ΕΛΜΕΠΑ - ΗΜΜΥ - 4.004 Σήματα και Συστήματα

Εβδομάδα 9

Μετασχηματισμός Laplace

Γιάννης Στεφανής

Γιατί Laplace; Η διαδρομή του W09

ΔΕ και συστήματα στον χρόνο είναι δύσκολα. Ο Laplace τα πάει σε αλγεβρικό s-domain, λύνουμε με άλγεβρα, και ο inverse μας γυρίζει στον χρόνο.

ΣΤΟΧΟΣ

Δες τη διαδρομή πριν τα εργαλεία.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσα βήματα χρειάζεται μια ΔΕ για να λυθεί με Laplace; (απ.: 5)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο Laplace δεν είναι χωριστό κεφάλαιο· είναι εργαλείο επίλυσης.

x(t), h(t)
ΔΕ στον χρόνο → **Laplace** → **X(s), H(s), Y(s)**
άλγεβρα → **Inverse Laplace** → **y(t)**
ύση στον χρ

Σήμερα χτίζουμε πρώτα τη γλώσσα, μετά τα εργαλεία.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σε ποιο βήμα επιστρέφουμε στον χρόνο; (απ.: inverse Laplace)

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Διάγραμμα ροής, χωρίς άξονες. RC άγκυρα: H(s)=1/(sτ+1).

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Πρώτα χτίζουμε τη γλώσσα, μετά τα εργαλεία.

ΚΙΝΗΤΡΟ

Το πρόβλημα που λύνει ο μετασχηματισμός Laplace

W05 W07 W08 **W09**

Ο Laplace μετατρέπει ΔΕ σε άλγεβρα: παραγώγιση → πολλαπλασιασμός με s. Λύνουμε αλγεβρικά, επιστρέφουμε στον χρόνο.

ΣΤΟΧΟΣ

Δες ποιο πρόβλημα γίνεται εύκολο με Laplace.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πώς λύνεις y″+4y′+3y=0 χωρίς Laplace; (απ.: δύσκολα, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο)

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σε τι μετατρέπεται η παραγώγιση στο s-domain; (απ.: πολλαπλασιασμό με s)

χρόνος → **Laplace** → **άλγεβρα** → **inverse** → **χρόνος**

Σχέση μετασχηματισμού Laplace με Fourier

- Fourier Transform

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

- Laplace Transform

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\downarrow$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\downarrow$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t}\boxed{e^{-j\omega t}}\, dt$$

Παρατηρούμε ότι :

- Για $\sigma = 0$ ο μετασχηματισμός Laplace συμπίπτει με τον μετασχηματισμό Fourier.
- Ο όρος $e^{-\sigma t}$ (που δεν υπάρχει στον μετασχηματισμό Fourier), είναι αυτός που εξασφαλίζει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος άρα και την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace ακόμα και όταν ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Διάγραμμα ροής. χρόνος → Laplace → άλγεβρα → inverse → χρόνος

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Δεν αποστηθίζουμε τύπο· μαθαίνουμε διαδρομή επίλυσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ — Τι θα λύσουμε

W05 W07 W08 W09

5 πραγματικά προβλήματα του Project που λύνουμε στο τέλος της εβδομάδας

1 **Πώς βρίσκω τον Laplace ενός σήματος;**

laplace() σε Octave με symbolic. syms t s, ορίζω f(t), παίρνω F(s). Project E.1 και Άσκηση 1/B.

→ σ20, σ25, σ27

2 **Πώς γυρίζω από F(s) στον χρόνο;**

ilaplace() για συμβολικό αντίστροφο. Project E.2 και Άσκηση C. Με heaviside για καθυστερημένα u(t-a) σήματα.

→ σ28, σ30, σ31-σ32

3 **Πώς διαβάζω ένα ρητό H(s) = N(s)/D(s);**

roots() για πόλους/μηδενικά, residue() για ανάλυση σε άπλά κλάσματα. Project E.3 — partial fractions + εκθετικοί όροι plot.

→ σ34, σ38, σ42-σ42

4 **Πώς λύνω ΔΕ με αρχικές συνθήκες;**

$L\{f'\}=sF(s)-f(0)$, $L\{f''\}=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$. Άλγεβρα στο s, μετά ilaplace(). Project E.4.

→ σ47, σ50, σ52-σ54

5 **Πώς υπολογίζω συνέλιξη μέσω Laplace;**

$L\{x*h\}(s) = X(s)\cdot H(s)$. Πολλαπλασιασμός στο s, ilaplace στην έξοδο. θεώρημα γινομένου.

→ σ56-σ57

ΑΝΑΦΟΡΑ

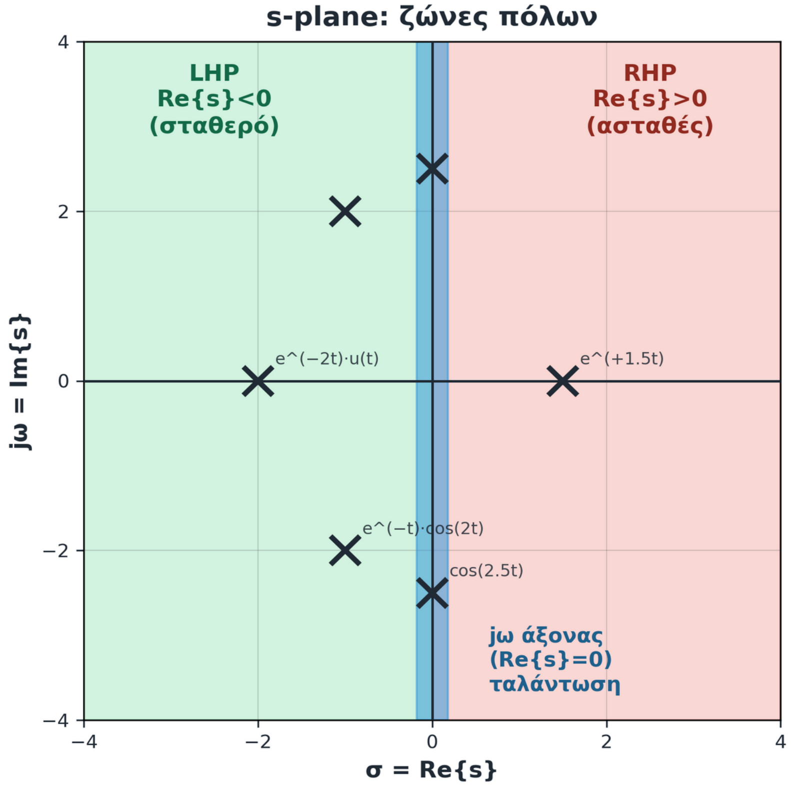
Τυπολόγιο Laplace — αντιστοιχίσεις s-plane

W05 W07 W08 W09

Cheat reference για όλη την εβδομάδα.

Σήμα x(t)	X(s) = L{x(t)}	Πόλος στο s
u(t)	$1/s$	s=0 (jω)
t·u(t)	$1/s^2$	διπλός s=0
e^(at)·u(t), a>0	$1/(s-a)$	s=+a (RHP)
e^(−at)·u(t), a>0	$1/(s+a)$	s=−a (LHP)

Σήμα x(t)	X(s) = L{x(t)}	Πόλοι
$\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$s/(s^2+\omega_0^2)$	$\pm j\omega_0$ (jω-άξ.)
$\sin(\omega_0 t)\cdot u(t)$	$\omega_0/(s^2+\omega_0^2)$	$\pm j\omega_0$ (jω-άξ.)
e^(−at)cos(ω_0t)·u(t), a>0	$(s+a)/((s+a)^2+\omega_0^2)$	$-a\pm j\omega_0$ (LHP)
δ(t)	1	(no pole)



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ = πραγμ. τμήμα, jω = φανταστ. τμήμα. Πόλος στο LHP ⇒ φθίνει· στο RHP ⇒ αυξάνει· στο jω-άξονα ⇒ ταλαντώνει.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Όλα είναι u(t) (αιτιατά). Για διπλό πόλο: ο όρος γίνεται t·e^(pt) (επιπλέον παράγοντας t).

ΣΥΝΔΕΣΗ

→ σ6 εργαλεία Octave · → σ8 Fourier/Laplace · → σ15 ROC · → σ24+ ασκήσεις

ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ

ΕΡΓΑΛΕΙΑ — Τα 7 εργαλεία του symbolic Laplace

W05 W07 W08 **W09**

workflow Laplace

7 εντολές Octave — μία διαδρομή: ΔΕ+IC ή σήμα → laplace → άλγεβρα → ilaplace → χρόνος

`syms t s` — *symbolic setup*

↓

`laplace(·)` — *ευθύς L*

↓

`residue / roots` — *πόλοι, R/P/K*

↓

`solve(·)` — *αλγεβρική λύση*

↓

`ilaplace(·)` — *αντίστροφος L*

7 βασικά εργαλεία Octave/symbolic	
`syms`	συμβολική δήλωση μεταβλητών t, s
`laplace`	ευθύς μετασχηματισμός: f(t) → F(s)
`ilaplace`	αντίστροφος: F(s) → f(t)
`heaviside`	βηματική u(t-a) — Άσκηση 3 & D
`residue`	partial fractions: H(s) → R, P, K
`roots`	πόλοι/μηδενικά από συντελεστές
`solve`	αλγεβρική επίλυση για Y(s) στις ΔΕ

+ ezplot() για γρήγορο symbolic plot (σ47). Όλα διαθέσιμα στο GNU Octave 8.4 + symbolic 3.1.1 — δες σ68 για reproducible setup.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
Επισκόπηση εργαλείων (όχι σύνταξη).

ΠΡΟΣΕΧΩ
Πρώτα `pkg load symbolic` — μία φορά/session.

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ4 · → σ20 (πώς δουλεύει) · → σ32 (API)

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 — σ8-σ17

Θεωρία Laplace

σ→s · s-plane · ROC · εκθετικοί χρονικοί όροι

ΟΡΙΣΜΟΣ

Laplace και Fourier: ο επιπλέον όρος σύγκλισης

W05 W07 W08 **W09**

Ο Fourier διαβάζει συχνότητα με e^(−jωt). Ο Laplace κρατά αυτή την ταλάντωση και προσθέτει e^(−σt) που επιδρά με απόσβεση ή αύξηση.

ΣΤΟΧΟΣ

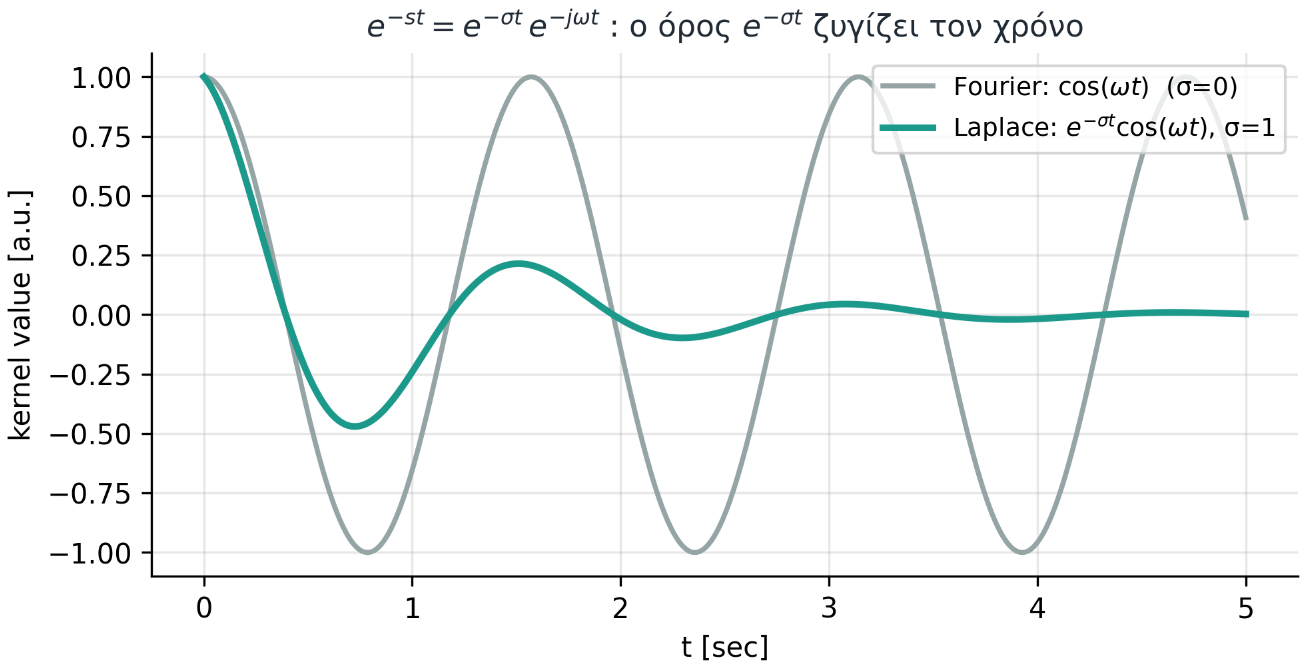
Κράτα την ιδέα του Fourier, πρόσθεσε σύγκλιση.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Ποιο μέρος θυμίζει Fourier; (απ.: e^(−jωt))

ΕΞΗΓΗΣΗ

Το e^(−σt) επιτρέπει σύγκλιση εκεί που ο Fourier δεν συγκλίνει.



ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Βάλε σ=0 και δες ότι μένει μόνο ο όρος Fourier.

e^(−st) = e^(−σt)·e^(−jωt)

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [sec], kernel value [a.u.]. σ=1, ω=4 rad/sec.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Με σ=1 το πλάτος σβήνει· με σ=0 μένει η καθαρή ταλάντωση.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η νέα μεταβλητή: s = σ + jω

Πριν από ROC ή H(s), χρειαζόμαστε γλώσσα. Ο χρόνος είναι t. Η νέα μεταβλητή είναι s=σ+jω: το σ ελέγχει απόσβεση/αύξηση, το ω είναι γωνιακή συχνότητα.

ΣΤΟΧΟΣ

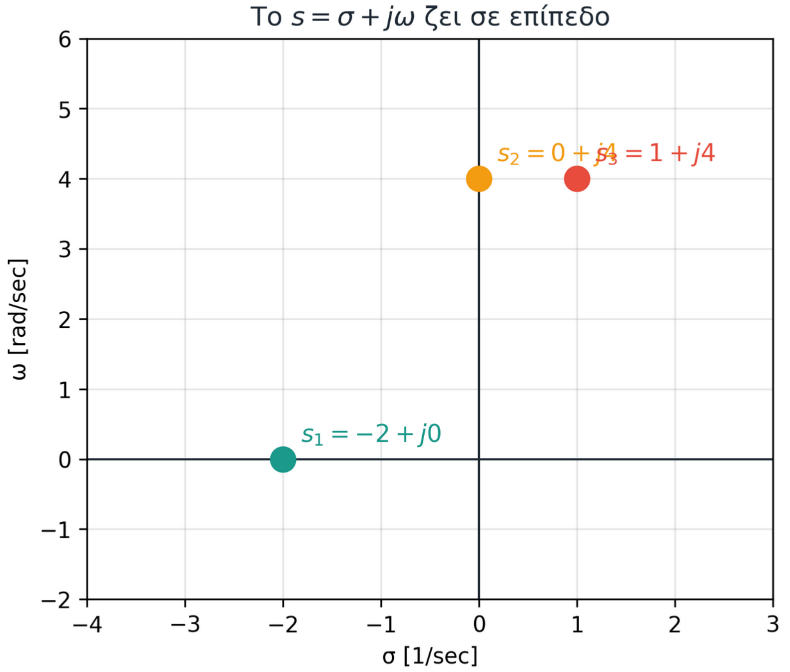
Μάθε τη νέα γλώσσα πριν τη γεωμετρία.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Ποιο σημείο στο s-plane έχει σ=0; (ο άξονας Fourier)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Το πραγματικό μέρος σ και το φανταστικό ω είναι ανεξάρτητοι άξονες.



ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Τοποθέτησε το s=−1+j2 στο επίπεδο.

$$s = \sigma + j\omega$$

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ [1/sec] οριζόντιος, ω [rad/sec] κατακόρυφος.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Τρία σημεία: αρνητικό σ, καθαρά φανταστικό, θετικό σ.

ΘΕΩΡΙΑ

Τι κάνει το σ στον χρόνο

W05 W07 W08 **W09**

Ο όρος e^(−σt) αλλάζει το βάρος των μεταγενέστερων χρόνων. Θετικό σ σβήνει, μηδέν σ δίνει σταθερή ταλάντωση, αρνητικό σ μεγαλώνει το σήμα.

ΣΤΟΧΟΣ

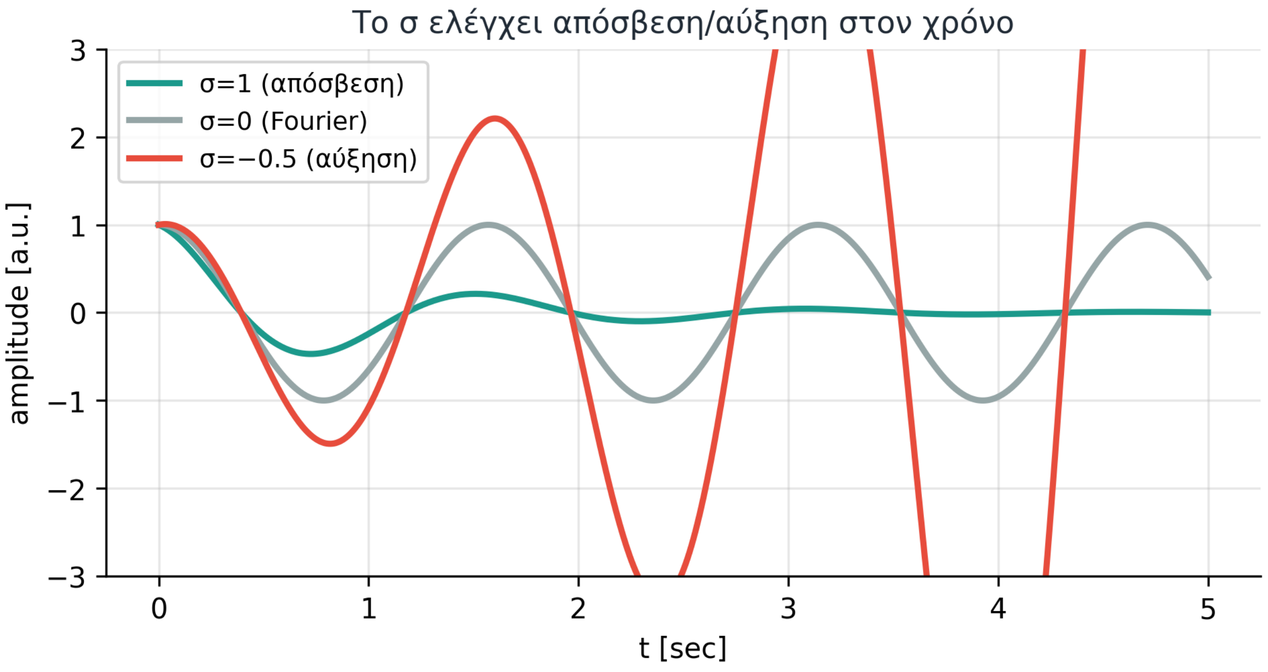
Δες τι κάνει το σ στον χρόνο.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν το σ αυξηθεί από 1 σε 2, σβήνει γρηγορότερα;
(απ.: ναι)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Το σ είναι ο «ρυθμιστής» απόσβεσης/αύξησης.



ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πρόβλεψε τη μορφή για σ=−1.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [sec], amplitude [a.u.]. σ=1, 0, −0.5 με ω=4.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

πετρολ (σ=1) σβήνει, γκρι (σ=0) σταθερό, κόκκινο (σ=−0.5) μεγαλώνει.

ΟΡΙΣΜΟΣ

s-plane: LHP, jω άξονας, RHP

W05 W07 W08 **W09**

Το s-plane έχει ΔΥΟ διαστάσεις: αριστερά/δεξιά = σ (απόσβεση/αύξηση), πάνω/κάτω = ω (ταχύτητα ταλάντωσης).
Πόλος στον jω άξονα → καθαρή ταλάντωση· ο ίδιος ω αλλά αριστερότερα → ίδιος ρυθμός με απόσβεση

ΣΤΟΧΟΣ

Σύνδεσε θέση στο s-plane (σ και ω) με συμπεριφορά.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

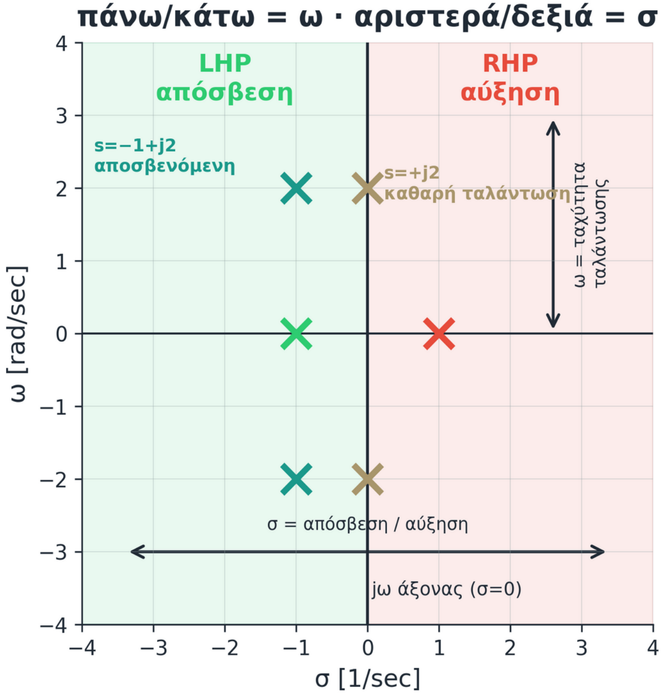
Πού στο επίπεδο είναι η καθαρή ταλάντωση; (απ.: στον jω άξονα, σ=0)

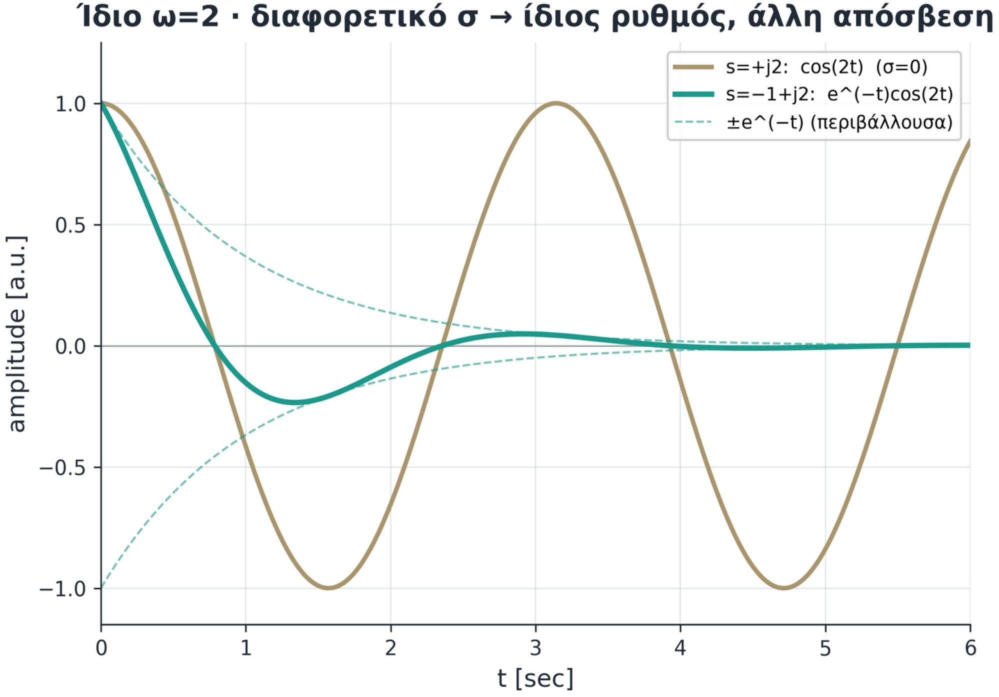
ΕΞΗΓΗΣΗ

Το σ ορίζει αν σβήνει/αυξάνει· το ω ορίζει πόσο γρήγορα ταλαντώνεται. s=+j2 → cos(2t)· s=−1+j2 → e^(−t)cos(2t).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πού θα έβαζες σημείο s που ταλαντώνεται με ω=2 αλλά σβήνει αργά;





ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

s-plane: σ [1/sec], ω [rad/sec]· χρόνος: t [sec].

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Αριστερά/δεξιά = σ (απόσβεση/αύξηση)· πάνω/κάτω = ω (ταλάντωση).

ΠΡΟΣΕΧΩ

Ο jω άξονας δεν είναι «μηδέν» — είναι το όριο Fourier (σ=0).

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ10 (e^(σt)) · → σ13 (jω τομή) · → σ38 (ROC vs jω)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το H(s) ως επιφάνεια |H(s)|

W05 W07 W08 W09

Μια συνάρτηση μεταφοράς δίνει τιμή σε όλο το s-plane. Για H(s)=1/(s+2), όσο το s πλησιάζει το −2 ο παρονομαστής μικραίνει, άρα το |H(s)| μεγαλώνει - μια κορυφή (μαθηματική ιδιομορφία)

ΣΤΟΧΟΣ

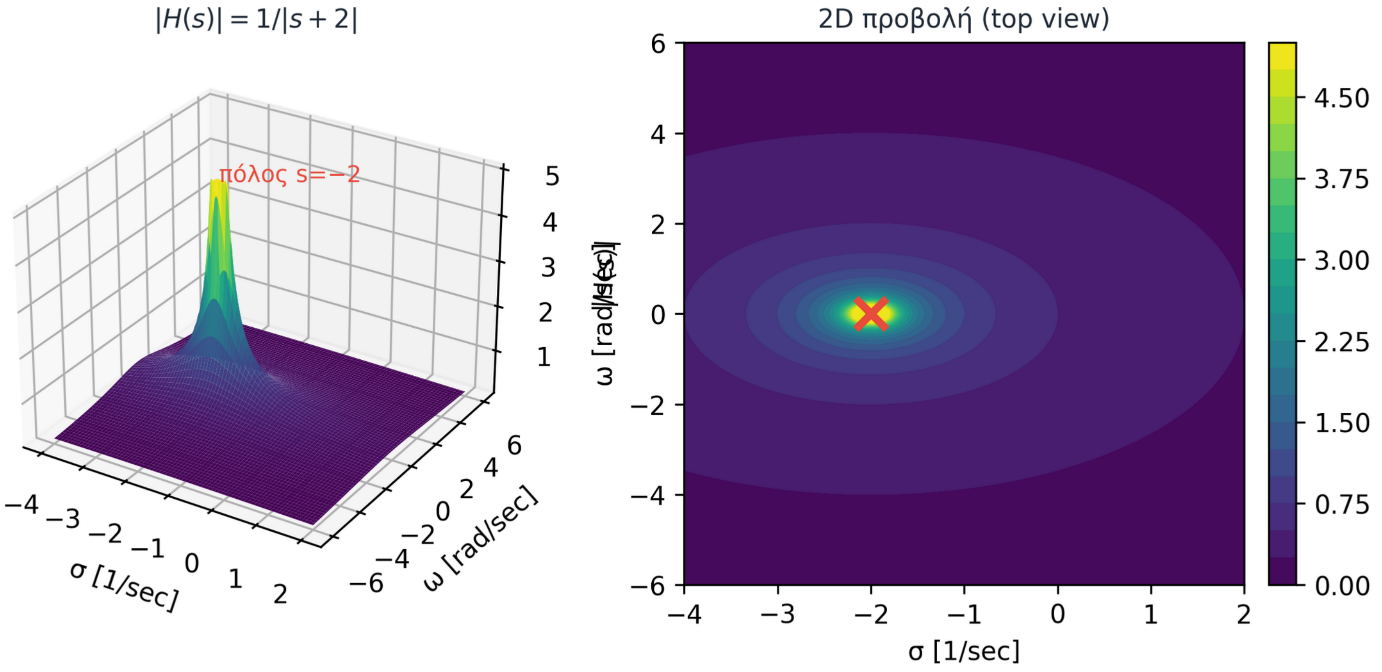
Δες το H(s) ως επιφάνεια.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Αν H(s)=1/(s+5), πού θα είναι η κορυφή; (απ.: s=−5)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο πόλος είναι σημείο όπου ο παρονομαστής μηδενίζεται.



ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πόσο είναι το |H(0)| για H=1/(s+3); (απ.: 1/3≈0.333, χαμηλότερο από 0.5)

$$H(s)=1/(s+2), \quad |H(s)|=1/|s+2|$$

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ [1/sec], ω [rad/sec], |H(s)| [a.u.]. 3D + 2D προβολή.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Η κορυφή είναι στον πόλο s=−2, όχι «άπειρη έξοδος».

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ο Fourier ως τομή σ=0

W05 W07 W08 **W09**

Το «βουνό» είναι η επιφάνεια |H(s)| πάνω στο s-plane· η κορυφή είναι ο πόλος. Κόβουμε με το επίπεδο σ=0 (jω άξονας): το ύψος της κόκκινης τομής είναι ακριβώς ο Fourier |H(jω)|. Ισχύει μόνο όταν ο jω άξονας ανήκει στην ROC.

ΣΤΟΧΟΣ

Βρες πού κρύβεται ο Fourier μέσα στον Laplace.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

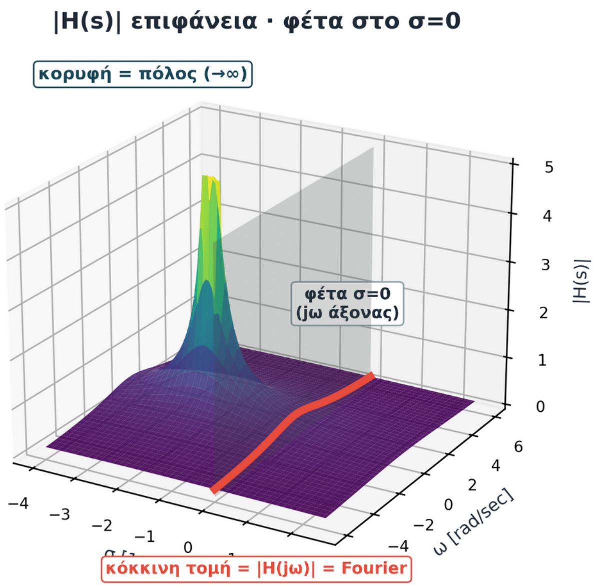
Γιατί το |H(jω)| μικραίνει όταν μεγαλώνει το |ω|; (απ.: μεγαλώνει ο $\sqrt{\omega^2+4}$)

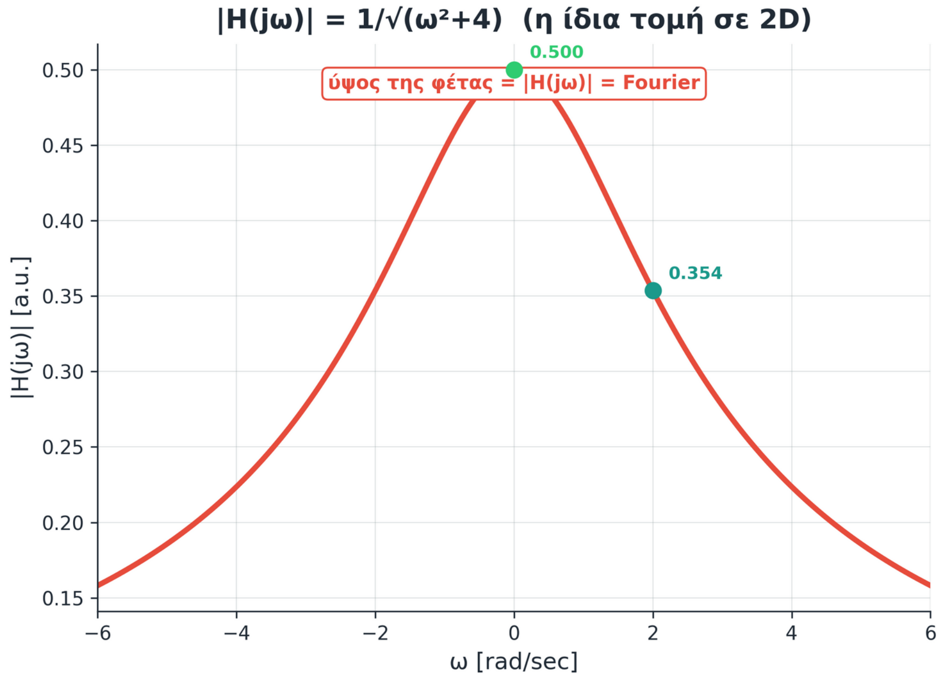
ΕΞΗΓΗΣΗ

Επιφάνεια = |H(s)|, κορυφή = πόλος (→∞, μαθηματική ιδιομορφία - ιδανικό μοντέλο). Φέτα στο σ=0 → ύψος = |H(jω)| = Fourier.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σύγκρινε |H(j0)| με την κορυφή του |H(s)|.





$$H(j\omega)=1/(j\omega+2), \quad |H(j\omega)|=1/\sqrt{\omega^2+4}$$

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ω [rad/sec], |H(jω)| [a.u.]. Έλεγχοι: 0→0.5, 2→0.354, 10→0.098.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Η κόκκινη τομή κάθεται πάνω στην επιφάνεια στο σ=0· υπάρχει μόνο αν jω∈ROC.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Πόλοι και μηδενικά: πραγματικοί vs μιγαδικοί

Μηδενικά = ρίζες αριθμητή· πόλοι = ρίζες παρονομαστή. Αριστερά το κεντρικό H_a με πραγματικούς πόλους (→ εκθετικά). Δεξιά ένα G με μιγαδικούς συζυγείς πόλους −1±j2 (→ αποσβενόμενη ταλάντωση e^(−t)cos2t) - δείχνει τη διάσταση ω

ΣΤΟΧΟΣ

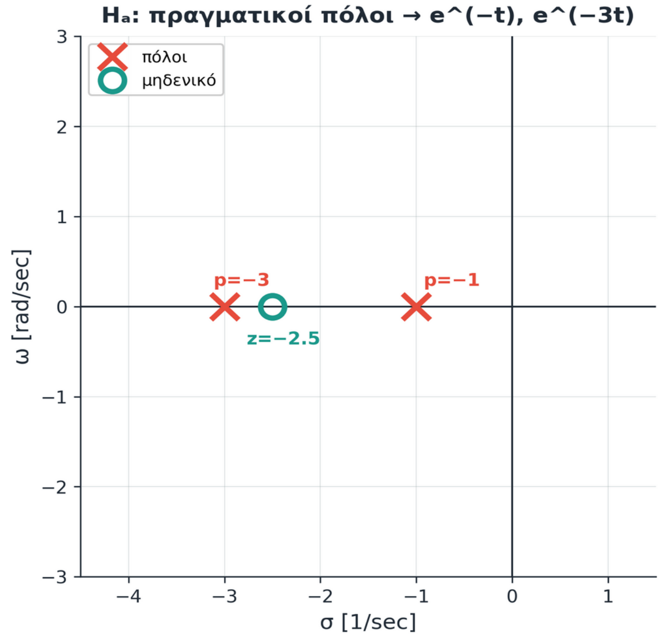
Διάβασε πόλους/μηδενικά· σύγκρινε πραγματικούς με μιγαδικούς.

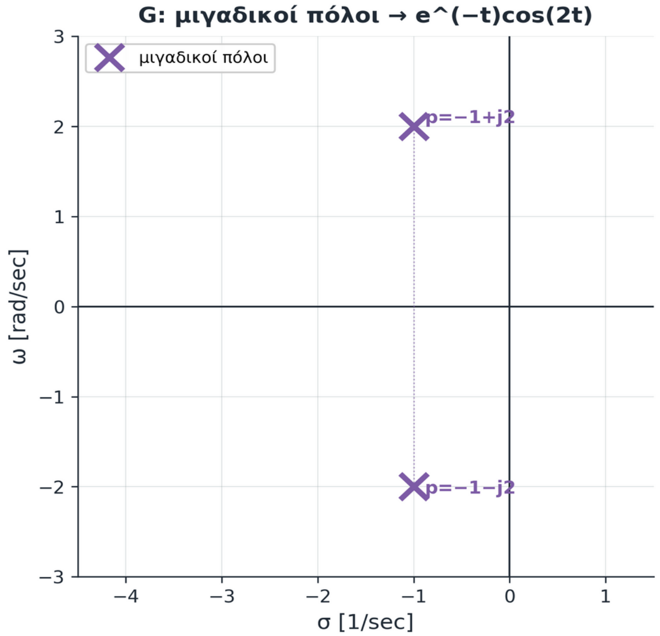
ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι χρονική μορφή δίνουν οι πόλοι −1±j2; (απ.: e^(−t)cos(2t))

ΕΞΗΓΗΣΗ

Πραγματικοί πόλοι → εκθετικά. Μιγαδικοί συζυγείς → εκθετικά·sin/cos. ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ: απλός→e^(pt), διπλός→t·e^(pt), τριπλός→(t^2/2)·e^(pt).





ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

roots([1 4 3]) και roots([1 2 5]) - τι περιμένεις;

H_a(s)=(2s+5)/((s+1)(s+3)) · G(s)=5/(s^2+2s+5) · H_jω(s)=ω_0^2/(s^2+ω_0^2)

πόλοι: H_a→{−1,−3} (πραγμ.) · G→−1±j2 (μιγ. αποσβ.) · H_jω→±jω_0 (καθαρά jω-άξονας)
ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΑ: όταν forcing & σύστημα έχουν ίδιο πόλο → εμφάνιση t·e^(pt) (διπλός). π.χ. Ε.4.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ [1/sec], ω [rad/sec]. H_a: num=[2 5], den=[1 4 3]· G: den=[1 2 5].

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

H_a: πόλοι −1, −3 στον πραγματικό άξονα. G: πόλοι −1±j2 εκτός άξονα.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Πραγματικοί → εκθετικό· μιγαδικό ζευγάρι → εκθετική ταλάντωση.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ13 (jω τομή) · → σ16 (5-case) · → σ42 (M3 grid)

ROC — η περιοχή σύγκλισης του Laplace

Η ROC λέει για ποια s συγκλίνει το X(s)· καθορίζει αν υπάρχει ο Fourier.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Έστω αιτιατό σήμα με X(s)=1/((s+1)(s+3)).
Σε ποια Re{s} συγκλίνει ο μετασχηματισμός;
απ.: Re{s} > −1 (δεξιά του δεξιότερου πόλου).

ΟΡΙΣΜΟΣ

ROC(X) = { s ∈ ℂ : $\int_0$^∞ x(t)·e^(−st) dt συγκλίνει }
= κατακόρυφη ζώνη σ_min < Re{s} < σ_max
στο επίπεδο s = σ + jω.

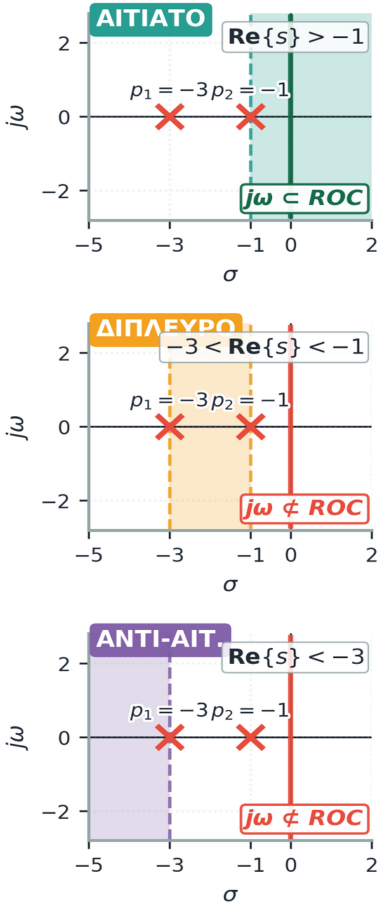
ΕΞΗΓΗΣΗ — 4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) ROC = κατακόρυφη ζώνη στο s-plane.
2) Δεν περιλαμβάνει ποτέ πόλο.
3) Αιτιατά: Re{s} > max(Re{p_k}).
4) Αντι-αιτιατά: Re{s} < min(Re{p_k}).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σήμα αντι-αιτιατό με ίδιο X(s) — ποια η ROC;
απ.: Re{s} < −3 (αριστερά του αριστερότερου πόλου).

Ίδιοι πόλοι, διαφορετική ROC → διαφορετικό σήμα



ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ — 3 βήματα

1) Βρες όλους τους πόλους p_k του X(s).
2) Ταυτοποίησε την αιτιατότητα του σήματος: αιτιατό / αντι-αιτιατό / δίπλευρο.
3) Εφάρμοσε τον κανόνα της αντίστοιχης ζώνης (βλ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ 3 & 4 αριστερά).

ΣΥΝΔΕΣΗ ΜΕ FOURIER

jω ⊂ ROC ⟺ Fourier συγκλίνει

Αν ο άξονας jω είναι μέσα στη ROC,
υπάρχει και Fourier· αλλιώς μόνο Laplace.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

X(s)=1/((s+1)(s+3))
Πόλοι: p_1=−3, p_2=−1.

Αιτιατό : Re{s} > −1 (TEAL)
Δίπλευρο : −3 < Re{s} < −1 (ORANGE)
Αντι-αιτ. : Re{s} < −3 (PURPLE)

Μόνο το αιτιατό έχει jω ⊂ ROC.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ = Re{s} [1/sec], ω = Im{s} [rad/sec]. Δεξιότερος πόλος της H_A = −1.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Η ROC είναι ΠΑΝΤΑ ανοιχτή ζώνη — όχι αριθμός. Δεν περιέχει πόλους.

ΘΕΩΡΙΑ

Από πόλους σε εκθετικούς χρονικούς όρους

W05 W07 W08 **W09**

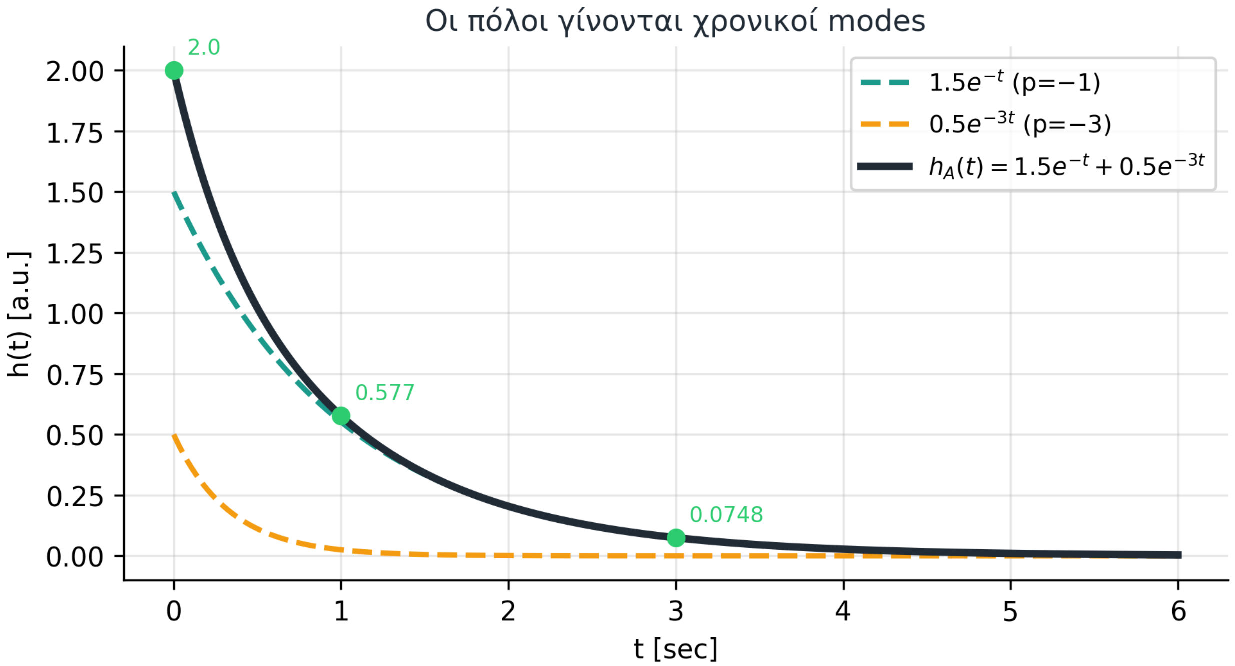
Μετά τον αντίστροφο Laplace, οι απλοί πραγματικοί πόλοι γίνονται εκθετικοί χρονικοί όροι (εκθετικοί όροι). Ο πόλος πιο κοντά στον άξονα jω σβήνει πιο αργά και κυριαρχεί αργότερα.

ΣΤΟΧΟΣ

Δες τους πόλους να γίνονται χρονικοί όροι.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Ποιος όρος μένει περισσότερο, e^(−t) ή e^(−3t); (απ.: e^(−t))



$$h_a(t) = 1.5e^{-t} + 0.5e^{-3t}$$

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [sec], h(t) [a.u.]. Έλεγχοι: h(0)=2, h(1)=0.577, h(3)=0.0748.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Διακεκομμένοι = επιμέρους εκθετικοί όροι, συνεχής = άθροισμα $h_a(t)$.

CHECKPOINT

Συνεχίζουμε με Octave

W05 W07 W08 **W09**

Έλεγχος προετοιμασίας: πρέπει να διαβάζεις s, s-plane, H(s), φέτα Fourier, πόλους, ROC και εκθετικοί όροι πριν περάσουμε σε syms, laplace(), ilaplace() και residue(

e^{-st} → s-plane → H(s) → Fourier slice → πόλοι/μηδενικά → ROC → εκθ. όροι → Octave tools

ΣΤΟΧΟΣ

Κάνε επανάληψη τις προηγούμενες διαφ

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι σημαίνει σ=0; (απ.: άξονας jω / φέτα Fourier)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Αλυσίδα: e^(−st)→s-plane→H(s)→Fourier slice→πόλοι→ROC→εκθετικοί όροι→εργαλεία.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πού είναι το ειδικό σημείο του H(s)=1/(s+2); (απ.: s=−2)

Είμαστε έτοιμοι για syms / laplace / ilaplace / roots / residue

❖ Ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος μπορεί να εκφραστεί σε ρητή μορφή ως:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^{-2} + \cdots + b_M s^{-M}}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^{-2} + \cdots + \alpha_N s^{-N}}$$

❖ Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρανομαστή:

$$X(s) = \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \ldots . (s - z_M)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \ldots . (s - p_N)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{a_0 \prod_{k=1}^{N} (s - p_k)} s^{M-N}$$

- αi , i = 1,2, … , N και bj , j = 1,2, … , M: σταθερές (πραγματικοί αριθμοί)
- M και N: οι βαθμοί των πολυωνύμων (θετικοί ακέραιοι).
- Μηδενικά (zeros): οι τιμές του s που μηδενίζουν τον αριθμητή ($z1$, $z2$, … , zM)
- Πόλοι (poles): οι τιμές του s που μηδενίζουν τον παρανομαστή ($p1$, $p2$, … , pN)
- Η περιοχή σύγκλισης (region of convergence- ROC)του Laplace μιας συνάρτησης δεν περιλαμβάνει πόλους.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Εννοιολογικός χάρτης, χωρίς άξονες.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Αν απαντάς και τα τρία, προχωράμε στα symbolic εργαλεία.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Το flow είναι εννοιολογικό· σε Octave λειτουργούν `syms`, `laplace`/`ilaplace`, `roots`, `residue` με συγκεκριμένη σύνταξη.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ7–σ16 θεωρία · → σ18 reverse partial · → σ24+ ευθύς/αντίστροφος Laplace

Συνεχίζουμε με Octave

CHECKPOINT

W05 · W07 · W08 · **W09**

Έλεγχος προετοιμασίας: πρέπει να διαβάζεις s, s-plane, H(s), φέτα Fourier, πόλους, ROC και εκθετικοί όροι πριν περάσουμε σε syms, laplace(), ilaplace() και residue().

e^{-st} → s-plane → H(s) → Fourier slice → πόλοι/μηδενικά → ROC → εκθ. όροι → Octave tools

ΣΤΟΧΟΣ

Κάνε επανάληψη τις προηγούμενες διαφάνειες

Είμαστε έτοιμοι για syms / laplace / ilaplace / roots / residue

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι σημαίνει σ=0; (απ.: άξονας jω / φέτα Fourier)

Μετατρέψτε την συνάρτηση από άθροισμα κλασμάτων σε ρητή : $X(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{2}{s-1}+\frac{3}{s+1}$

```
» clear all; close all; clc;
» %reverse Partial fraction expansion x(s) = (1/s+2)+ (2/s-1)+ (3/s+1)
» R=[1 2 3];
» P=[-2 1 -1];
» K=[];
» [num,den]=residue(R,P,K)
```

ΕΞΗΓΗΣΗ

Αλυσίδα: e^(−st)→s-plane→H(s)→Fourier slice→πόλοι→ROC→εκθετικοί όροι→εργαλεία.

```
num =

     6     9    -3


den =

     1     2
```

*! Άρα η συνάρτηση X(s) μπορεί να εκφραστεί ως ρητή:

$$X(s)=\frac{6s^2+9s-3}{}.$$

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πού είναι το ειδικό σημείο του H(s)=1/(s+2); (απ.: s=−2)

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Εννοιολογικός χάρτης

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Άθροισμα 3 κλασμάτων (R/(s−P)) → ένα ρητό· οι R, P γίνονται num/den μέσω residue().

ΠΡΟΣΕΧΩ

Η εντολή `residue(R,P,K)` χωρίς εξόδους επιστρέφει [num,den]· με 3 εξόδους είναι το ευθύ. Πάντοτε δηλώνεις K=[].

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ17 flow chart · → σ34 ρητή μορφή H(s) · → σ40 residue() workflow

ΕΝΟΤΗΤΑ 2 — σ20-σ32

Forward & Inverse Laplace (Octave)

laplace / ilaplace / heaviside · E.1–E.2 · B · C · D

ΓΕΦΥΡΑ

Από τη γεωμετρία στον υπολογισμό (Octave)

W05 W07 W08 **W09**

Πριν: ξέρουμε τι σημαίνουν s, πόλοι, ROC, εκθετικοί όροι. Τώρα: περνάμε σε εργαλεία symbolic. Μετά: τα χρησιμοποιούμε στα παραδείγματα.

ΣΤΟΧΟΣ

Σύνδεσε την έννοια με το εργαλείο που τη λύνει.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Ποια εντολή δίνει τον αντίστροφο Laplace;
(απ.: ilaplace)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Η γεωμετρία (s-plane, πόλοι, ROC) γίνεται κώδικας: συμβολικός υπολογισμός και αριθμητικά residues.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ποιο πακέτο χρειάζεται πριν τα symbolic; (απ.: pkg load symbolic)

γεωμετρία → symbolic → laplace/ ilaplace → residue → modes

Μετασχηματισμός Laplace

Μετατρέψτε την συνάρτηση από ρητή σε άθροισμα κλασμάτων: $X(s)=\dfrac{s^2+3s+1}{s^3+5s^2+2s-8}$.

```
» clear all; close all; clc;
» % %compute Partial fraction expansion x(s) = s^2+3s+1/ s^3+5s^2+2s-8
» num=[1 3 1];
» den=[1 5 2 -8];
» [R,P,K]=residue(num,den)
```

```
R =

   0.5000
   0.1667
   0.3333


P =

  -4.0000
  -2.0000
   1.0000


K =

    []
```

*! Άρα η συνάρτηση X(s) μπορεί να εκφραστεί ως το παρακάτω άθροισμα κλασμάτων:

$$X(s)=\frac{0.5}{s+4}+\frac{0.16}{s+2}+\frac{0.33}{s-1}$$

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

Διάγραμμα ροής. γεωμετρία → symbolic setup → laplace/ilaplace → residue → εκθετικοί όροι

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Τα εργαλεία δεν αντικαθιστούν την έννοια· την εκτελούν.

ΕΡΓΑΛΕΙΟ

Octave: symbolic setup πριν από laplace / ilaplace

W05 W07 W08 **W09**

Πριν από κάθε laplace() ή ilaplace() φορτώνουμε το symbolic package και ορίζουμε τα σύμβολα. Reproducible setup: τρέχει ίδιο σε κάθε μηχάνημα με Octave 8.4 + symbolic 3.1.1.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι θα συμβεί αν τρέξεις laplace() χωρίς το pkg load; (απ.: error «undefined»)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Το syms ορίζει συμβολικές μεταβλητές· η αιτιατότητα δηλώνεται με heaviside/u(t) όπου χρειάζεται.

OCTAVE - setup.m

```
pkg load symbolic        % φόρτωσε το symbolic package
syms t s                 % χρονική t, μιγαδική s
```

\>> output

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ

Ροή: `pkg load` → `syms t s` → `laplace`/`ilaplace`.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Χωρίς `syms t s`, numeric αντί συμβολικού.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ20 · → σ22 (full setup) · → σ44 row 2

ΑΣΚΗΣΗ 1

Άσκηση 1 - ζεύγος ευθύς/αντίστροφος

W05 W07 W08 **W09**

Το πρώτο πλήρες παράδειγμα: ξεκινάμε από f(t)=e^(−t), πάμε στο F(s) με laplace(), και γυρίζουμε πίσω με ilaplace(). Το round-trip πρέπει να μας δώσει την αρχική f.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Ποιο s μηδενίζει τον παρονομαστή του F; (απ.: s=−1, ο πόλος)

ΕΞΗΓΗΣΗ

laplace() και ilaplace() είναι αντίστροφες πράξεις· το round-trip επιστρέφει την αρχική συνάρτηση. Η σταθερά 1 δίνει 1/s.

OCTAVE - ex1_pair.m

```
pkg load symbolic; syms t s
f = exp(-t);              % f(t)=e^(-t)
F = laplace(f, t, s)      % ευθύς → 1/(s+1)
g = ilaplace(F, s, t)     % αντίστροφος → e^(-t)
c = laplace(1, t, s)      % σταθερά 1 → 1/s
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Δοκίμασε f=exp(-2*t). Τι περιμένεις για το F; (απ.: 1/(s+2))

>> output

```
F = 1/(s + 1)
g = exp(-t)
c = 1/s
```

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ

Setup → Άσκηση 1: laplace → ilaplace → σύγκριση.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Το `s` δηλώνεται ΠΡΙΝ τη `laplace()`.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ21 · → σ24 (χρόνος) · → σ25 (Method)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Λύση Άσκησης 1 - η μορφή στον χρόνο

W05 W07 W08 **W09**

ΣΤΟΧΟΣ

Σύνδεσε symbolic μορφή με χρονική απόκριση.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

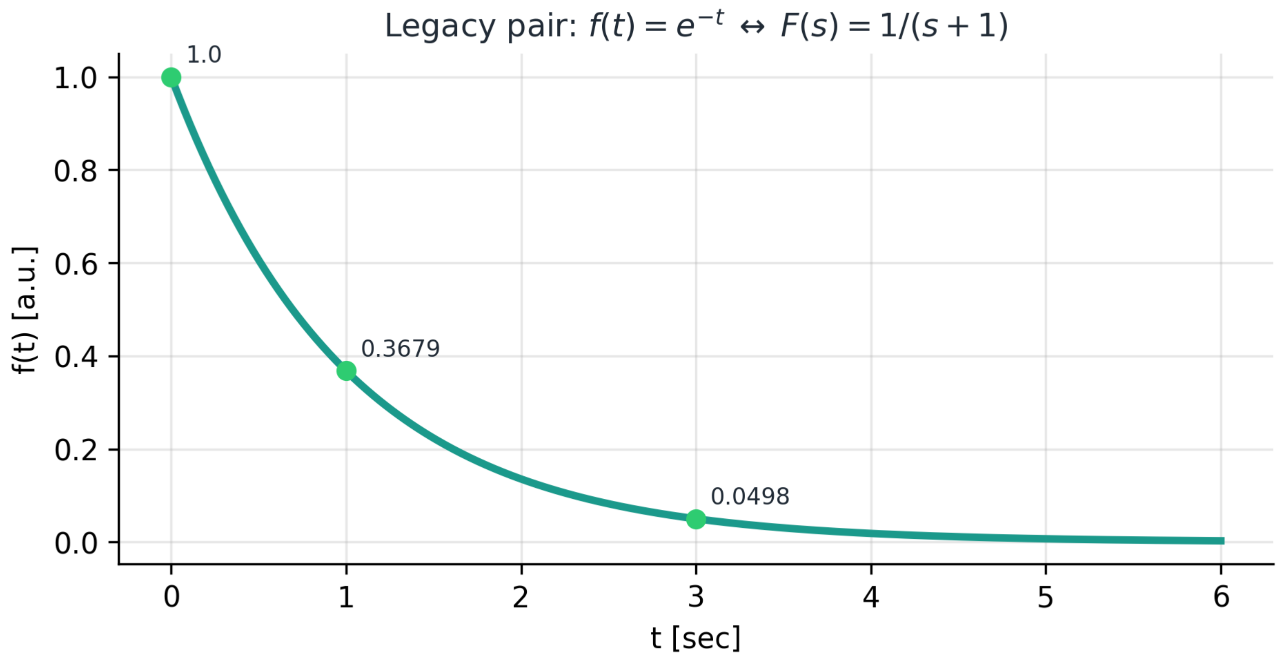
Πόσο είναι το f(1); (απ.: e^(−1)=0.3679)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ένας πόλος → ένας εκθετικός όρος. Όσο πιο αρνητικός ο πόλος, τόσο πιο γρήγορη η απόσβεση.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σχεδίασε νοερά το e^(−2t): σβήνει πιο γρήγορα ή πιο αργά;



F(s)=1/(s+1) ↔ f(t)=e^(−t)u(t)

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [sec], f(t) [a.u.]. Έλεγχοι: f(0)=1, f(1)=0.3679, f(3)=0.0498.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Φθίνων εκθετικός· στο t=0 ξεκινά από 1 και πλησιάζει το 0.

Μεθοδολογία

Μεθοδολογία - ευθύς Laplace

W05 W07 W08 **W09**

Αφού είδαμε ένα πλήρες παράδειγμα, εδώ είναι τα βήματα για κάθε ευθύ μετασχηματισμό f(t)→F(s).

1 **Όρισε σύμβολα**

pkg load symbolic; syms t s

2 **Όρισε τη συνάρτηση f(t)**

π.χ. f = 2*exp(-3*t) + 5*sin(4*t);

3 **Κάλεσε laplace**

F = laplace(f, t, s);

4 **Απλοποίησε & τύπωσε**

pretty(simplify(F)) για καθαρή μορφή.

OCTAVE - direct.m

```
pkg load symbolic
syms t s
f = ...;
F = laplace(f,t,s);
pretty(simplify(F))
```

ΣΥΝΔΕΣΗ

Είναι η ίδια ροή με την Άσκηση 1· αλλάζει μόνο η f(t). Προετοιμάζει την Ε.1.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ

t [s]· φάκελος e^(-t)· cos(2t) ταλάντωση.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Οι μηδενισμοί cos δεν αλλάζουν τον φάκελο.

ΣΥΝΔΕΣΗ

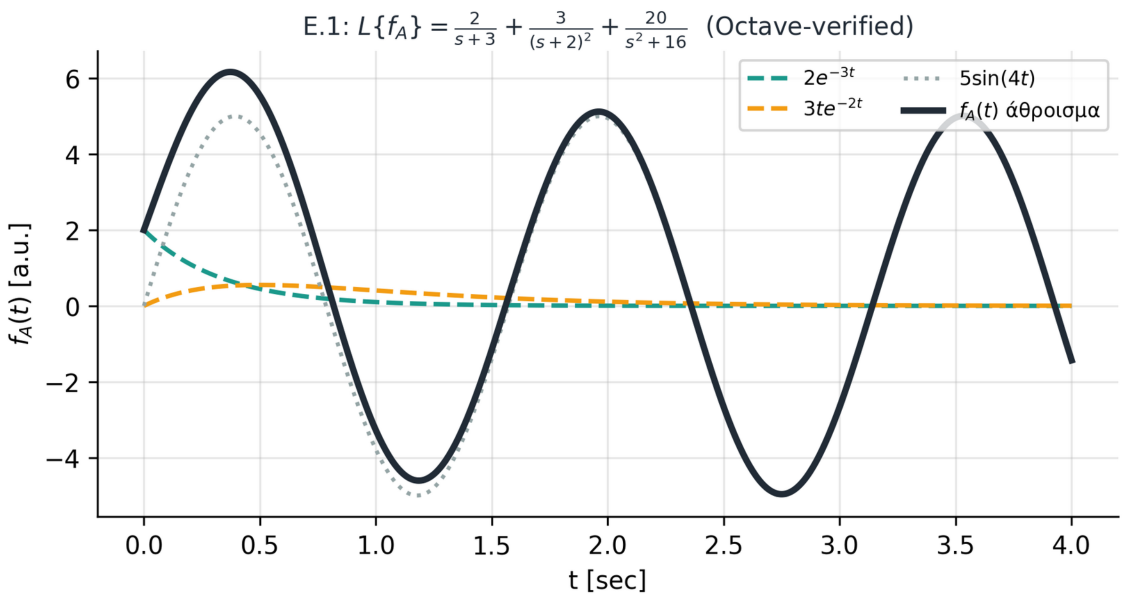
← σ22 (συμβολικό) · → σ25 (method card)

ΑΣΚΗΣΗ Ε.1

Ε.1 - ευθύς Laplace

W05 W07 W08 **W09**

ΕΚΦΩΝΗΣΗ **Βρες τον ευθύ Laplace της f_A(t)=2e^(−3t)+3t·e^(−2t)+5·sin(4t), για t≥0.**



OCTAVE - E1_direct.m

```
pkg load symbolic; syms t s
% τρεις όροι
f_A = 2*exp(-3*t) + 3*t*exp(-2*t) + 5*sin(4*t);
F_A = laplace(f_A, t, s);   % ευθύς Laplace
pretty(simplify(F_A))       % τυπωμένη μορφή
```

>> output

```
20/(s^2 + 16) + 2/(s + 3) + 3/(s + 2)^2
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ποιος όρος δίνει το 20/(s²+16); (απ.: 5·sin(4t), αφού L{sin4t}=4/(s²+16))

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
3 βήματα: syms → `laplace(f,t,s)` → έλεγχος F(s).

ΠΡΟΣΕΧΩ
Καθαρή έκφραση, όχι αριθμητικά (`exp(-t)`).

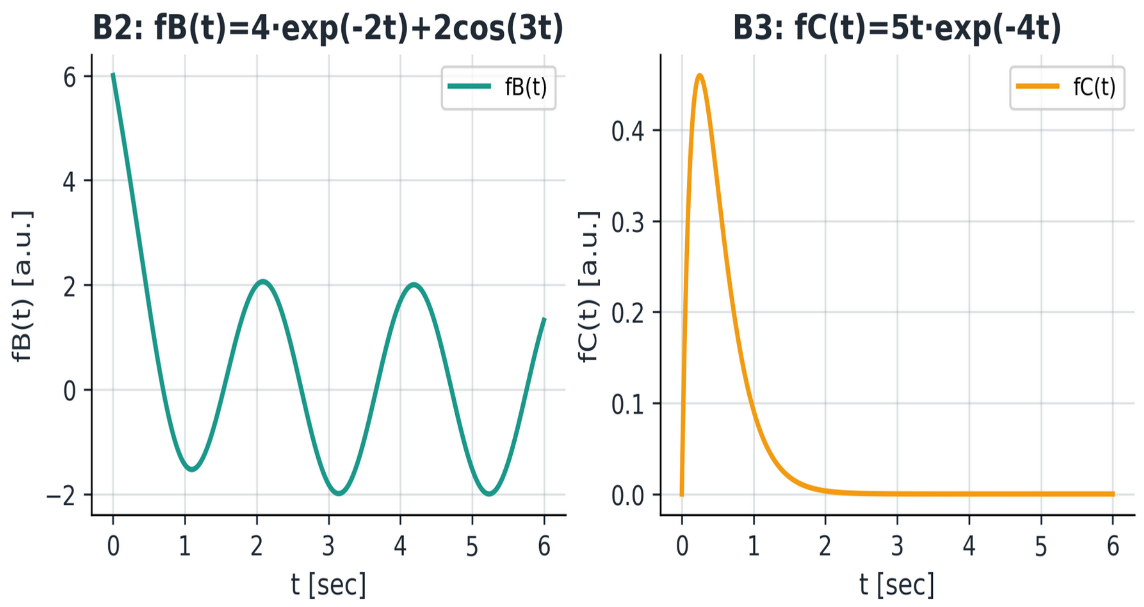
ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ24 · → σ26 (Ε.1/Β2/Β3) · → σ27 (αντίστροφος)

ΑΣΚΗΣΗ B

Παραλλαγές ευθέος Laplace: B2 και B3

W05 W07 W08 **W09**

ΕΚΦΩΝΗΣΗ B2: $f_β(t)=4e^{(-2t)}+2\cos(3t)$. B3: $f_c(t)=5t\cdot e^{(-4t)}$, $t\geq 0$. Βρες $F_β(s)$, $F_c(s)$ με laplace() και σχολίασε τους όρους.



OCTAVE - B_direct.m

```
pkg load symbolic; syms t s
% B2: εκθετικο + συνημιτονο (γραμμικοτητα)
fB = 4*exp(-2*t) + 2*cos(3*t);
FB = simplify(laplace(fB, t, s));    % αθροισμα ορων
disp(FB)                             % 4/(s+2)+2s/(s^2+9)
% B3: t*exp -> διπλος πολος
fC = 5*t*exp(-4*t);
FC = simplify(laplace(fC, t, s));    % L{t e^-at}=1/(s+a)^2
disp(FC)                             % 5/(s+4)^2
```

>> output

```
Fβ(s) = 4/(s+2) + 2s/(s²+9)
Fc(s) = 5/(s+4)²
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ποιος όρος της B2 δίνει πόλους στον φανταστικό άξονα; (απ.: το 2cos(3t) → ±j3)

Μεθοδολογία

Μεθοδολογία — αντίστροφος Laplace

W05 W07 W08 **W09**

Μετά τον ευθύ, οι ίδιες λογικές βήματα για τον αντίστροφο F(s)→f(t).

1 **Όρισε σύμβολα**

syms t s

2 **Όρισε το F(s)**

π.χ. F = (3*s+8)/((s+2)*(s+5));

3 **Κάλεσε ilaplace**

f = ilaplace(F, s, t);

4 **Απλοποίησε**

simplify(f) ή expand(f) για άθροισμα εκθετικών.

OCTAVE - inverse.m

```
syms t s
F = ...;
f = ilaplace(F,s,t);
pretty(simplify(f))
```

ΣΥΝΔΕΣΗ

Προσοχή: το ilaplace μπορεί να τυπώσει παραγοντοποιημένη μορφή - δες την Ε.2.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ

3 βήματα: syms → `ilaplace(F,s,t)` → compare f(t).

ΠΡΟΣΕΧΩ

`assume(t>=0)` για να φύγει factor `heaviside`.

ΣΥΝΔΕΣΗ

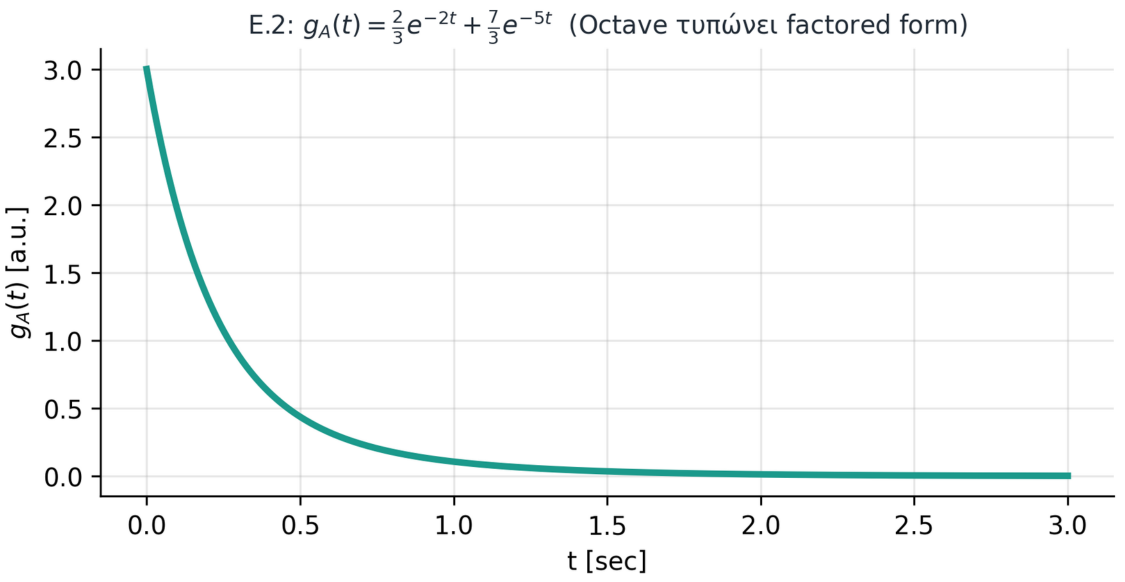
← σ25 (ευθύς) · → σ28 (Ε.2/C2/C3) · → σ29

ΑΣΚΗΣΗ Ε.2

Ε.2 - αντίστροφος Laplace

W05 W07 W08 **W09**

ΕΚΦΩΝΗΣΗ Βρες τον αντίστροφο Laplace του G_A(s)=(3s+8)/((s+2)(s+5)). Παράδωσε σχολιασμένο .m, την έξοδο ilaplace() και τη μορφή αθροίσματος εκθετικών.



OCTAVE - E2_inverse.m

```
pkg load symbolic; syms t s
G_A = (3*s + 8)/((s+2)*(s+5));
g_A = ilaplace(G_A, s, t);  % αντίστροφος
% Octave τυπώνει παραγοντοποιημένη μορφή:
pretty(g_A)
```

>> output

```
(2*exp(3*t) + 7)*exp(-5*t)*heaviside(t)/3
% = (2/3)e^(-2t) + (7/3)e^(-5t)
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

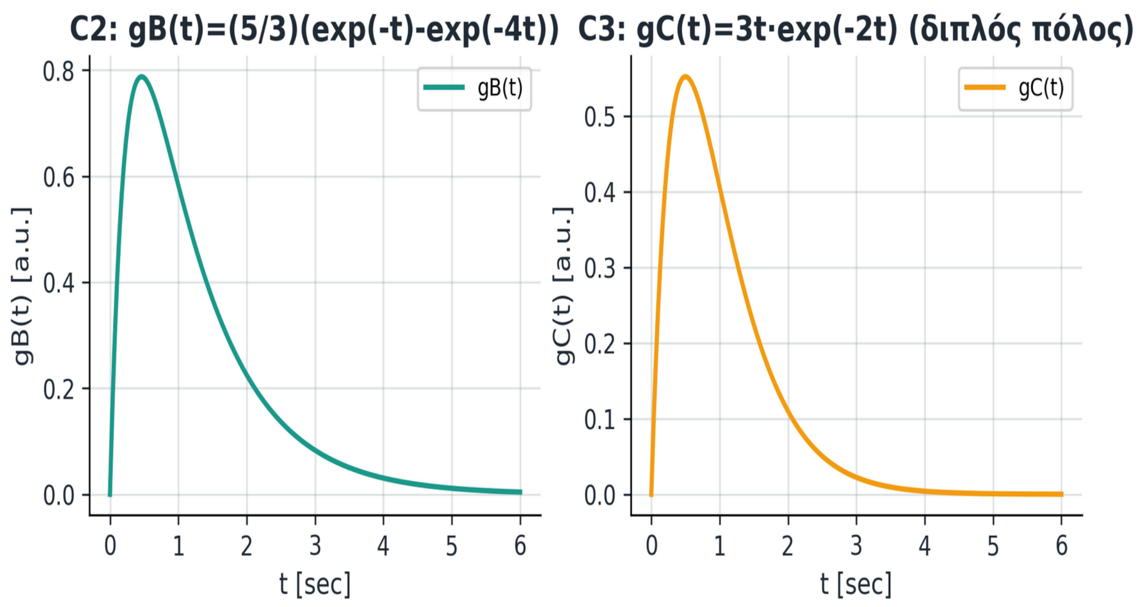
Επαλήθευσε: στο t=0 → (2+7)/3 = 3. Άρα g_A(0)=3.

ΑΣΚΗΣΗ C

Παραλλαγές αντίστροφου Laplace: C2 και C3

W05 W07 W08 **W09**

ΕΚΦΩΝΗΣΗ C2: $G_B(s)=5/((s+1)(s+4))$. C3: $G_C(s)=3/(s+2)^2$ (διπλός πόλος). Βρες $g_B(t)$, $g_C(t)$ με ilaplace().



OCTAVE - C_inverse.m

```
pkg load symbolic; syms t s
% C2: δυο απλοι πολοι -> μερικα κλασματα
GB = 5/((s+1)*(s+4));
gB = simplify(ilaplace(GB, s, t));  % (5/3)(e^-t - e^-4t)
disp(gB)
% C3: διπλος πολος -> ορος t*e^-at
GC = 3/(s+2)^2;
gC = simplify(ilaplace(GC, s, t));  % 3 t e^-2t
disp(gC)
```

>> output

```
gβ(t) = (5/3)e^(−t) − (5/3)e^(−4t)
gc(t) = 3t·e^(−2t)
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γιατί η C3 δίνει όρο με t; (απ.: διπλός πόλος → t·e^(−at))

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
f(t-a)·u(t-a) ⇄ e^(-as)·F(s).

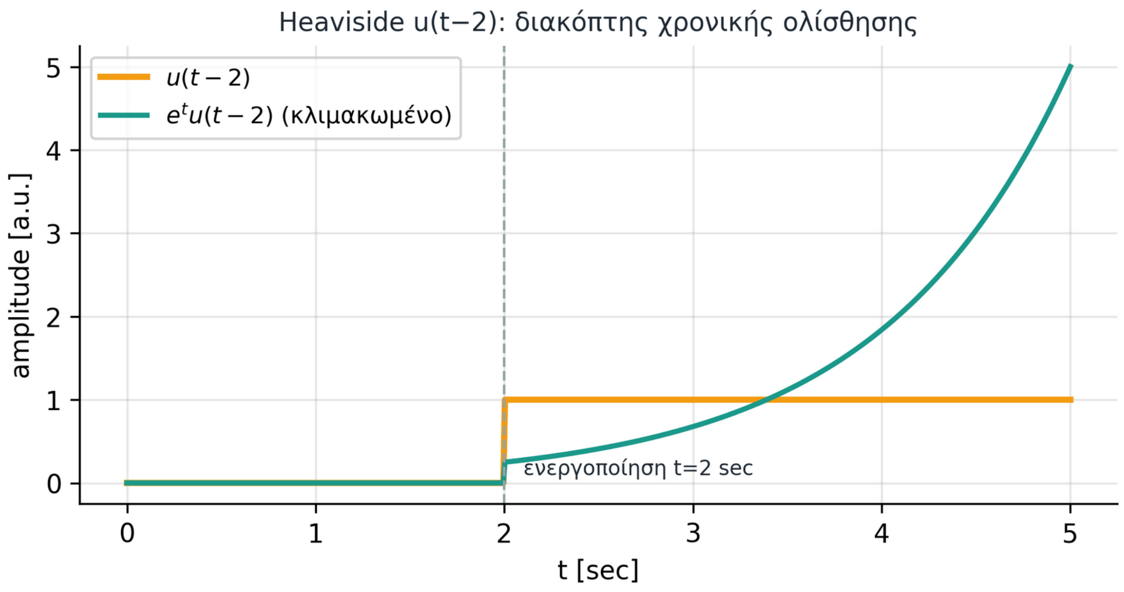
ΠΡΟΣΕΧΩ
Χωρίς u(t-a), διαφορετική f — όρισε περιοχή.

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ27 (ilaplace) · → σ30 (παραλλαγή D)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Heaviside - καθαρό θεώρημα 2ης μετατόπισης

ΕΚΦΩΝΗΣΗ **Άσκηση 3 - Το καθαρό θεώρημα ισχύει όταν μετατοπίζεις ΚΑΙ τη συνάρτηση: g(t−2)·u(t−2) → e^(−2s)·G(s). Προσοχή: το legacy e^t·u(t−2) ΔΕΝ δίνει καθαρό e^(−2s) - βγάζει επιπλέον e^2.**



OCTAVE - ex3_heaviside.m

```
pkg load symbolic; syms t s
% ΚΑΘΑΡΟ θεώρημα: g(t-2)*u(t-2) -> e^(-2s)G(s)
Fc = laplace(exp(t-2)*heaviside(t-2), t, s)
% LEGACY (μη μετατοπισμένη συνάρτηση):
Fl = laplace(exp(t)*heaviside(t-2), t, s)
```

>> output

```
Fc = e^(-2*s)/(s - 1)        % καθαρό e^(-2s)
Fl = e^(2 - 2*s)/(s - 1)     % ΠΡΟΣΟΧΗ: επιπλέον e^2
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γιατί το e^t·u(t−2) δεν δίνει καθαρό e^(−2s);
(απ.: η συνάρτηση δεν είναι μετατοπισμένη → βγαίνει e^2·e^(−2s)).
Αντίστροφα: ilaplace{e^(−2s)·G}=g(t−2)·u(t−2).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
D1: f(t-a) (χωρίς u)· D2: f(t-a)·u(t-a).

ΠΡΟΣΕΧΩ
Παράλειψη `heaviside(t-a)` → άλλη f σε όλη τη ℝ.

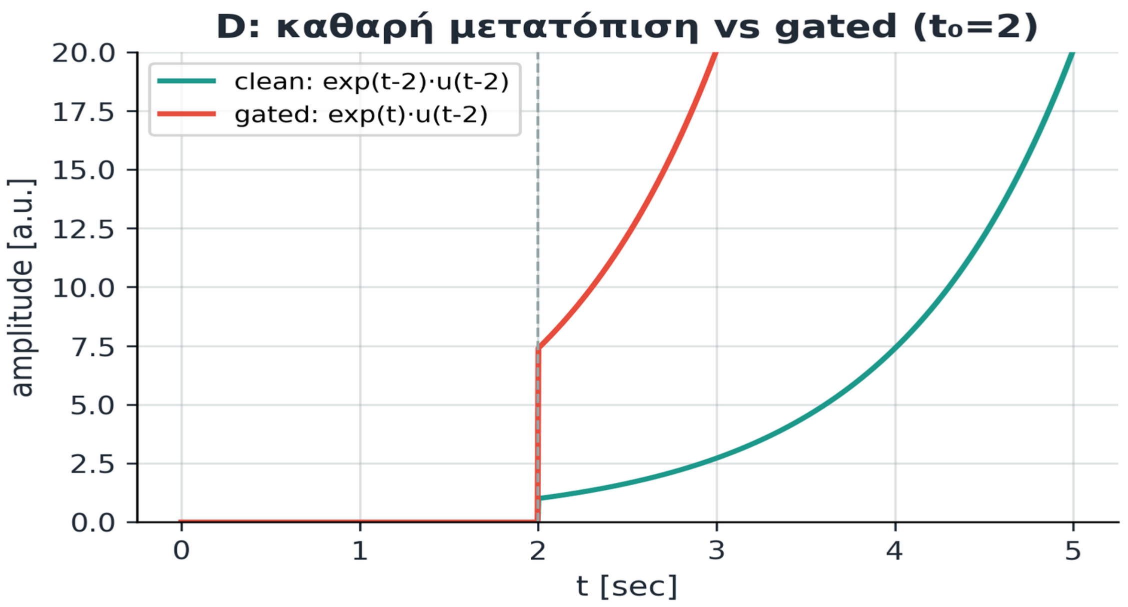
ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ29 (Θεώρημα) · → σ31 (Checkpoint B)

ΑΣΚΗΣΗ D

Καθαρή μετατόπιση vs gated έκφραση

W05 W07 W08 **W09**

ΕΚΦΩΝΗΣΗ D1 (καθαρή): e^(t−2)u(t−2). D2 (gated): e^t·u(t−2). Σύγκρινε τους Laplace και τις χρονικές μορφές.



OCTAVE - D_shift.m

```
pkg load symbolic; syms t s
% D1: ΚΑΘΑΡΗ μετατοπιση f(t-2)u(t-2)
clean = exp(t-2)*heaviside(t-2);
Fclean = simplify(laplace(clean, t, s));  % e^-2s/(s-1)
disp(Fclean)
% D2: GATED (οχι καθαρη): e^t u(t-2)=e^2 e^(t-2)u(t-2)
gated = exp(t)*heaviside(t-2);
Fgated = simplify(laplace(gated, t, s));  % e^(2-2s)/(s-1)
disp(Fgated)
```

>> output

```
L{D1} = e^(−2s)/(s−1)
L{D2} = e^(2−2s)/(s−1)   (παράγοντας e² από το «κόψιμο»)
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γιατί η D2 έχει επιπλέον e^2; (απ.: $e^t=e^2\cdot e^{(t-2)}$, το e^2 βγαίνει σταθερά)

CHECKPOINT

Checkpoint B - symbolic workflow

W05 W07 W08 **W09**

Πριν περάσουμε στα ρητά συστήματα, ελέγχουμε ότι ξέρεις ποια εντολή κάνει τι. Είσοδος → εντολή → έξοδος.

Θέλω να...	Εντολή Octave	Αποτέλεσμα
f(t) → F(s)	laplace(f,t,s)	ρητή συνάρτηση του s
F(s) → f(t)	ilaplace(F,s,t)	συνάρτηση του t (ίσως παραγοντοποιημένη)
καθαρή μετατόπιση g(t-a)·u(t-a)	heaviside(t−a)	e^(-a·s)·G(s)
καθαρή μορφή	pretty(simplify(...))	αναγνώσιμη εκτύπωση

Αν μπορείς να συμπληρώσεις κάθε γραμμή χωρίς βοήθεια, είσαι έτοιμος για τα ρητά H(s) και το residue (Ενότητα C). Προσοχή: g(t)·u(t-a) ΔΕΝ είναι πάντα καθαρή μετατόπιση.

ΕΝΟΤΗΤΑ 3 — σ34-σ44

Ρητή Μορφή & Partial Fractions

H(s)=N(s)/D(s) · roots · residue (R,P,K) · pole-zero · E.3 · E

ΓΕΦΥΡΑ

Ρητή μορφή H(s) = N(s)/D(s)

W05 W07 W08 **W09**

Η έξοδος του laplace() είναι σχεδόν πάντα ρητή συνάρτηση: ένα πολυώνυμο N(s) στον αριθμητή διά ένα πολυώνυμο D(s) στον παρονομαστή. Όλη η Ενότητα C δουλεύει πάνω σε αυτή τη μορφή.

$$H(s) = N(s) \,/\, D(s)$$

ΑΡΙΘΜΗΤΗΣ N(s)

Οι ρίζες του = ΜΗΔΕΝΙΚΑ. Καθορίζουν πού μηδενίζεται το H(s).

ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΣ D(s)

Οι ρίζες του = ΠΟΛΟΙ. Καθορίζουν εκθετικοί όροι, ROC, ευστάθεια.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Στο H_a=(2s+5)/((s+1)(s+3)): ποιο πολυώνυμο δίνει τους πόλους; (απ.: ο παρονομαστής)

ΠΡΟΣΟΧΗ

Πολυώνυμα σε Octave - σειρά συντελεστών

W05 W07 W08 **W09**

Στο Octave ένα πολυώνυμο είναι διάνυσμα συντελεστών από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη. Λάθος σειρά = λάθος ρίζες.
Πρόσεξε τα μηδενικά για δυνάμεις που λείπουν

Πολυώνυμο	Διάνυσμα Octave	Σχόλιο
$s^2 + 4s + 3$	[1 4 3]	παρονομαστής του H_a
$2s + 5$	[2 5]	αριθμητής του H_a
$s^2 + 0 \cdot s + 9$	[1 0 9]	το 0 για τον όρο s που λείπει
$(s+2)^2 = s^2+4s+4$	[1 4 4]	διπλός πόλος στο −2

Πάντα από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη. roots([1 4 3]) → −1, −3. roots([2 5]) → −2.5.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
`[a_n a_(n-1) … a_0]`: φθίνουσα σειρά δυνάμεων.

ΠΡΟΣΕΧΩ
Αντίστροφη σειρά → λάθος ρίζες ($s^3+2s^2+s+1 \neq$ [1 1 2 1]).

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ34 · → σ36 (Method H(s)) · → σ44 row 4

Μεθοδολογία

Μεθοδολογία — πώς διαβάζουμε ένα H(s)

W05 W07 W08 **W09**

Πέντε βήματα για να «διαβάσεις» οποιοδήποτε ρητό H(s) από τον αριθμητή/παρονομαστή μέχρι τους εκθετικούς χρονικούς όρους.

1 — **Γράψε num & den**
num=[2 5]; den=[1 4 3];

2 — **Βρες ρίζες**
roots(num) → μηδενικά, roots(den) → πόλοι

3 — **Όρισε ROC**
δεξιά του δεξιότερου πόλου για αιτιατό σήμα

4 — **Partial fractions**
[R,P,K]=residue(num,den)

5
κάθε πόλος → R_i·e^(P_i·t)u(t)

OCTAVE - read_Hs.m

```
num=[2 5]; den=[1 4 3];
z = roots(num)   % -2.5
p = roots(den)   % -1, -3
[R,P,K]=residue(num,den);
```

ΣΥΝΔΕΣΗ

Η ίδια αλυσίδα num→roots→ROC→residue→εκθετικοί όροι εφαρμόζεται στην Ε.3.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
3 Q: πού οι πόλοι; πού τα μηδενικά; deg(N) vs deg(D);

ΠΡΟΣΕΧΩ
deg(N)≥deg(D) → K-term: polynomial division πρώτα.

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ35 (πολυώνυμα) · → σ37 (roots) · → σ44 row 6

ΑΣΚΗΣΗ Ε.3

Pole-zero του H_a με roots()

W05 · W07 · W08 · **W09**

Το ίδιο H_a από τη διαφ. 11, τώρα υπολογισμένο στο Octave. roots([2 5]) δίνει το μηδενικό, roots([1 4 3]) δίνει τους πόλους - επιβεβαιώνουμε αριθμητικά τη γεωμετρία.

ΣΤΟΧΟΣ

Επιβεβαίωσε αριθμητικά πόλους & μηδενικά.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

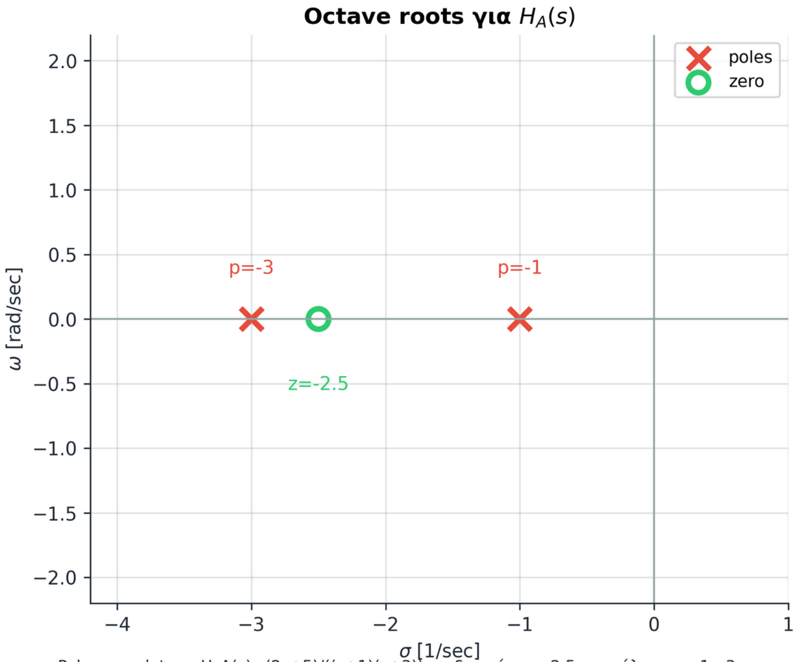
Πόσους πόλους περιμένεις από den βαθμού 2; (απ.: 2)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο βαθμός του παρονομαστή = πλήθος πόλων· εδώ 2 απλοί πραγματικοί πόλοι.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Τρέξε roots([1 4 4]). Τι αλλάζει; (απ.: διπλός πόλος −2)



Pole-zero plot για H_A(s)=(2s+5)/((s+1)(s+3)): μηδενικό στο -2.5 και πόλοι στα -1, -3.

$$H_a(s) = (2s+5)/(s^2+4s+3)$$

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ [1/sec], ω [rad/sec]. num=[2 5], den=[1 4 3].

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Πόλοι (×) στο −1, −3· μηδενικό (○) στο −2.5 - ταυτόσημο με διαφ. 11.

ΠΡΟΣΕΧΩ

`roots(N)` → μηδενικά· `roots(D)` → πόλοι. Όχι το ίδιο.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ36 (Method H(s)) · → σ38 (ROC) · → σ42 (H_a)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ROC και ύπαρξη Fourier

W05 W07 W08 **W09**

Ο άξονας jω δεν είναι αυτονόητα μέσα στην ROC. Για το αιτιατό H_a η ROC είναι Re{s}>−1 - περιέχει τον jω άξονα, άρα ο Fourier ορίζεται. Αν η ROC δεν τον περιείχε, δεν θα υπήρχε Fourier.

ΣΤΟΧΟΣ

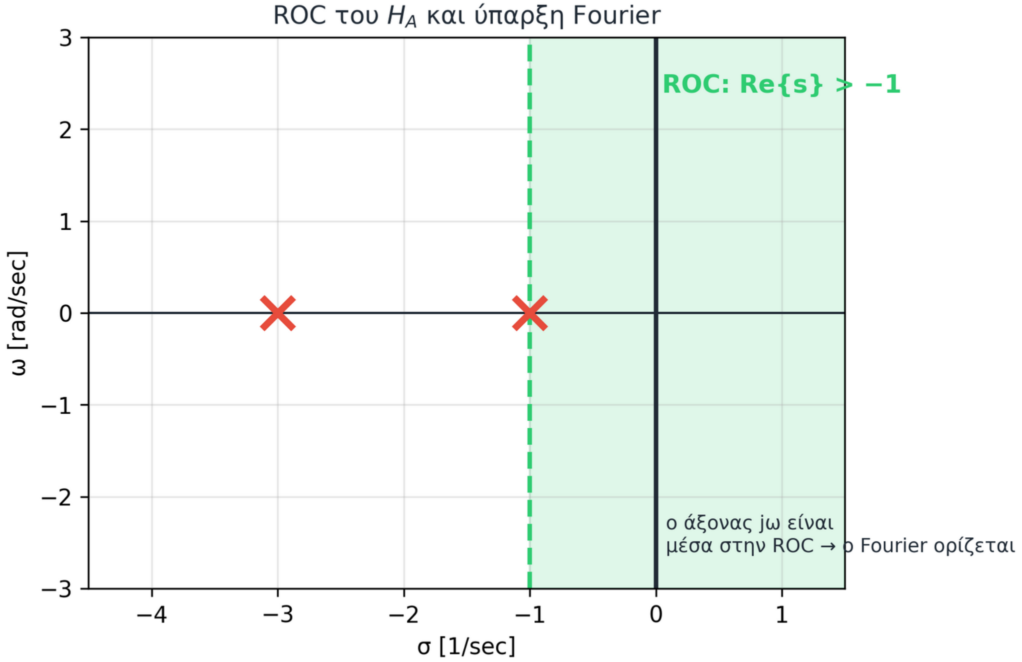
Σύνδεσε ROC με την ύπαρξη του Fourier.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Περιέχει η ROC Re{s}>−1 τον άξονα σ=0; (απ.: ναι)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο Fourier υπάρχει αν και μόνο αν ο jω άξονας ανήκει στην ROC.



ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Με πόλο στο +1 & αιτιατή ROC (Re{s}>+1): περιέχει η ROC τον jω άξονα; (απ.: όχι → δεν ορίζεται Fourier)

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ [1/sec], ω [rad/sec]. ROC Re{s}>−1, πόλοι −1, −3.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Η σκιασμένη ROC αγγίζει αλλά δεν περιέχει τον πόλο −1.

ΠΡΟΣΕΧΩ

ROC περιέχει jω → υπάρχει Fourier· αλλιώς, καμία ισόθεση.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ15 (ROC ορισμός) · → σ42 (Fourier check per H_x)

ΕΝΝΟΙΑ

Partial fractions - το νόημα πριν την εντολή

W05 W07 W08 **W09**

$$H_a(s) = 1.5/(s+1) + 0.5/(s+3)$$

ΑΛΓΕΒΡΑ

Ένα κλάσμα ανά πόλο. Ο αριθμητής κάθε όρου = residue.

ΧΡΟΝΟΣ

$R/(s-P) \rightarrow R\cdot e\char`^(P\cdot t)u(t)$. Άθροισμα όρων = $h(t)$.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Πόσους όρους partial fractions περιμένεις για 2 απλούς πόλους; (απ.: 2)

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ

$1/((s+1)(s+2)) = A/(s+1) + B/(s+2)$· A,B από κάλυψη.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Χειροκίνητο A, B πριν `residue()`.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ34 (ρητές) · → σ40 (R, P, K)

ΑΝΑΤΟΜΙΑ

residue(): τι σημαίνουν R, P, K

W05 W07 W08 **W09**

Η εντολή residue() κάνει partial-fraction expansion του N(s)/D(s). Επιστρέφει τρία διανύσματα: τα υπόλοιπα R, τους πόλους P και το πολυωνυμικό πηλίκο K.

ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΟΥΝ R, P, K

R = υπόλοιπα (residues) - ο συντελεστής κάθε απλού πόλου.
P = πόλοι - οι ρίζες του παρονομαστή.
K = πολυωνυμικό πηλίκο - άδειο όταν deg(num) < deg(den).

OCTAVE - residue_anatomy.m

```
num = [2 5];        % αριθμητής 2s+5
den = [1 4 3];      % παρονομαστής s^2+4s+3
[R, P, K] = residue(num, den);
```

R (residues)	P (poles)	K (quotient)
0.5000 1.5000	-3 -1	[](0x0)

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Άλλαξε num σε [2 5 1] (deg 2). Τι γίνεται το K;

Σειρά Octave: R=[0.5; 1.5], P=[−3; −1] (ακολουθεί τη σειρά των πόλων). Το άθροισμα εκθετικών όρων ΔΕΝ αλλάζει: 0.5·e^(−3t)+1.5·e^(−t) = 1.5e^(−t)+0.5e^(−3t).

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
3 έξοδοι: R=residues, P=poles, K=άμεση συνεισφορά.

ΠΡΟΣΕΧΩ
K≠[] όταν deg(N)≥deg(D) — όχι σφάλμα, μήνυμα.

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ39 (νόημα PF) · → σ41 (R/P → χρόνος)

Μεθοδολογία

Μεθοδολογία — από residue σε εκθετικούς όρους (και αντίστροφα)

W05 W07 W08 **W09**

Πώς μετατρέπουμε τα διανύσματα R, P σε χρονική συνάρτηση h(t) - και πώς γυρίζουμε πίσω στο ρητό H(s).

1 **Πάρε τα ζεύγη (R_i, P_i)**
από [R,P,K]=residue(num,den)

2 **Κάθε ζεύγος → όρος**
R_i/(s−P_i) → R_i·e^(P_i·t)·u(t)

3 **Άθροισε τους όρους**
h(t) = Σ R_i·e^(P_i·t)·u(t)

4 **Επαλήθευσε checkpoints**
υπολόγισε h(0), h(1) και σύγκρινε

5 **Αντίστροφα: άθροισμα → ρητό**
[num,den]=residue(R,P,K) ανασυνθέτει το H(s)

OCTAVE - εκθετικοί όροι.m

```
% ευθύ: ρητό → R,P,K → εκθετικοί όροι
[R,P,K]=residue(num,den);
t=linspace(0,6,400); h=zeros(size(t));
for k=1:numel(R)
  h = h + R(k)*exp(P(k)*t);
end
% αντίστροφο: R,P,K → ρητό H(s)
[num2,den2]=residue(R,P,K);
```

ΣΥΝΔΕΣΗ

Ίδια ιδέα με τα εκθετικοί όζροι της διαφ. 13. Η residue() δουλεύει και στις δύο κατευθύνσεις: ρητό ↔ άθροισμα κλασμάτων

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
Map (R_i, P_i) → R_i·e^(P_i·t)· σύνθεση όρων.

ΠΡΟΣΕΧΩ
Μιγαδ. R_i → ζευγάρι e^(at)·cos/sin(bt) για πραγμ. έξοδο.

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ40 (R, P, K) · → σ42 (M3 grid)

ΑΣΚΗΣΗ Ε.3

Ε.3 - Λυμένο residue

W05 W07 W08 **W09**

Επίλυση προβλήματος residue

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσο είναι το h(0); (απ.: άθροισμα residues = 0.5+1.5 = 2)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο κώδικας ταυτίζεται με τη χειρωνακτική ανάλυση: ίδιοι πόλοι −1/−3, ίδια residues.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Επαλήθευσε ότι R(1)/(s−P(1)) αντιστοιχεί στον πόλο −3, όχι −1.

OCTAVE - E3_residue.m

```
% Hₐ(s) = (2s+5)/(s^2+4s+3) - ίδιο με διαφ. 11
num = [2 5];  den = [1 4 3];
z = roots(num);             % μηδενικό -2.5
[R, P, K] = residue(num, den);  % partial fractions
% h(t) = ΣR_i e^{P_i t} u(t)
```

>> output

```
z = -2.5000
R = [0.5000; 1.5000]
P = [-3; -1]
K = [](0x0)
% h(t)=1.5e^{-t}+0.5e^{-3t}
```

ΛΑΘΗ

Συνηθισμένα λάθη - Ενότητα C

W05 W07 W08 **W09**

Οι τρεις κλασικές παγίδες στα ρητά H(s) και το residue. Αριστερά το λάθος, δεξιά η σωστή σκέψη.

Λάθος	Γιατί είναι λάθος	Σωστά
den=[4 3 1]	αντίστροφη σειρά συντελεστών	den=[1 4 3] (μεγαλύτερη δύναμη πρώτη)
ROC περιέχει πόλο	εκεί η συνάρτηση απειρίζεται	ROC δεξιά του δεξιότερου πόλου
λάθος πρόσημο στο P	το P είναι ρίζα, όχι συντελεστής	P=−1, −3 (όχι +1, +3)

Οι ίδιες παγίδες εμφανίζονται στην Ε.3 - έλεγξε σειρά συντελεστών, ROC και πρόσημα.

ΕΝΟΤΗΤΑ 4 — σ47-σ57

ΔΕ με αρχικές συνθήκες & Συνέλιξη

L{f′} · L{f″} · solve · E.4 · F · transfer function · X(s)·H(s)

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ποιες ΔΕ λύνει ο Laplace — και ποιες όχι

W05 W07 W08 **W09**

Το Laplace λύνει γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές. ΟΧΙ μη-γραμμικές, ΟΧΙ μεταβλητούς συντελεστές, ΟΧΙ PDE.

ΣΤΟΧΟΣ

Αναγνώρισε πότε εφαρμόζεται και πότε ΟΧΙ ο μετασχηματισμός Laplace.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Λύνει ο Laplace την y·y′=sin(t); (απ.: όχι — μη γραμμική)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο Laplace είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Η παραγώγιση γίνεται πολλαπλασιασμός με s.
Σταθεροί συντελεστές → αλγεβρική εξίσωση στο s.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Ποιες ΑΣ απαιτούνται; (απ.: y(0), y′(0), …, y^(n−1)(0) σε t=0)

ΛΥΝΕΙ

γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές (LCC-DE)

- y, y′, y″, …, y^(n) με σταθερούς πολλαπλασιαστές
- ΑΣ ορισμένες σε t=0
- Πηγή f(t) από:
  - εκθετική / πολυωνυμική
  - sin / cos
  - Heaviside u(t−a), δ(t−a)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:
y″ + 5y′ + 6y = 3e^(−2t),
y(0) = 0, y′(0) = 1

→ βλ. σ49-σ52 για πλήρη εφαρμογή

ΔΕΝ ΛΥΝΕΙ

(ή λύνει μόνο με μεγάλη δυσκολία)

- Μη γραμμικές:
  $y' = y^2$
  $y \cdot y' = \sin(t)$

- Μεταβλητοί συντελεστές:
  $t \cdot y'' + y' + y = 0$

- Πηγή με «κακό» Laplace:
  $1/(1+t)$, $e^{(t^2)}$

- PDE — μερικές διαφορικές:
  u_t = u_xx (διάχυση) → χρειάζεται διπλό Laplace

ΣΥΝΗΘΗ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Εφαρμογή Laplace σε μη-γραμμική ΔΕ → αλγεβρικά μπερδεύεται. Πάντα ελέγξτε γραμμικότητα + σταθερότητα συντελεστών πρώτα.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ45 (divider ΔΕ + Συνέλιξη) · → σ47 (Γιατί Laplace) · → σ49-σ52 παράδειγμα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γιατί Laplace στις διαφορικές εξισώσεις

W05 W07 W08 **W09**

Μια ΔΕ στον χρόνο γίνεται αλγεβρική εξίσωση στο s-domain. Λύνουμε με άλγεβρα, και ο αντίστροφος Laplace μας δίνει τη λύση y(t) - μαζί με τις αρχικές συνθήκες, αυτόματα.

ΔΕ στον χρόνο → Laplace → αλγεβρική εξίσωση → λύση Y(s) → inverse → y(t)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Η μεγάλη ιδέα: η παραγώγιση γίνεται πολλαπλασιασμός με s. Έτσι μια διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε πολυωνυμική - που ξέρουμε να λύνουμε.
Οι αρχικές συνθήκες μπαίνουν μέσα στον κανόνα της παραγώγου, άρα δεν χρειάζονται ξεχωριστά «c_1, c_2»

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σε ποιο βήμα μπαίνουν οι αρχικές συνθήκες; (απ.: στον κανόνα του Laplace της παραγώγου)

ΚΑΝΟΝΕΣ

Κανόνες παραγώγου με αρχικές συνθήκες

W05 W07 W08 W09

Αυτοί είναι ακριβώς οι κανόνες που χρειάζεται η Ε.4. Η παραγώγιση στον χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός με s, μείον τις αρχικές συνθήκες.

Στον χρόνο	Στο s-domain	Σημείωση
y(t)	Y(s)	ο μετασχηματισμός
y'(t)	s·Y(s) − y(0)	μία αρχική συνθήκη
y''(t)	s^2·Y(s) − s·y(0) − y'(0)	δύο αρχικές συνθήκες
L{3e^(−2t)}	3/(s+2)	δεξί μέλος της Ε.4

Οι αρχικές συνθήκες y(0), y'(0) ενσωματώνονται εδώ - γι' αυτό η μέθοδος Laplace τις χειρίζεται αυτόματα.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
y'+2y=0, y(0)=1 → sY-1+2Y=0 → Y=1/(s+2) → e^(-2t).

ΠΡΟΣΕΧΩ
L{y'}=sY-y(0): η αρχική συνθήκη μπαίνει ΕΔΩ.

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ47 (ΓΕΦΥΡΑ) · → σ49 (κανόνες)

Μεθοδολογία

Μεθοδολογία - λύση ΔΕ με Laplace

W05 W07 W08 **W09**

Πριν τα παραδείγματα — τα 5 βήματα-κλειδιά της μεθόδου με Laplace. Τα ίδια βήματα λύνουν την Ε.4 και τις παραλλαγές της.

1 — **Όρισε σύμβολα & άγνωστη Y(s)**

syms t s Y; ορισμός αρχικών συνθηκών y(0), y'(0).

2 — **Μετασχημάτισε τη ΔΕ**

$L\{y'\}=sY-y(0)$, $L\{y''\}=s^2Y-sy(0)-y'(0)$.

3 — **Λύσε αλγεβρικά ως προς Y(s)**

Y = solve(eq, Y) - καθαρή ρητή συνάρτηση του s.

4 — **Αντίστροφος Laplace**

y(t) = ilaplace(Y, s, t) - επιστροφή στον χρόνο.

5 — **Σχεδίασε & έλεγξε**

plot y(t) και επιβεβαίωσε τις αρχικές συνθήκες στο t=0.

OCTAVE - solve_de.m

```
pkg load symbolic; syms t s Y
y0=0; yp0=1;
Y1=s*Y-y0;  Y2=s^2*Y-s*y0-yp0;
eq=Y2+5*Y1+6*Y==3/(s+2);
Ysol=solve(eq,Y);
y_t=ilaplace(Ysol,s,t);
```

ΣΥΝΔΕΣΗ

Είναι η ίδια αλυσίδα laplace→άλγεβρα→ilaplace που είδαμε στα Ε.1/Ε.2, τώρα με αρχικές συνθήκες.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ

t [s]· y(t)=e^(-2t)· σημείο εκκίνησης y(0)=1.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Verify: υπολόγισε y(t=0) — πρέπει να δίνει 1.

← σ48 (κανόνες παραγώγου) · → σ50 (μικρή ΔΕ — εφαρμογή) · → σ51 (Ε.4 — πλήρης άσκηση)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μικρή ΔΕ — εφαρμογή της μεθόδου

W05 W07 W08 **W09**

Ένα ελάχιστο παράδειγμα: y′+y=δ(t). Στο s-domain γίνεται sY+Y=1 → Y=1/(s+1). Ο αντίστροφος δίνει y(t)=e^(−t)u(t) - η κρουστική απόκριση ενός συστήματος πρώτης τάξης.

ΣΤΟΧΟΣ

δ(t)=μοναδιαία κρουστική, L{δ(t)}=1. Δες όλη τη ροή.

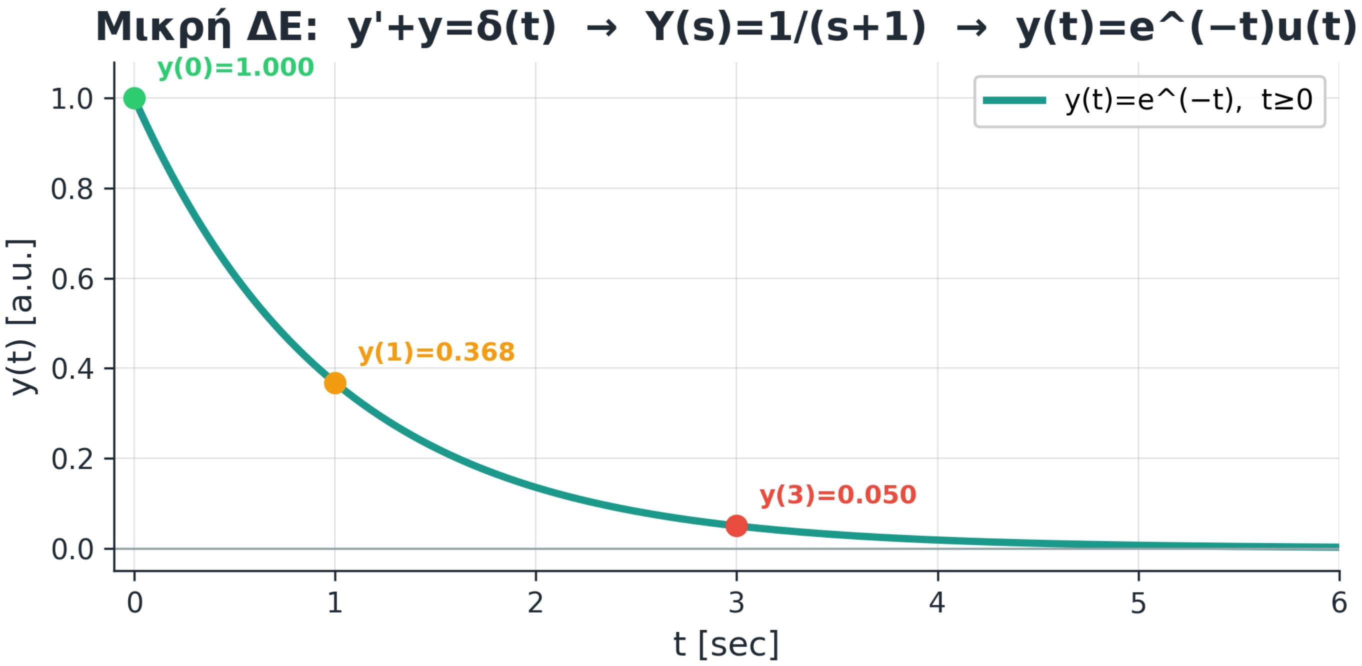
ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Τι δίνει ο Laplace του δ(t); (απ.: 1)

ΕΞΗΓΗΣΗ

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Λύσε νοερά y′+2y=δ(t). (απ.: y=e^(−2t)u(t))



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [sec], y(t) [a.u.]. Έλεγχοι: y(0)=1, y(1)=0.368, y(3)=0.050.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Φθίνων εκθετικός - ίδια μορφή με την Άσκηση 1, τώρα από ΔΕ.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Σειρά IC: y(0)→s^(n-1), y'(0)→s^(n-2)... εύκολο λάθος.

← σ49 (Μεθοδολογία — 5 βήματα) · → σ51 (Ε.4 — πλήρες παράδειγμα)

ΑΣΚΗΣΗ Ε.4

Άσκηση Ε.4 — στήσιμο της αλγεβρικής εξίσωσης

W05 W07 W08 W09

Λύσε ΔΕ: y″+5y′+6y=3e^(−2t), y(0)=0, y′(0)=1. Πρώτο βήμα: μετάφραση στο s-domain.

ΣΤΟΧΟΣ

Μάθε πώς μετατρέπεται μια ΔΕ σε αλγεβρική εξίσωση Y(s).

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσο είναι το L{3e^(−2t)}; (απ.: 3/(s+2))

ΕΞΗΓΗΣΗ

Κάθε όρος μετασχηματίζεται χωριστά. Οι IC y(0), y′(0) μπαίνουν στους κανόνες παραγώγου.
Το «==» στο Octave ορίζει ΕΞΙΣΩΣΗ (όχι ανάθεση).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γιατί δεν χρειαζόμαστε σταθερές c_1, c_2; (απ.: τις δίνουν οι αρχικές συνθήκες y(0), y′(0))

OCTAVE — E4_setup.m

```
pkg load symbolic; syms t s Y    % Y = σύμβολο
y0 = 0;  yp0 = 1;                 % αρχικές συνθήκες

% Βήμα 1 — εκφράζω L{y}, L{y'}, L{y''}
L_y   = Y;
L_yp  = s*Y - y0;                 % L{y'}  = sY − y(0)
L_ypp = s^2*Y - s*y0 - yp0;       % L{y''} = s²Y − s·y(0) − y'(0)

% Βήμα 2 — στήνω την εξίσωση
% (== ορίζει ΕΞΙΣΩΣΗ, όχι ανάθεση!)
eq = L_ypp + 5*L_yp + 6*L_y == 3/(s+2);
%                                 ↑
%                           L{3·e^(−2t)} = 3/(s+2)

disp(eq)         % εμφάνιση εξίσωσης πριν τη λύση
```

ΑΞΟΝΕΣ

s-domain (κανείς t στο code), Y(s) είναι ρητή — οι IC ενσωματώνονται.

ΠΡΟΣΕΧΩ

«==» ΕΞΙΣΩΣΗ ≠ «=» ΑΝΑΘΕΣΗ. Y σύμβολο, όχι αριθμός. αρχικές πριν το `eq`.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ49 Μεθοδολογία · → σ52 επίλυση eq → y(t) · → σ63 διπλός πόλος

ΑΣΚΗΣΗ Ε.4

Άσκηση Ε.4 — επίλυση και αντίστροφος Laplace

W05 W07 W08 W09

Έχουμε στήσει eq (σ51). Τώρα λύνουμε αλγεβρικά για Y(s) και γυρίζουμε στο χρόνο μέσω ilaplace.

ΣΤΟΧΟΣ

Λύσε αλγεβρικά για Y(s), πάρε αντίστροφο Laplace, ερμήνευσε όρους.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πόσοι πόλοι έχει το Y(s); (απ.: 3 — δύο από σύστημα (−2,−3), ένας από είσοδο (−2) ⇒ διπλός πόλος στο −2)

ΕΞΗΓΗΣΗ

`solve(eq, Y)` — δηλώνω ως προς Y, ΟΧΙ ως προς s.
`ilaplace(Ysol, s, t)` — αντίστροφος.
`pretty(expand(...))` — όμορφη μορφή.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Παρατήρησε τον όρο 3t·e^(−2t): από πού προκύπτει το «t»; (απ.: διπλός πόλος στο s=−2 — δες σ63)

OCTAVE — E4_solve.m

```
% Βήμα 3 — λύσε αλγεβρικά για Y(s)
Ysol = solve(eq, Y);    % ΟΧΙ solve(eq, s)!
disp(Ysol)              % → ρητή Y(s)

% Βήμα 4 — αντίστροφος Laplace
y_t = ilaplace(Ysol, s, t);
disp(pretty(expand(y_t)))    % ανεπτυγμένη μορφή
disp(pretty(y_t))            % παραγοντοποιημένη

% Επαλήθευση: y(0) = ?
disp(subs(y_t, t, 0))         % πρέπει = y0 = 0

% Παράγωγος: y'(0) = ?
disp(subs(diff(y_t,t), t, 0)) % πρέπει = yp0 = 1
```

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ

y(t) = −2·e^(−2t) + 3t·e^(−2t) + 2·e^(−3t)

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΑΝΑ ΟΡΟ

- **−2·e^(−2t)**
  απλός πόλος s=−2
  (από σύστημα)
- **3t·e^(−2t)**
  ΔΙΠΛΟΣ πόλος s=−2
  forcing 3/(s+2) ⊗ system
  → δες σ63 για ανάλυση
- **2·e^(−3t)**
  απλός πόλος s=−3
  (από σύστημα)

ΑΞΟΝΕΣ

t [s] στο χρόνο, διπλός πόλος s=−2 δίνει t-όρο (αρχική άνοδος).

ΠΡΟΣΕΧΩ

subs(y_t, t, 0) πρέπει = y0. Αν όχι, λάθος στο eq ή IC.

ΣΥΝΔΕΣΗ

← σ51 στήσιμο · → σ53 plot ερμηνεία · → σ63 διπλός πόλος

ΑΣΚΗΣΗ Ε.4

Plot και ερμηνεία της λύσης ΔΕ

W05 W07 W08 **W09**

Σχεδιάζουμε τη λύση y(t)=−2e^(−2t)+3t·e^(−2t)+2e^(−3t) για 0≤t≤8. Ο όρος 3t·e^(−2t) (διπλός πόλος −2) δίνει αρχική άνοδο πριν η απόσβεση κυριαρχήσει.

ΣΤΟΧΟΣ

Σύνδεσε τη symbolic λύση με τη γραφική απόκριση.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

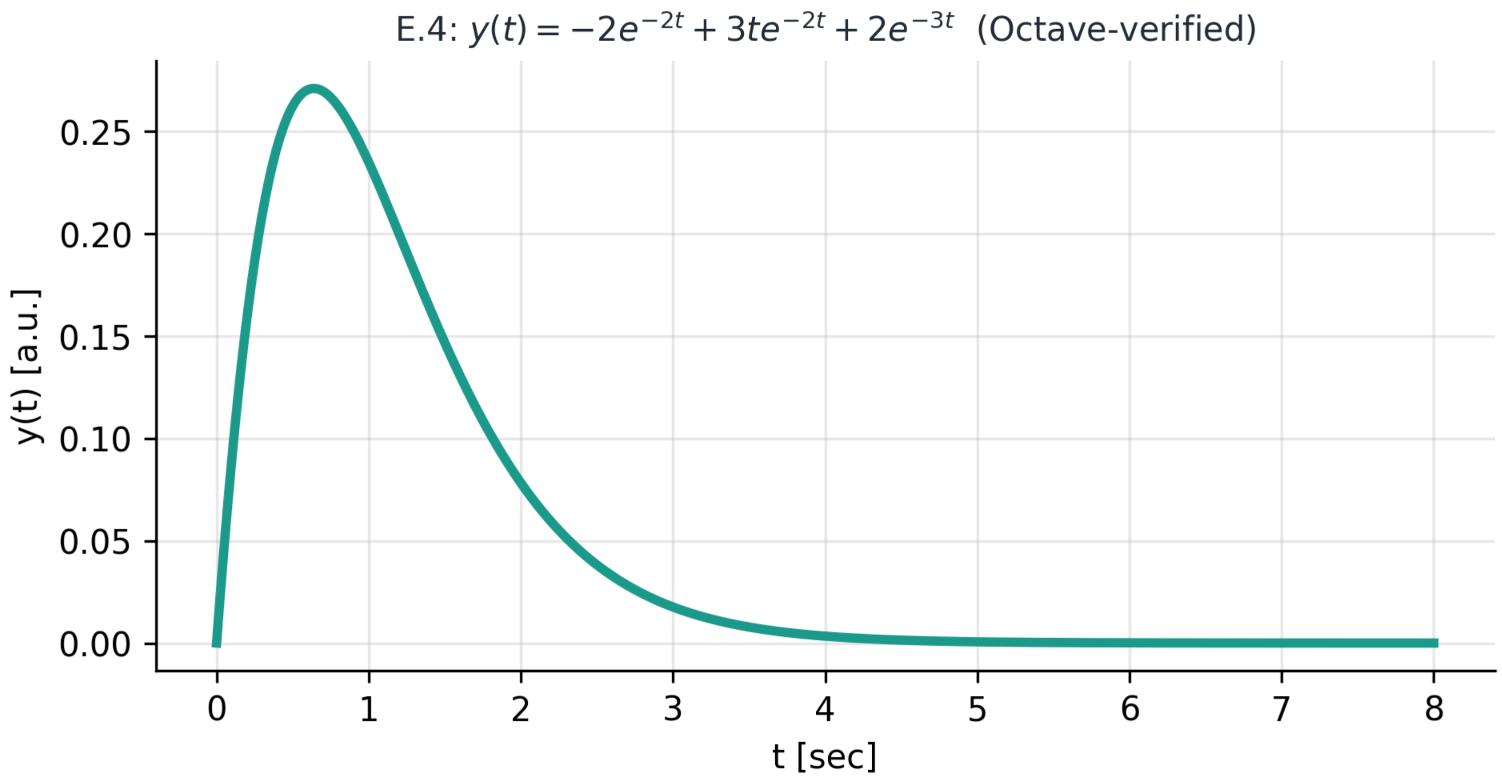
Ξεκινά η y από 0; (απ.: ναι, y(0)=0)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Ο όρος t·e^(−2t) ανεβάζει αρχικά την απόκριση· μετά όλοι οι όροι σβήνουν στο 0. Προέρχεται από επαναλαμβανόμενο πόλο −2 (αναλυτικά στο παράρτημα).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σε ποιο t περίπου κορυφώνεται η y; διάβασέ το από το γράφημα.



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [sec], y(t) [a.u.]. y(0)=0, y'(0)=1.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

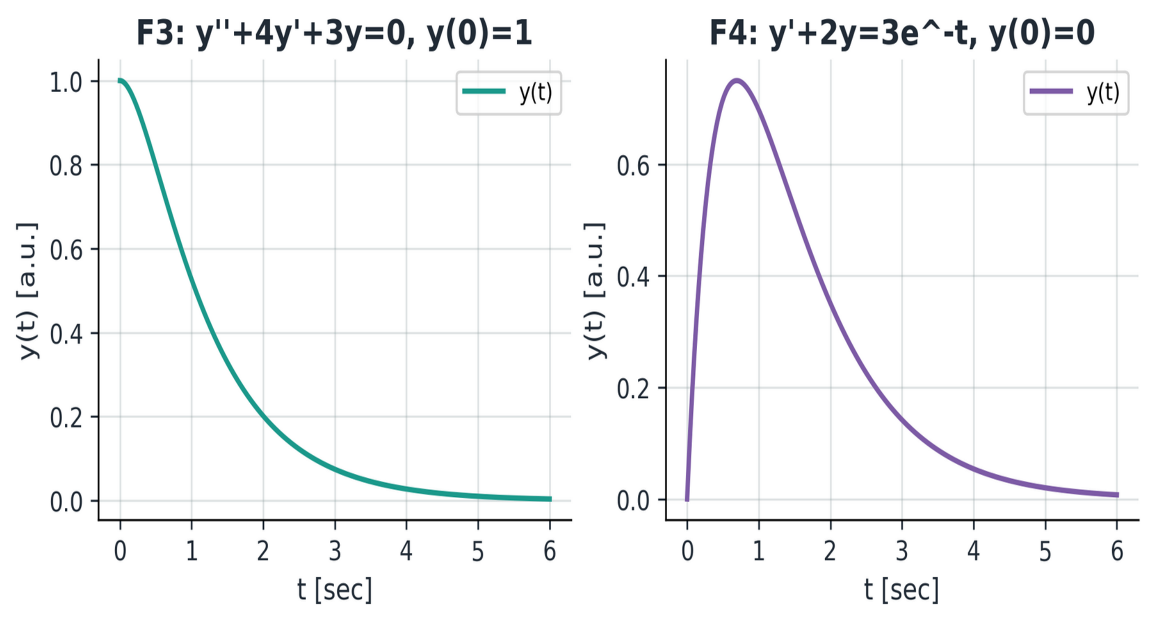
Αρχική άνοδος (λόγω 3t·e^(−2t)), μετά απόσβεση προς το 0.

ΑΣΚΗΣΗ F

Παραλλαγές ΔΕ με αρχικές συνθήκες: F3 και F4

W05 W07 W08 **W09**

ΕΚΦΩΝΗΣΗ F3: y″+4y′+3y=0, y(0)=1, y′(0)=0. F4: y′+2y=3e^(−t), y(0)=0. Λύσε με Laplace + αρχικές συνθήκες.



OCTAVE - F_de.m

```
pkg load symbolic; syms t s Y
% F3: ομογενης 2ης ταξης, y0=1, yp0=0
Y2 = s^2*Y - s*1 - 0;   % L{y''} με αρχικες
Y1 = s*Y - 1;           % L{y'} με y(0)=1
sol3 = solve(Y2 + 4*Y1 + 3*Y == 0, Y);
y3 = simplify(ilaplace(sol3, s, t));   % 1.5e^-t-0.5e^-3t
disp(y3)
% F4: επιβαλλομενη 1ης ταξης, y0=0
sol4 = solve((s*Y - 0) + 2*Y == 3/(s+1), Y);
y4 = simplify(ilaplace(sol4, s, t));   % 3e^-t-3e^-2t
disp(y4)
```

>> output

```
F3: y(t) = 1.5e^(−t) − 0.5e^(−3t)
F4: y(t) = 3e^(−t) − 3e^(−2t)
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Η F4 ξεκινά από y(0)=0· ποιο όριο έχει για t→∞; (απ.: 0)

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ
2 mini-plots: F3 αλλαγή y(0)· F4 αλλαγή y'(0).

ΠΡΟΣΕΧΩ
Αλλαγή IC → νέα y(t), ΟΧΙ νέα H(s) (ιδιότητα συστήματος).

ΣΥΝΔΕΣΗ
← σ53 (Ε.4 plot) · → σ55 (H(s) από ΔΕ)

ΣΥΣΤΗΜΑ

Συνάρτηση μεταφοράς από τη ΔΕ

W05 W07 W08 **W09**

Με μηδενικές αρχικές συνθήκες, η ΔΕ ορίζει σύστημα $H(s)=Y(s)/X(s)=1/(s^2+5s+6)$. Οι ρίζες του παρονομαστή (−2, −3) είναι οι πόλοι του συστήματος - δεν αντικαθιστά το project, το πλαισιώνει.

ΣΤΟΧΟΣ

Δες τη ΔΕ ως σύστημα με πόλους.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

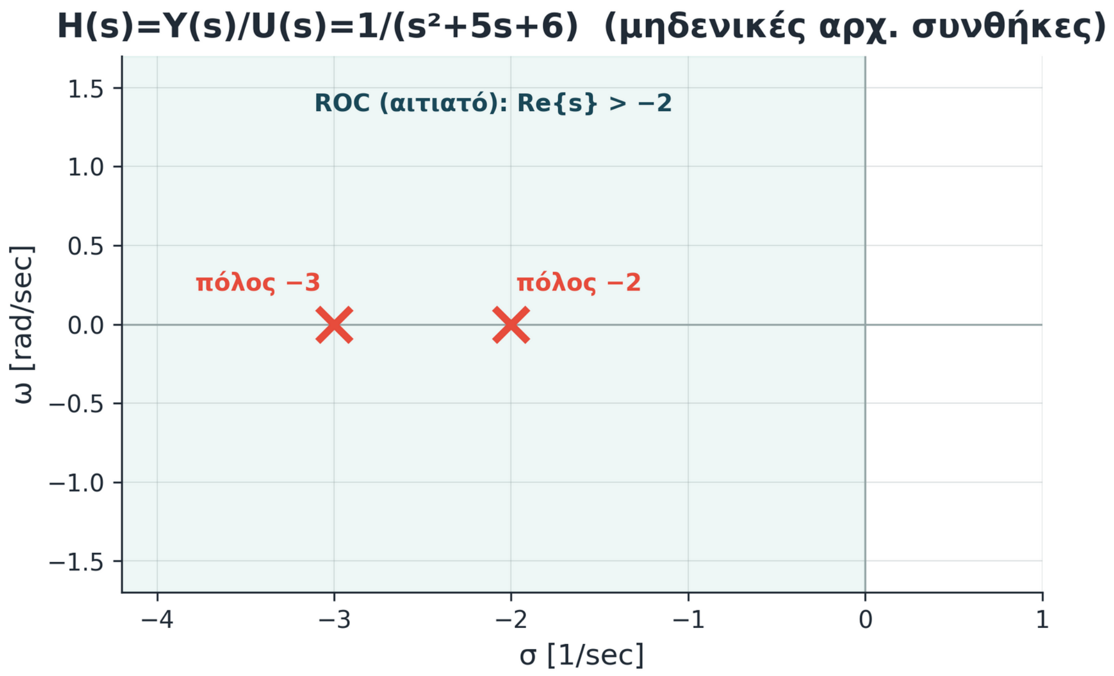
Ποιες είναι οι ρίζες του s^2+5s+6; (απ.: −2, −3)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Με μηδενικές αρχ. συνθήκες, ο παρονομαστής της H(s) είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ΔΕ.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Είναι το σύστημα ευσταθές; (απ.: ναι, και οι δύο πόλοι αρνητικοί)



ΟΡΙΣΜΟΣ - η «ταυτότητα» του συστήματος

$H(s)=Y(s)/X(s)=L\{h(t)\}$ με μηδενικές αρχ. συνθήκες. Πόλοι → εκθετικοί όροι/ευστάθεια · μηδενικά → μπλοκάρισμα συχνοτήτων · $H(j\omega)$ → Fourier · $Y(s)=H(s)\cdot X(s)$.

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ [1/sec], ω [rad/sec]. Πόλοι −2, −3· ROC Re{s}>−2.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Δύο πραγματικοί πόλοι στο αρνητικό ημιεπίπεδο → ευσταθές, φθίνον.

ΣΥΝΔΕΣΗ

Laplace και συνέλιξη (θεώρημα γινομένου)

W05 W07 W08 **W09**

Η συνέλιξη στον χρόνο γίνεται γινόμενο στο s-domain. Αυτό συνδέει το W05 (συνέλιξη) με το W09 και είναι το θεώρημα γινομένου: αρκεί να πολλαπλασιάσεις X(s)·H(s) αντί να κάνεις το ολοκλήρωμα συνέλιξης.

$$L\{ x(t) * h(t) \} = X(s) \cdot H(s)$$

ΧΡΟΝΟΣ	s-DOMAIN
x(t) * h(t): ολοκλήρωμα συνέλιξης - δύσκολο.	X(s)·H(s): απλός πολλαπλασιασμός - εύκολο.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Αν X(s)=1/(s+1) και H(s)=1/(s+2), ποιο είναι το Y(s); (απ.: 1/((s+1)(s+2)))

OCTAVE - conv_check.m (optional)

```
syms t s
X=1/(s+1); H=1/(s+2);
Y=X*H; y=ilaplace(Y,s,t)
```

>> output

```
y = exp(-t) - exp(-2*t)
```

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ

X(s)·H(s) ⇄ x(t)*h(t)· χρόνος συνέλιξη ↔ s πολ/μός.

ΠΡΟΣΕΧΩ

Πολ/μός ΣΤΟ s ≠ point-wise στον χρόνο (`X*H` ≠ `x.*h`).

ΣΥΝΔΕΣΗ

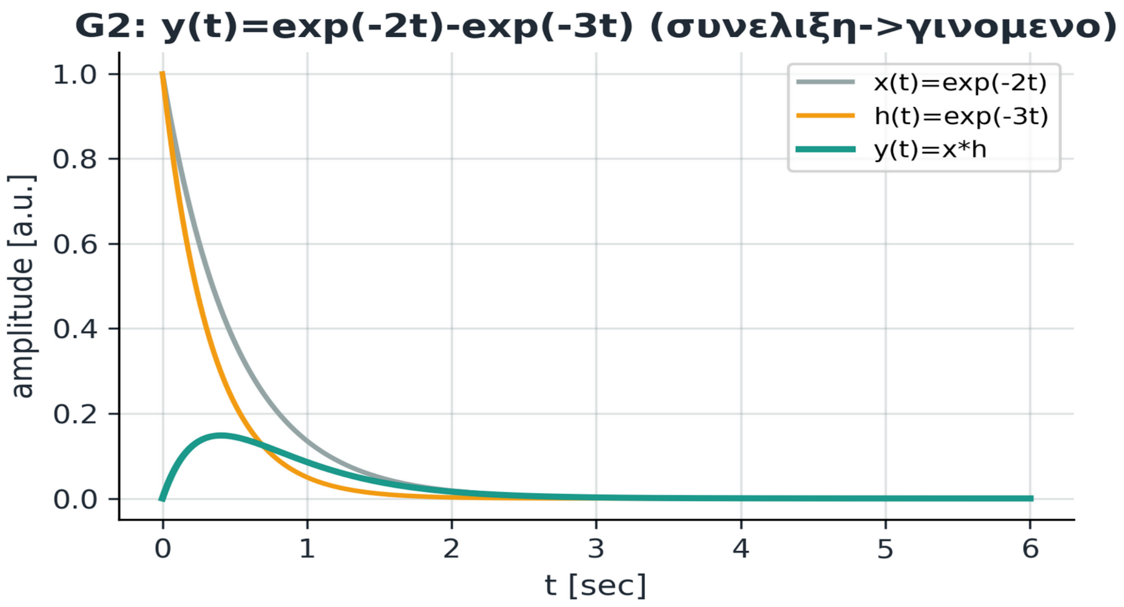
← σ51 (Method) · → σ57 (σύγκριση conv()) · W10: δυϊκό

ΑΣΚΗΣΗ G

Συνέλιξη μέσω Laplace: αριθμητική παραλλαγή

W05 W07 W08 **W09**

ΕΚΦΩΝΗΣΗ x(t)=e^(−2t)u(t), h(t)=e^(−3t)u(t). Βρες y=x∗h μέσω Y(s)=X(s)H(s) και inverse.



OCTAVE - G_conv.m

```
pkg load symbolic; syms t s
% συνελιξη στον χρονο = γινομενο στο s
X = 1/(s+2);   % L{e^-2t u(t)}
H = 1/(s+3);   % L{e^-3t u(t)}
Y = X*H;       % 1/((s+2)(s+3))
y = simplify(ilaplace(Y, s, t));   % e^-2t - e^-3t
disp(y)
```

>> output

```
Y(s) = 1/((s+2)(s+3))
y(t) = e^(−2t) − e^(−3t)
```

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Γιατί αποφεύγουμε το ολοκλήρωμα συνέλιξης εδώ; (απ.: γίνεται απλό γινόμενο στο s)

ΕΝΟΤΗΤΑ 5 — σ59-σ59

Ανακεφαλαίωση

αντιστοίχιση Ε.1–Ε.4 + item 5 στα slides

ΧΑΡΤΗΣ

Σύνοψη — αυτόνομο τσεκάρισμα ετοιμότητας: Ε.1-Ε.4

W05 W07 W08 W09

Κλείνουμε το κύριο deck με άμεση αντιστοίχιση κάθε στοιχείου του project στο υλικό που είδαμε: έννοια → Μεθοδολογία → λυμένο → plot/έλεγχος.

Project	Εργαλείο	Method card	Scaffold + plot
Ε.1 ευθύς	laplace()	διαφ. 19	διαφ. 20 (+fig)
Ε.2 αντίστροφος	ilaplace()	διαφ. 21	διαφ. 22 (+fig)
Ε.3 residue	residue()	διαφ. 27, 30	διαφ. 33 + 32
Ε.4 ΔΕ	solve()+ilaplace()	διαφ. 39	διαφ. 40-40
item 5 συνέλιξη	X(s)·H(s)	διαφ. 42	διαφ. 42 (check)

Z-γέφυρα - πολύ σύντομα

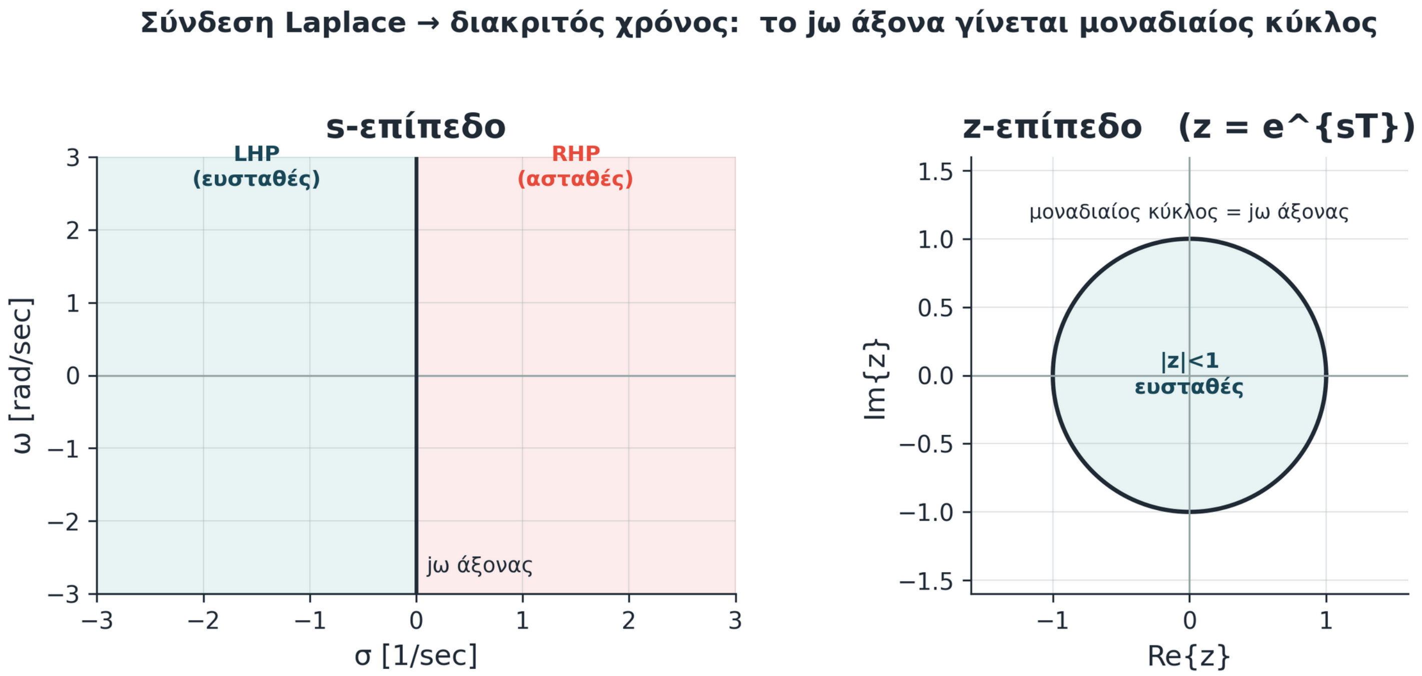
Πολύ σύντομη σύνδεση Laplace → διακριτού χρόνου. Με z=e^(sT), ο jω άξονας του s-plane «τυλίγεται» στον μοναδιαίο κύκλο του z-plane.

ΣΤΟΧΟΣ
Δες πώς το s συνδέεται με το z.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ
Πού απεικονίζεται το LHP του s στο z-plane; (απ.: μέσα στον μοναδιαίο κύκλο)

ΕΞΗΓΗΣΗ
z=e^(sT): ευστάθεια συνεχούς (LHP) ↔ ευστάθεια διακριτού (|z|<1).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ
Πού πάει ο jω άξονας; (απ.: στον μοναδιαίο κύκλο)



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ
Re{z}, Im{z} (αδιάστατα). T = περίοδος δειγματοληψίας.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ
Δεν απαιτείται άσκηση Z εδώ - μόνο διαισθητική σύνδεση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Απόκριση συχνότητας στον μοναδιαίο κύκλο

W05 W07 W08 **W09**

Προαιρετική γέφυρα προς το W08 και τη σκέψη φίλτρων. Για ένα απλό H(z)=1/(1−0.5z^(−1)), το |H(e^(jω))| διαβάζεται καθώς το διάνυσμα κινείται στον μοναδιαίο κύκλο.

ΣΤΟΧΟΣ

Σύνδεσε z-plane με απόκριση φίλτρου.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

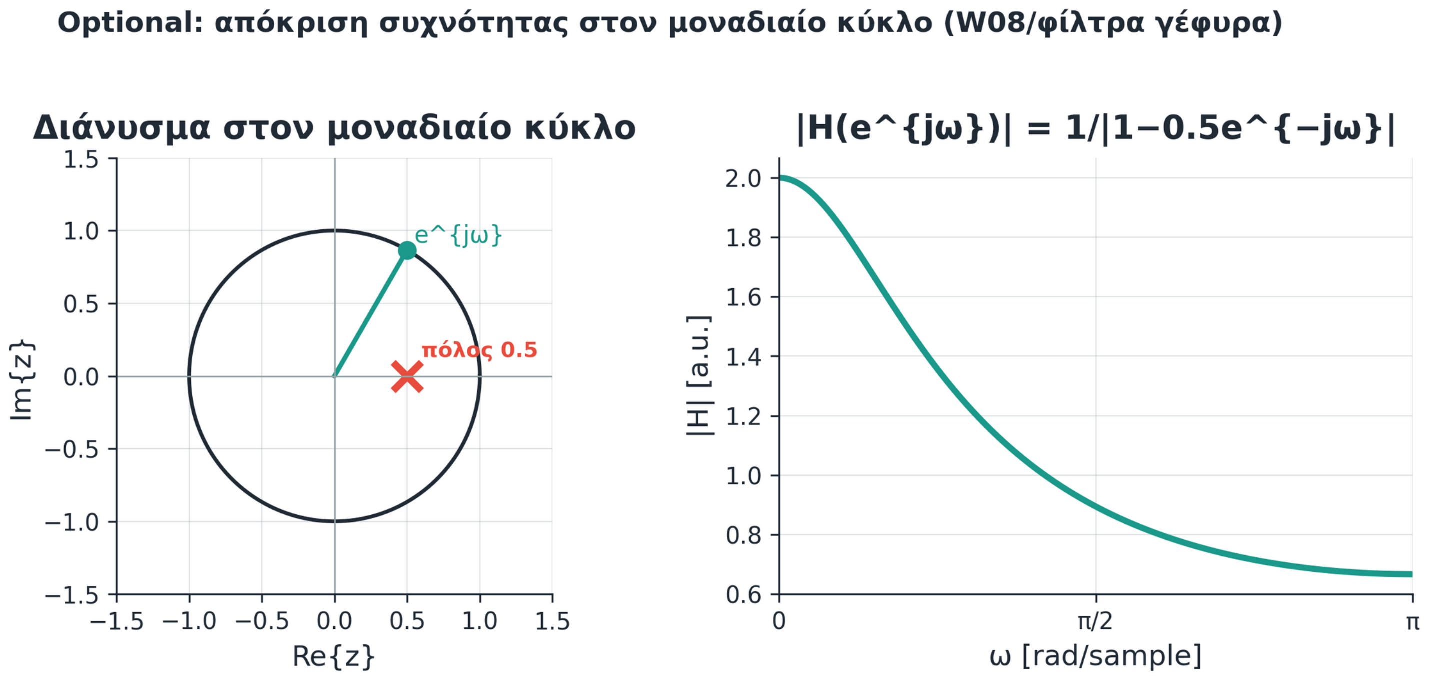
Πού είναι μεγαλύτερο το |H|, κοντά ή μακριά από τον πόλο; (απ.: κοντά)

ΕΞΗΓΗΣΗ

Όσο το e^(jω) πλησιάζει τον πόλο 0.5, το |H(e^(jω))| μεγαλώνει.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Είναι αυτό low-pass ή high-pass; (απ.: low-pass)



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

ω [rad/sample], |H| [a.u.]. Πόλος στο 0.5.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Μέγιστο στο ω=0 (κοντά στον πόλο), πτώση προς ω=π.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Τρεις περιπτώσεις ROC

W05 W07 W08 **W09**

Για H(s)=(2s+5)/((s+1)(s+3)) με PF=(3/2)/(s+1)+(1/2)/(s+3), τρεις ROC → τρία διαφορετικά σήματα.

ΣΤΟΧΟΣ

Δες πώς η ROC καθορίζει την αιτιατότητα και τη μορφή του σήματος.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

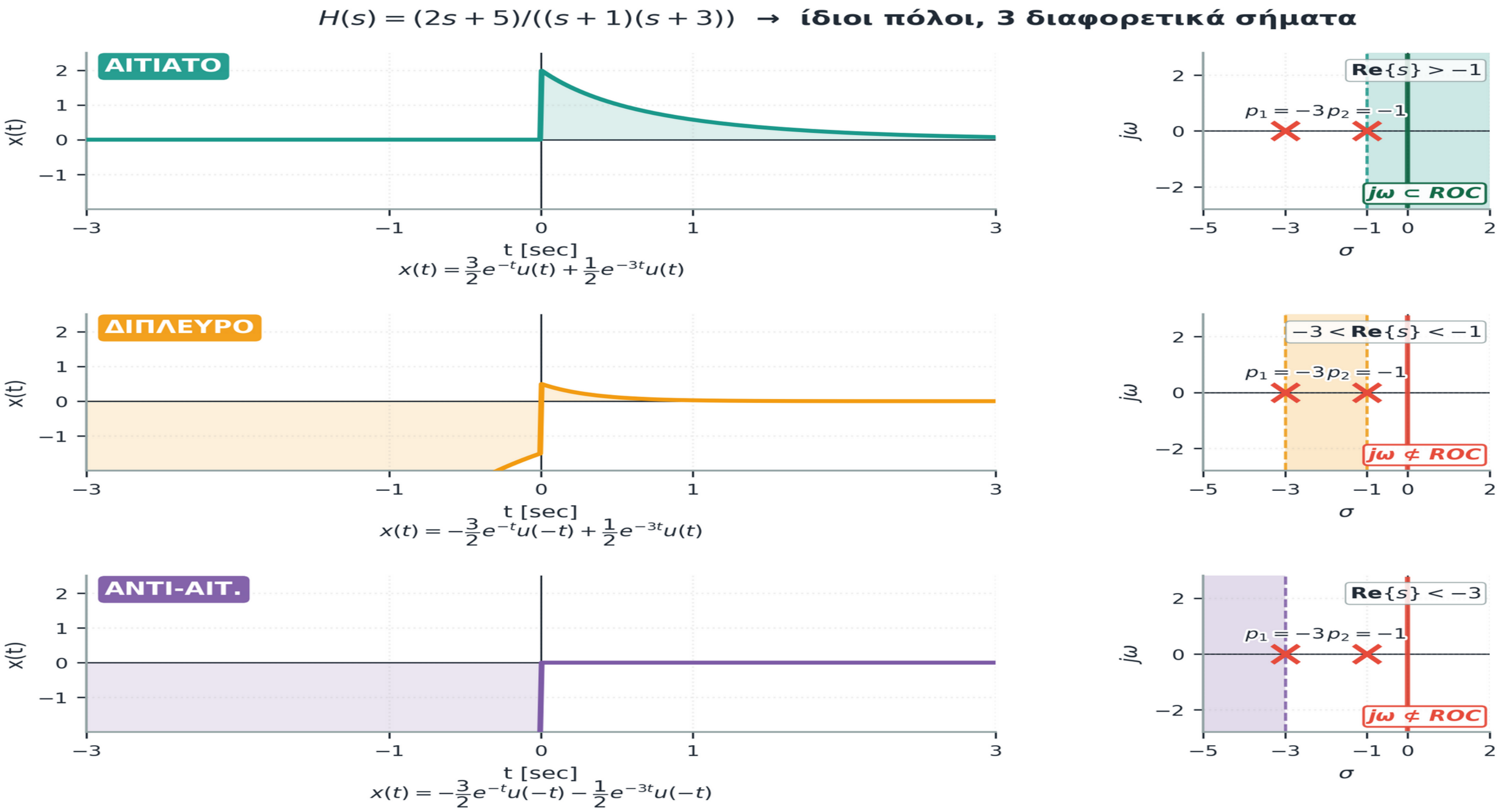
Για ROC −3<Re{s}<−1, ποιος πόλος δίνει αντι-αιτιατό όρο; απ.: ο p=−1 (δεξιά της ζώνης).

ΕΞΗΓΗΣΗ

Κάθε όρος PF: αν πόλος αριστερά της ROC → αιτιατός όρος (e^(pt)u(t)). Αν δεξιά → αντι-αιτιατός (−e^(pt)u(−t)).

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Σε ποια από τις 3 περιπτώσεις υπάρχει Fourier; απ.: μόνο στην αιτιατή (jω ⊂ ROC).



ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

σ [1/sec], ω [rad/sec]. Πόλοι −1, −3.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Ίδιοι πόλοι, διαφορετική ROC → 3 σήματα. Μόνο το αιτιατό έχει Fourier.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Διπλός πόλος

W05 W07 W08 **W09**

Ένας διπλός πόλος δεν δίνει απλό εκθετικό αλλά πολλαπλασιασμένο με t: 1/(s+2)² → t·e^(−2t)u(t). Το residue() το χειρίζεται με πρόσθετο όρο.

ΣΤΟΧΟΣ

Δες τι αλλάζει με διπλό πόλο.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

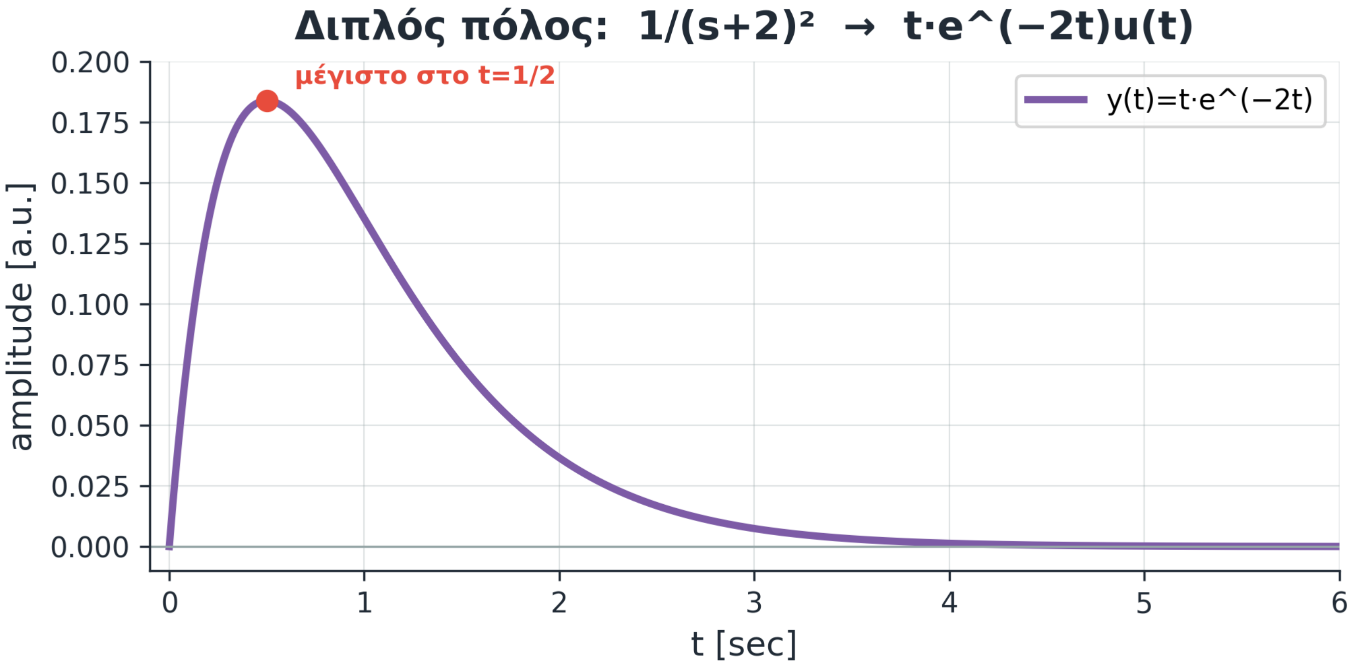
Πού κορυφώνεται το t·e^(−2t); (απ.: t=1/2)

ΕΞΗΓΗΣΗ

PF expansion για διπλό πόλο p (πολλαπλότητα 2):
$F(s) = A/(s-p)^2 + B/(s-p) + \dots$
$L^{-1}\{A/(s-p)^2\} = A\cdot t\cdot e^{(pt)}$ · $L^{-1}\{B/(s-p)\} = B\cdot e^{(pt)}$
Στο Octave: residue() επιστρέφει R, P επαναλαμβανόμενα.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Στο Ε.4 (σ51–50) εμφανίζεται φυσικά: 3/(s+2) ⊗ σύστημα 1/(s+2)(s+3)
⇒ διπλός πόλος στο −2 ⇒ όρος 3t·e^(−2t). Επαληθεύσε με residue στο Y(s).



OCTAVE — διπλός πόλος: residue() output

```
num=[1]; den=conv(conv([1 2],[1 2]),[1 3]);  [R,P,K]=residue(num,den);   % R=[-1; 1; 1]  P=[-3; -2; -2]  K=[]
%  Ερμηνεία:  R(1)=-1 αντιστοιχεί στο πόλο P(1)=-3  →  -1·e^(-3t)  ·  R(2)=1 στον P(2)=-2 (απλός)  →  1·e^(-2t)  ·  R(3)=1 στον P(3)=-2 (διπλός)  →  1·t·e^(-2t)
```

ΔΙΑΒΑΖΩ ΑΞΟΝΕΣ / ΜΟΝΑΔΕΣ

t [sec], amplitude [a.u.]. Διπλός πόλος στο −2.

ΤΙ ΠΑΡΑΤΗΡΩ

Αρχική άνοδος (λόγω του t) και μετά απόσβεση - μέγιστο στο t=1/2.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Μη γνήσιο κλάσμα (όρος K)

W05 W07 W08 **W09**

Όταν deg(αριθμητή) ≥ deg(παρονομαστή), το residue() επιστρέφει μη κενό K - το πολυωνυμικό πηλίκο της διαίρεσης. Αυτό αντιστοιχεί σε όρους δ(t) ή παραγώγους της στον χρόνο.

ΠΡΟΒΛΕΨΗ

Πότε εμφανίζεται μη κενό K; (απ.: όταν deg(num) ≥ deg(den))

ΕΞΗΓΗΣΗ

Το K είναι το αποτέλεσμα της πολυωνυμικής διαίρεσης πριν τα partial fractions. Στον χρόνο το K δίνει δ(t)/παραγώγους - generalized functions, όχι κανονικά σήματα.

ΜΙΚΡΗ ΑΣΚΗΣΗ

Δοκίμασε num=[1 0 0 0] (deg 3). Πόσους όρους έχει το K;

OCTAVE - improper.m

```
num = [1 0 0];   % s^2  (deg 2)
den = [1 3 2];   % s^2+3s+2 (deg 2)
[R, P, K] = residue(num, den);
```

>> output

```
R = [-4; 1]
P = [-2; -1]
K = 1     % <-- μη κενό!
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Προσοχή: θεωρήματα αρχικής/τελικής τιμής

W05 W07 W08 W09

Γρήγορος έλεγχος πριν χρησιμοποιήσεις FVT/IVT. Ισχύουν μόνο υπό συνθήκες - αλλιώς δίνουν λάθος απάντηση.

Θεώρημα	Τύπος	Συνθήκη
Αρχική τιμή (IVT)	$y(0+) = \lim_{s\to\infty} s\cdot Y(s)$	πάντα (αν υπάρχει το όριο)
Τελική τιμή (FVT)	$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s)$	ΜΟΝΟ αν όλοι οι πόλοι του $sY(s)$ στο LHP
Παγίδα FVT	ταλάντωση/αστάθεια	αν πόλος στον $j\omega$ ή RHP → ΑΚΥΡΟ

Πριν εφαρμόσεις FVT, έλεγξε ότι το $sY(s)$ δεν έχει πόλους στον $j\omega$ άξονα ή στο RHP.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Συνολικός πίνακας λαθών

W05 W07 W08 **W09**

Συγκεντρωτική λίστα για προετοιμασία προφορικής εξέτασης - όλες οι παγίδες των ενοτήτων B, C, D.

Περιοχή	Λάθος	Σωστά
Συντελεστές	den ανάποδα	μεγαλύτερη δύναμη πρώτη: [1 4 3]
Πόλος vs πλάτος	σύγχυση P με R	P=ρίζα, R=συντελεστής (residue)
ROC	περιέχει πόλο	δεξιά του δεξιότερου πόλου (αιτιατό)
Αρχ. συνθήκες	αγνοούνται	μπαίνουν στους κανόνες παραγώγου
Μονάδες	λείπουν από άξονες	t [sec], σ [1/sec], ω [rad/sec]
ilaplace μορφή	«λάθος» επειδή παραγοντοποιημένη	expand() για άθροισμα εκθετικών

ΠΗΓΕΣ

Πηγές και χάρτης υλικού

W05 W07 W08 **W09**

Οι πηγές και το επαναχρησιμοποιούμενο υλικό του W09. Πρωτογενείς ακαδημαϊκές πηγές είναι είναι η βάση του μαθήματος.

Πηγή	Ρόλος
07_Lab - Laplace (legacy)	Ραχοκοκαλιά: syms/laplace/ilaplace, heaviside, residue
Ελληνικά συγγράμματα	Ασημάκης/Αδάμ, Διακολουκάς, Καραμπογιάς, Ingle/Proakis, Βελώνη
MIT RES 6.007 + 6.003	RES 6.007: Laplace/ROC/partial fractions · 6.003: ΔΕ/μέθοδος συστήματος
Octave symbolic + residue	Επίσημη τεκμηρίωση εντολών

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Παράρτημα: Προδιαγραφή περιβάλλοντος εκτέλεσης

W05 W07 W08 **W09**

Όλα τα αριθμητικά και συμβολικά αποτελέσματα της ενότητας παρήχθησαν και επαληθεύτηκαν στο ακόλουθο (pinned) περιβάλλον. Οι εκδόσεις δηλώνονται ρητά για πλήρη αναπαραγωγιμότητα.

ΠΥΡΗΝΑΣ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ (RUNTIME)

GNU Octave — έκδοση 8.4.0

ΠΑΚΕΤΑ (PACKAGES)

Octave symbolic — έκδοση 3.1.1

SymPy (υπολογιστικός πυρήνας του symbolic) — έκδοση 1.14.0

OCTAVE - repro_setup.m

```
pkg load symbolic          % φόρτωσε το symbolic package
syms t s                   % χρονική t, μιγαδική s
assume(t >= 0)             % μονόπλευρος (causal) Laplace
```

>> output

Αναπαραγωγιμότητα: οι καθηλωμένες (pinned) εκδόσεις διασφαλίζουν ταυτόσημες εξόδους των εντολών laplace, ilaplace, residue και solve σε κάθε εκτέλεση.