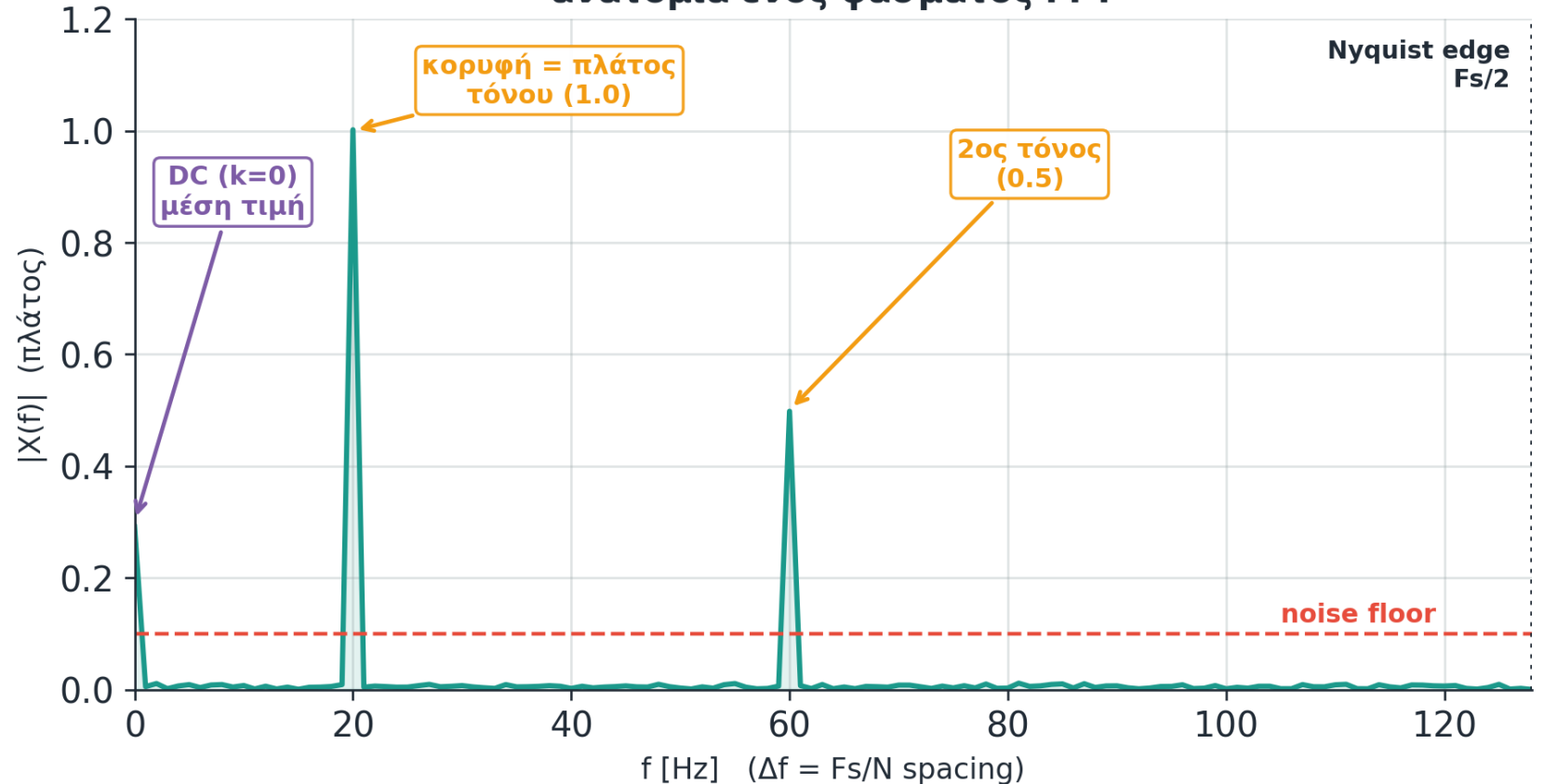
ΕΞΗΓΗΣΗ

2 κορυφές (20, 60 Hz) πάνω από το noise floor + ένα μη-μηδενικό DC bin. Ό,τι είναι κάτω από το noise floor δεν είναι αξιόπιστος τόνος.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

$F_s=256$, $N=256$: ποια η διακριτικότητα Δf ;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\Delta f = F_s/N = 256/256 = 1$ Hz ανά bin.

ανατομία ενός φάσματος FFT



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

x: f [Hz], $0 \rightarrow F_s/2$. y: πλάτος. Κάθε κουκίδα = ένα bin, βήμα Δf .

ΠΡΟΣΕΧΩ

Κορυφή κάτω από το noise floor = ίσως θόρυβος, όχι πραγματικός τόνος.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ25 τι θα δούμε. Μετά σ27 ανάλυση $\Delta f = F_s/N$.

Τι βλέπουμε: το $\Delta f = F_s/N$ είναι το bin spacing — η απόσταση δύο διαδοχικών θυρίδων FFT. Όμως η πραγματική ικανότητα διάκρισης δύο γειτονικών συχνοτήτων εξαρτάται και από το πλάτος του κύριου λοβού του παραθύρου, από τα σχετικά πλάτη των συνιστωσών και από τον θόρυβο. Στο plot συγκρίνουμε 3 διαφορετικά N για το ίδιο σήμα (60 + 63 Hz): όταν το Δf είναι ΜΙΚΡΟΤΕΡΟ από την απόσταση των συχνοτήτων (στο C, $\Delta f=0.49 < 3$ Hz) τα peaks διακρίνονται καθαρά. ΠΡΟΣΟΧΗ: το zero-padding ΔΕΝ βελτιώνει την πραγματική resolution — χρειάζεται μεγαλύτερο $T = N/F_s$.

$\Delta f = F_s/N = 1/T$ (απόσταση bins) · η πρακτική διάκριση εξαρτάται από window, SNR, σχετικά πλάτη

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Ίδιο σήμα (60 + 63 Hz), 3 διαφορετικά N. Αλλάζει η ανάλυση.

$\Delta f = F_s/N$ — η διακριτική ικανότητα έρχεται από το $T = N/F_s$ (μεγαλύτερη εγγραφή → οξύτερα peaks)

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιο από τα 3 βλέπεις 2 διακριτές κορυφές;

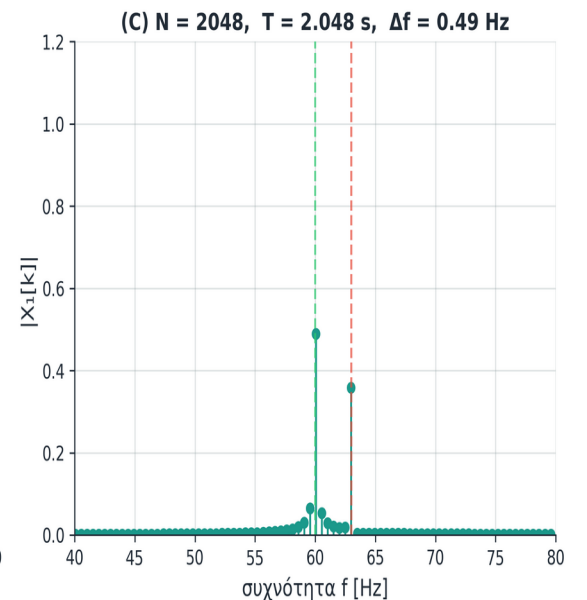
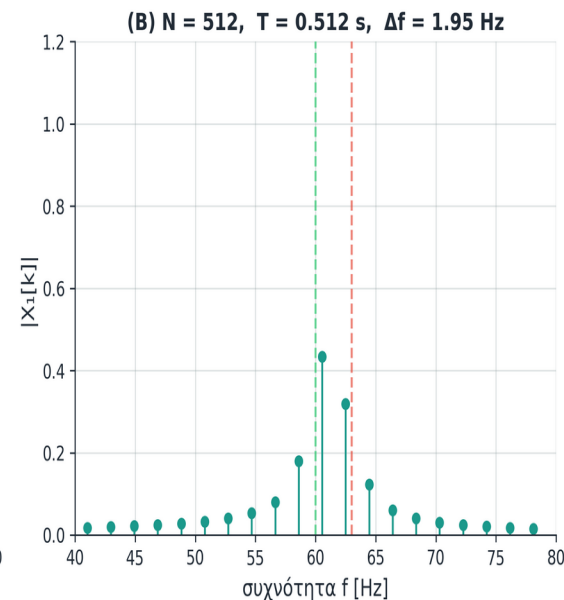
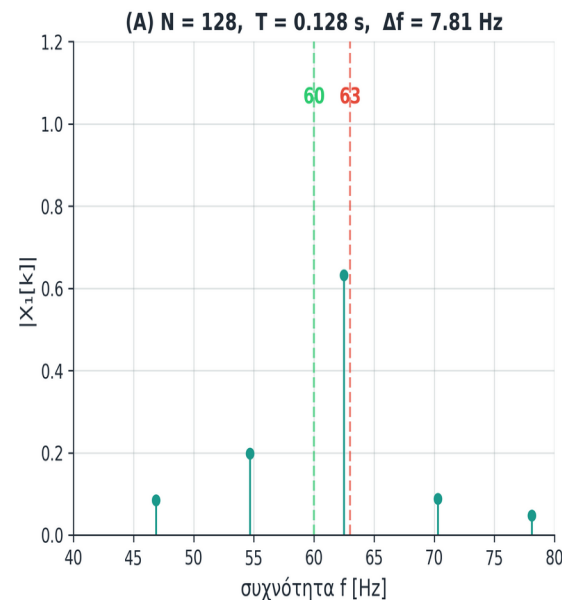
ΕΞΗΓΗΣΗ

Στο (C), $\Delta f=0.49 \ll 3$ Hz διαχωρισμός → κορυφές διακριτές. Στο (A), $\Delta f=7.8 > 3$ → μία διάχυτη κορυφή.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πόσο T χρειάζεσαι για να ξεχωρίσεις 100.0 και 100.1 Hz;

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\Delta f \leq 0.1$ Hz → $T \geq 1/\Delta f = 10$ s → $N \geq 10000$ (στο $F_s=1000$).



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Y: amplitude. X: f [Hz]. Δf γραμμή για κάθε panel.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Zero-padding ΔΕΝ βελτιώνει resolution. Μόνο T (πραγματικά νέα δεδομένα).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ26 ανατομία φάσματος. Μετά σ28 κώδικας FFT workflow.

FFT workflow: από $x[n]$ σε $|X1[k]|$ σε 4 βήματα

W07

 $x[n]$ $X[k]$

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: το τυπικό pipeline φασματικής ανάλυσης σε 4 βήματα.

(1) Το $\text{fft}(x)$ δίνει τον ακατέργαστο μετασχηματισμό με $\text{peak} \approx N/2$.

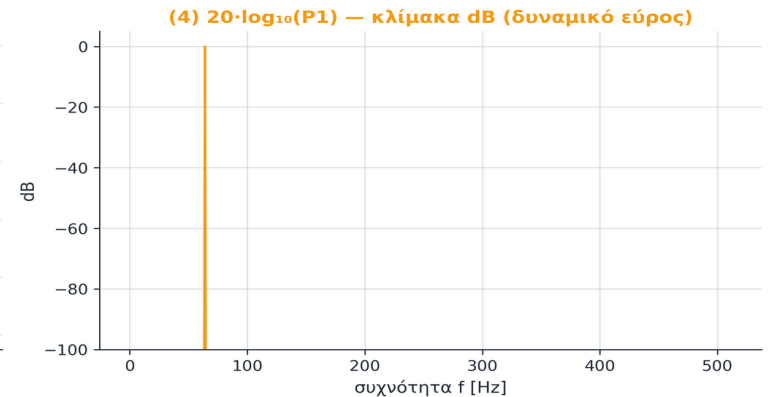
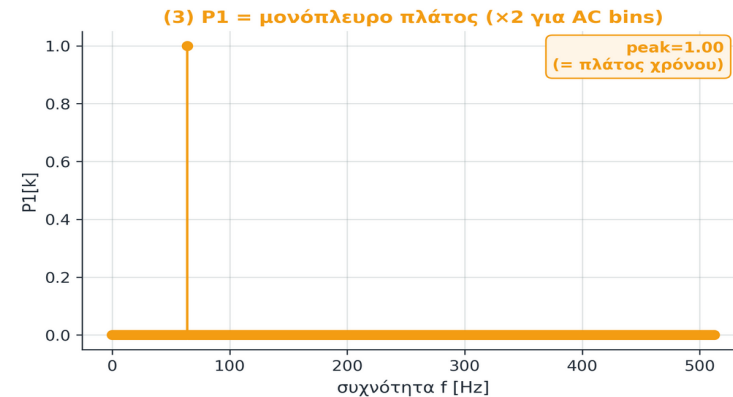
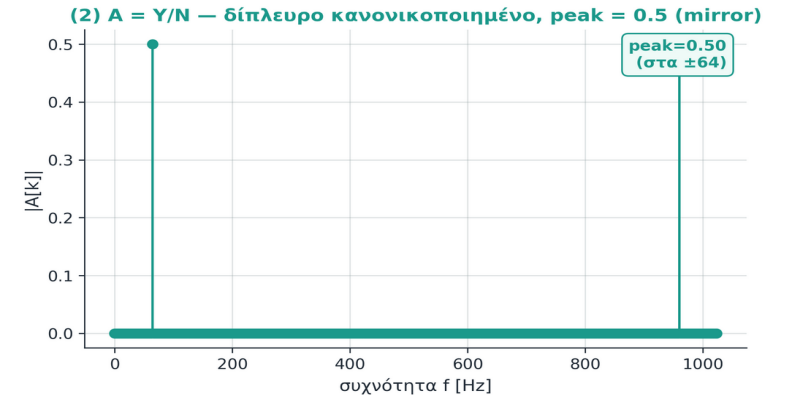
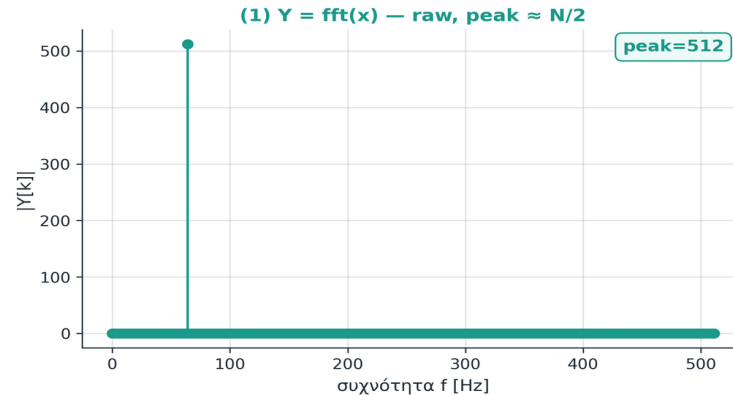
(2) Διαιρούμε με N για το κανονικοποιημένο δίπλευρο πλάτος (mirror peaks 0.5).

(3) Κρατάμε το μονόπλευρο φάσμα και πολλαπλασιάζουμε $\times 2$ τα AC bins (όχι DC/Nyquist), ώστε το peak να δείχνει το πραγματικό πλάτος.

(4) Μετατροπή σε dB.

Δεξιά φαίνεται πώς αλλάζει η κλίμακα σε κάθε βήμα. ΠΡΟΣΟΧΗ: για φιλτράρισμα με ifft κρατά το Y , όχι το A .

```
% FFT workflow – σωστή σειρά
Fs = 1024; N = 1024;
t = (0:N-1)/Fs;
f0 = 64; x = sin(2*pi*f0*t);
% (1) Raw FFT – peak ≈ N/2
Y = fft(x);
% (2) Normalized two-sided (0.5)
A = Y / N;
% (3) One-sided amplitude (x2 AC)
half = N/2 + 1; f = (0:half-1)*Fs/N;
P1 = abs(A(1:half));
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
% (4) dB scale
P1_dB = 20*log10(P1 + eps);
% --- plots (2x2): κλίμακα ανά βήμα ---
ftwo = (0:N-1)*Fs/N;
subplot(2,2,1); stem(f,abs(Y(1:half)),'.')
subplot(2,2,2); stem(ftwo,abs(A),'.')
subplot(2,2,3); stem(f,P1,'.')
subplot(2,2,4); plot(f,P1_dB); xlabel('f [Hz]')
% μονόπλευρο -> ΧΩΡΙΣ fftshift
```



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

f-axis: Hz (επιτα από την F_s/N μετατροπή). $|X|$ Πλάτος.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Διάρθρωση με N απαραίτητη — αλλιώς peak υπερβολικά υψηλό.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ27 ανάλυση $\Delta f = F_s/N$. Μετά σ29 βήματα FFT.

Τα βήματα του FFT: από $x[n]$ σε σωστό πλάτος

W07

 $x[n]$ $x[k]$

window

PSD

W09

Standard 5-step recipe για ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ. Δίδυμο του IFFT recipe (σ42).

$$A = \text{fft}(x)/N \rightarrow \text{μονόπλευρο } P1 = 2 \cdot |A| \quad (\times 2 \text{ ΜΟΝΟ στα AC bins})$$

1

FFT

```
X = fft(x);  N = length(x);
```

2

÷N (δίπλευρο)

```
A = X / N;  % raw peak ≈ N/2 → 0.5
```

3

Μονόπλευρο ×2

```
half=N/2+1; P1=abs(A(1:half)); P1(2:end-1)=2*P1(2:end-1);
```

4

Άξονας σε Hz

```
f = (0:half-1)*Fs/N;  % bin k → k·Fs/N
```

5

dB (προαιρετικό)

```
P1_dB = 20*log10(P1 + eps);  % δυναμικό εύρος
```

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Κάθε βήμα διατηρεί τη φυσική σημασία πλάτους. DC & Nyquist:
ΟΧΙ ×2.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Για IFFT/φιλτράρισμα ΜΗΝ κανονικοποιείς (κράτα $X=\text{fft}(x)$).
Το ÷N και ×2 είναι ΜΟΝΟ για ανάγνωση πλάτους.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ28 κώδικας FFT workflow. Μετά σ30 τι είναι η φάση.

Τι είναι η φάση ενός bin — και πώς διαβάζεται

W07

x[n]

X[k]

window

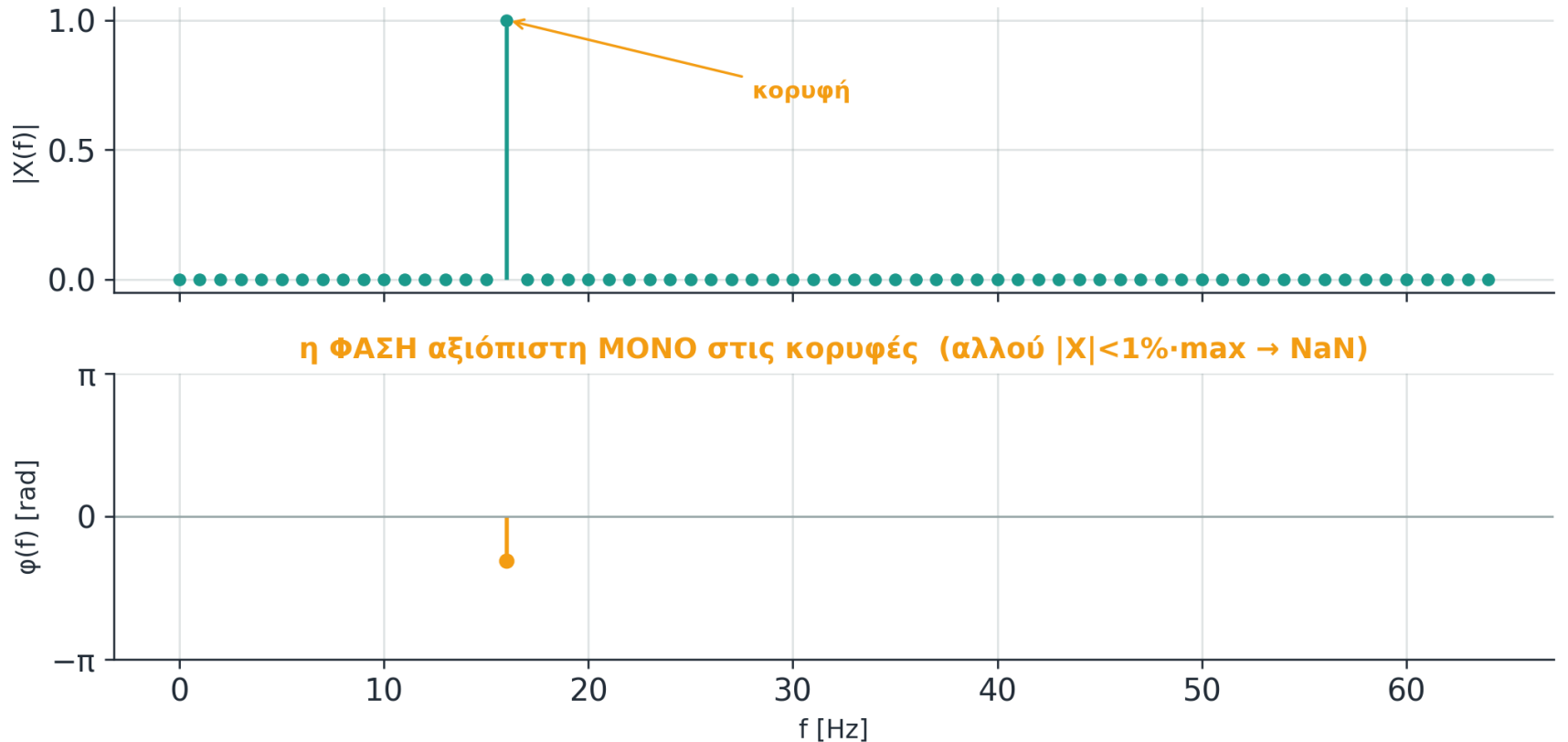
PSD

W09

Τι βλέπουμε: Δύο panels για έναν μόνο τόνο 16 Hz: πάνω το ΜΕΤΡΟ $|X|$ (δείχνει ΠΟΥ υπάρχει ενέργεια - μία κορυφή)· κάτω η ΦΑΣΗ $\varphi(f)=\arg(X[k])$, μασκαρισμένη: εμφανίζεται ΜΟΝΟ στις κορυφές. Όπου $|X| < 1\% \cdot \max$ η φάση είναι θόρυβος \rightarrow NaN.

$$\varphi[k] = \arg(X[k]) \in [-\pi, \pi] \quad | \quad \text{καθυστέρηση } \tau \rightarrow \text{γραμμική φάση } -2\pi f\tau$$

έναν τόνο 16 Hz: το ΜΕΤΡΟ δείχνει ΠΟΥ υπάρχει ενέργεια



ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Ένας τόνος $\sin(2\pi \cdot 16 \cdot t + 0.6)$. Η φάση «ζει» μόνο στο bin της κορυφής.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι τιμή έχει η φάση στα bins ΧΩΡΙΣ ενέργεια; Απροσδιόριστη

ΕΞΗΓΗΣΗ

Σε bins με $|X| \approx 0$ το $\arg()$ είναι αυθαίρετο (θόρυβος αριθμητικής) \rightarrow μάσκα NaN. Καθυστέρηση τ προσθέτει ΓΡΑΜΜΙΚΗ φάση $-2\pi f \cdot \tau$ χωρίς γνωστή αρχή χρόνου η απόλυτη φάση δεν έχει νόημα - συγκρίνουμε ΣΧΕΤΙΚΑ.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Καθυστέρηση $\tau=10$ ms σε τόνο 25 Hz: πόση extra φάση;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\Delta\varphi = -2\pi f\tau = -2\pi \cdot 25 \cdot 0.01 = -0.5\pi$ rad.

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

x: f [Hz]. γ(πάνω): $|X|$. γ(κάτω): $\varphi \in [-\pi, \pi]$, NaN όπου $|X| < 1\% \cdot \max$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Μην εμπιστεύεσαι τιμή φάσης σε bin χωρίς κορυφή — είναι θόρυβος.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ29 βήματα FFT. Μετά σ31 διάβασμα phase plot.

Πώς διαβάζω ένα phase plot — και τότε το εμπιστεύομαι

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Πάνω το μέτρο $|X(f)|$ με μία κορυφή στα 16 Hz. Κάτω η φάση: αξιόπιστη MONO στις κορυφές (πορτοκαλί). Εκτός κορυφής $|X| \approx 0 \rightarrow$ η φάση είναι θόρυβος (γκρι) και δεν σημαίνει τίποτα.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Ένας τόνος 16 Hz με μικρό θόρυβο.
Στόχος: να ξέρω ΠΟΥ στο phase plot υπάρχει πληροφορία.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

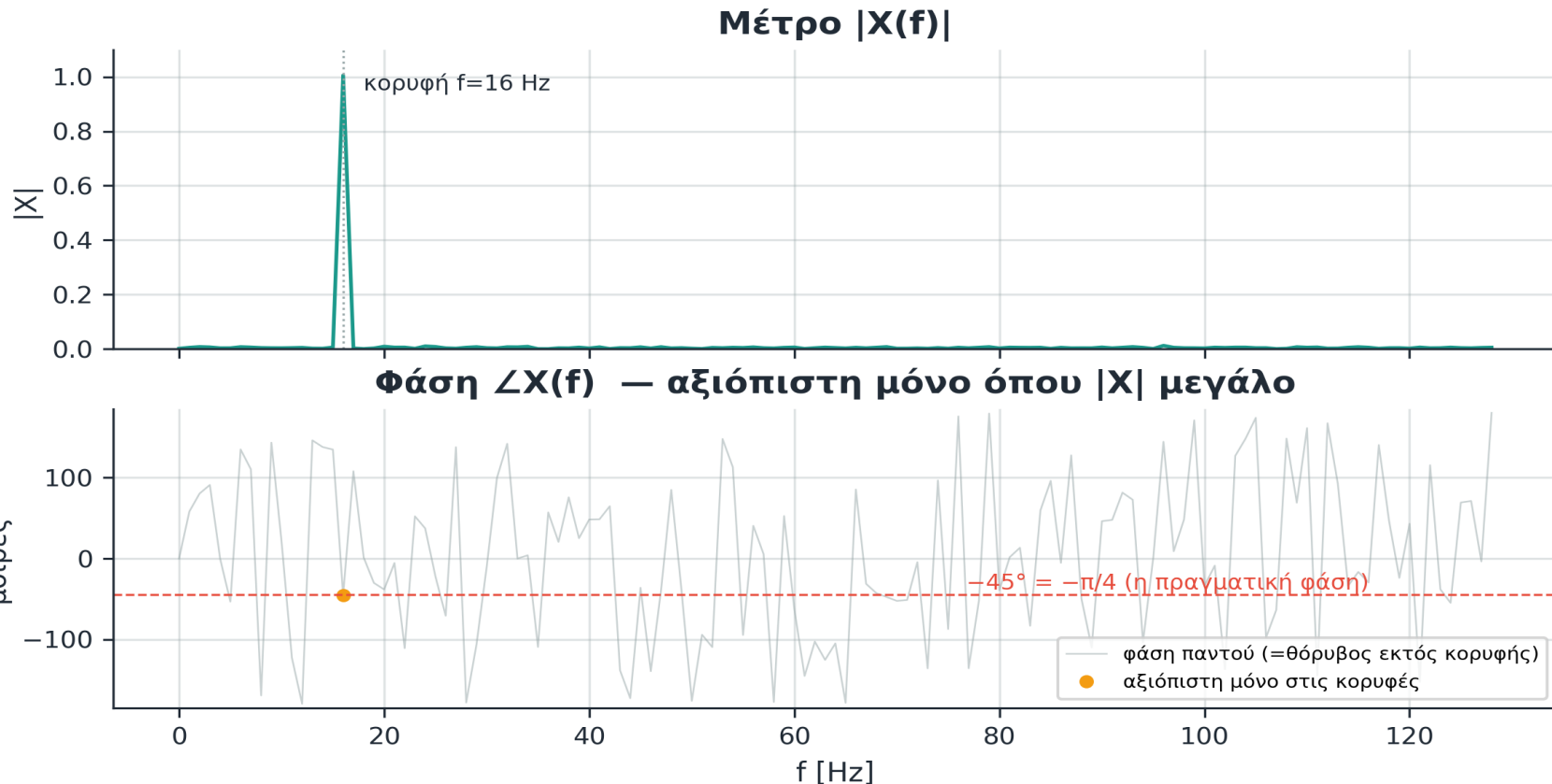
Σε bins όπου $|X| \approx 0$, τι τιμή έχει η φάση;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Τρεις κανόνες: (1) Η φάση είναι αξιόπιστη MONO όπου το μέτρο είναι μεγάλο (στις κορυφές). (2) Η ΑΠΟΛΥΤΗ φάση είναι άχρηστη χωρίς γνωστή χρονική αρχή (t-origin). (3) Η ΣΧΕΤΙΚΗ φάση (μεταξύ σημάτων/καναλιών) μετράει: delay, alignment, beamforming.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Δύο μικρόφωνα, ίδιος ήχος, $\Delta\phi = -90^\circ$ στα 100 Hz. Καθυστέρηση;
✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\tau = \Delta\phi / (-2\pi f) = 0.25 / 100 \rightarrow 2.5$ ms.



ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

X: f [Hz]. Y (κάτω): μοίρες $\in [-180, 180]$. Μάσκα όπου $|X| < 15\% \max$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Phase wrapping ($\pm 180^\circ$): χρησιμοποίησε unwrap αν θες κλίση. Ποτέ μην «διαβάζεις» φάση εκτός κορυφής.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ_{30} τι είναι η φάση. Μετά σ_{32} ΠΑΓΙΔΑ φάσης.

Magnitude vs Phase — η ΠΑΓΙΔΑ της φάσης

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Πάνω, (A) $x_1(t)$ και (B) $x_2(t)=x_1(t-\tau)$ με $\tau=25$ ms — ΙΔΙΑ κυματομορφή, απλώς μετατοπισμένη στον χρόνο. Κάτω, (C) τα φάσματα πλάτους $|X_1|, |X_2|$ είναι ΤΑΥΤΟΣΗΜΑ (η μετατόπιση δεν αγγίζει το μέτρο) και (D) η διαφορά φάσης $\Delta\phi(f)=\angle(X_2/X_1)=-2\pi f\tau$ είναι γραμμική ράμπα. Η φάση «θυμάται» την αρχή χρόνου· το μέτρο όχι.

Χρονική μετατόπιση $\tau = 25$ ms: το ΜΕΤΡΟ αμετάβλητο, η ΦΑΣΗ γραμμική ράμπα $-2\pi f\tau$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Δύο ταυτόσημα ημιτονικά σήματα $x_1(t)$ και $x_2(t) = x_1(t-\tau)$.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πώς διαφέρει η φάση ϕ_2 από τη ϕ_1 :

ΕΞΗΓΗΣΗ

Καθυστέρηση κατά $\tau \rightarrow$ το φάσμα $x e^{-j2\pi f\tau}$: προστίθεται γραμμική φάση $-2\pi f\tau$ (το μέτρο ΔΕΝ αλλάζει). Διαφορά φάσης: $\Delta\phi(f)=\angle X_2(f) - \angle X_1(f) = -2\pi f\tau$ — μετριέται ΜΟΝΟ στα bins των κορυφών. Octave: $dphi = \text{angle}(X2(k)) - \text{angle}(X1(k))$.

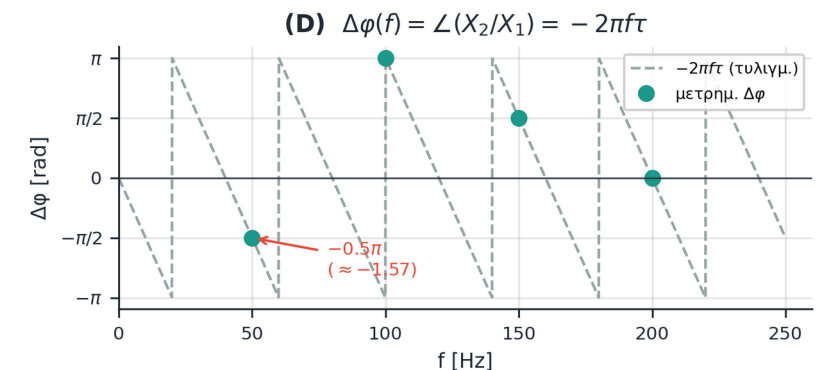
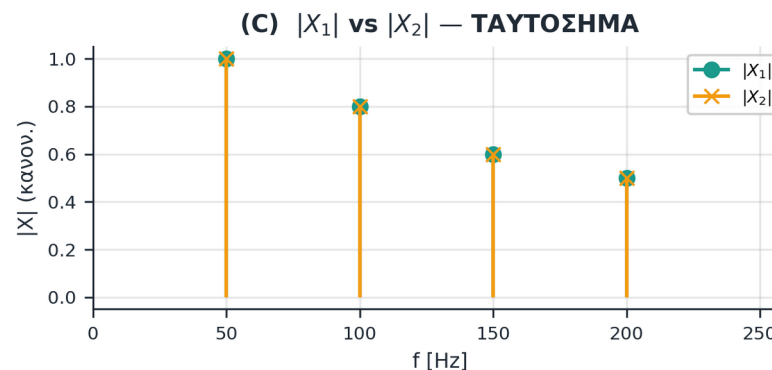
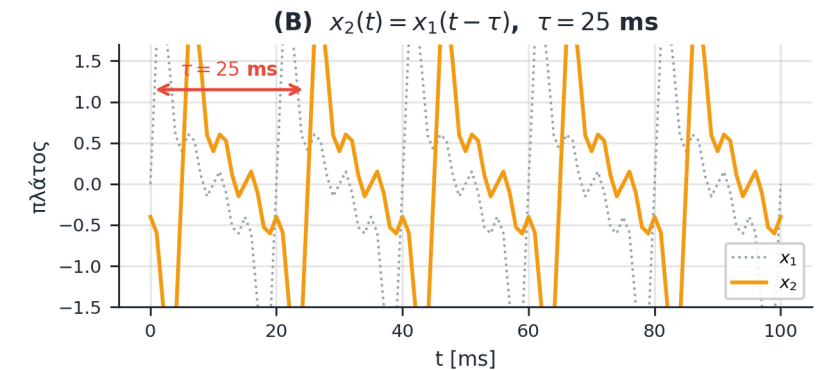
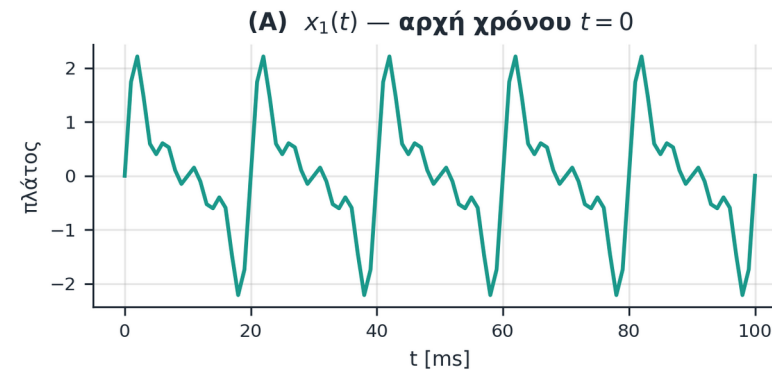
ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για $\tau=25$ ms και $f=50$ Hz, πόσο extra phase σε rad;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\Delta\phi = -2\pi f\tau = -2\pi \cdot 50 \cdot 0.025 = -2.5\pi$ rad
 \rightarrow τύλιξε στο $[-\pi, \pi]$: $-2.5\pi + 2\pi = -0.5\pi \approx -1.57$ rad
 (καθυστέρηση \rightarrow αρνητική φάση).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ϕ σε rad $\in [-\pi, \pi]$. Μάσκα NaN όπου $|X| < 1\%$ max.



ΠΡΟΣΕΧΩ

Μην εμπιστεύεσαι φάση χωρίς γνωστό t-origin. Πάντα σύγκρινε σχετικά.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ31 διάβασμα phase plot. Μετά σ33 coherent FFT.

Coherent FFT: $J = f_0 \cdot N / F_s$ ακέραιο \rightarrow καθαρό peak

W07

 $x[n]$ $x[k]$

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: τη σημασία της σύμφωνης (coherent) δειγματοληψίας. Όταν ο αριθμός $J = f_0 \cdot N / F_s$ είναι ακέραιος, το σήμα χωράει ακριβώς J ολόκληρους κύκλους μέσα στο record· τότε όλη η ενέργεια του ημιτόνου πέφτει σε ΜΙΑ θυρίδα (bin $k=J$) και οι υπόλοιπες μηδενίζονται \rightarrow καθαρή κορυφή χωρίς διαρροή. Εδώ $f_0=64$, $N=F_s=1024$ δίνει $J=64$. Στην πράξη σπάνια πετυχαίνεις coherent sampling, γι' αυτό σχεδόν πάντα εφαρμόζουμε παράθυρο για να περιορίσουμε τη διαρροή (leakage).

$J = f_0 \cdot N / F_s \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ coherent sampling \Rightarrow στο μονόπλευρο amplitude spectrum, peak δείχνει το πραγματικό πλάτος (= 1.0)

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

$f_0=64$ Hz, $N=1024$, $F_s=1024 \rightarrow J = 64 \cdot 1024 / 1024 = 64$ (integer).

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσοι ολόκληροι κύκλοι του ημιτονικού χωρούν στο record;

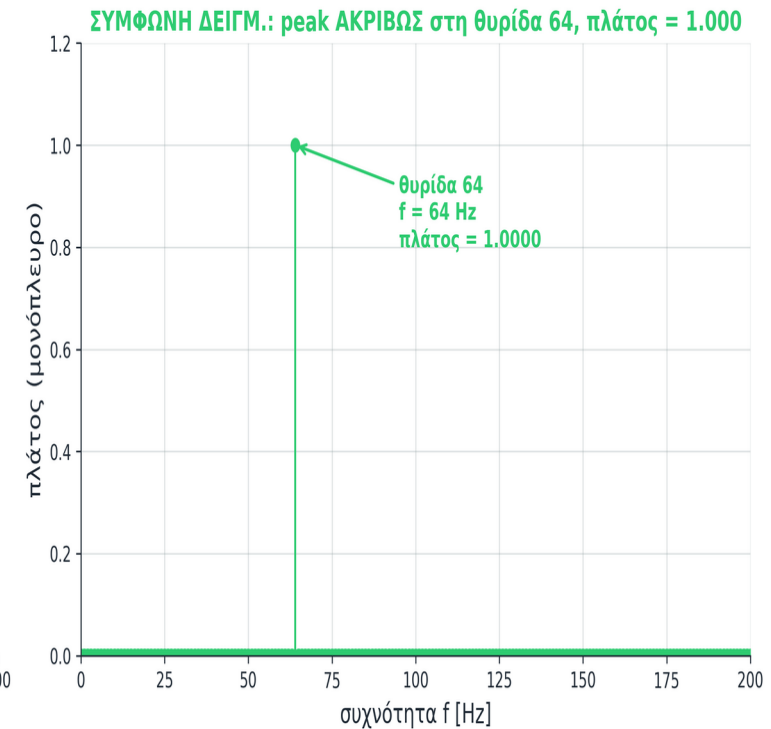
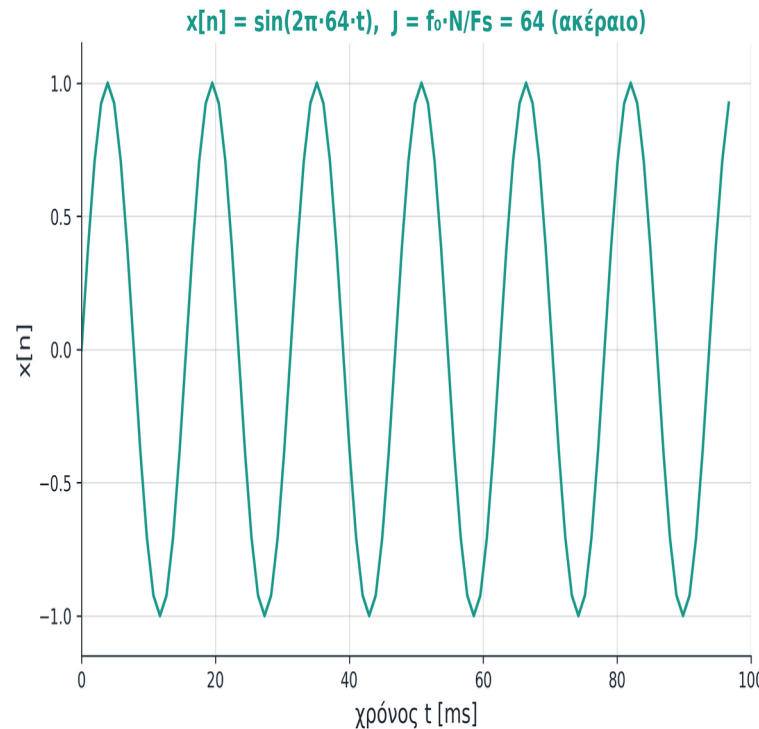
ΕΞΗΓΗΣΗ

Όταν $J \in \mathbb{Z}$: peak πέφτει ακριβώς σε bin $k=J$. Όλα τα άλλα bins = 0.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για $F_s=1000$ και $T=0.5s$, ποιες συχνότητες δίνουν ακέραια δειγματοληψία;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Coherent όταν $f = k/T = k \cdot 2$ Hz (πολλαπλάσια του $1/T=2$ Hz).



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Bin index k . Amplitude in same units ως $x[n]$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Στην πράξη σπάνια έχεις coherent sampling -διαρροή είναι ο κανόνας.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ32 ΠΑΓΙΔΑ φάσης. Μετά σ34 μη-σύμφωνη διαρροή.

Μη-σύμφωνη FFT: J μη ακέραιο → φασματική διαρροή

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Επαναλαμβάνουμε το πείραμα της σ25, αλλά τώρα $f_0=64.3$ Hz (αντί 64). Πλέον $J = f_0 \cdot N / F_s = 64.3$ — μη ακέραιος. Το σήμα δεν χωράει ολόκληρους κύκλους στο record, οπότε όταν η DFT υποθέτει περιοδική επανάληψη εμφανίζεται ασυνέχεια στα άκρα.

Αυτό «διαρρέει» ενέργεια από τη bin 64 στις γειτονικές: peak < 1.0 και εμφανείς πλευρικοί λοβοί. Αυτή είναι η φασματική διαρροή - ο κανόνας στην πράξη, όχι η εξαίρεση.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

$f_0=64.3$ Hz, ίδιο $N=1024$, $F_s=1024$ →
 $J=64.3$ (μη ακέραιο).

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιο bin θα είναι το peak; Τι θα δείχνει το αμέσως γειτονικό;

ΕΞΗΓΗΣΗ

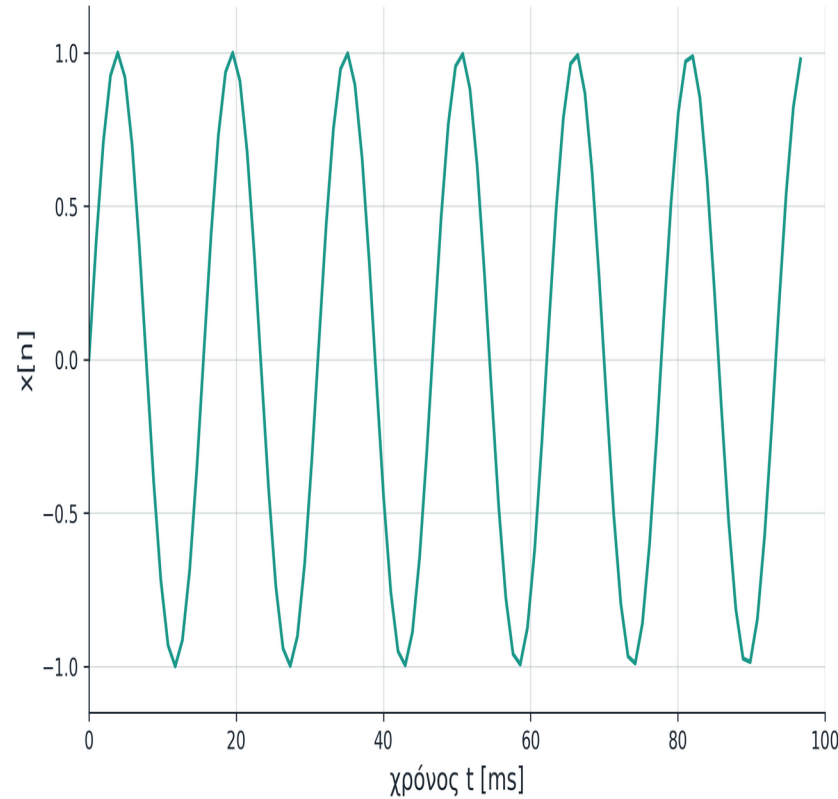
Δεν χωράνε ακέραιοι κύκλοι → ασυνέχεια στα άκρα → διαρροή στο φάσμα.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

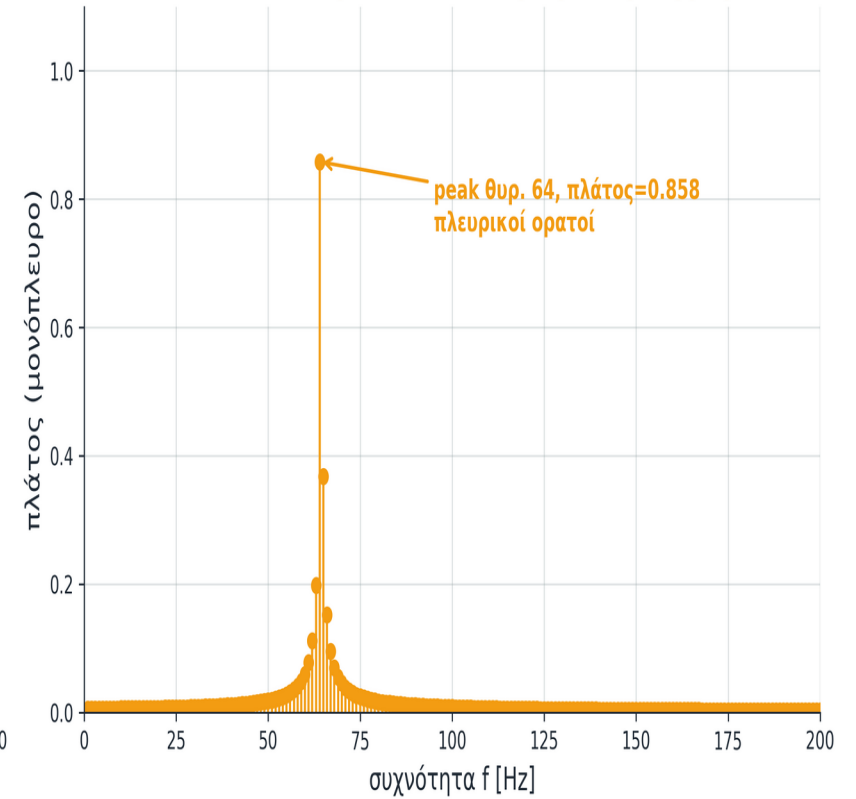
Για να ξαναγίνει ακέραιο: ποιο N πρέπει να επιλέξεις για $f_0=64.3$, $F_s=1024$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $64.3=643/10$ → χρειάζεται $N=10240$ ($=F_s \cdot 10$) για ακέραιο J· μη πρακτικό → βάζουμε παράθυρο.

$x[n] = \sin(2\pi \cdot 64.3 \cdot t)$, $J = 64.3$ (ΜΗ ακέραιο)



ΜΗ-ΣΥΜΦΩΝΗ: peak ΔΙΑΡΡΕΕΙ (φασματική διαρροή)



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Πλευρικοί λοβοί << peak. Αλλά εμφανείς και διασπείρουν ενέργεια.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Δεν μπορείς πάντα να επιλέξεις N για ακέραιο σήμα. Window είναι η λύση (σ51).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ33 coherent FFT. Μετά σ35 διαρροή: το φαινόμενο.

Spectral leakage — το φαινόμενο

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Δείχνουμε το φαινόμενο της φασματικής διαρροής με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Στην ακέραια περίπτωση, $J = f_0 \cdot N / F_s$ ακέραιος, και το ημιτονικό σήμα χωράει ολόκληρους κύκλους στο record — το φάσμα είναι καθαρό, μία γραμμή στο bin J . Στη μη ακέραια περίπτωση, J μη ακέραιος (π.χ. $J=64.5$), και το σήμα δεν χωράει ολόκληρους κύκλους - εμφανίζεται ασυνέχεια στα άκρα όταν η DFT υποθέτει περιοδική επανάληψη. Αυτή η ασυνέχεια εκφράζεται φασματικά ως διασπορά ενέργειας σε γειτονικά bins (πλευρικοί λοβοί). Αυτή είναι η φασματική διαρροή. Είναι ΚΑΝΟΝΑΣ στην πράξη — σπάνια έχεις ακέραια δειγματοληψία.

$$J = f_0 \cdot N / F_s \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{coherent -ακέραιο (χωρίς διαρροή)} ; \text{αλλιώς} \Rightarrow \text{leakage}$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

$f_0=64.3$ Hz, $N=1024$, $F_s=1024 \rightarrow J=64.3$ (non-integer).

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσο χαμηλά πέφτουν τα sidelobes; (rect window: ~ -13 dB)

ΕΞΗΓΗΣΗ

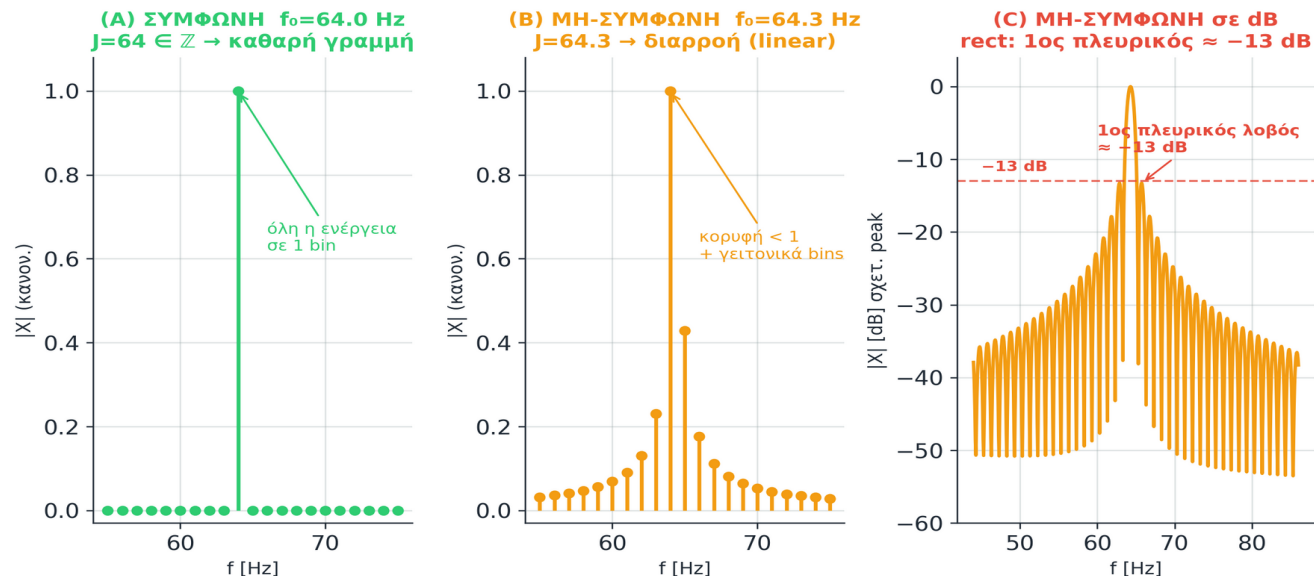
Δεν ταιριάζει ακέραιοι κύκλοι \rightarrow η ασυνέχεια στα άκρα διαχέει την ενέργεια.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Με $f_0=64.0$ ακριβώς, ποιο θα ήταν το αποτέλεσμα;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f_0=64.0$ ακριβώς \rightarrow coherent \rightarrow καθαρό φάσμα, μία γραμμή στο bin 64, χωρίς διαρροή.

Φασματική διαρροή: σύμφωνη vs μη-σύμφωνη δειγματοληψία



```
% Spectral leakage
pkg load signal
Fs=1024; N=1024;
n = 0:N-1;
f0=64.3; % non-coh
x=sin(2*pi*f0*n/Fs);
X=fft(x);
P=abs(X(1:N/2));
PdB=20*log10(P/max(P));
plot((0:N/2-1)*Fs/N, ...
      PdB)
```

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Υ σε dB σχετικό προς peak. Logarithmic scale ώστε να φαίνονται sidelobes.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Linear scale "κρύβει" leakage — πάντα κοιτάς dB για windowing analysis.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ34 μη-σύμφωνη διαρροή. Μετά σ36 γιατί διαρροή.

Η FFT θεωρεί ότι το N-point record επαναλαμβάνεται. Αν δεν χωράει σε ακέραιους κύκλους → ασυνέχεια στα άκρα → διαρροή.

Ασυνέχεια στον χρόνο ↔ ενέργεια σε ΟΛΕΣ τις συχνότητες (Fourier)

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

3 panels: original (A) → sampled (B) → FFT view (C, periodic).

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιο σημείο εμφανίζεται η ασυνέχεια στο (C);

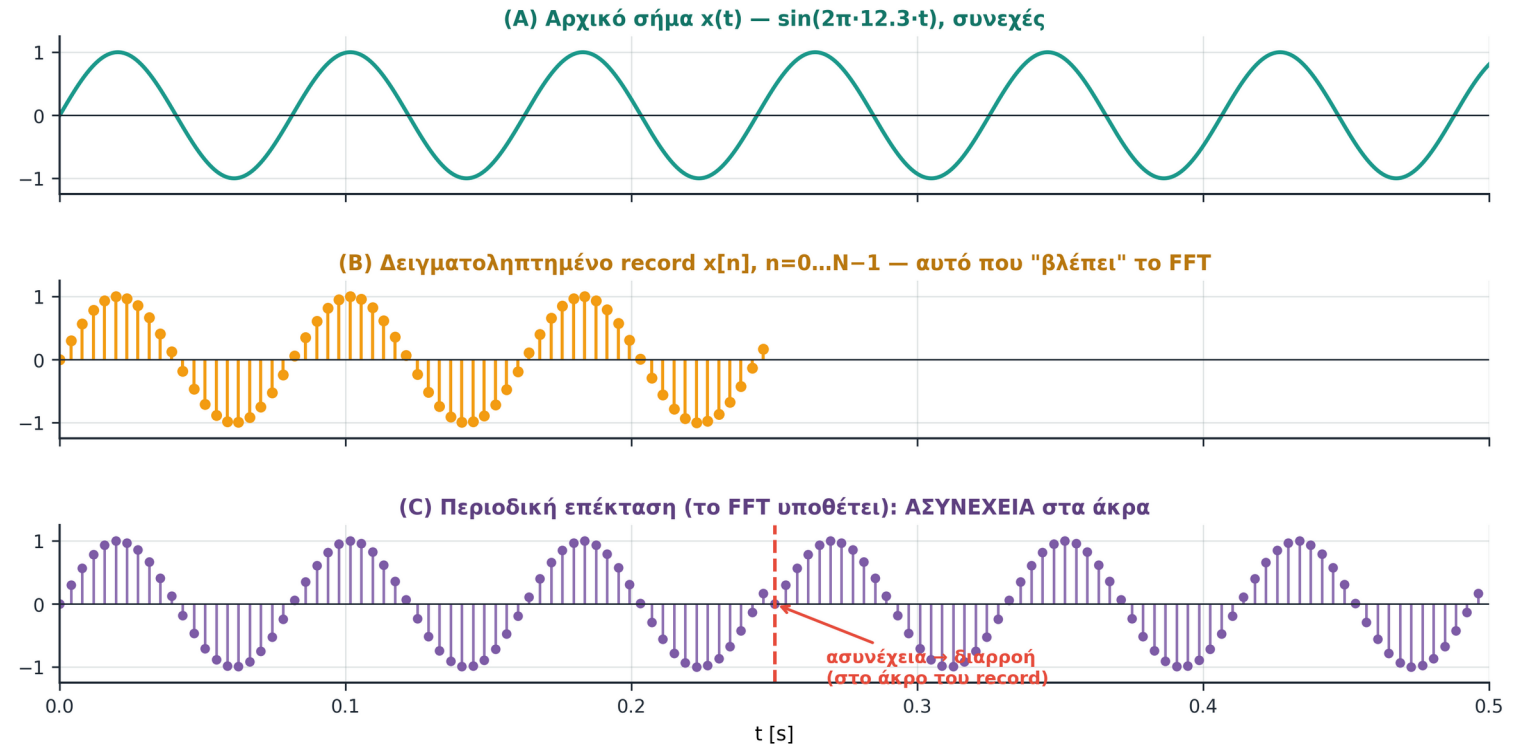
ΕΞΗΓΗΣΗ

Στα άκρα του record, αν $x[0] \neq x[N]$, η περιοδική επανάληψη έχει άλμα.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Με $f_0=12.0$ ακριβώς και $N=64$, $F_s=256$, θα υπήρχε ασυνέχεια;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $J=12 \cdot 64 / 256 = 3$ (ακέραιο) → coherent → καμία ασυνέχεια, χωρίς leakage.



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

X axis t [s]. Vertical dashed = όριο της περιόδου.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Η περιοδική επέκταση δεν είναι "προσέγγιση" — είναι η **ΑΚΡΙΒΗΣ** προϋπόθεση του FFT.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ35 διαρροή: το φαινόμενο. Μετά σ37 IFFT round-trip.

IFFT round-trip: $x[n] \rightarrow X[k] \rightarrow \text{ifft} \rightarrow x[n]$

W07

$x[n]$

$X[k]$

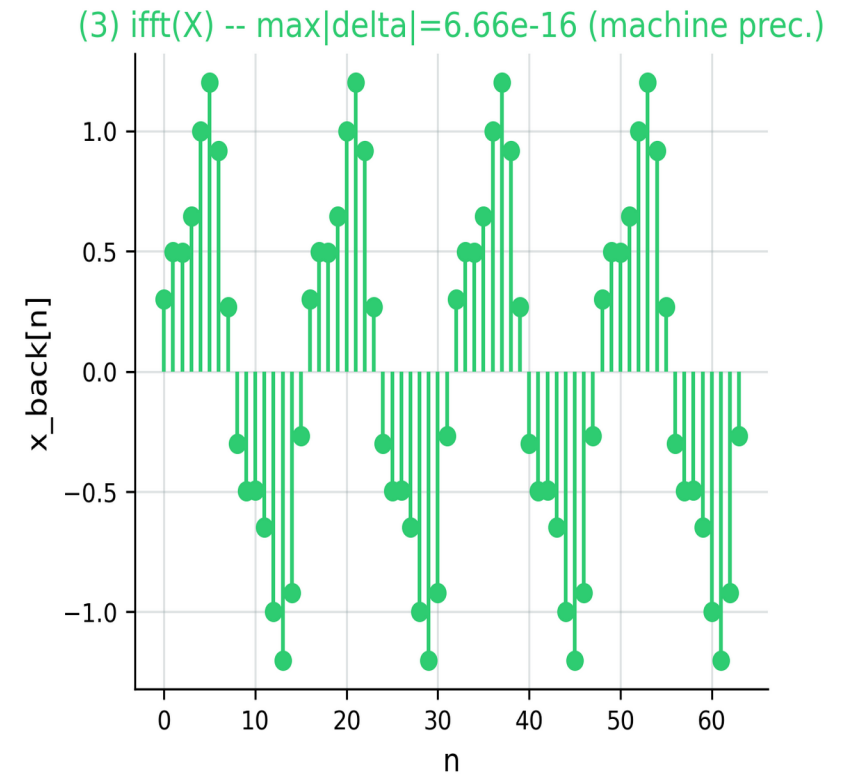
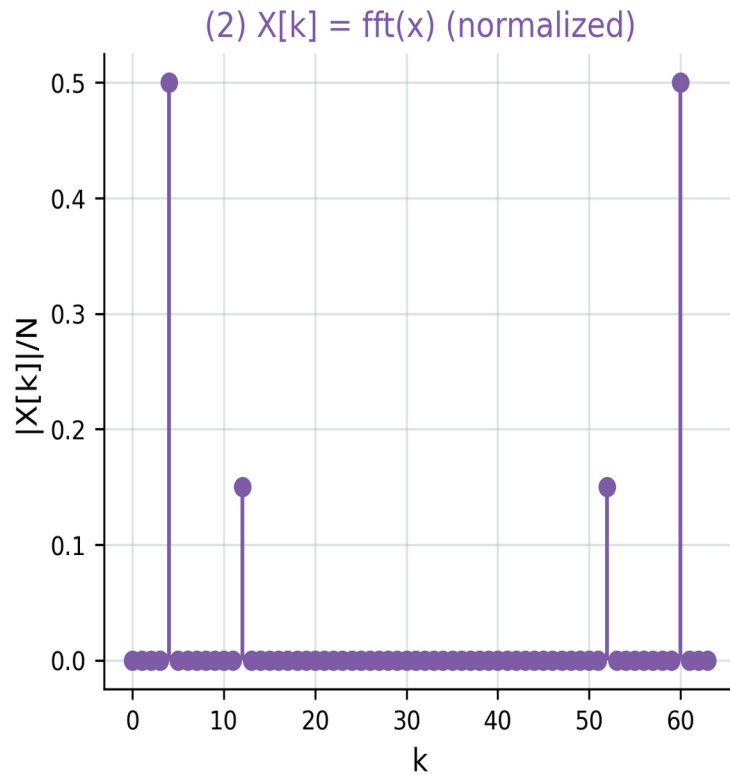
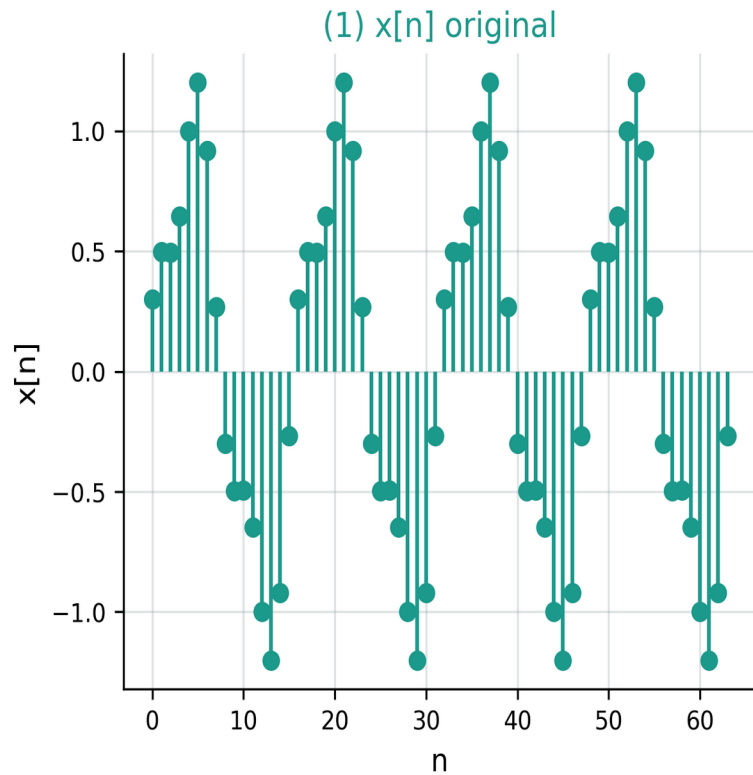
window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Το τεστ επαλήθευσης επιβεβαιώνει αριθμητικά ότι ο IFFT είναι όντως ο αντίστροφος του FFT: αν εφαρμόσεις FFT και μετά IFFT σε ένα τυχαίο σήμα, παίρνεις πίσω το αρχικό σήμα (μέχρι σφάλμα στρογγύλευσης). Αυτό δεν είναι θεωρητικός ισχυρισμός — είναι αριθμητικός έλεγχος που τρέχει σε κώδικα. Στο plot βλέπεις 3 panels: (1) αρχικό σήμα $x[n]$, (2) round-trip $\text{ifft}(\text{fft}(x))$, και (3) η διαφορά τους — πρακτικά μηδέν. Αν αυτή η διαφορά είναι σημαντική, κάτι είναι λάθος λόγω ισοδυναμίας. Είναι το πρώτο test επαλήθευσης που μπορείς να τρέξεις.

$$x[n] = (1/N) \cdot \sum_k X[k] \cdot e^{(j \cdot 2\pi \cdot k \cdot n/N)} \quad ; \quad \max |x - \text{ifft}(\text{fft}(x))| < 1e-14$$



ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

n: sample index. k: bin index. Έντονη συμμετρία.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Πάρε `real()` όταν αναμένεις πραγματικό σήμα — αλλιώς `complex` με μικρό `imag (~1e-15)`.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ36 γιατί διαρροή. Μετά σ38 sanity check.

Όταν φτιάχνεις custom DFT/φίλτρο/window, κάνε round-trip test. Αν δεν επιστρέφει εντός $1e-12$ → bug.

```
% Sanity check pattern για ΚΑΘΕ frequency-domain operation
% Αποθήκευσε ως sanity_roundtrip.m (function-file· όχι ως script).
function ok = sanity_roundtrip(x)
    X      = fft(x);
    x_rec  = real(ifft(X));
    err    = max(abs(x(:) - x_rec(:)));
    ok     = err < 1e-12;
    printf('max |delta| = %.3e → %s\n', err, {'FAIL','PASS'}{ok+1});
end

% Παράδειγμα
N = 1024;
t = (0:N-1)/1000; % n=0:N-1 → t=0, bins ευθυγραμμίζονται
randn('seed',42); x = randn(1,N); % seed → αναπαραγώγιμο
ok = sanity_roundtrip(x); % expect PASS, err ~1e-15

% Όταν προσθέτεις window/φίλτρο, μην ξεχνάς:
% inverse transform πρέπει να ακυρώνει τη forward,
% αλλιώς κάπου χάνεται information (ή προστίθεται noise).
```

✓ *Pattern: forward → modify → inverse → compare με input. Αν $err \gg 1e-12$ → bug.*

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Error metric: max absolute difference. Float64 precision $\approx 1e-16$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

$1e-3$ error = bug. $1e-15$ error = numerical noise (OK).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ_{37} IFFT round-trip. Μετά σ_{39} two-sided.

Τι βλέπουμε: Πότε χρειάζεσαι δίπλευρο φάσμα και πότε μονόπλευρο; Το ΔΙΠΛΕΥΡΟ φάσμα έχει νόημα για μιγαδικά σήματα (π.χ. baseband I/Q signals) και όταν δουλεύεις με αρνητικές συχνότητες (modulation analysis). Το ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟ φάσμα είναι η πρακτική επιλογή για πραγματικά σήματα (audio, σεισμολογικά κλπ), γιατί η Ερμιτιανή συμμετρία $X[N-k] = X^*[k]$ κάνει την αρνητική πλευρά πλεονασματική. Στο plot βλέπεις το ίδιο 2-τόνων ημιτονικό σήμα προβαλλόμενο και στις δύο μορφές. Πάντα δίπλευρο για ανάλυση συμμετρίας/φάσης· πάντα μονόπλευρο για υπολογισμό πλάτους.

f-axis: $(0:N-1) \cdot Fs/N - Fs/2$ με `fftshift(X)` → spectrum γύρω από $f=0$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

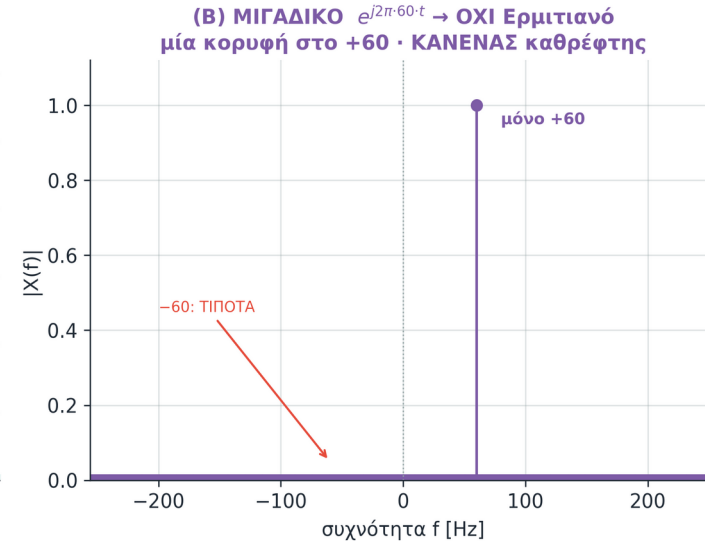
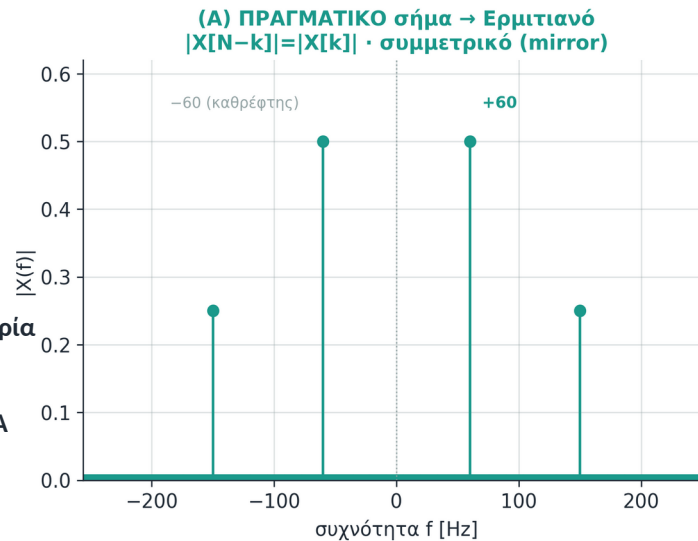
Real signal με 2 τόνους: 60 και 150 Hz. Two-sided δείχνει mirror.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Γιατί real signal πάντα δίνει συμμετρικό spectrum;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Για πραγματικό σήμα ισχύει Ερμιτιανή συμμετρία $X(-f) = X^*(f)$: κάθε θετική συχνότητα έχει «καθρέφτη» στην αρνητική (panel A). Αντίθετα, ΜΙΓΑΔΙΚΟ σήμα $e^{j2\pi \cdot 60 \cdot t}$ έχει ΜΙΑ μόνο κορυφή στο +60 — κανέναν καθρέφτη (panel B): ΔΕΝ είναι Ερμιτιανό.



```
% Two-sided φάσμα (Octave)
Fs=512; N=512;
n = 0:N-1; % n=0:N-1 →
t=0, bins
ευθυγραμμίζονται
x =
cos(2*pi*60*n/Fs) ...
+
0.5*cos(2*pi*150*n/Fs);

Y = fftshift(fft(x));
f = (-N/2:N/2-1)*Fs/N;
plot(f, abs(Y)/N)

% Hermitian: real x ->
% mirror peaks ±f
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Complex signal $x(t) = e^{j2\pi \cdot 60 \cdot t}$: πόσα peaks στο two-sided;

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 1 peak. Το μιγαδικό $e^{j2\pi \cdot 60 \cdot t}$ έχει μία μόνο συχνότητα — καμία mirror.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Axis $-Fs/2$ έως $+Fs/2$ (μετά `fftshift`). DC στο 0.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Raw FFT σειρά: $k=0$ DC, $k=1..N/2$ θετικές, $k=N/2+1..N-1$ αρνητικές. Μετά `fftshift`: άξονας $-Fs/2 \dots +Fs/2$ (DC στο κέντρο).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ38 sanity check. Μετά σ40 `fftshift/ifftshift`.

fftshift / ifftshift: πότε μετακινώ το φάσμα

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Το ΙΔΙΟ δίπλευρο φάσμα δύο φορές. Αριστερά σε raw fft-order (DC στο k=0, αρνητικές συχνότητες «τυλιγμένες» στο δεξί μισό). Δεξιά μετά fftshift: DC στο κέντρο, άξονας $-Fs/2 \dots Fs/2$ — έτσι το διαβάζουμε εύκολα.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Ένα φάσμα $X[k] = \text{fft}(x[n])$. Στόχος: να ξέρω ΠΟΤΕ κάνω fftshift και πότε ΟΧΙ.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν φιλτράρω πάνω στο shifted φάσμα και κάνω ifft, τι θα πάει στραβά;

ΕΞΗΓΗΣΗ

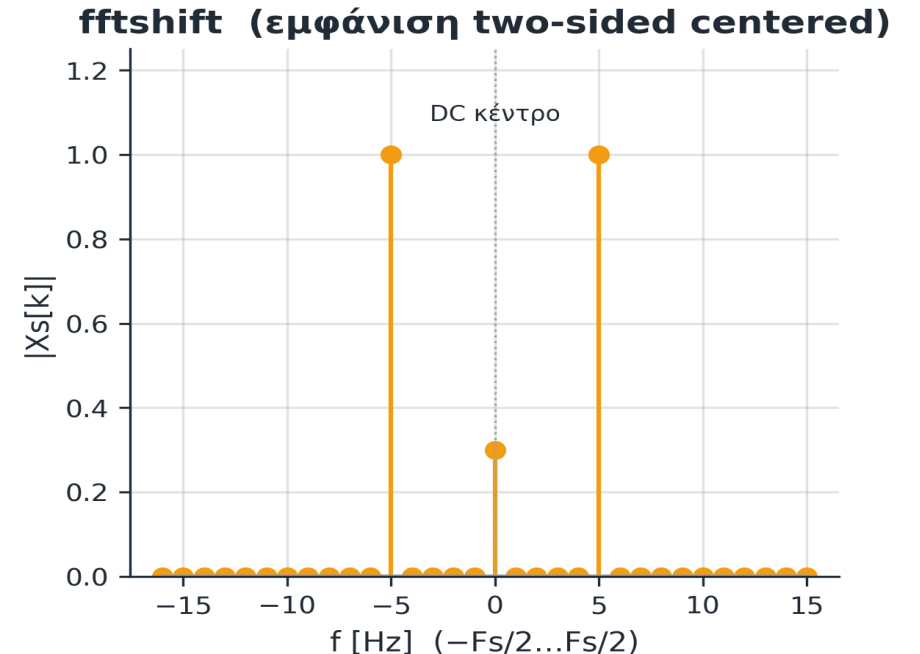
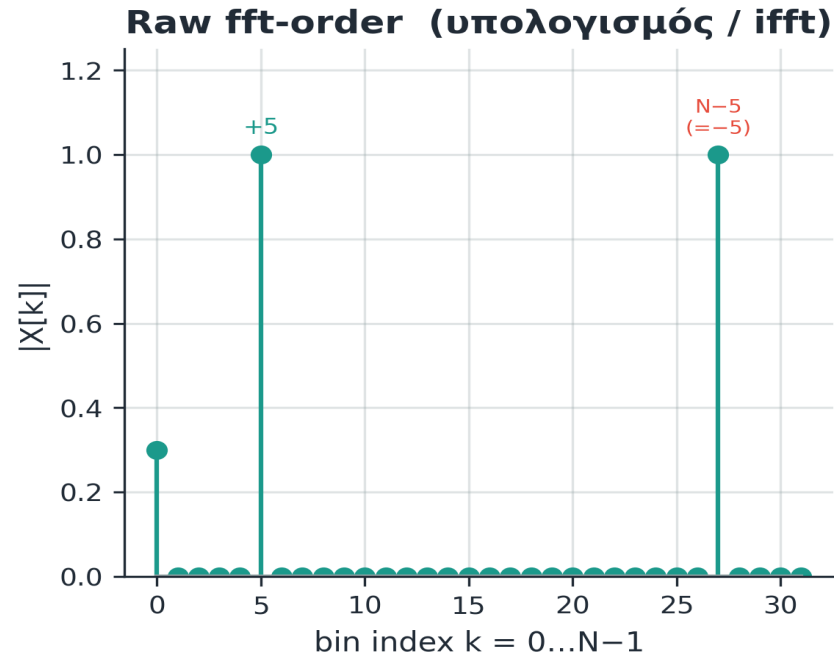
ΚΑΝΟΝΑΣ (κάθετος): υπολογισμός / φιλτράρισμα / ifft → ΠΑΝΤΑ raw fft-order. fftshift = ΜΟΝΟ για εμφάνιση two-sided centered.

Σχεδιάσες μάσκα shifted; επιστρεψέ την: $H = \text{ifftshift}(H_s)$ πριν το $X \cdot H$. One-sided φάσμα → ΚΑΝΕΝΑ shift.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

$N=8$: πού πάει το DC μετά fftshift;

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: στο κέντρο (index floor($N/2$)). N άρτιο vs περιττό αλλάζει το κέντρο.



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Raw: $k = 0 \dots N-1$. Shifted: $f = (-N/2 : N/2-1) \cdot Fs/N$. One-sided: $0 \dots Fs/2$.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Διάβασε την ΕΚΦΩΝΗΣΗ: μονόπλευρο → όχι shift • δίπλευρο centered → fftshift • filter/ifft → raw. Ισχύει: $\text{fftshift}(\text{ifftshift}(X)) = X$.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ39 two-sided. Μετά σ41 one-sided $\times 2$.

Two-sided → One-sided: η $\times 2$ διόρθωση

W07

 $x[n]$ $X[k]$

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Πάνω βλέπεις το δίπλευρο φάσμα ($k \in [0, N-1]$) ενός πραγματικού σήματος: είναι συμμετρικό γύρω από $F_s/2$.

Οι «αρνητικές συχνότητες» ($k > N/2$) είναι οι καθρέφτες των θετικών. Κάτω βλέπεις τη μετατροπή σε μονόπλευρο φάσμα (μόνο $k \in [0, N/2]$). Αναδιπλώνουμε το mirror και πολλαπλασιάζουμε με 2 τα AC bins (AC = όλες οι θυρίδες εκτός DC και Nyquist, δηλ. $k \neq 0$ και $k \neq N/2$ — αυτές έχουν ζεύγος-καθρέφτη). Το DC ($k=0$) και το Nyquist ($k=N/2$) ΔΕΝ διπλασιάζονται - δεν έχουν mirror pair.

Αποτέλεσμα: το peak του ημιτόνου δείχνει το πραγματικό πλάτος στο πεδίο του χρόνου

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Σήμα με DC + 2 τόνους:

$$x[n] = 0.4 + \cos(2\pi \cdot 60 \cdot n / F_s) + 0.5 \cdot \cos(2\pi \cdot 150 \cdot n / F_s)$$

$F_s = 512$ Hz, $N = 512$

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Μετά τη διόρθωση, το peak του 60 Hz θα είναι 0.5 ή 1.0;

ΕΞΗΓΗΣΗ

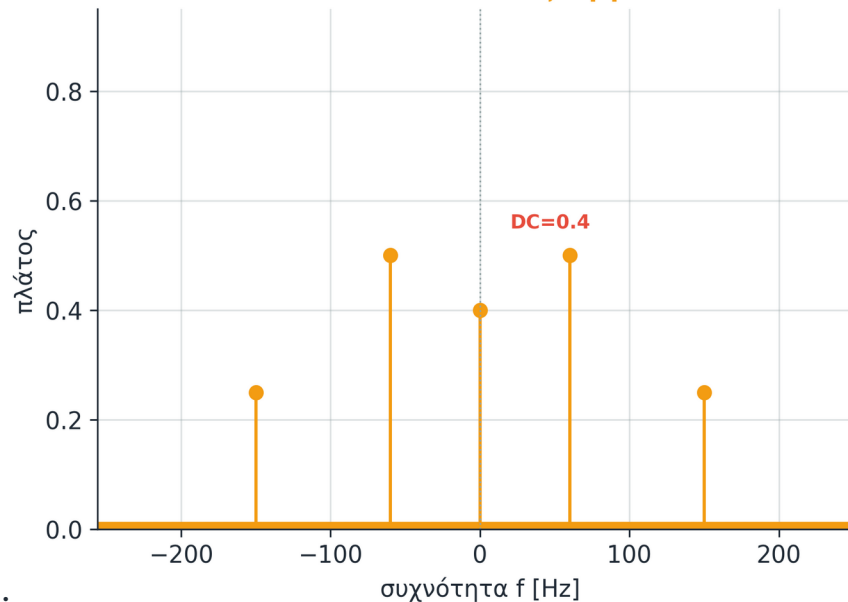
Διπλώνουμε κάθε ζεύγος καθρέφτη: $|+f| + |-f| = 2 \cdot |+f| \rightarrow$ το peak ισούται με το πραγματικό πλάτος του χρόνου. ΕΞΑΙΡΕΣΗ: DC ($k=0$) και Nyquist ($k=N/2$) δεν έχουν ζεύγος καθρέφτη - δεξ την κουκίδα στο $f=0$: μένει 0.4, ΔΕΝ $\times 2$.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

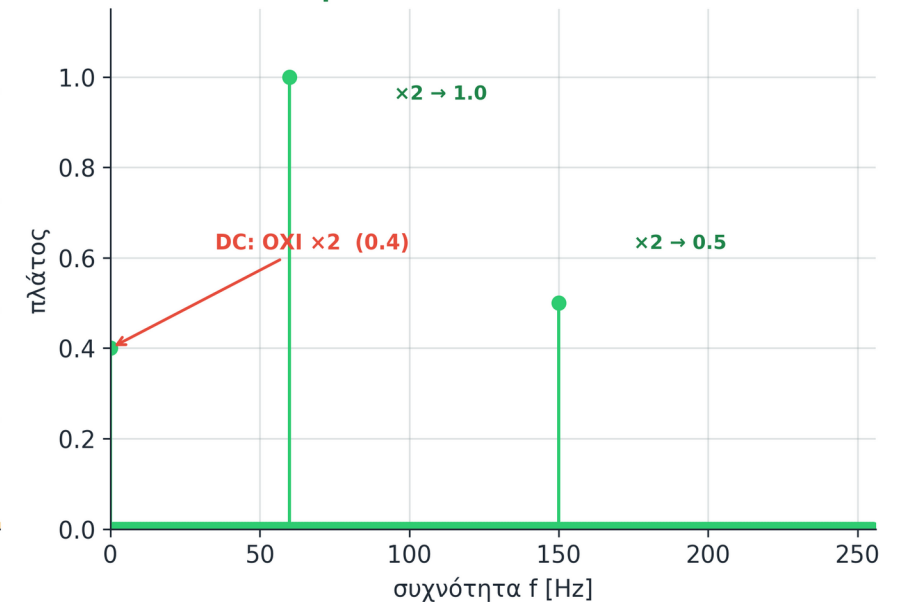
Στο σχήμα DC=0.4: στο μονόπλευρο τι δείχνει το bin $f=0$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: 0.4 (DC ΔΕΝ $\times 2$). Τα AC: $60 \rightarrow 1.0$, $150 \rightarrow 0.5$.

(A) Δίπλευρο $A=Y/N$
DC στο 0 · AC σε ζεύγη $\pm f$



(B) Μονόπλευρο ($\times 2$ ΜΟΝΟ στα AC)
DC μένει 0.4 · $60 \rightarrow 1.0$ · $150 \rightarrow 0.5$



ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

One-sided: f-axis 0 έως $F_s/2$. Peak = time-domain amplitude.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Παρατήρηση! $\times 2$ ΜΟΝΟ για AC bins.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν $\sigma 40$ fftshift/iftftshift. Μετά $\sigma 42$ φίλτρα + Hermitian.

Φίλτρα στο φάσμα — 4 masks + Hermitian symmetry

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Δείχνουμε τέσσερα είδη φίλτρων ως μάσκες $H[k]$ στο φάσμα: LP (lowpass), HP (highpass), BP (bandpass), BS (bandstop/notch).

Η εφαρμογή φίλτρου = πολλαπλασιασμός $Y[k] = H[k] \cdot X[k]$ και μετά ifft για επιστροφή στον χρόνο.

Κρίσιμο: για να βγει το $y[n]$ πραγματικό, η $H[k]$ πρέπει να έχει Ερμιτιανή συμμετρία γύρω από $N/2$ — δηλαδή $H[N-k] = H^*[k]$. Αλλιώς το ifft βγάζει μιγαδικό σήμα

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

4 μάσκες LP/HP/BP/BS σε 2 όψεις: shifted (0 Hz κέντρο) & raw fft order.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν δεν εφαρμόσεις Hermitian, τι θα συμβεί στο $y[n]$;

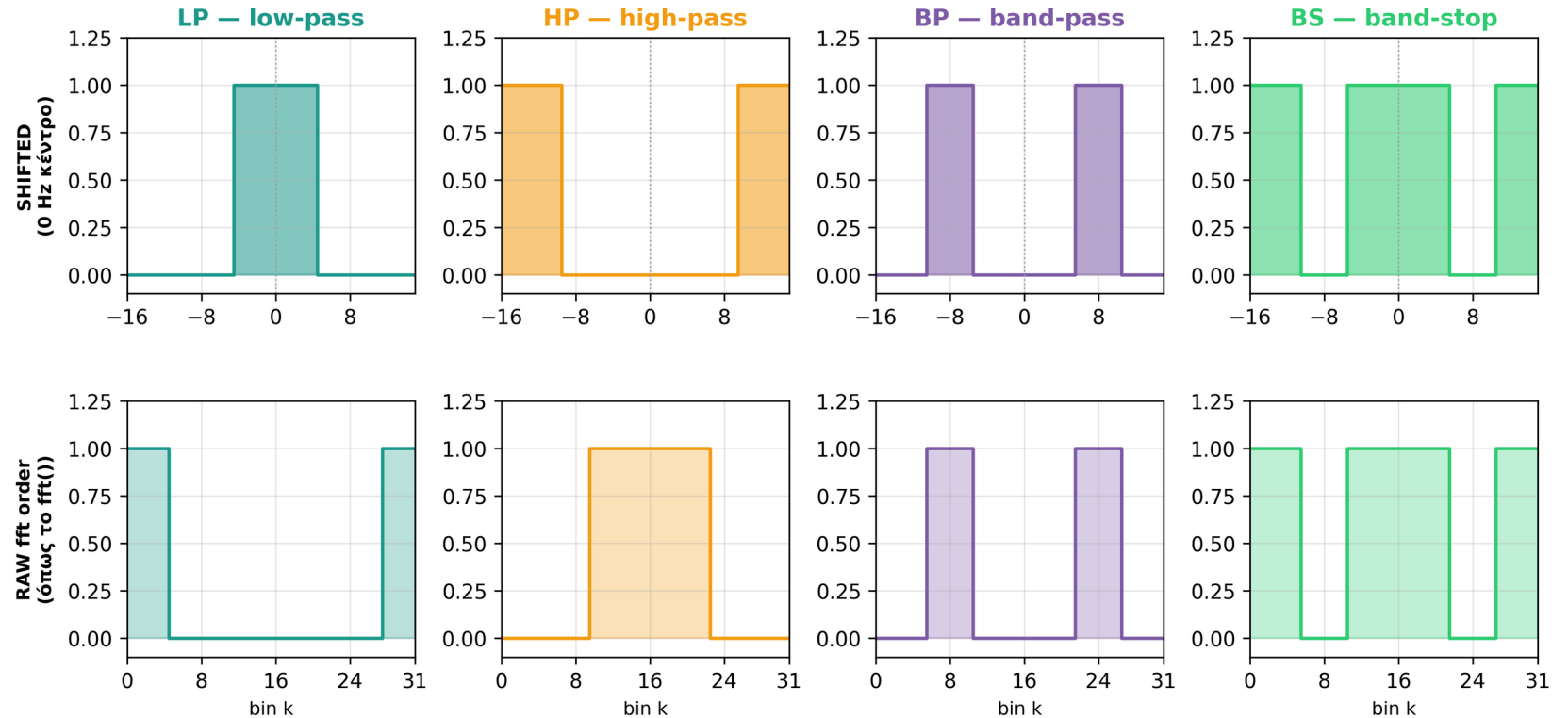
ΕΞΗΓΗΣΗ

Πραγματικό y : $Y[k]=Y^*[N-k]$. Πραγματική μάσκα: $H[k]=H[N-k]$ (προσοχή DC $k=0$ & Nyquist $k=N/2$). Σε raw order το LP φωτίζει ΚΑΙ τα 2 άκρα ($k=0$ ΚΑΙ $k=N$) = Ερμιτιανή συμμετρία (αρνητικές συχνότητες), ΟΧΙ aliasing. Κανόνας: υπολογίζω/φιλτράρω raw, σχεδιάζω shifted $\rightarrow H_raw = \text{ifftshift}(H_shift)$.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Δες σ32-32 IFFT round-trip + recipe.

Κάθε φίλτρο σε 2 όψεις: RAW = ifftshift(SHIFTED) — LP raw σπάει στα 2 άκρα, HP raw περνά τη μέση



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Άξονας k (bin index). $H[k]$ αδιάστατο.

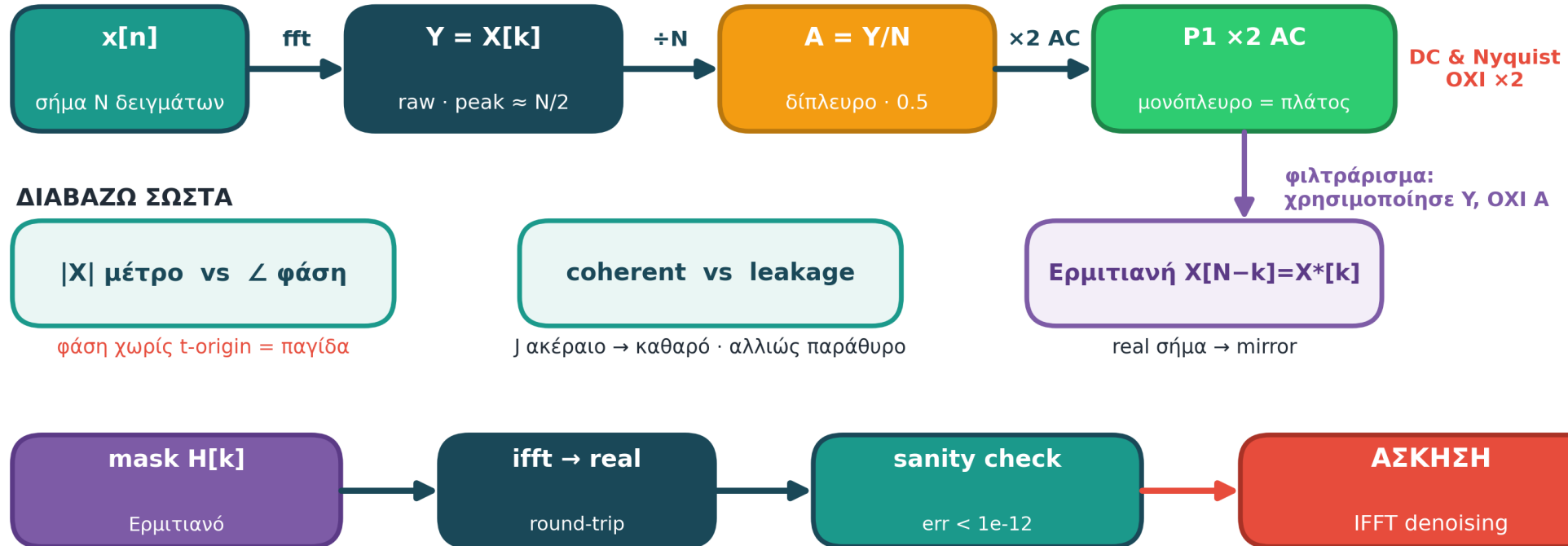
ΠΡΟΣΕΧΩ

Στην πράξη χρειάζεσαι σταδιακή μετάβαση (όχι binary) για να αποφύγεις Gibbs ringing.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ41 one-sided $\times 2$. Μετά σ43 χάρτης φάσματος.

Πώς συνδέονται όλα: ο χάρτης του φάσματος



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Πάνω: λογιστική πλάτους (fft→÷N→×2). Μέση: σωστή ανάγνωση.
Κάτω: επεξεργασία → άσκηση.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Φιλτράρισμα: χρησιμοποίησε Y=fft(x), ΟΧΙ A=Y/N (το ifft έχει ήδη 1/N).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ42 φίλτρα + Hermitian. Μετά σ44 Άσκηση 2 ΕΚΦΩΝΗΣΗ.

Άσκηση 2 — IFFT denoising: φιλτράρισμα στο φάσμα

W07

$x[n]$

$X[k]$

window

PSD

W09

ΕΚΦΩΝΗΣΗ: Θορυβώδες $x[n]$, $F_s=1024$ Hz, $N=512$ (σύμφωνο: $\Delta f=2$ Hz, 50 & 120 Hz σε bins). Καθαρό = 2 ημίτονα 50 & 120 Hz (πλάτη 1.0 & 0.7) + Gaussian θόρυβος $\sigma=0.7$. Στόχος: ανάκτηση το καθαρό φιλτράροντας στο φάσμα. (α) $X[k]=fft(x)$ · (β) $mask=|X[k]| > thr$ · (γ) $X \cdot mask$ · (δ) $real(iff)$. Δοκίμασε 3 κατώφλια (0.10 / 0.30 / 0.75·max): χαμηλό→leak θορύβου, σωστό→2 καθαροί τόνοι, υψηλό→απώλεια (χάνεται ο τόνος 0.7).

IFFT denoising — επιλογή κατωφλίου ($\sigma=0.7$): χαμηλό→θόρυβος · σωστό→2 τόνοι · υψηλό→απώλεια

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Σήμα = 2 ημίτονα 50+120 Hz + $\sigma=0.7$ Gaussian noise.

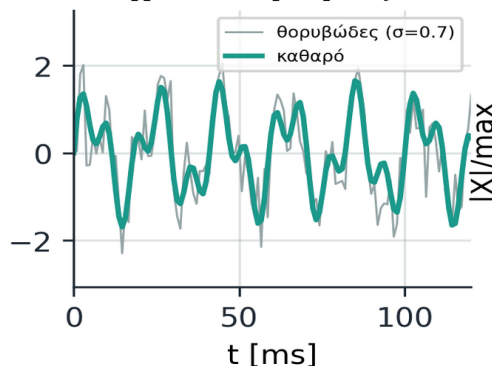
ΕΞΗΓΗΣΗ

Το θορυβώδες σήμα κρύβει 2 καθαρούς τόνους μέσα σε Gaussian θόρυβο. Στο πεδίο συχνότητας οι 2 τόνοι γίνονται ψηλές κορυφές (στα 50 & 120 Hz), ενώ ο θόρυβος απλώνεται χαμηλά σε ΟΛΑ τα bins. Βάζουμε κατώφλι θ ανάμεσά τους: ό,τι περνάει το θ κρατιέται ($mask=1$), ό,τι όχι μηδενίζεται ($mask=0$). Πολλαπλασιάζουμε το φάσμα με τη $mask$ και κάνουμε iff — επιστρέφουμε στον χρόνο μόνο με τους 2 τόνους. Κρίσιμο: φιλτράρουμε το μιγαδικό $X[k]$ (όχι το πλάτος $|X|$), αλλιώς χάνεται η φάση και το $real(iff)$ βγαίνει λάθος.

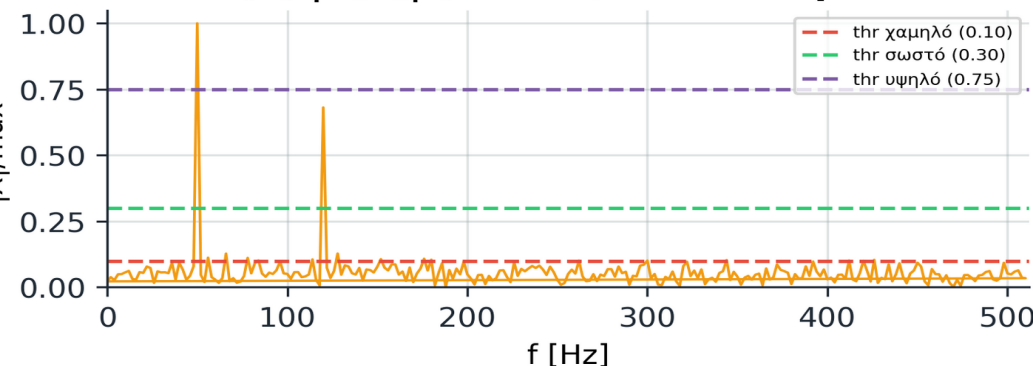
ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Μεγάλο θ → χάνονται bins σήματος (πρώτα ο τόνος 0.7) → εξασθένηση. Μικρό θ → leak θορύβου. Σωστό $\theta=0.30 \cdot max$ → MONO οι 2 τόνοι.

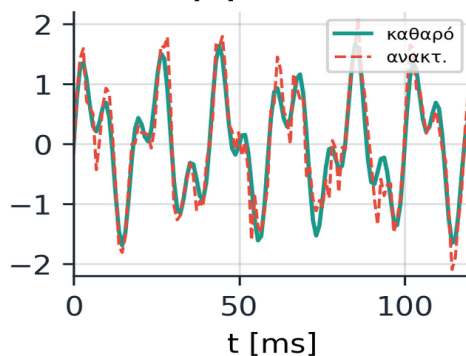
(1) σήμα: θόρυβος $\sigma=0.7$



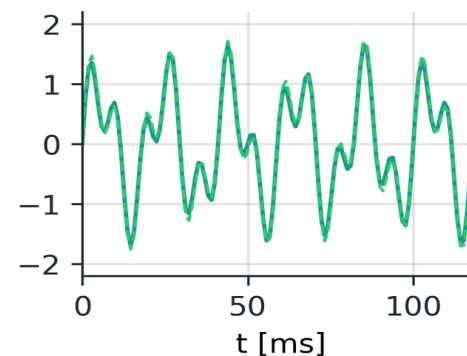
(2) $|X[k]|$ (κανον.) + 3 κατώφλια



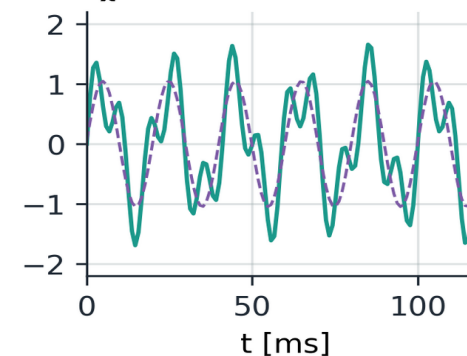
(3) χαμηλό leak θορύβου RMSE=0.32



(4) σωστό ΚΑΘΑΡΟ RMSE=0.06



(5) υψηλό χάνει 0.7 τόνο RMSE=0.50



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Time: amplitude. Freq: $|X[k]|$ with threshold dashed.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Επιλογή κατωφλίου = trade-off: low → noise leaks; high → signal loss.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ43 χάρτης φάσματος. Μετά σ45 Άσκηση 2 λύση.

Άσκηση 2 — Πλήρης λύση (κώδικας Octave)

ΕΚΦΩΝΗΣΗ: Θορυβώδες $x[n]$, $F_s=1024$ Hz, $N=512$ (σύμφωνο: $\Delta f=2$ Hz, 50 & 120 Hz σε bins). Καθαρό = 2 ημίτονα 50 & 120 Hz (πλάτη 1.0 & 0.7) + Gaussian θόρυβος $\sigma=0.7$. Στόχος: ανάκτηση φιλτράροντας στο φάσμα. (α) $X=\text{fft}(x)$ · (β) $\text{mask}=|X| \geq \text{thr}$ · (γ) $X \cdot \text{mask}$ · (δ) $\text{real}(\text{ifft})$. Δοκιμάζουμε 3 κατώφλια (0.10/0.30/0.75·max).

```
% — Άσκηση 2 – IFFT denoising (πλήρης λύση) —
% Σήμα: 2 ημίτονα 50+120 Hz + σ=0.7 Gaussian θόρυβος
Fs = 1024; N = 512; n = 0:N-1; t = n/Fs;
clean = sin(2*pi*50*n/Fs) + 0.7*sin(2*pi*120*n/Fs);
randn('seed',42); % αναπαραγωγίσιμος
x = clean + 0.7*randn(1,N); % θορυβώδες σήμα

% — Φάσμα + κατώφλι στο ΜΙΓΑΔΙΚΟ X —
X = fft(x); aX = abs(X); mx = max(aX);

% — Sweep 3 κατωφλιών: χαμηλό / σωστό / υψηλό —
fracs = [0.10 0.30 0.75];
names = {'χαμηλό', 'σωστό', 'υψηλό'};
subplot(2,3,[1 2 3]); % φάσμα + 3 γραμμές
plot((0:N/2)*Fs/N, aX(1:N/2+1)/mx); hold on
for fr = fracs, plot([0 Fs/2],[fr fr], '--'); end
xlim([0 Fs/2]); xlabel('f [Hz]'); ylabel('|X|/max')
for j = 1:3
    mask = aX >= fracs(j)*mx; % Ερμιτιανή (|X| συμμετρικό)
    xr = real(ifft(X .* mask)); % φιλτράρουμε X, ΟΧΙ |X|
    rmse = sqrt(mean((xr-clean).^2));
    subplot(2,3,3+j);
    plot(t*1000,clean,'LineWidth',2); hold on
    plot(t*1000,xr,'--'); xlim([0 120])
    title(sprintf('%s RMSE=%.2f', names{j}, rmse))
end
% Verified (σ=0.7): χαμηλό 0.10 -> 16 bins, RMSE~0.33 (leak)
%                  σωστό 0.30 -> 2 bins, RMSE~0.08 (καθαρό)
%                  υψηλό 0.75 -> 1 bin, RMSE~0.50 (απώλεια)
```

ΤΙ ΚΑΝΕΙ ΚΑΘΕ ΒΗΜΑ

- $\text{fft}(x)$ → μιγαδικό φάσμα $X[k]$ (πλάτος + φάση).
- $aX=\text{abs}(X)$, $mX=\text{max}(aX)$: κανονικοποιούμε το κατώφλι ως κλάσμα του mX .
- Sweep 3 κατωφλιών 0.10/0.30/0.75·max → δοκιμάζουμε χαμηλό/σωστό/υψηλό.
- $\text{mask} = aX \geq \text{thr}$. Το $|X|$ είναι ήδη συμμετρικό → η μάσκα Ερμιτιανή → $\text{real}(\text{ifft})$ πραγματικό (χωρίς χειροκίνητο κατοπτρισμό).
- Ανάκτηση: $\text{real}(\text{ifft}(X \cdot \text{mask}))$ — φιλτράρουμε το ΜΙΓΑΔΙΚΟ X , ΟΧΙ το $|X|$, αλλιώς χάνεται η φάση.
- Plots: πάνω φάσμα + 3 γραμμές κατωφλιού· κάτω 3× recovered vs clean με RMSE.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σωστό $\theta \approx 0.30 \cdot \text{max}$: επιβιώνουν ΜΟΝΟ οι 2 τόνοι (RMSE~0.08). Μεγάλο θ → χάνεται πρώτα ο ασθενής τόνος 0.7.

IFFT-based filtering: η πλήρης σειρά βημάτων

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Standard 5-step recipe για frequency-domain filtering. Εφαρμόζεται σε denoising, equalization, deconvolution.

$$y[n] = \text{real}(\text{ifft}(\text{fft}(x) \cdot H[k])) \quad \text{με } H \text{ Hermitian-symmetric}$$

1

FFT

$$X = \text{fft}(x); \quad N = \text{length}(x);$$

2

Design mask H[k]

Ορίζω LP/HP/BP/BS μέσω του διανύσματος συχνότητας:
 $f = (0:N-1)*F_s/N; H = (f \leq f_c) \mid (f \geq F_s - f_c);$ % LP, αυτόματα Ερμιτιανό

3

Apply

$$Y = X .* H;$$

4

IFFT + real

$$y = \text{real}(\text{ifft}(Y));$$

5

Validate

Έλεγχος: $\max(\text{abs}(\text{imag}(y))) \approx 0$ (συμμετρία) και $\max(\text{abs}(x - \text{real}(\text{ifft}(\text{fft}(x)))))) \approx 0$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΜΑΣΚΑΣ: η μάσκα μπαίνει στο ΜΙΓΑΔΙΚΟ FFT (όχι στο $|X|$). Αν σχεδιάστηκε μετά από `fftshift` → κάνε `ifftshift` ΠΡΙΝ το `ifft`.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Κάθε step preserves length N (no truncation).

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΠΡΟΣΟΧΗ: Ξεχνώντας Hermitian → complex output με μη μηδενικό imag.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ45 Άσκηση 2 λύση. Μετά σ47 ΕΜΠΡΟΣ (FFT).

Πλήρες παράδειγμα — ΕΜΠΡΟΣ (FFT): σήμα → φάσμα

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: ΕΜΠΡΟΣ διαδρομή. Σύμφωνα σήμα 64+128 Hz ($F_s=N=1024$) → fft → μονόπλευρο πλάτος (peaks = πραγματικά πλάτη 1.0 & 0.7) και φάση (-90° για ημίτονο).

```
% Πλήρες παράδειγμα — ΕΜΠΡΟΣ (FFT)
Fs = 1024; N = 1024; n = 0:N-1; t = n/Fs; % n=0:N-1 →
t=0, bins ευθυγραμμίζονται
x = sin(2*pi*64*t) + 0.7*sin(2*pi*128*t); % σύμφωνο

X = fft(x); % μιγαδικό φάσμα
A = abs(X)/N; % δίπλευρο πλάτος
half = N/2 + 1;
P1 = A(1:half);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1); % μονόπλευρο x2 (AC)
f = (0:half-1)*Fs/N; % bin k -> k*Fs/N [Hz]
ph = angle(X(1:half)); % φάση ανά bin [rad]
[~,k1]=min(abs(f-64)); [~,k2]=min(abs(f-128));
printf('|X|: 64->%.3f 128->%.3f\n', P1(k1),P1(k2));
% -> 1.000 / 0.700 , -90 / -90 deg

% — Plots (3 panels δεξιά) —
subplot(3,1,1) % (A) σήμα x[n]
plot(t*1000, x); xlim([0 125])
xlabel('t [ms]'); ylabel('πλάτος')
subplot(3,1,2) % (B) |X| μονόπλευρο
stem(f, P1); xlim([0 200])
xlabel('f [Hz]'); ylabel('|X|')
subplot(3,1,3) % (C) φάση στις κορυφές
stem(f, rad2deg(ph)); xlim([0 200])
xlabel('f [Hz]'); ylabel('/_X [deg]')
```

Γιατί φάση -90° για ημίτονο; Η DFT αναλύει σε μιγαδικά εκθετικά $e^{j2\pi ft} = \cos + j \sin$. Μηδενική φάση = cos. Επειδή $\sin(\theta) = \cos(\theta - 90^\circ)$, κάθε ημιτονικός όρος δίνει φάση -90° . Αν το σήμα ήταν cos → φάση 0° .

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

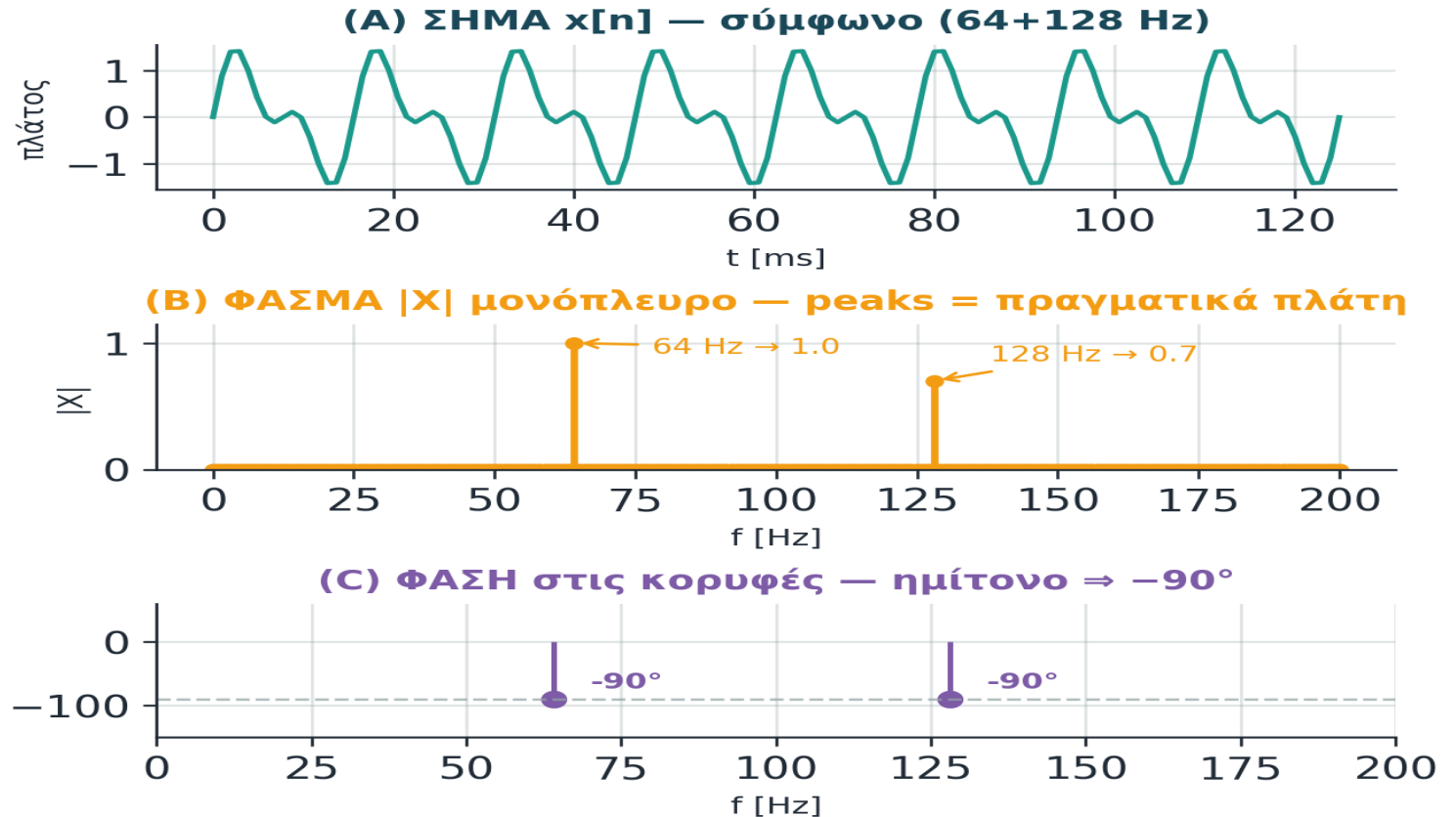
Χρόνος [ms] ↔ συχνότητα [Hz]. Peak μονόπλευρου = πραγματικό πλάτος (σύμφωνο).

ΠΡΟΣΕΧΩ

Το x2 MONO στα AC bins (όχι DC/Nyquist). Η φάση ημιτόνου = -90° ($= -\pi/2$).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ46 IFFT filtering recipe. Μετά σ48 ΠΙΣΩ (IFFT).



Πλήρες παράδειγμα — ΠΙΣΩ (IFFT): φάσμα → σήμα

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

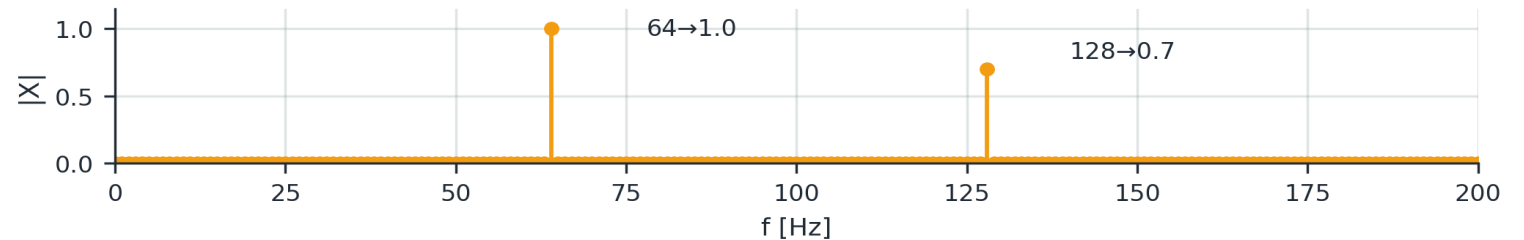
Τι βλέπουμε: ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ διαδρομή — καθρέφτης του σ47. (Α) είσοδος = το ΙΔΙΟ φάσμα $X[k]$ → (Β) $\hat{x}[n]=\text{real}(\text{ifft}(X))$ → (C) ταύτιση αρχικού & ανακατασκευής. Το σφάλμα $\sim 1e-15$ είναι αριθμητικό (υποσημείωση), όχι φυσική πληροφορία.

```
% Πλήρες παράδειγμα - ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ (IFFT)
% ξεκινάμε από το ΙΔΙΟ μιγαδικό X = fft(x)
xr = real( ifft(X) );           % ανακατασκευή
% κρατάμε real(): X Ερμιτιανό => xr πραγματικό
% (το φανταστικό μέρος είναι ~0 αριθμητικά)

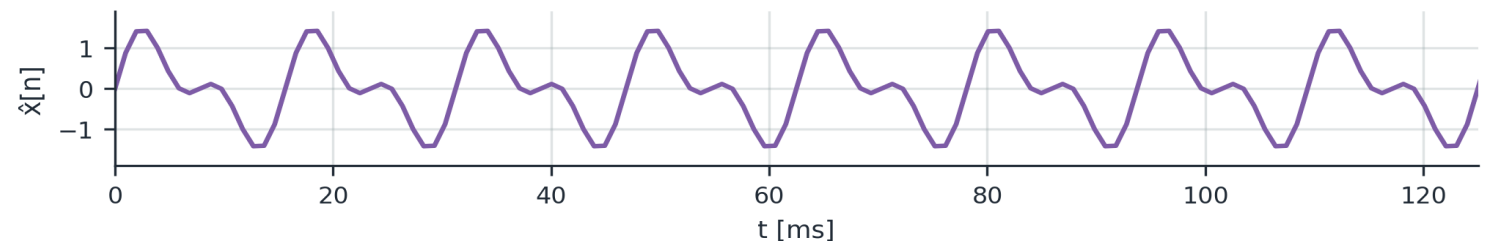
err = abs(x - xr);             % σφάλμα round-trip
printf('max |x - xr| = %.2e\n', max(err));
% -> ~1e-15 (double precision)

% ΠΡΟΣΟΧΗ στο φιλτράρισμα:
% για Y = X .* H κράτα το ΜΙΓΑΔΙΚΟ X (όχι A=X/N)
% αλλιώς χάνεις φάση -> λάθος ανακατασκευή (#7)
```

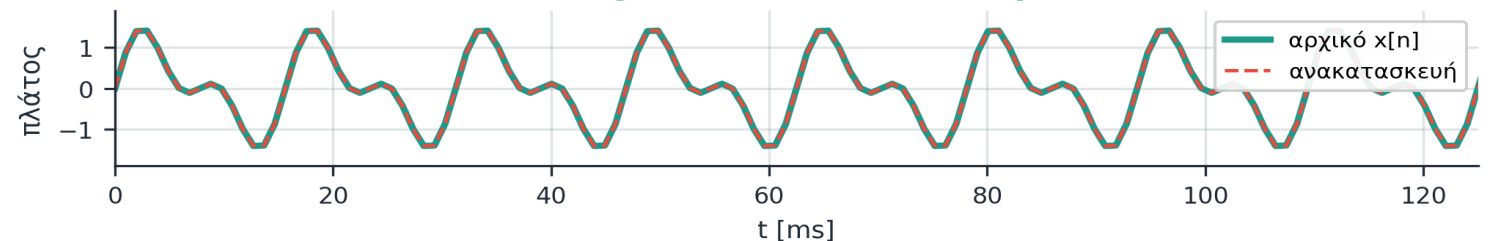
(Α) ΕΙΣΟΔΟΣ: το ΙΔΙΟ φάσμα $X[k]$ (1.0 & 0.7)



(Β) ΕΞΟΔΟΣ: $\hat{x}[n] = \text{real}(\text{ifft}(X))$



(C) ΤΑΥΤΙΣΗ original vs ανακατασκευή (err~9e-16)



✓ Round-trip τέλει ($\sim 1e-15$): το ifft επιστρέφει το ίδιο σήμα. → ΕΝΟΤΗΤΑ 3: Parseval.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3 — σ49-σ53

Parseval

Διατήρηση ενέργειας · 3 εκδοχές · ενέργεια ζώνης

Parseval: τι ισχύει + πώς το εφαρμόζω

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Το θεώρημα Parseval λέει ότι η συνολική ενέργεια ενός σήματος είναι ίδια είτε τη μετρήσεις στον χρόνο είτε στη συχνότητα, αρκεί να χρησιμοποιείς τη σωστή κανονικοποίηση.

Είναι θεώρημα του μετασχηματισμού Fourier — η DFT είναι ενιαία έως κλίμακα N, οπότε διατηρεί την ενέργεια με τον παράγοντα 1/N στη φασματική πλευρά.

Σε πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιούμε Parseval για: εκτίμηση SNR, μέτρηση ενέργειας σε συγκεκριμένη ζώνη (band-power), audio loudness, image energy normalization.

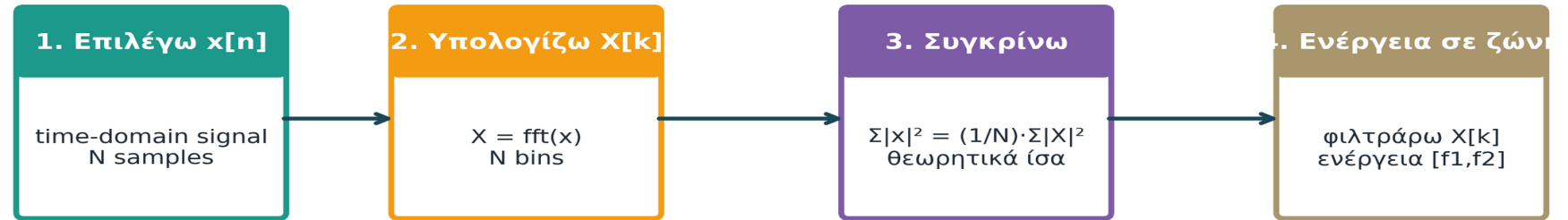
Η εξίσωση: $\sum |x[n]|^2 = (1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$. Πρόσεξε τον παράγοντα 1/N — εύκολο να ξεχαστεί.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Parseval = θεώρημα διατήρησης ενέργειας στον Fourier.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε τι χρησιμεύει στην πράξη;



4-step workflow: από signal → spectrum → invariant → band-energy

ΕΞΗΓΗΣΗ

SNR estimation, band-power, audio processing, image energy normalization.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν ένα σήμα έχει 75% ενέργειας στα 0-100 Hz, τι σημαίνει αυτό;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σήμα χαμηλόσυχο (low-pass): 75% της ισχύος κάτω από 100 Hz.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Energy = $\sum | \cdot |^2$. Dimensionless όταν x[n] dimensionless.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Πρόσεχε το παράγοντα 1/N = μην το ξεχάσεις.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ49 ενότητα. Μετά σ51 Parseval verify.

Parseval: Θεώρημα διατήρησης ενέργειας — αριθμητική επαλήθευση

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Επαληθεύουμε αριθμητικά το Parseval theorem για ένα συγκεκριμένο σήμα. Υπολογίζουμε την ενέργεια στον χρόνο: $E_t = \sum |x[n]|^2$. Υπολογίζουμε την ενέργεια στη συχνότητα: $E_f = (1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$. Συγκρίνουμε και τα δύο πρέπει να συμπίπτουν μέχρι σφάλμα στρογγύλευσης (~1e-12 σχετικό). Στο plot βλέπεις (αριστερά) το σήμα στον χρόνο με το cumulative $|x[n]|^2$, και (δεξιά) το φάσμα $|X[k]|^2/N$ με το ίδιο cumulative — τα δύο cumulative φτάνουν στην ίδια τελική τιμή. Αυτό είναι το θεώρημα Parseval σε ενέργεια.

$$|\sum |x[n]|^2 - (1/N) \cdot \sum |X[k]|^2| < 1e-12 \quad (\text{αριθμητική ισότητα μέχρι σφάλμα στρογγύλευσης})$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Σήμα: 2 ημίτονα (50 + 120 Hz). Υπολογίζουμε ενέργεια με 2 τρόπους.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Όταν υπολογίσουμε τη συνολική ενέργεια χρόνου = ;

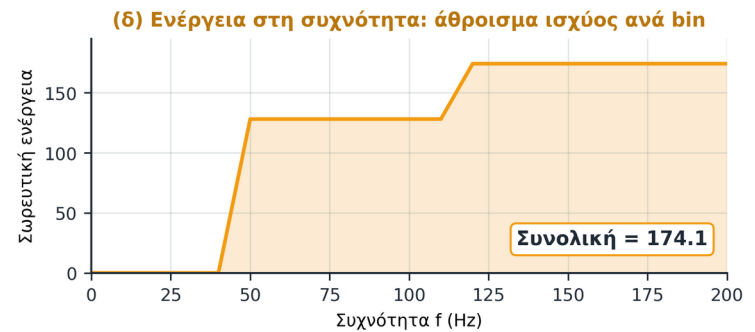
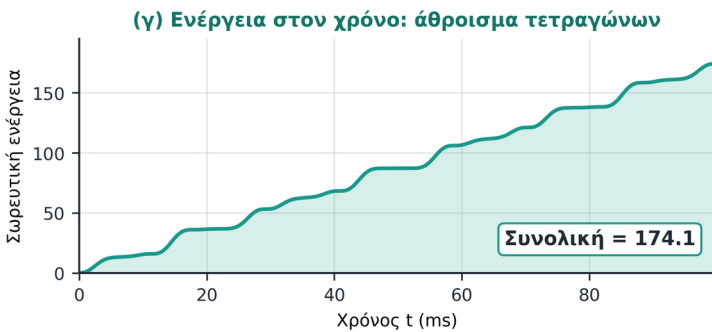
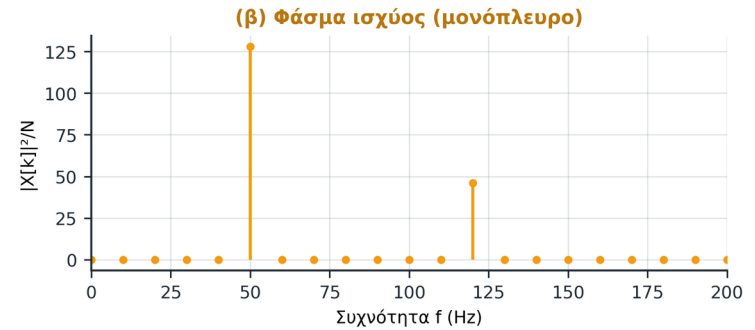
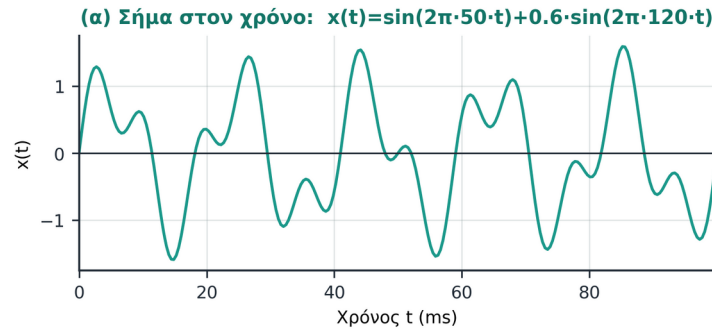
ΕΞΗΓΗΣΗ

Είναι θεώρημα — η αριθμητική ταύτιση επιβεβαιώνεται μέχρι σφάλμα στρογγύλευσης. Η FFT διατηρεί ενέργεια εξ ορισμού.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Με αυτή την ισότητα μπορώ να υπολογίσω ποσοστό ενέργειας σε ζώνη συχνοτήτων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ναι: ποσοστό = $\sum_{\text{ζώνη}} |X[k]|^2 / \sum_{\text{όλα}} |X[k]|^2$ (Parseval).



ΘΕΩΡΗΜΑ: $\sum |x[n]|^2 = (1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$ — η DFT διατηρεί ενέργεια (factor 1/N). Η FFT = ο γρήγορος αλγόριθμος της ΙΔΙΑΣ DFT.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Αξονες: t [ms], f [Hz]. Ενέργεια σε sum-of-squares.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Όλη η FFT-θεωρία βασίζεται σε αυτό. Είναι θεμελιώδες

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ50 Parseval intro. Μετά σ52 ένας νόμος + Plancherel.

Ένας νόμος, όλες οι μορφές (FS · CTFT · DFT) + Plancherel

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Η αθροιστική ενέργεια στον χρόνο ($\sum |x[n]|^2$) και στη συχνότητα ($(1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$) φτάνουν στο ΙΔΙΟ σύνολο. Αυτό είναι το αναλλοίωτο Parseval/Plancherel — ισχύει σε FS, CTFT και DFT, με διαφορετική μόνο κανονικοποίηση.

FS: $\sum |c_k|^2$

CTFT (Hz): $\int |X(f)|^2 df$

DFT: $(1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Σήμα 2 τόνων. Στόχος: ένας νόμος ενέργειας για όλες τις μορφές Fourier.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αλλάζει το ΣΥΝΟΛΟ της ενέργειας αν το μετρήσω στη συχνότητα;

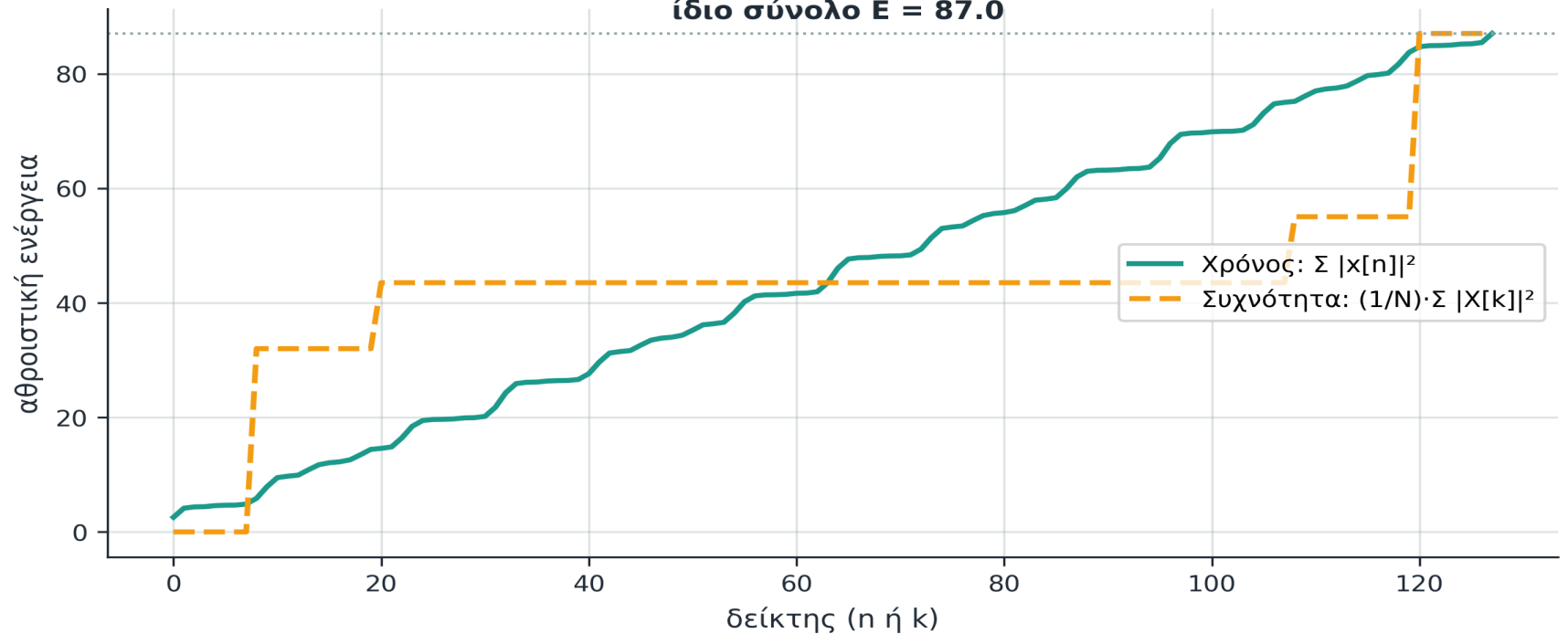
ΕΞΗΓΗΣΗ

FS: $P = \sum |c_k|^2$. CTFT (Plancherel): $\int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$. DFT: $\sum |x[n]|^2 = (1/N) \cdot \sum |X[k]|^2$. Ίδια ιδέα — η ενέργεια διατηρείται· αλλάζει μόνο ο παράγοντας κανονικοποίησης (1/N στη DFT, df στη CTFT).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

DFT N=4, X=[4,0,0,0]. Ενέργεια χρόνου;
✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $(1/4) \cdot 16 = 4 \rightarrow x[n]=1$ σταθερό, $\sum |x|^2=4$. ✓

Plancherel: η ενέργεια είναι αναλλοίωτη (ίδιο σύνολο σε χρόνο & συχνότητα) ίδιο σύνολο E = 87.0



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Άξονας: δείκτης (n ή k). Υ: αθροιστική ενέργεια. Δύο καμπύλες → ίδιο τελικό ύψος.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Πρόσεχε το 1/N στη DFT (αλλιώς xN λάθος). Plancherel = γενίκευση του Parseval σε όλο το φάσμα.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ51 Parseval verify. Μετά σ53 ενέργεια finite record.

Τι βλέπουμε: η ΙΔΙΑ ενέργεια υπολογισμένη με 3 τρόπους (χρόνος, DFT, FS) — ταυτίζονται.

ΕΚΦΩΝΗΣΗ: 2 σύμφωνοι τόνοι 64 & 128 Hz, πλάτη 1.0 & 0.7, $F_s=N=1024$. Δείξε ότι η ενέργεια είναι ίδια σε χρόνο, DFT και FS.

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

$x(t)=\sin(2\pi\cdot 64t)+0.7\cdot\sin(2\pi\cdot 128t)$, $F_s=N=1024$ (σύμφωνο). Βρες E με 3 τρόπους.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Θα ταυτιστούν χρόνος, DFT ($1/N$) και FS ($(N/2)\cdot\Sigma A^2$); Ποια κανονικοποίηση θέλει καθένα;

ΕΞΗΓΗΣΗ

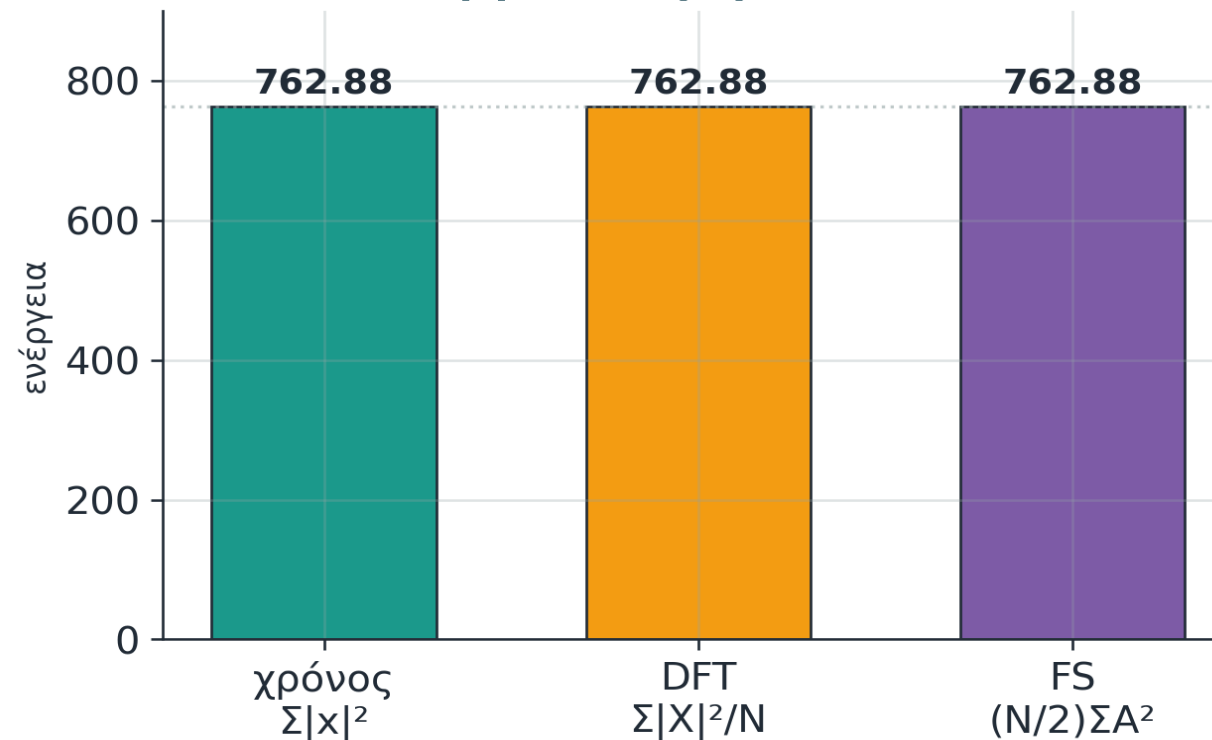
FS \rightarrow ΜΕΣΗ ΙΣΧΥΣ $P=(1^2+0.7^2)/2=0.745$. Ενέργεια record $E=N\cdot P=1024\cdot 0.745=762.88$. Ίδιο με $E_{\text{time}}=\Sigma |x[n]|^2=\text{sum}(\text{abs}(x).^2)$ και $E_{\text{fft}}=\Sigma |X[k]|^2/N=\text{sum}(\text{abs}(X).^2)/N$.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πρόσθεσε $0.5\cdot\sin(2\pi\cdot 200t)$: πόσο ανεβαίνει η ενέργεια;
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $+(N/2)\cdot 0.5^2 = +128 \rightarrow 890.88$.

$$E_{\text{time}} = E_{\text{fft}} = E_{\text{fs}} = 762.88 \quad (= (1^2 + 0.7^2)/2 \cdot 1024)$$

Ίδια ενέργεια, 3 δρόμοι — E = 762.88



```
% 3 τρόποι, ίδια E
x = sin(2*pi*64*t)
  +0.7*sin(2*pi*128*t);
% (1) χρόνος
E_t=sum(abs(x).^2);
% (2) DFT
X=fft(x);
E_f=sum(abs(X).^2)/N;
% (3) FS (N/2)ΣA²
A=[1 0.7];
E_fs=(N/2)*sum(A.^2);
% = 762.88 και τα 3
```

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

3 ράβδοι = 3 δρόμοι. Ίδιο ύψος \Rightarrow ίδια ενέργεια (762.88).

ΠΡΟΣΕΧΩ

Κάθε domain έχει factor: FS=1, DFT=1/N· σε Hz η CTFT ΧΩΡΙΣ factor ($1/2\pi$ μόνο σε ω). Μη μπερδέψεις τις κανονικοποιήσεις.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ52 ένας νόμος + Plancherel. Μετά σ54 ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4 — σ54-σ59

Φασματική Διαρροή & Παραθυροποίηση

Διαρροή φάσματος · παράθυρα · συμβιβασμοί · απώλεια κορυφής

Η αλυσίδα: σύμφωνη δειγματοληψία → διαρροή → παράθυρο

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Στην ΕΝΟΤΗΤΑ 2 είδαμε ΤΙ είναι η διαρροή και ΓΙΑΤΙ συμβαίνει (μη-σύμφωνη δειγματοληψία). Εδώ η ΕΝΟΤΗΤΑ 4 απαντά: πώς τη ΔΙΟΡΘΩΝΟΥΜΕ — με παράθυρα (windows) και τις σχετικές λύσεις.

Η αλυσίδα: σύμφωνη δειγματοληψία → διαρροή → παράθυρο



ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

$J = f_0 \cdot N / F_s$ (ακέραιο=σύμφωνο). SL=πλευρικοί λοβοί [dB]. Λοβός σε bins.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Δεν υπάρχει «καλύτερο» παράθυρο — μόνο συμβιβασμός κύριου λοβού ↔ πλευρικών για το συγκεκριμένο πρόβλημά.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ54 ενότητα. Μετά σ56 παράθυρα: γιατί.

Παράθυρα (windows) — γιατί τα χρειαζόμαστε

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

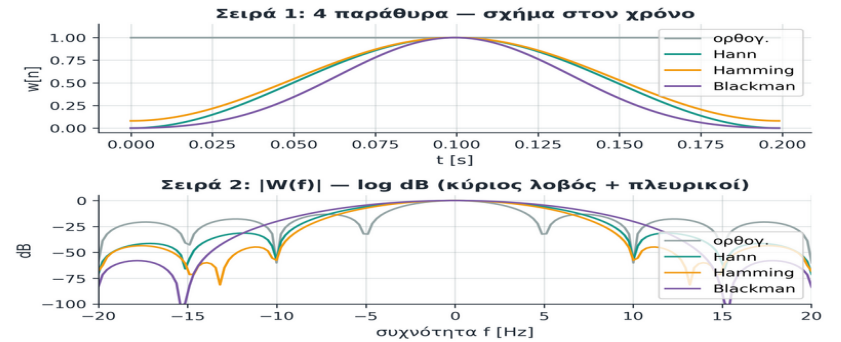
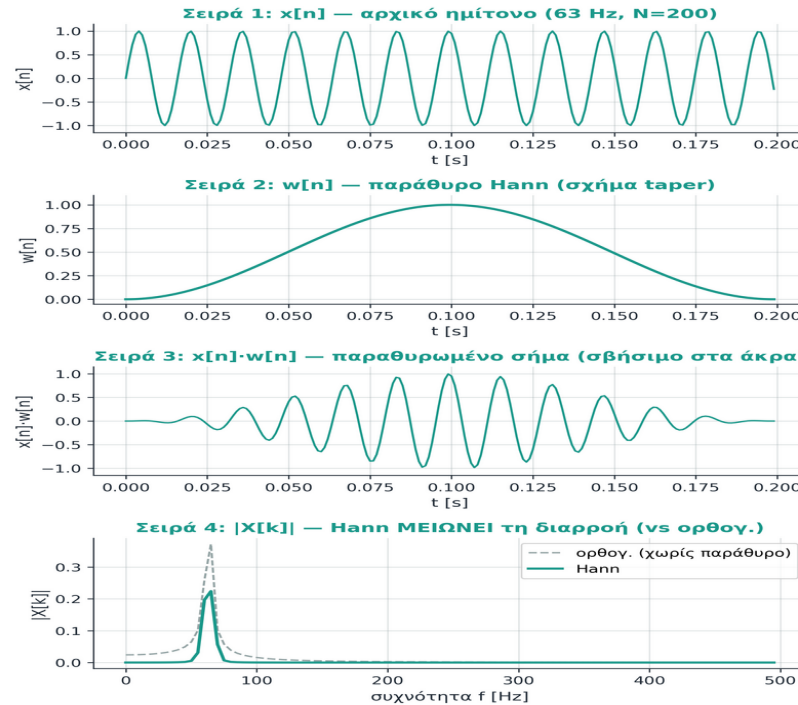
Τι βλέπουμε: όταν το σήμα ΔΕΝ χωράει σε ακέραιους κύκλους στο record (μη-ακέραιο), το ορθογώνιο «κόψιμο» δημιουργεί απότομα άκρα → φασματική διαρροή: τα πλευρικά του sinc απλώνουν ενέργεια σε όλες τις θυρίδες. Ένα παράθυρο $w[n]$ πολλαπλασιάζει το σήμα στον χρόνο ώστε να σβήνει ομαλά στα άκρα (fade-in/fade-out) → πολύ χαμηλότεροι πλευρικοί λοβοί, λιγότερη διαρροή. Το κόστος: ο κύριος λοβός πλαταίνει → χειρότερη διακριτική ικανότητα συχνότητας. Στη συχνότητα ισοδυναμεί με συνέλιξη $X_w = X * W$. Το ορθογώνιο (κανένα παράθυρο) έχει τον στενότερο λοβό αλλά τους ψηλότερους πλευρικούς (-13 dB).

$$x_w[n] = x[n] \cdot w[n] \quad \leftrightarrow \quad X_w(f) = X(f) * W(f)$$

ΓΙΑΤΙ $\times 1/G_c$;

Το παράθυρο $w[n]$ έχει μέση τιμή $G_c = \text{mean}(w) < 1 \rightarrow$ ΣΒΗΝΕΙ το σήμα, άρα το peak πέφτει κατά G_c . Διόρθωση: πολλαπλασίασε το φάσμα με $1/G_c$ ώστε ένας on-bin τόνος να ξαναδείχνει peak \approx πραγματικό πλάτος.

G_c : $\text{rect } 1.00 \cdot \text{Hann } 0.50 \cdot \text{Hamming } 0.54 \cdot \text{Blackman } 0.42$



| Παράθυρο | G_c | Κύριος -3dB | Peak πλευρ. |
|----------|-------|----------------------------|-------------|
| Ορθογ. | 1.00 | $\sim 0.89 \cdot \Delta f$ | -13 dB |
| Hann | 0.50 | $\sim 1.44 \cdot \Delta f$ | -32 dB |
| Hamming | 0.54 | $\sim 1.30 \cdot \Delta f$ | -43 dB |
| Blackman | 0.42 | $\sim 1.68 \cdot \Delta f$ | -58 dB |

Συμβιβασμός: στενός κύριος λοβός \leftrightarrow ψηλοί πλευρικοί λοβοί

Επιλογή παραθύρου = ποιος συμβιβασμός ταιριάζει στο πρόβλημα

$G_c = \text{mean}(w)$ = coherent gain: μέσος όρος του παραθύρου. Το παράθυρο μειώνει το πλάτος \rightarrow διορθώνουμε πολλαπλασιάζοντας $\times 1/G_c$ ώστε για on-bin τόνο το peak ~ 1.0 (off-bin παραμένει scalloping loss).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Χρόνος: $w[n] \in [0,1]$. Συχνότητα: $|W(f)|$ σε dB σχετικό προς peak.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Μετά από Hann/Hamming/Blackman: peak amplitude $\div G_c$.
Χρειάζεται $\times 1/G_c$ για σωστές μετρήσεις.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ55 η αλυσίδα \rightarrow παράθυρα. Μετά σ57 Hann/Hamming/Blackman.

Hann / Hamming / Blackman — σύγκριση + Octave

W07

x[n]

X[k]

window

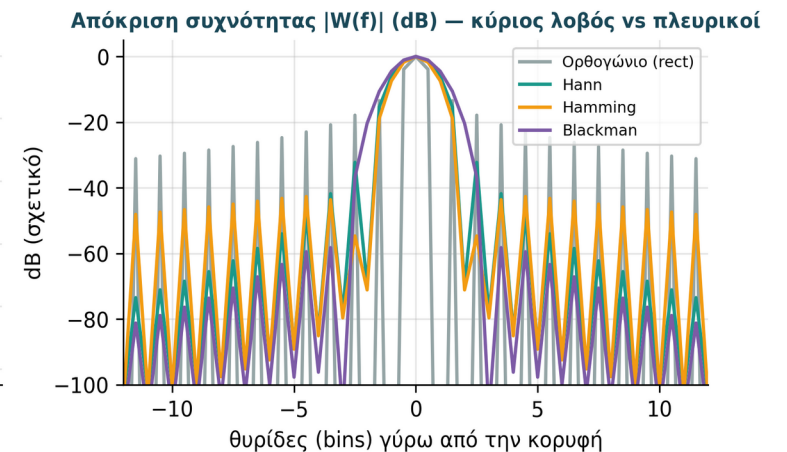
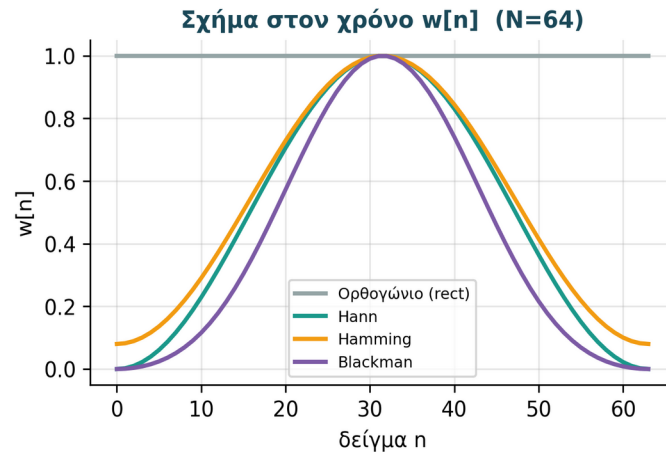
PSD

W09

Τι βλέπουμε: και τα τρία παράθυρα μειώνουν τη διαρροή σε σχέση με το ορθογώνιο, αλλά διαφέρουν στο tradeoff κύριου λοβού / πλευρικών. Hann και Hamming έχουν ίδιο πλάτος λοβού (4 bins), όμως το Hamming ρίχνει τον 1ο πλευρικό χαμηλότερα. Το Blackman έχει τους χαμηλότερους πλευρικούς (-58 dB) με κόστος πλατύτερο λοβό (6 bins → χειρότερη διάκριση). Το $\times 1/G_c$ διορθώνει το gain για on-bin τόνο· ΔΕΝ εξαλείφει το σφάλμα κυματισμού παραθύρου όταν η f πέφτει μεταξύ bins.

```
% Hann/Hamming/Blackman - απόκριση |W(f)|
pkg load signal; Fs=1024; N=1024; n=0:N-1;
x = sin(2*pi*100.3*n/Fs); % off-bin τόνος
W = {ones(1,N), hann(N)', hamming(N)', blackman(N)'};
nm = {'rect', 'Hann', 'Hamming', 'Blackman'};
hold on;
for k = 1:numel(W)
    w = W{k}; Gc = mean(w); % κέρδος ακεραίου
    Wf = abs(fft(w)); Wf = Wf/max(Wf);
    WdB = 20*log10(fftshift(Wf)+eps);
    plot(-N/2:N/2-1, WdB, 'DisplayName', nm{k});
end
xlim([-15 15]); ylim([-80 5]); legend();
% N=64: rect -13/1.0 Hann -31/.5
%      Hamm -43/.54 Black -58/.42
```

| Παράθυρο | w[n] (n = 0...N-1) | Gc=mean(w) | κύριος λοβός | 1ος πλευρικός | scalloping |
|----------|---|------------|--------------|---------------|------------|
| rect | 1 | 1.00 | ~2 bins | -13 dB | 3.92 dB |
| Hann | $0.5 (1 - \cos \frac{2\pi n}{N-1}) = \sin^2 \frac{\pi n}{N-1}$ | 0.50 | 4 bins | -31 dB | 1.42 dB |
| Hamming | $0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$ | 0.54 | 4 bins | -43 dB | 1.78 dB |
| Blackman | $0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}$ | 0.42 | 6 bins | -58 dB | 1.10 dB |



numel(W) = πλήθος στοιχείων του cell W (εδώ 4 παράθυρα) → το for τρέχει 4 φορές, ένα ανά παράθυρο.
Gc = mean(w) = coherent gain: μέσος όρος του παραθύρου. Το παράθυρο μειώνει το πλάτος → διορθώνουμε πολλαπλασιάζοντας $\times 1/G_c$ ώστε για on-bin τόνο το peak ~1.0 (off-bin παραμένει σφάλμα κυματισμού παραθύρου).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Αριστερά σχήμα $w[n] \in [0,1]$ · δεξιά $|W(f)|$ σε dB σχετικό προς peak.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Διάλεξε παράθυρο με βάση το tradeoff· πάντα διόρθωση πλάτους $\times 1/G_c$.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ56 παράθυρα: γιατί. Μετά σ58 απώλεια κορυφής.

Απώλεια κορυφής: το peak πέφτει όταν η f είναι μεταξύ bins

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: όταν η πραγματική συχνότητα δεν πέφτει ακριβώς πάνω σε θυρίδα (bin), η ενέργεια μοιράζεται σε δύο γειτονικές θυρίδες και το παρατηρούμενο peak είναι ΧΑΜΗΛΟΤΕΡΟ από το πραγματικό, αυτή είναι η απώλεια κορυφής. Το μέγεθος της πτώσης εξαρτάται από το παράθυρο: με ορθογώνιο (rect) φτάνει έως 3.92 dB, ενώ με Hann περιορίζεται σε μόλις 1.42 dB. Στο plot σαρώνουμε τη f_0 μεταξύ δύο θυρίδων και βλέπουμε το peak να ανεβοκατεβαίνει. Γι' αυτό, για ακριβή μέτρηση πλάτους, χρησιμοποιούμε παράθυρο με χαμηλή απώλεια κορυφής ή πυκνότερη απόσταση bins .

$$\text{rect: } \text{Απώλεια κορυφής} = 20 \cdot \log_{10}(\text{rect peak}/\text{rect min}) \approx 3.92 \text{ dB} \quad ; \quad \text{hann: } \approx 1.42 \text{ dB}$$

Scalloping loss: peak πέφτει όταν f είναι μεταξύ bins
rect: 3.9 dB scallop · hann: 1.4 dB scallop

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Sweep f_0 από 63 έως 67 Hz. Παρατηρούμενη κορυφή vs f_0 .

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

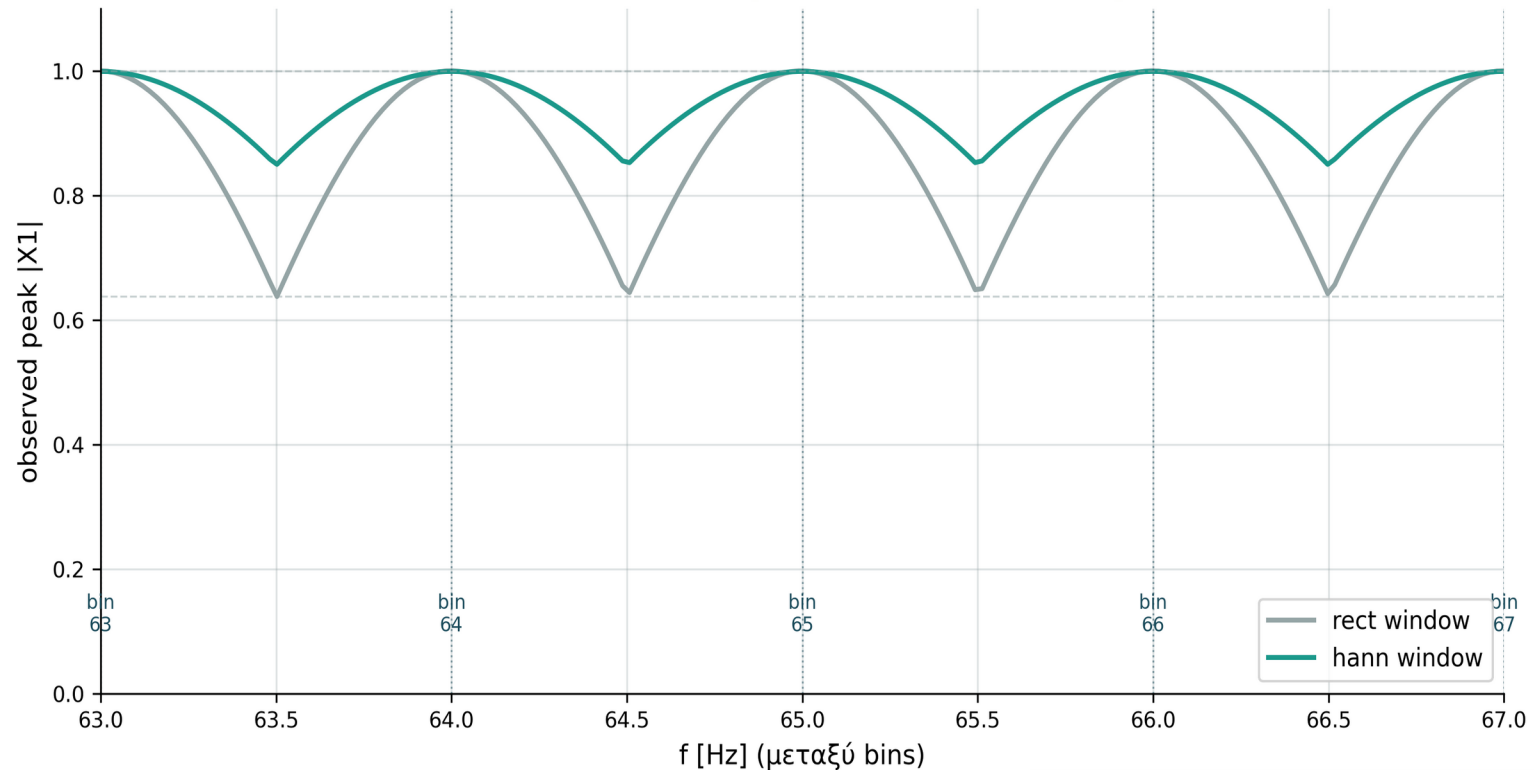
Πότε το peak είναι μέγιστο; (Όταν $f_0 = \text{bin center}$)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Μεταξύ bins η ενέργεια μοιράζεται σε 2 bins → κανένα δεν έχει το πλήρες peak. καλύτερο πλάτος, χειρότερη συχνотική διάκριση.)

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πώς αποφεύγεις την απώλεια πλάτους; ΛΥΣΕΙΣ: (1) Σύμφωνη δειγ. → f σε bin (μηδενική απώλεια). (2) Flat-top → ακριβές πλάτος (ευρύς λοβός). (3) Zero-pad → εκτίμηση ΘΕΣΗΣ peak, ΟΧΙ πλάτος.



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

X: f σε Hz με fine sweep. Y: παρατηρούμενο peak.

ΠΡΟΣΕΧΩ

APA — η αλυσίδα: μη-σύμφωνη δειγματοληψία → διαρροή → παράθυρο (χαμηλώνει sidelobes) → scalloping/απώλεια κορυφής → zero-pad ή flat-top για ακριβές πλάτος.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ57 Hann/Hamming/Blackman. Μετά σ59 λύσεις διαρροής.

Τρεις λύσεις στη διαρροή: coherent · flat-top · zero-pad

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: Τρεις απαντήσεις στη διαρροή/απώλεια κορυφής. (1) Σύμφωνη δειγματοληψία: f σε bin \rightarrow καθαρό peak. (2) Flat-top window: επίπεδη κορυφή \rightarrow σωστό ΠΛΑΤΟΣ ακόμη κι ανάμεσα σε bins. (3) Zero-padding: πυκνότερα bins \rightarrow καλύτερη ΘΕΣΗ peak (ΟΧΙ πλάτος, ΟΧΙ διάκριση).

coherent: μηδενική απώλεια · **flat-top: amplitude accuracy** · **zero-pad: peak-location**

1) Coherent (καθαρό peak)

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Τόνος 10.5 Hz (ανάμεσα σε bins, $N=64$, $F_s=64$).
Στόχος: ανακτώ σωστό πλάτος ή/και θέση.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Ποια λύση δίνει σωστό ΠΛΑΤΟΣ και ποια σωστή ΘΕΣΗ;

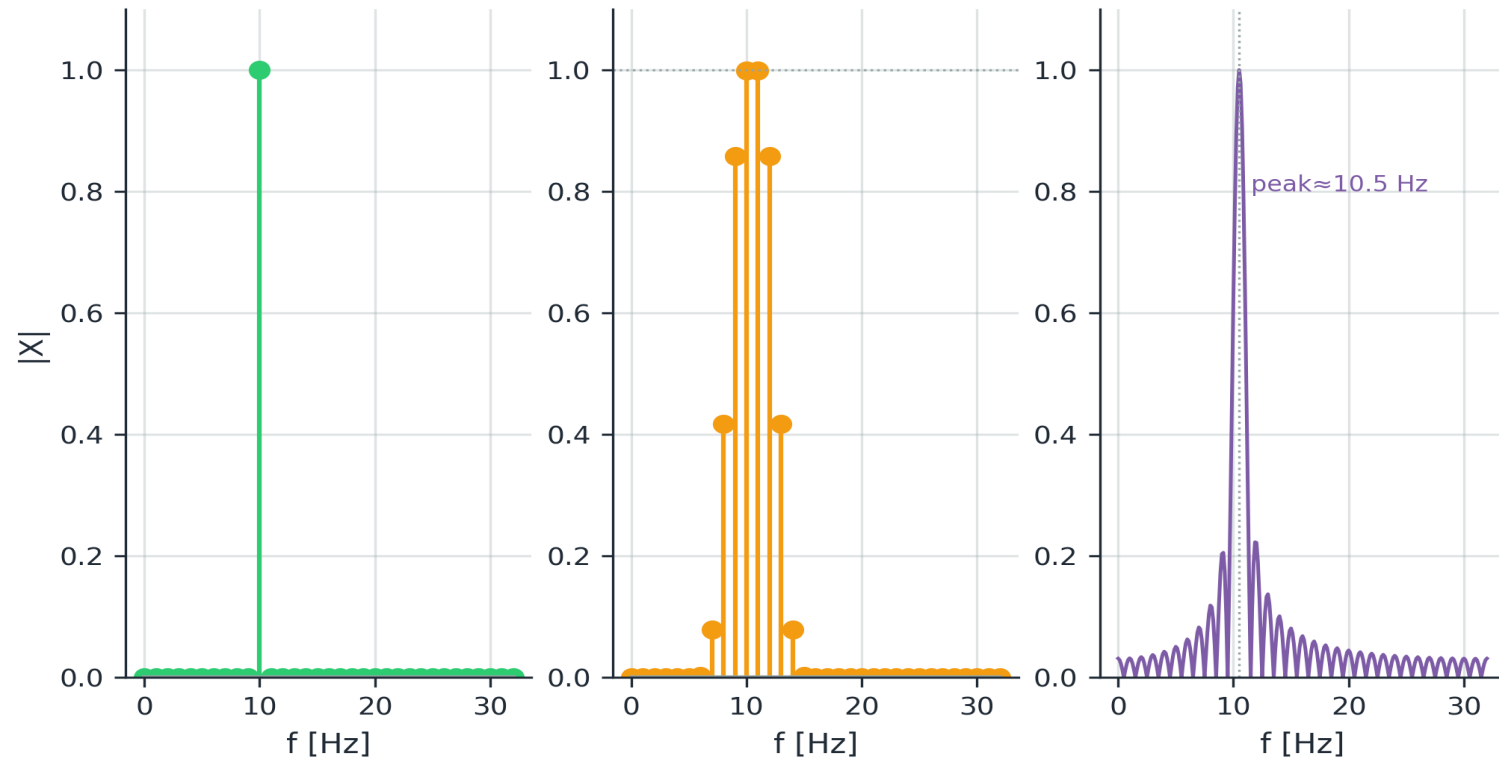
ΕΞΗΓΗΣΗ

Coherent: διάλεξε N ώστε $J=f \cdot N / F_s$ ακέραιο \rightarrow peak σε bin. Flat-top: επίπεδη κορυφή \rightarrow σωστό ΠΛΑΤΟΣ. Zero-rad: παρεμβολή \rightarrow σωστή ΘΕΣΗ peak (όχι νέα πληροφορία).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Θέλω ακριβές πλάτος ενός τόνου άγνωστης f . Ποια λύση;

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: flat-top window (σχεδιασμένο για amplitude accuracy).



ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

f [Hz]. $|X|$ κανονικοποιημένο. Zero-rad: συνεχής καμπύλη (πυκνά bins).

ΠΡΟΣΕΧΩ

Zero-padding ΔΕΝ βελτιώνει τη διακριτική ικανότητα ($\Delta f = F_s / N$ αμετάβλητο). Flat-top ρίχνει τη διάκριση για χάρη του πλάτους.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ58 απώλεια κορυφής. Μετά σ60 ΕΝΟΤΗΤΑ 5.

ΕΝΟΤΗΤΑ 5 — σ60-σ66

Ανακεφαλαίωση και Σύνοψη

Ενοποίηση 3 μεθόδων RC · σύνοψη · γέφυρα προς W09

Capstone — RC ανακεφαλαίωση: 3 μέθοδοι (κόκκινο νήμα)

W07

x[n]

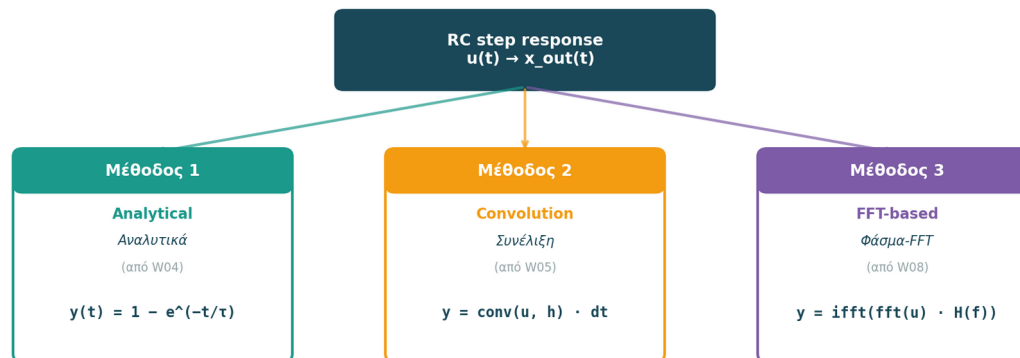
x[k]

window

PSD

W09

Εκφώνηση: το ΙΔΙΟ RC κύκλωμα από τις W04/W05, με $\tau=10$ ms και βηματική είσοδο $u(t)=1$. Δειγματοληψία $F_s=10$ kHz, $N=500$. Θα λύσουμε την ίδια έξοδο με 3 «τρόπους»: αναλυτικά (W04), με συνέλιξη/αναδρομή (W05) και με FFT (W08). Αν η θεωρία είναι συνεπής, και οι 3 καμπύλες πρέπει να συμπέσουν — η επαλήθευση είναι ότι $|M1-M2|$, $|M1-M3| \approx 0$ (σφάλμα στρογγυλοποίησης).



3 μέθοδοι · ΤΟ ΙΔΙΟ αποτέλεσμα · κάθε μέθοδος υπολογίζει την ίδια συνάρτηση μέσω διαφορετικού δρόμου

```
% Ex.5 — RC: 3 μέθοδοι, ΤΟ ΙΔΙΟ αποτέλεσμα
Fs = 10000; tau = 0.01; dt = 1/Fs;
N = 500; t = (0:N-1)*dt;
u = ones(1, N); % βηματική είσοδος
a = exp(-dt/tau); % πόλος του DT RC

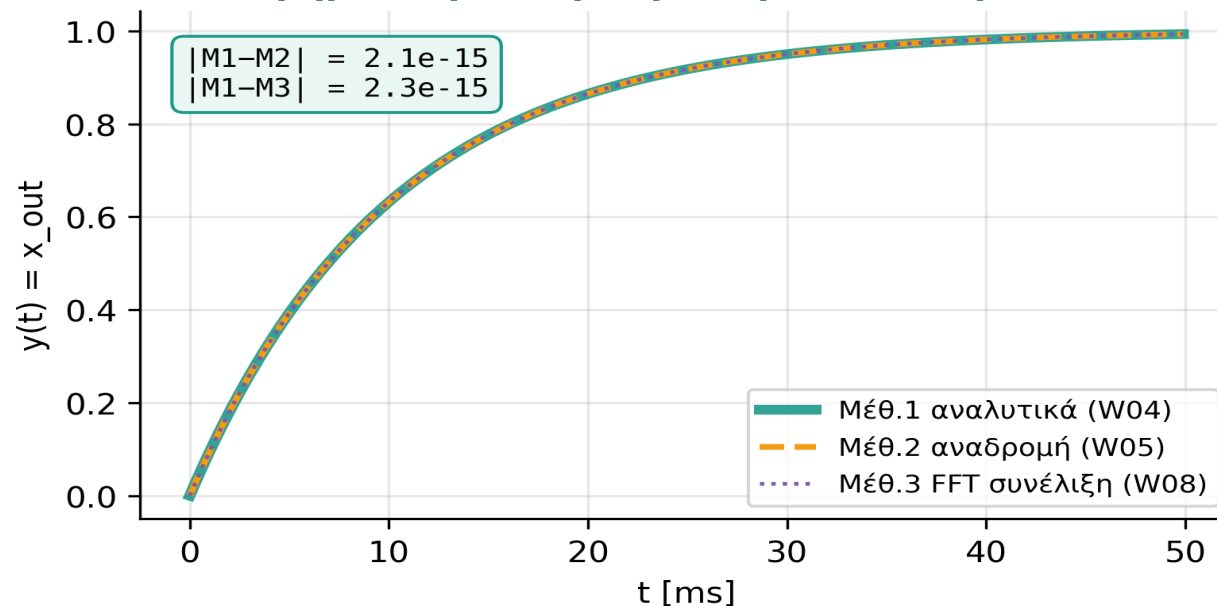
% Μέθοδος 1 — αναλυτικά (W04)
y_an = 1 - exp(-t/tau);

% Μέθοδος 2 — αναδρομή 1ης τάξης (W05)
% y[n] = a*y[n-1] + (1-a)*u[n-1] (leaky integrator)
y_rec = zeros(1, N);
for n = 2:N
    y_rec(n) = a*y_rec(n-1) + (1-a)*u(n-1);
end

% Μέθοδος 3 — FFT-based (W08)
% ίδια κρουστική h[n] = (1-a)*a^(n-1), γραμμική συνέλιξη
h = [0, (1-a)*a.^(0:N-2)];
L = 2*N - 1;
Y = ifft(fft(u,L) .* fft(h,L));
y_fft = real(Y(1:N));

% Επαλήθευση: και οι 3 ταυτίζονται
printf(' |M1-M2| max = %.2e\n', max(abs(y_an - y_rec)));
printf(' |M1-M3| max = %.2e\n', max(abs(y_an - y_fft)));
```

RC βηματική απόκριση — 3 μέθοδοι συμπίπτουν



✓ Και οι 3 μέθοδοι ταυτίζονται (σφάλμα $\sim 1e-15$) — κλείνει το κόκκινο νήμα.

Όλοι οι κύριοι τύποι της W08 σε μία διαφάνεια αναφοράς. Color-coded ανά οικογένεια.

| | | | |
|-------------------------------|--|---|---|
| Sampling | $x[n] = x(n \cdot T_s), \quad T_s = 1/F_s$ | Parseval DFT | $\sum x[n] ^2 = (1/N) \cdot \sum X[k] ^2$ |
| Nyquist | $F_s \geq 2 \cdot f_{\max} \Leftrightarrow \text{no aliasing}$ | Parseval CTFT | $\int x ^2 dt = \int X(f) ^2 df \quad (f \cdot \omega \rightarrow \times 1/2\pi)$ |
| Replicas | $X_p(f) = (1/T_s) \cdot \sum_k X(f - k \cdot F_s)$ | Band energy | $E_{\text{band}} = \sum_{\{k \in \text{band}\}} X[k] ^2 / N$ |
| Fold | $f_{\text{alias}} = F_s - (f \bmod F_s) \quad \text{if } \text{mod} > F_s/2$ | Δf resolution | $\Delta f = F_s/N = 1/T \quad (\text{record length})$ |
| DFT | $X[k] = \sum_n x[n] \cdot e^{-j \cdot 2\pi kn/N}$ | Coherent | $J = f_0 \cdot N/F_s \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{no leakage}$ |
| IFFT | $x[n] = (1/N) \cdot \sum_k X[k] \cdot e^{j \cdot 2\pi kn/N}$ | Πολλαπλασιασμός παραθύρου | $X_w(f) = X(f) * W(f)$ |
| Παράγοντας περιστροφής | $W_N^k = e^{-j \cdot 2\pi \cdot k/N}$ | One-sided | $P1[k] = 2 \cdot X[k] /N \quad (\text{AC bins only})$ |

Πορτοκαλί = FFT/IFFT · Μωβ = Parseval · Καφέ = Windowing · Τιρκουάζ = Sampling · Κόκκινο = One-sided

7 συνηθισμένα λάθη στο FFT — και πώς τα αποφεύγεις

W07

 $x[n]$ $X[k]$

window

PSD

W09

Συγκεντρωμένη λίστα με τα 7 πιο συχνά bugs στη φασματική ανάλυση και τις διορθώσεις τους.

1

Ξεχνάς /N στο fft()

Peak υπερβ. υψηλό (μόνο για ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΠΛΑΤΟΥΣ)
ΔΙΟΡΘΩΣΗ: για πλάτος $A = \text{fft}(x)/N$ (ΟΧΙ για filtering/IFFT)

2

$\times 2$ ΣΕ DC ή Nyquist

Λάθος ενέργεια σε DC, Nyquist
ΔΙΟΡΘΩΣΗ: $P1(1)$ και $P1(N/2+1)$ ΧΩΡΙΣ $\times 2$

3

Μη-ακέραιο χωρίς window

Φασματική διαρροή μειώνει πλάτος κορυφής
ΔΙΟΡΘΩΣΗ: εφάρμοσε window + $\pm Gc$

4

Παρερμηνεία $N/2+1..N-1$

"Νομίζεις" είναι θετικές συχνότητες
ΔΙΟΡΘΩΣΗ: fftshift για ΦΥΣΙΚΟ φάσμα

5

Phase χωρίς magnitude mask

Θόρυβος φάσης σε zero bins
ΔΙΟΡΘΩΣΗ: $\phi = \text{NaN}$ όπου $|X| < 0.15 \cdot \max$

6

Zero-padding για resolution

Νομίζεις ότι βελτιώνεις, ενώ δεν βελτιώνεις
ΔΙΟΡΘΩΣΗ: αύξηση T (νέα δεδομένα)

7

$\text{fft}(x)/N$ μέσα σε $\text{ifft}()$

Δίνει x/N αντί για φιλτραρισμένο σήμα (το ifft έχει ήδη $1/N$). ΔΙΟΡΘΩΣΗ: για IFFT/filtering κράτα $Y = \text{fft}(x)$ — όχι normalized $A = Y/N$.

Flowchart: από σήμα $x(t)$ σε φασματική ερμηνεία

W07

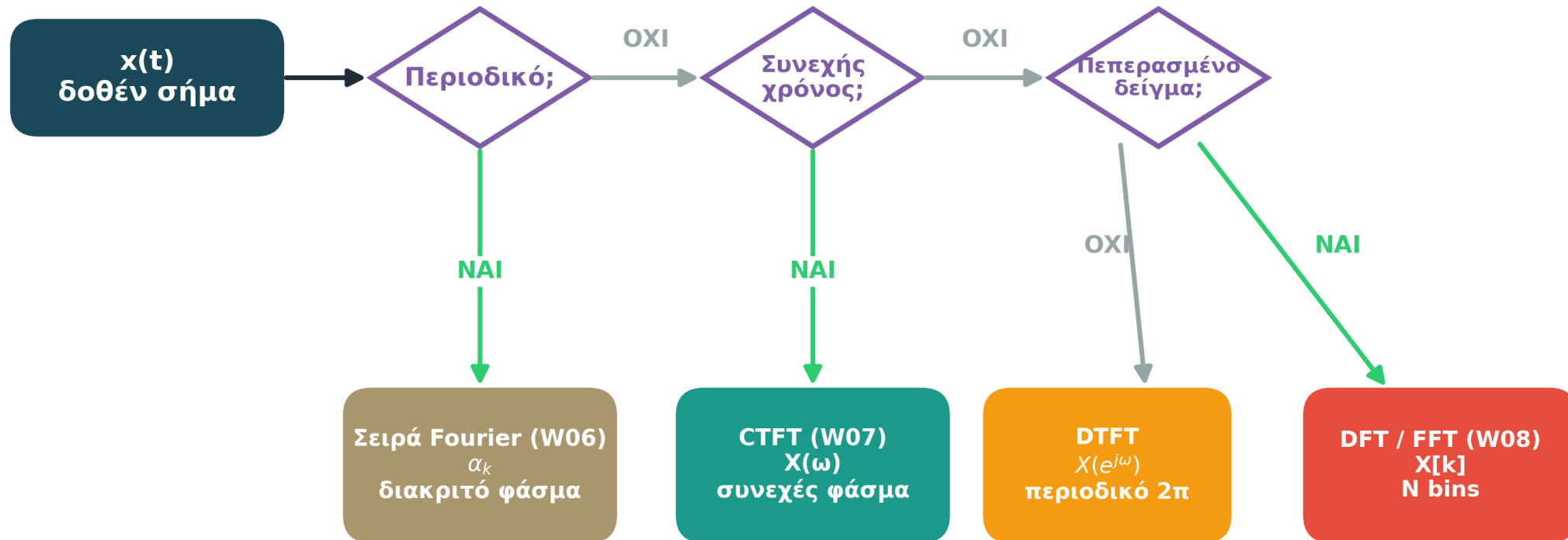
 $x[n]$ $x[k]$

window

PSD

W09

Δοθέν σήμα \rightarrow 2 ερωτήματα διάκρισης (periodic;, CT/DT;) \rightarrow το κατάλληλο εργαλείο Fourier.



Δοθέν σήμα \rightarrow 2 (έως 3) ερωτήματα διάκρισης \rightarrow το κατάλληλο εργαλείο Fourier

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Decision tree: top-down. Επιλογή από ερωτήματα.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Παίρνεις λάθος εργαλείο = λάθος αποτέλεσμα. Πρώτα ταξινόμηση, μετά FFT.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ63 7 λάθη. Μετά σ65 ESD vs PSD.

ESD vs PSD: 2 διαφορετικές "πυκνότητες"

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: ESD (Energy Spectral Density) και PSD (Power Spectral Density) είναι δύο ξεχωριστές «φασματικές πυκνότητες» για διαφορετικούς τύπους σημάτων. ESD = $|X(f)|^2$ (ενέργεια ανά Hz) — για σήματα ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ (μεμονωμένος παλμός, transient response, μικρά audio clips). PSD = $\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \cdot |X_T(f)|^2$ (ισχύς ανά Hz) — για σήματα ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΙΣΧΥΟΣ (λευκός θόρυβος, στάσιμα τυχαία σήματα, μακροχρόνια στατιστικά μετρήματα). Στο plot αριστερά βλέπεις ESD ενός παλμού (συνολική ενέργεια πεπερασμένη). Στο plot δεξιά βλέπεις PSD λευκού θορύβου (επίπεδη — ισχύς ανά Hz σταθερή). Πρακτικά: για περιοδικά/στάσιμα → PSD via Welch. Για transients → ESD.

$$\text{ESD: } |X(f)|^2 \text{ [J/Hz]} \quad ; \quad \text{PSD: } \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \cdot |X_T(f)|^2 \text{ [W/Hz]}$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

2 σήματα: pulse (ESD applies) vs noise+tone (PSD applies).

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Γιατί ένας ιδανικός (άπειρης διάρκειας) τόνος έχει άπειρη ενέργεια αλλά πεπερασμένη ισχύ;

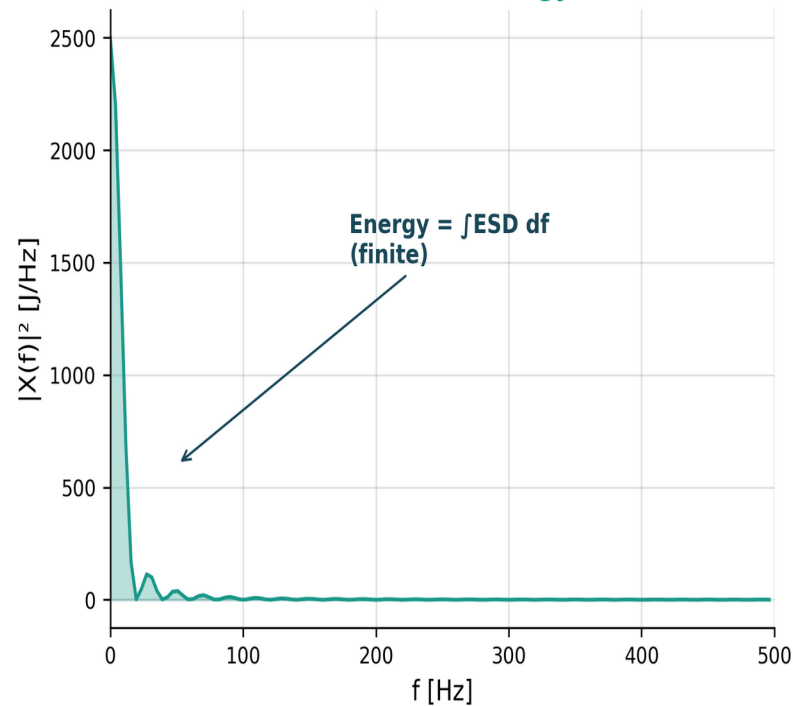
ΕΞΗΓΗΣΗ

ΚΑΝΟΝΑΣ: transient/παλμός → ESD = $|X|^2$ (J/Hz). Διαρκές/στάσιμο → PSD (W/Hz). fft() δίνει spectrum, ΟΧΙ PSD (χρειάζεται normalization/Welch, Π3).

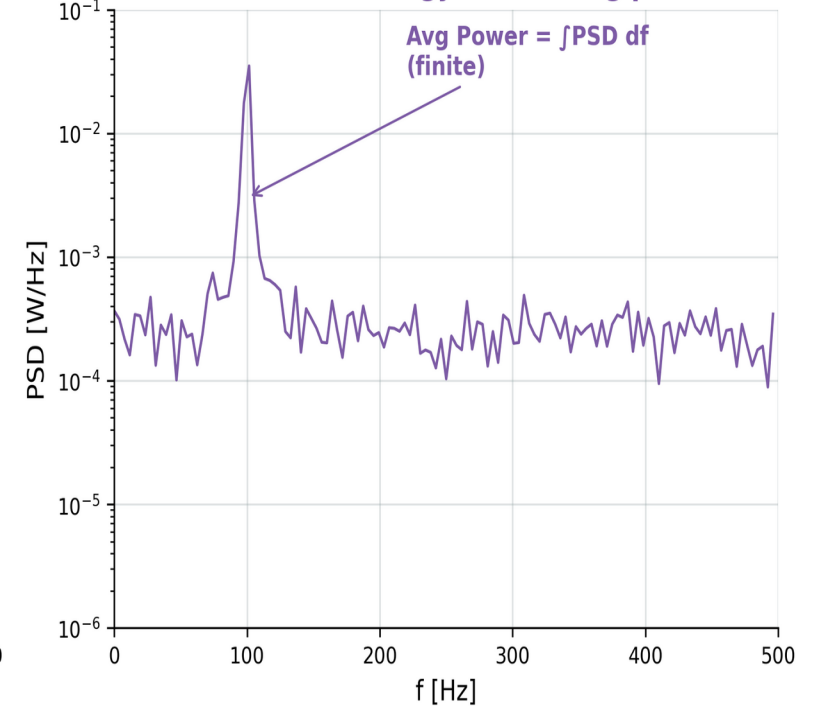
ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σήμα ηχογράφησης ομιλίας: ESD ή PSD; ΛΑΘΟΣ διχοτόμηση. Πεπερασμένο clip → ενέργεια αποσπάσματος (ESD). Στάσιμο/μακρύ → μέση ισχύς ανά Hz (PSD via Welch). ΟΧΙ «η ομιλία ΕΙΝΑΙ PSD» — η σωστή ερώτηση: ενέργεια αποσπάσματος ή μέση ισχύς/Hz;

(A) ESD: pulse (energy signal)
Finite total energy



(B) PSD: noise + tone (power signal)
Infinite total energy → finite avg power



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ESD units: J/Hz. PSD units: W/Hz.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Μη μπερδέψεις: η fft() του Octave δίνει spectrum, ΟΧΙ PSD. Welch (Π3) το υπολογίζει.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ64 flowchart. Μετά σ66 Άσκηση ESD/PSD.

Άσκηση — ESD παλμού & PSD (periodogram vs Welch)

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: (α) τετραγωνικός παλμός → ESD via fft (επαλήθευση Parseval)· (β) θόρυβος+τόνος 100 Hz → PSD: periodogram (θορυβώδες) vs Welch (ομαλό).

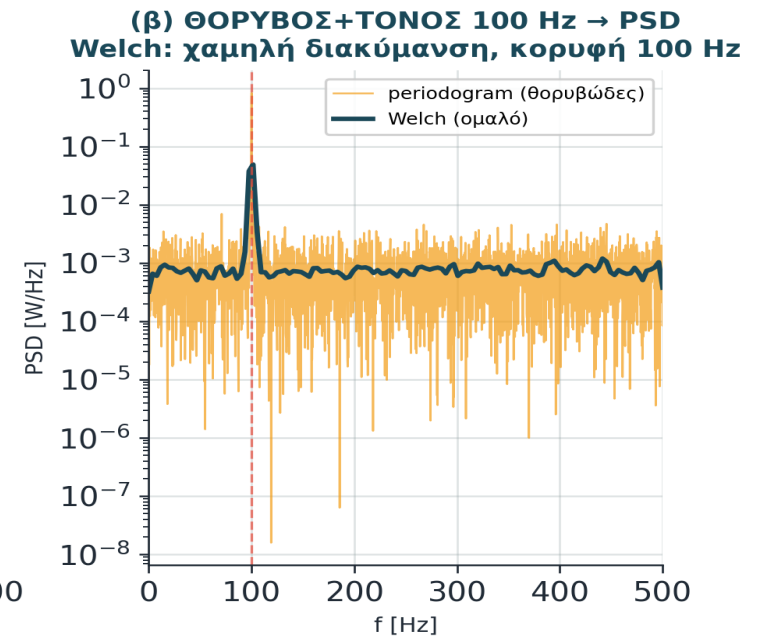
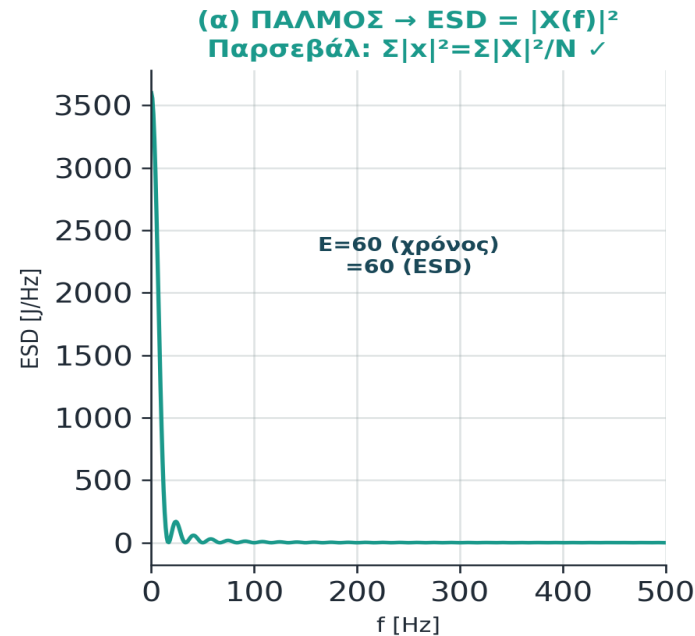
Τι κάνουμε / Πότε: transient ή πεπερασμένη ενέργεια → ESD (μέσω fft, επαλήθευση Parseval)· στάσιμο/διαρκές σήμα → PSD (ισχύς ανά συχνότητα).

Εργαλεία (ορίζονται ΠΡΙΝ τη χρήση — βλ. Παράρτημα Π3): periodogram(y,[],N,Fs) = ΕΝΑ φάσμα ισχύος $|fft|^2$ → θορυβώδες, υψηλή διακύμανση. pwelch(y,win,overlap,nfft,Fs) = μέσος όρος φασμάτων από επικαλυπτόμενα τμήματα → ομαλό, αναδεικνύει την κορυφή 100 Hz.

Γιατί Welch: μειώνει τη διακύμανση με κόστος χειρότερη ανάλυση συχνότητας (trade-off).

```
% (α) ΠΑΛΜΟΣ -> ESD (πεπ. ΕΝΕΡΓΕΙΑ)
Fs=1000; N=1000; x=zeros(1,N); x(201:260)=1;
X=fft(x); ESD=abs(X).^2;
E_t=sum(abs(x).^2); E_f=sum(ESD)/N; % Parseval
printf('ESD: E_t=%.0f E_f=%.0f\n', E_t,E_f); % 60=60

% (β) ΘΟΡΥΒΟΣ+ΤΟΝΟΣ 100 Hz -> PSD (πεπ. ΙΣΧΥΣ)
pkg load signal; randn('seed',42); Fs=1000; N=4096; t=(0:N-1)/Fs;
y=0.8*sin(2*pi*100*t) + 0.6*randn(1,N);
[Pper,f] = periodogram(y, [], N, Fs); % θορυβώδες
[Pwel,fw]= pwelch(y, hann(256), 0.5, 256, Fs); % ομαλό
% Welch = μέσος όρος τμημάτων -> χαμηλή
% διακύμανση, αναδεικνύει την κορυφή 100 Hz
```



✓ ESD παλμού (Parseval $60=60 \cdot \text{abs}(X).^2$ = energy-per-bin με DFT norm — φυσική J/Hz θέλει scaling $F_s, N, \Delta f + \text{window}$)·
 PSD: Welch ομαλό. → Παραρτήματα.

Π1 — Zero-padding: ΔΕΝ βελτιώνει ανάλυση σήματος

Σύγχυση που γίνεται συχνά: zero-padding "φαίνεται" σαν περισσότερα δεδομένα. Στην πραγματικότητα ΟΧΙ — απλά πυκνότερη δειγματοληψία του ΙΔΙΟΥ φάσματος.

Resolution $\Delta f = 1/T$ (record length) · Zero-padding αλλάζει N όχι T

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

2 ημίτονα: 100 + 100.5 Hz. Δοκιμή σε 3 σενάρια.

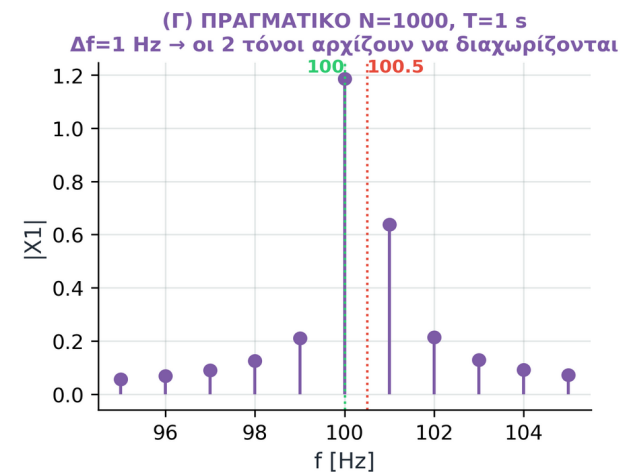
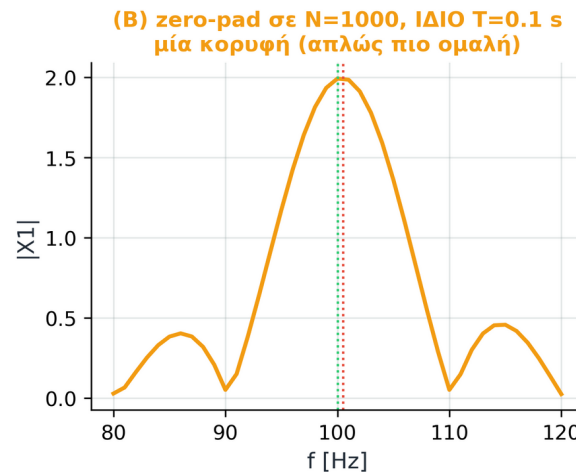
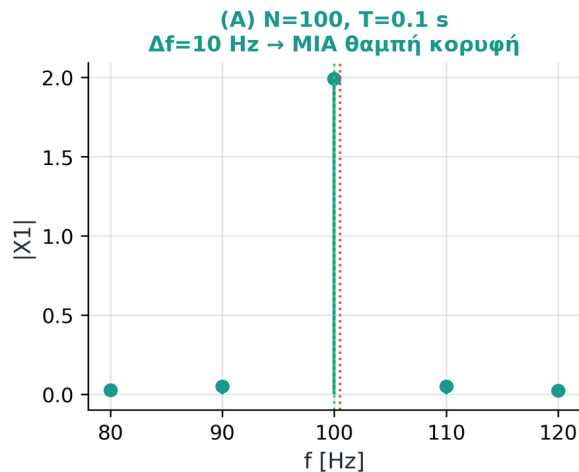
Zero-padding \neq διακριτική ικανότητα — η ανάλυση προέρχεται από το T (μήκος εγγραφής)

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Σε ποιο panel ξεχωρίζουν οι δύο τόνοι;

ΕΞΗΓΗΣΗ

(C): $T=1s$ πραγματικά \rightarrow bin spacing 1 Hz. Στα bins 100, 101 δύο διακριτά πλάτη.



ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Για να ξεχωρίσεις πλήρως, πόσο T χρειάζεσαι;

✓ **ΑΠΑΝΤΗΣΗ:** $T \geq 1/\Delta f$ (Δf = ζητούμενη διαχωριστική ικανότητα σε Hz).

ΔΙΑΒΑΣΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

3 panels: ίδιοι άξονες f [Hz]. X-axis zoomed για ορατότητα peaks.

ΠΡΟΣΕΧΩ

ΠΑΓΙΔΑ: το zero-padding ΠΑΡΕΜΒΑΛΛΕΙ (interpolates) το φάσμα, δεν ΠΡΟΣΘΕΤΕΙ πληροφορία. Νέα δεδομένα \rightarrow μεγαλύτερο T.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν σ66 Άσκηση ESD/PSD. Μετά Π2 spectrogram.

Π2 — Spectrogram: φάσμα στον χρόνο (STFT)

Όταν το σήμα δεν είναι stationary, χρειαζόμαστε φάσμα ως συνάρτηση του χρόνου (time-frequency representation). STFT = sliding FFT με window.

$$\text{STFT}[m, k] = \sum_n x[n+mH] \cdot w[n] \cdot e^{-j2\pi kn/N} \quad \cdot \quad m=\text{frame}, H=\text{hop}, N=\text{window size}$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Linear chirp 100→2000 Hz. STFT με Hann 512, hop 128.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πώς θα φαίνεται η συχνότητα να εξελίσσεται με τον χρόνο;

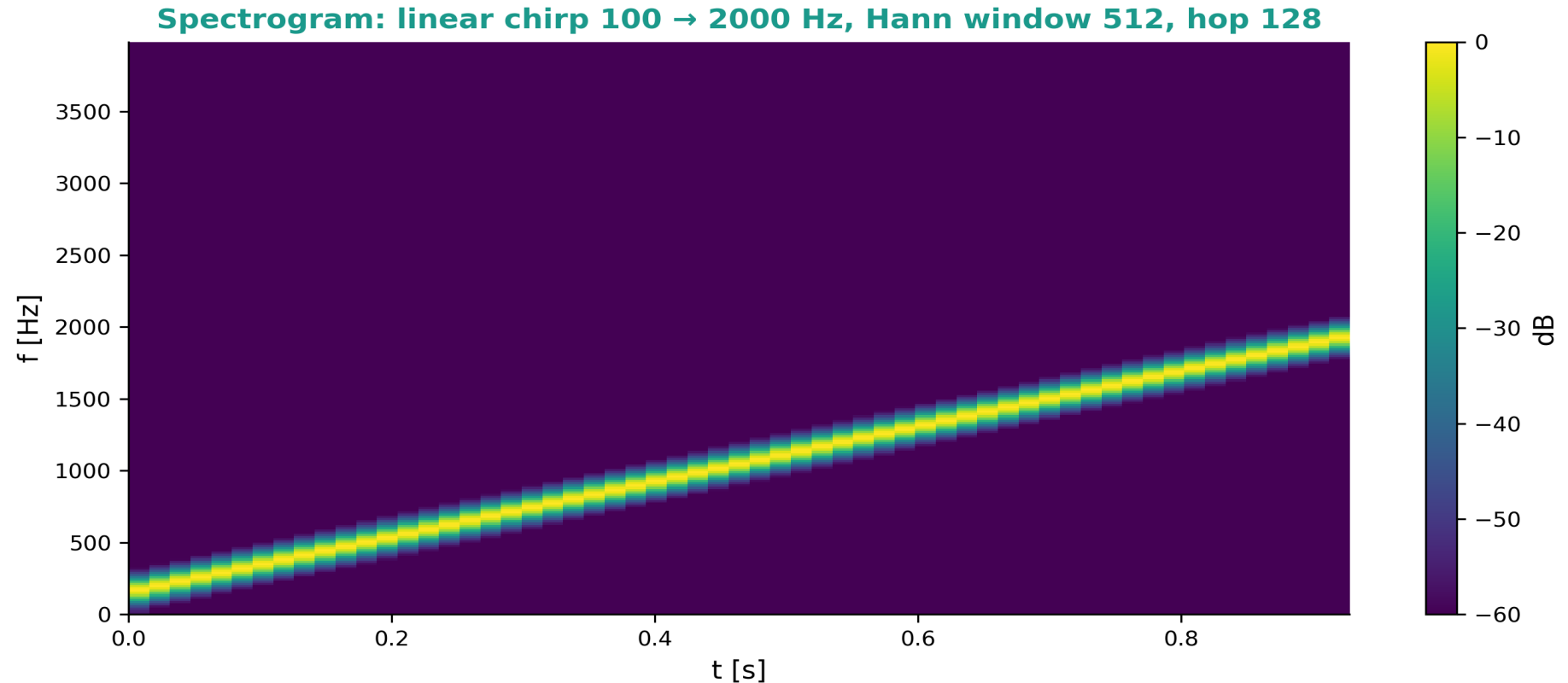
ΕΞΗΓΗΣΗ

Diagonal "γραμμή" στο spectrogram — συχνότητα αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Στο 0.5s, ποια είναι η instantaneous freq; (≈ 1050 Hz)

✓ ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ≈ 1050 Hz (στιγμιαία συχνότητα chirp $f(t)=f_0+k \cdot t$ στο $t=0.5$ s).



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

X: t [s]. Y: f [Hz]. Colorscale: $|X|^2$ σε dB σχετικό προς max.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Window size = time-frequency trade-off. Μικρό w → καλό time res.
Μεγάλο w → καλό freq res.

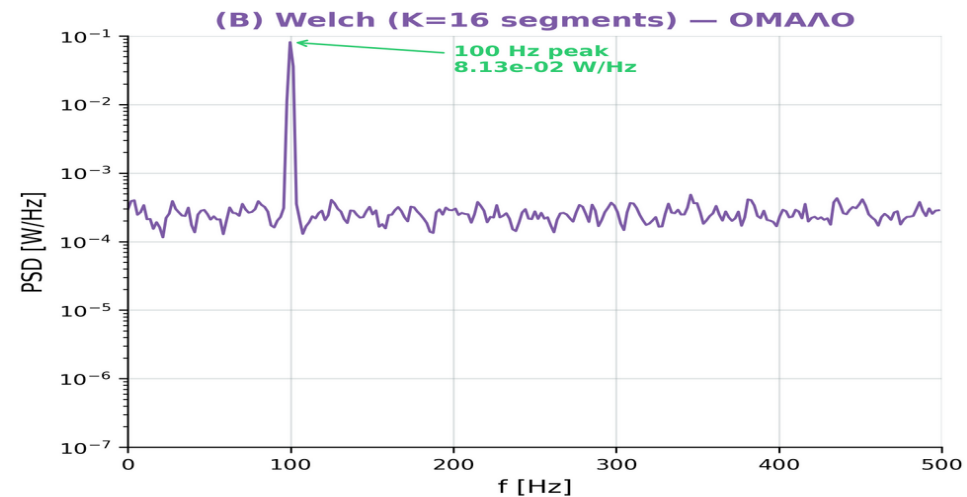
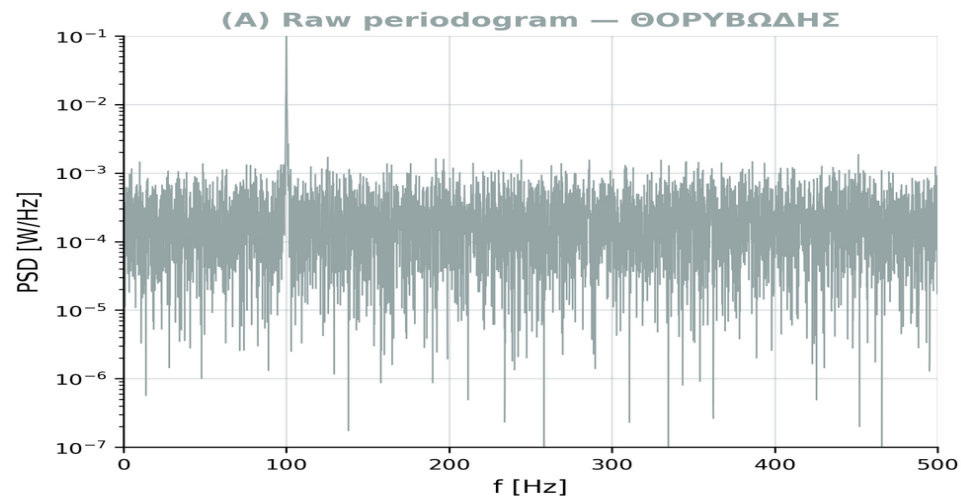
ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν Π1 zero-padding. Μετά Π3 PSD/Welch.

Π3 — PSD via Welch method (averaged periodograms)

Τι βλέπουμε: το ακατέργαστο περιοδόγραμμα έχει υψηλή διακύμανση (θορυβώδες). Η Welch σπάει το σήμα σε επικαλυπτόμενα τμήματα, παίρνει FFT κάθε τμήματος και μέσο όρο των φασμάτων ισχύος → ομαλό, χαμηλότερη διακύμανση (κόστος: χειρότερη ανάλυση). ΣΥΝΔΕΣΗ: η Welch χρησιμοποιεί τα ΙΔΙΑ παράθυρα (σ56) σε επικαλυπτόμενα segments — είναι ο χρονικός μέσος όρος του spectrogram/STFT (Π2). Κάτω: πλήρης κώδικας Octave (overlap ως κλάσμα 0-1).

$$\text{PSD_Welch}[k] = (1/K) \cdot \Sigma_m |X_m[k]|^2 / (L \cdot F_s \cdot U) \quad ; \quad U = \text{window energy normalization}$$



```
% Welch PSD σε Octave (overlap ως fraction 0-1) (από signal package)
pkg load signal;
Fs = 1000; N = 8192;
randn('seed',42); x = randn(1, N) + sin(2*pi*100*(0:N-1)/Fs);

% Welch: nfft=1024, 50% overlap, hann window
[Pxx, f] = pwelch(x, hann(1024), 0.5, 1024, Fs);
semilogy(f, Pxx); xlabel('f [Hz]'); ylabel('PSD [W/Hz]');
```

Άσκηση 3 — Parseval workflow

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

ΕΚΦΩΝΗΣΗ: Δίνεται σήμα $x[n] = \sin(2\pi \cdot 64 \cdot t) + 0.7 \cdot \sin(2\pi \cdot 128 \cdot t) + 0.4 \cdot \sin(2\pi \cdot 256 \cdot t)$, με $F_s = 1024$ Hz και $N = 1024$ (coherent setup — οι 3 συχνότητες πέφτουν ακριβώς σε bins).

Στόχος: επαλήθευσε το θεώρημα Parseval και βρες την ενέργεια σε συγκεκριμένη ζώνη.

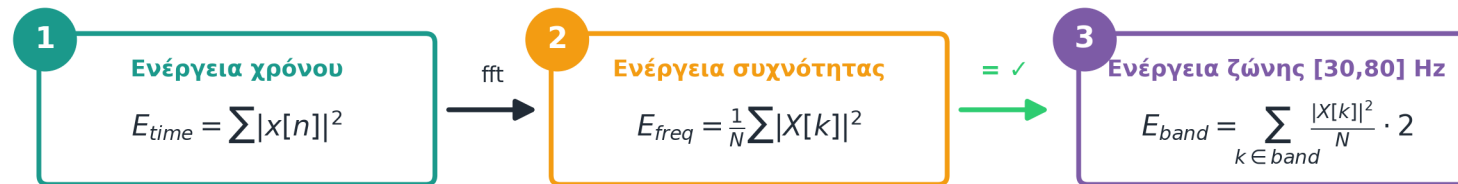
(α) Υπολόγισε $E_{time} = \sum |x[n]|^2$ στον χρόνο.

(β) Υπολόγισε $Y = \text{fft}(x)$ και $E_{freq} = (1/N) \cdot \sum |Y[k]|^2$. Επαλήθευσε ότι $E_{time} = E_{freq}$.

(γ) Υπολόγισε την ενέργεια E_{band} στη ζώνη [30, 80] Hz με one-sided power ($\times 2$ στα AC bins).

Αναμενόμενο: $E_{time} = E_{freq} \approx 844.80$ και $\text{ratio} \approx 60.6\%$ (μόνο το 64 Hz πέφτει στη ζώνη).

Parseval workflow (coherent) — ΘΕΩΡΗΜΑ: $E_{time} = E_{freq}$



Coherent: $F_s = N = 1024$, $x = \sin(2\pi \cdot 64t) + 0.7 \cdot \sin(2\pi \cdot 128t) + 0.4 \cdot \sin(2\pi \cdot 256t)$

```
% Ex.3 – Parseval (coherent)
Fs = 1024; N = 1024;
t = (0:N-1)/Fs;

% Σήμα: 3 ημίτονα στις f={64,128,256}
x = sin(2*pi*64*t) ...
    + 0.7*sin(2*pi*128*t) ...
    + 0.4*sin(2*pi*256*t);

% Βήμα 1 – ενέργεια στον χρόνο
E_time = sum(abs(x).^2);

% Βήμα 2 – ενέργεια στη συχνότητα
Y = fft(x);
E_freq = sum(abs(Y).^2) / N;

printf('E_time = %.2f\n', E_time);
printf('E_freq = %.2f\n', E_freq);
```

```
% Βήμα 3 – ενέργεια στη μπάντα [30,80] Hz
half = N/2 + 1;
P1 = abs(Y(1:half)).^2 / N;
P1(2:end-1) = 2 * P1(2:end-1); % one-sided

f = (0:half-1) * Fs/N;
mask = (f >= 30) & (f <= 80);
E_band = sum(P1(mask));

printf('E_band = %.2f\n', E_band);
printf('Ratio = %.1f%%\n', 100*E_band/E_time);
% Αναμενόμενο: ~60.6% (το f=64 πέφτει στη ζώνη)
```

Άσκηση 3 — Parseval (ΛΥΣΗ)

W07

x[n]

X[k]

window

PSD

W09

Τι βλέπουμε: επαληθεύουμε αριθμητικά το θεώρημα Parseval με ακέραιο παράδειγμα. Το σήμα έχει 3 ημίτονα στα 64, 128, 256 Hz με πλάτη 1, 0.7, 0.4. Με $N=Fs=1024$ και τα 3 είναι ακέραιες θυρίδες → καθαρό φάσμα χωρίς διαρροή. Η συνολική ενέργεια $(1^2+0.7^2+0.4^2)/2 \cdot 1024 = 844.80$ ταιριάζει σε χρόνο και συχνότητα (Parseval). Στη ζώνη [30,80] Hz πέφτει μόνο το $f=64$: ενέργεια $(1^2/2) \cdot 1024 = 512.00$, δηλαδή 60.6% του συνόλου - ανάλυση ισχύος ζώνης (band-power).

ΕΚΦΩΝΗΣΗ (Π4): $x = \sum$ ημίτονα {64,128,256}Hz, πλάτη {1,0.7,0.4}, $F_s=N=1024$. Βρες E_{time} , E_{freq} , $E_{band}[30,80]$.

$$E_{time} = E_{freq} = 844.80 \quad ; \quad E_{band} = 512.00 \quad ; \quad E_{band}/E_{total} = 60.6\%$$

ΣΗΜΑ / ΣΤΟΧΟΣ

Ακέραιο παράδειγμα: 3 ημίτονα στα {64, 128, 256} Hz με πλάτη {1.0, 0.7, 0.4}.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Το peak 64 Hz εμπίπτει στη μπάνα. Πόσο τοις εκατό της συνολικής ενέργειας;

ΕΞΗΓΗΣΗ

Τι γίνεται: (Α) μπάρες → $E_{time}=E_{freq}=844.8$ (Parseval ✓).

(Β) φάσμα ισχύος, σκιασμένη ζώνη [30,80] Hz· μέσα μόνο $f=64$.

(Γ) $E_{band}=(A^2/2) \cdot N=512 = 60.6\%$ του E_{total} .

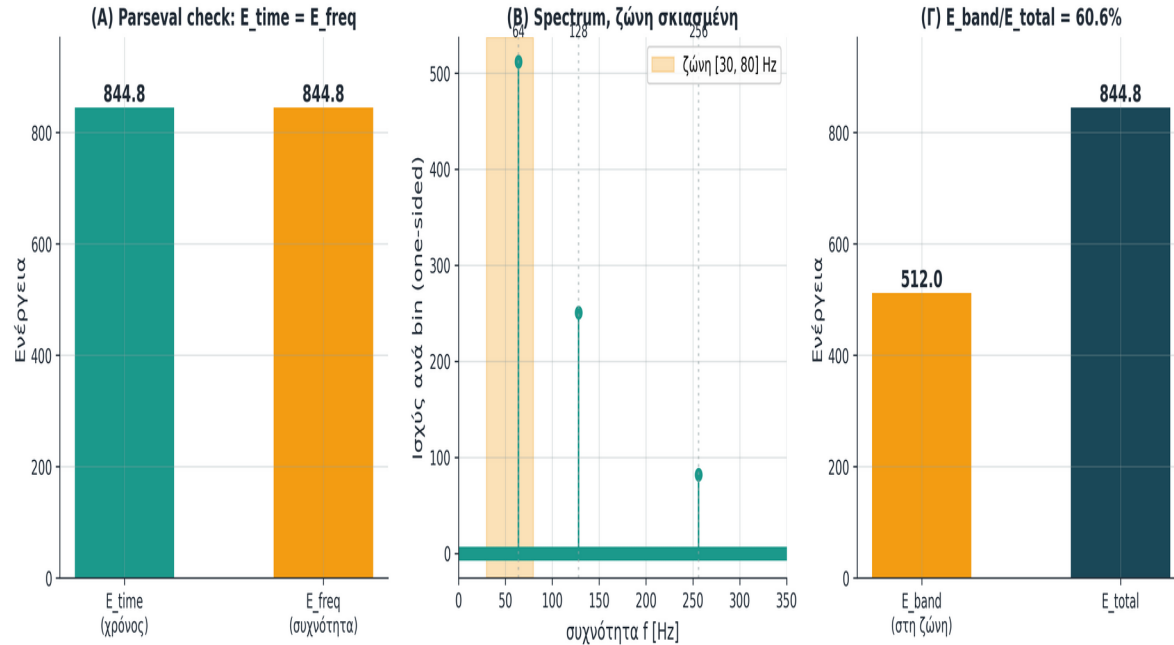
ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Επανάλαβε με μπάνα [100, 150] Hz.

Ποιο peak θα κυριαρχεί;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: [100,150] Hz: μόνο το 128 Hz πέφτει στη ζώνη → κυριαρχεί το 128 Hz.

Parseval coherent: $E_{time} = E_{freq}$, και $E_{band}/E_{total} =$ ποσοστό ζώνης



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

(A) bars: total energy. (B) shaded: band energy.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Band-energy μετριέται ΑΠΟ $|X|^2/N$ όχι $|X|$ — λάθος που γίνεται συχνά.

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ ΠΡΙΝ / ΜΕΤΑ

Πριν Π4 Άσκηση 3 ΕΚΦΩΝΗΣΗ. Μετά Π6 References.

Πανεπιστημιακά εγχειρίδια:

- Oppenheim & Schaffer — "Discrete-Time Signal Processing", Pearson
- Proakis & Manolakis — "Digital Signal Processing", Pearson
- Lyons — "Understanding Digital Signal Processing", Prentice Hall

Online resources:

- National Instruments — "FFT Fundamentals" tutorial

Software:

- GNU Octave signal package: pwelch, periodogram, hann, hamming, blackman
- MATLAB: fft, ifft, fftshift, periodogram, pwelch
- Python: numpy.fft, scipy.signal

Course context:

- 4.004 ΣΚΣ ΕΛΜΕΠΑ ΗΜΜΥ
- Επόμενο W09: Laplace Transform & Z-Transform

1. Basic FFT

```
Fs=1000; N=1024; t=(0:N-1)/Fs; % n=0:N-1
x=sin(2*pi*100*t);
Y=fft(x); A=Y/N; % raw / normalized
```

2. One-sided spectrum

```
half=N/2+1;
P1=abs(A(1:half));
P1(2:end-1)=2*P1(2:end-1);
```

3. Hann window + correction

```
pkg load signal; w=hann(N)';
Xw=fft(x.*w)/N/mean(w); % Gc correction
```

4. Filter via IFFT

```
Y=fft(x);
mask=abs(Y)>0.1*max(abs(Y));
Yf=Y.*mask;
y=real(ifft(Yf));
```

5. Parseval check

```
Y=fft(x);
E_t=sum(abs(x).^2);
E_f=sum(abs(Y).^2)/N;
err=abs(E_t-E_f)/E_t
```

6. Welch PSD

```
pkg load signal;
[Pxx,f]=pwelch(x,hann(256),0.5,256,Fs);
```

7. Spectrogram

```
pkg load signal;
specgram(x,512,Fs,hann(512),384);
```

8. FFT-based conv

```
L=length(x)+length(h)-1;
y=real(ifft(fft(x,L).*fft(h,L)));
```

9. Shifted-mask filtering (fftshift / ifftshift)

```
Hc=abs(fc)<=100; Yc=Xc.*Hc; Xc=fftshift(X); fc=(-N/2:N/2-1)*Fs/N; % centered two-sided
Y=ifftshift(Yc); y=real(ifft(Y)); % mask στο centered |X|
% ifftshift ΠPIN το ifft
```