Σήματα και Συστήματα
Σήματα lab 5- Συνέλιξη

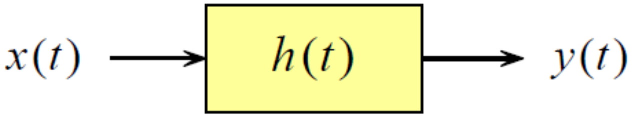
Κώστας Μαριάς
Ρούλα Χατζάκη

2021

Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

- <u>Άσκηση 1:</u>

Έστω το Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο σύστημα,



με $x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$ ουστική απόκριση: $h(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$

βρείτε την έξοδο του συστήματος y(t).

<u>Λύση</u>:

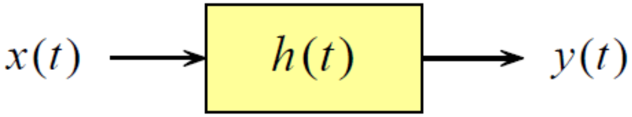
Από την θεωρία έχουμε δει ότι, η έξοδος ενός συστήματος υπολογίζεται από την συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης του συστήματος με το σήμα εισόδου του συστήματος.

!!!Στην Άσκηση 1 εξετάζουμε την θεωρητική επίλυση της συνέλιξης.

Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

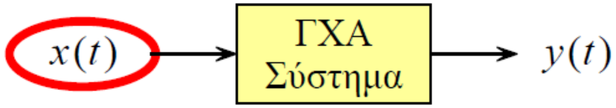
$$h(t)=\begin{cases}1-t, 0\le t\le 1\\ 0, \quad \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$



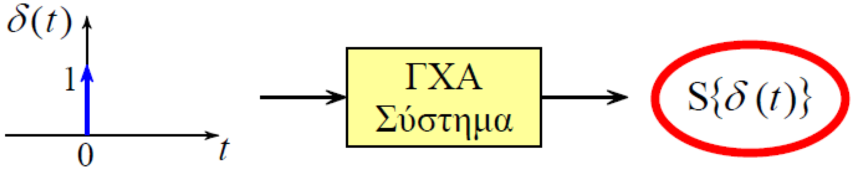
Σχέση μεταξύ Εισόδου - Εξόδου συστήματος

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε ***τη σχέση*** με τη βοήθεια της οποίας ***προσδιορίζουμε την έξοδο*** ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, αν γνωρίζουμε

α) το σήμα εισόδου του συστήματος και



β) την απόκριση του συστήματος (το σήμα εξόδου), όταν αυτό διεγείρεται από τη $\delta(t)$



Ορίζουμε ως ***κρουστική απόκριση του συστήματος*** την έξοδο του συστήματος όταν το σήμα εισόδου είναι η κρουστική συνάρτηση

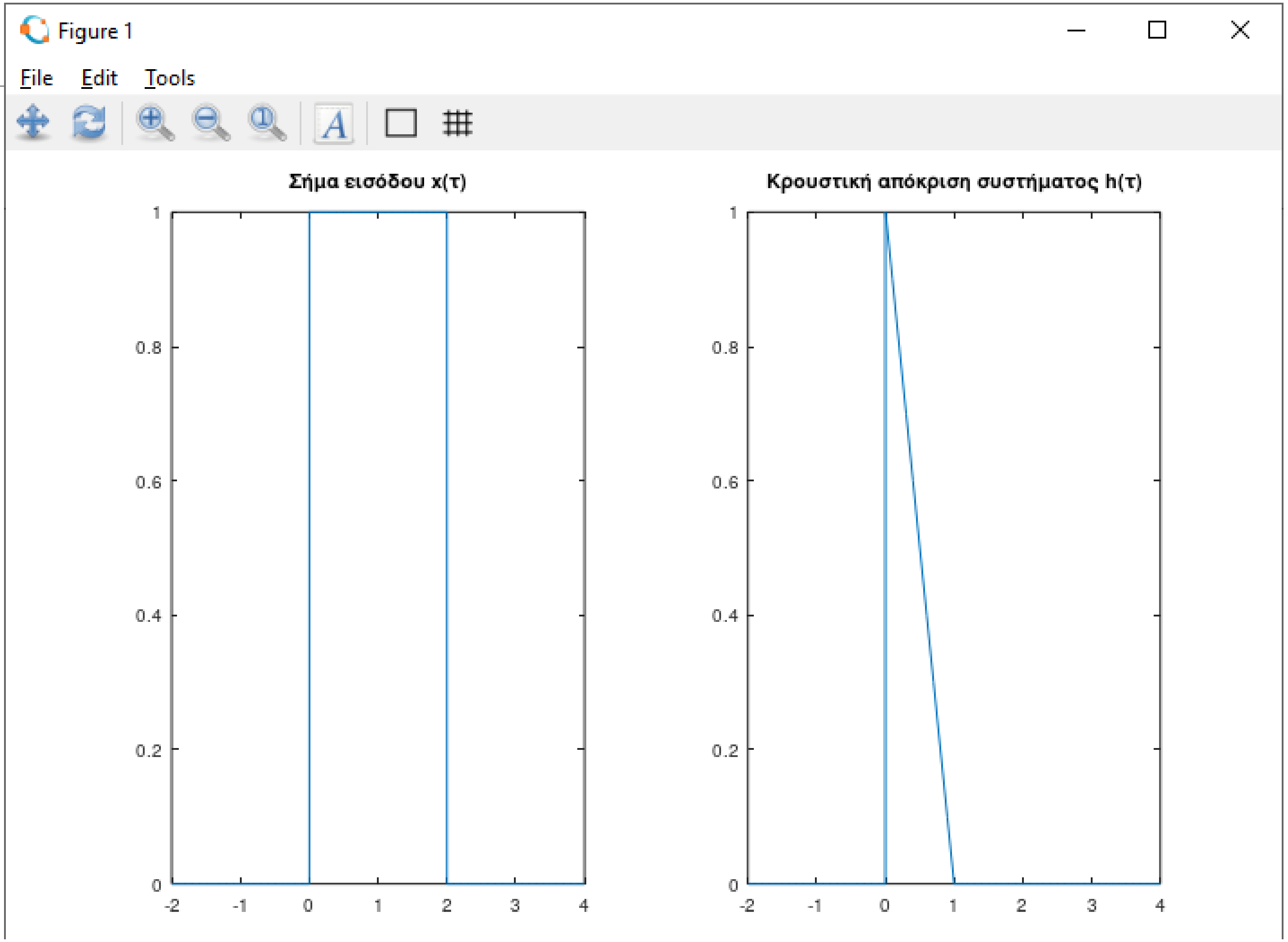
$$h(t)=S\{\delta(t)\}$$

Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

- Άσκηση 1:
  - 1º βήμα ***t*->τ** και σχεδιασμός σημάτων

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$$



Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

Άσκηση 1:

- 1ο βήμα ***t->τ*** και σχεδιασμός σημάτων

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

```
clear all; close all; clc;
step = 0.1
tx1= -2:step:0; % x(τ)=0 αλλού, επιλέγω να αναπαραστήσω από -2 έως 0
tx2= 0:step:2; %  x(τ)=1  από 0 έως 2
tx3= 2:step:4; %  x(τ)=0 αλλού, επιλέγω να αναπαραστήσω απο 2 έως 4
tx = [tx1 tx2 tx3]; %  διάνυσμα χρόνου για το σήμα
x1= zeros(size(tx1)); % δημιουργώ τμηματικά το σήμα από -2 εώς 0
x2=ones(size(tx2));
x3=zeros(size(tx3));
x=[x1 x2 x3];           %  διάνυσμα σήματος
subplot (1, 2, 1)
plot(tx, x)
title ('Σήμα εισόδου x(τ)')
```

```
% Ομοίως για την κρουστική απόκριση
th1= -2:step:0;
th2= 0:step:1;
th3= 1:step:4;
th=[th1 th2 th3];
h1=zeros(size(th1));
h2=1-th2;
h3=zeros(size(th3));
h=[h1 h2 h3];
subplot (1,2,2)
plot(th,h)
title ('Κρουστική απόκριση συστήματος h(τ)')
```

Συνέλιξη

Υπολογισμός συνέλιξης:
Η διαδικασία του υπολογισμού της συνέλιξης δύο σημάτων συνεχούς χρόνου $x_2(t)$, $x_1(t)$ ορίζεται ως ακολούθως:

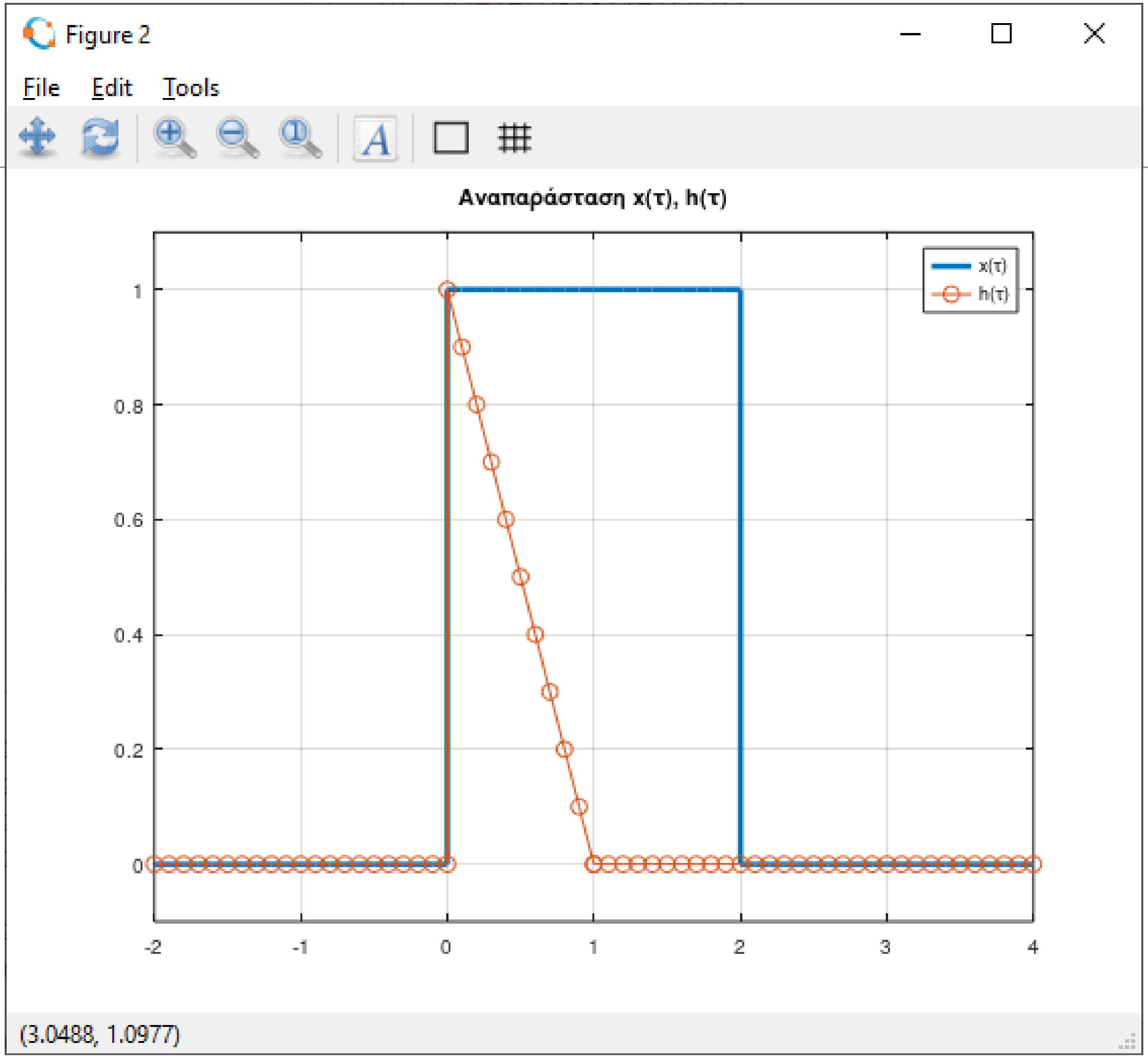
1. Αναδίπλωση του σήματος $x_2(t)$
2. Μετατόπιση του αναδιπλωμένου σήματος
3. Πολλαπλασιασμός του «αμετακίνητου» σήματος $x_1(t)$ με το μετατοπισμένο σήμα
4. Ολοκλήρωση του γινομένου (υπολογισμός του εμβαδού που δημιουργείται από την γραφική παράσταση του γινομένου και του άξονα του χρόνου).

Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

- Άσκηση 1:

- **1ο Βήμα: Αναπαράσταση στο ίδιο γράφημα**

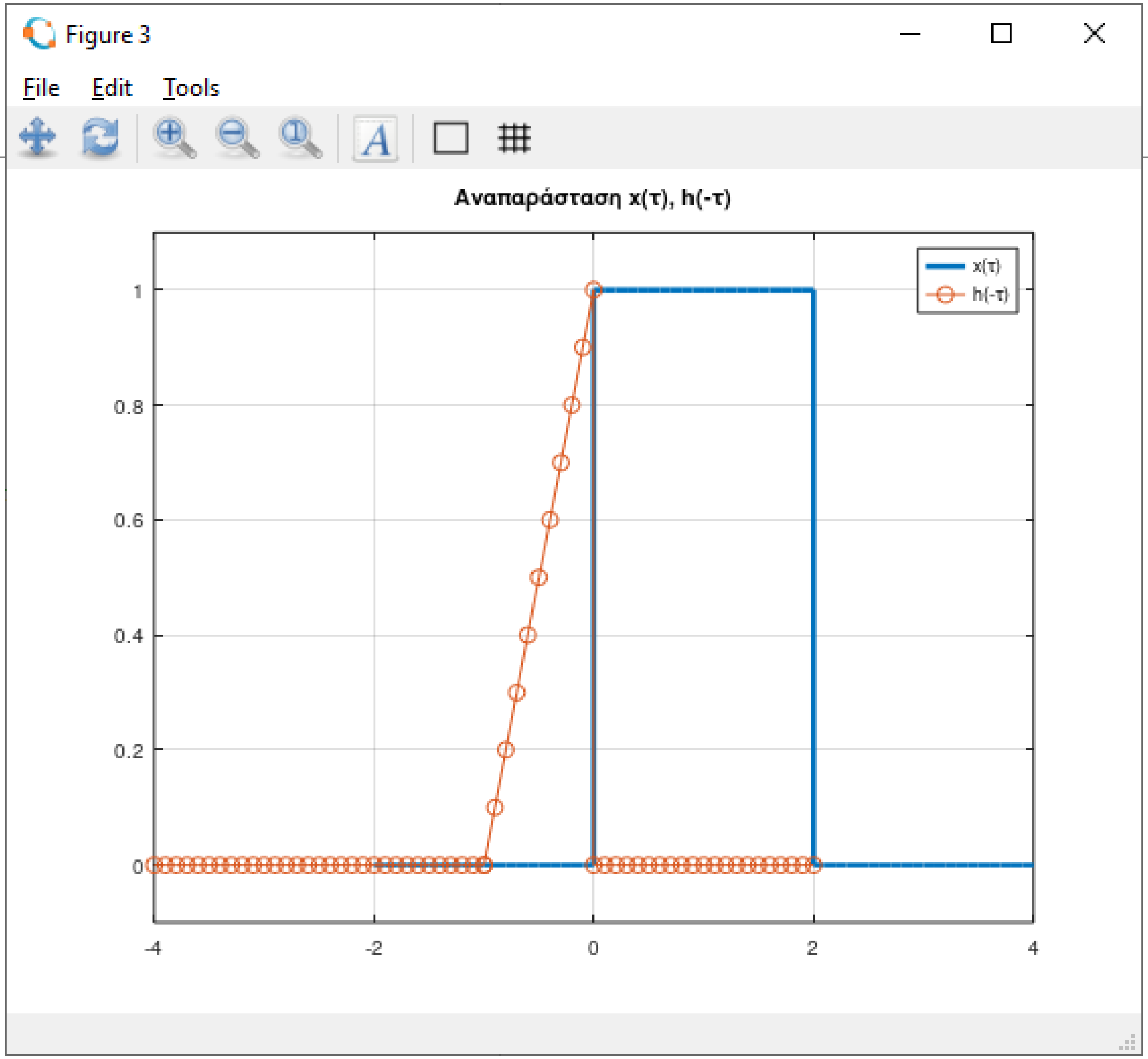
  - figure(2)
  - plot(tx,x,'linewidth', 2,th,h,'-o')
  - ylim([-0.1 1.1])
  - legend('x(τ)', 'h(τ)')
  - grid
  - title ('Αναπαράσταση x(τ), h(τ)')



Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

- Άσκηση 1:
  - 2ο βήμα **Ανάκλαση,** επιλέγουμε να ανακλάσουμε το *h(τ)* δηλαδή *h(-τ)* (*θα μπορούσαμε και το χ(τ)).

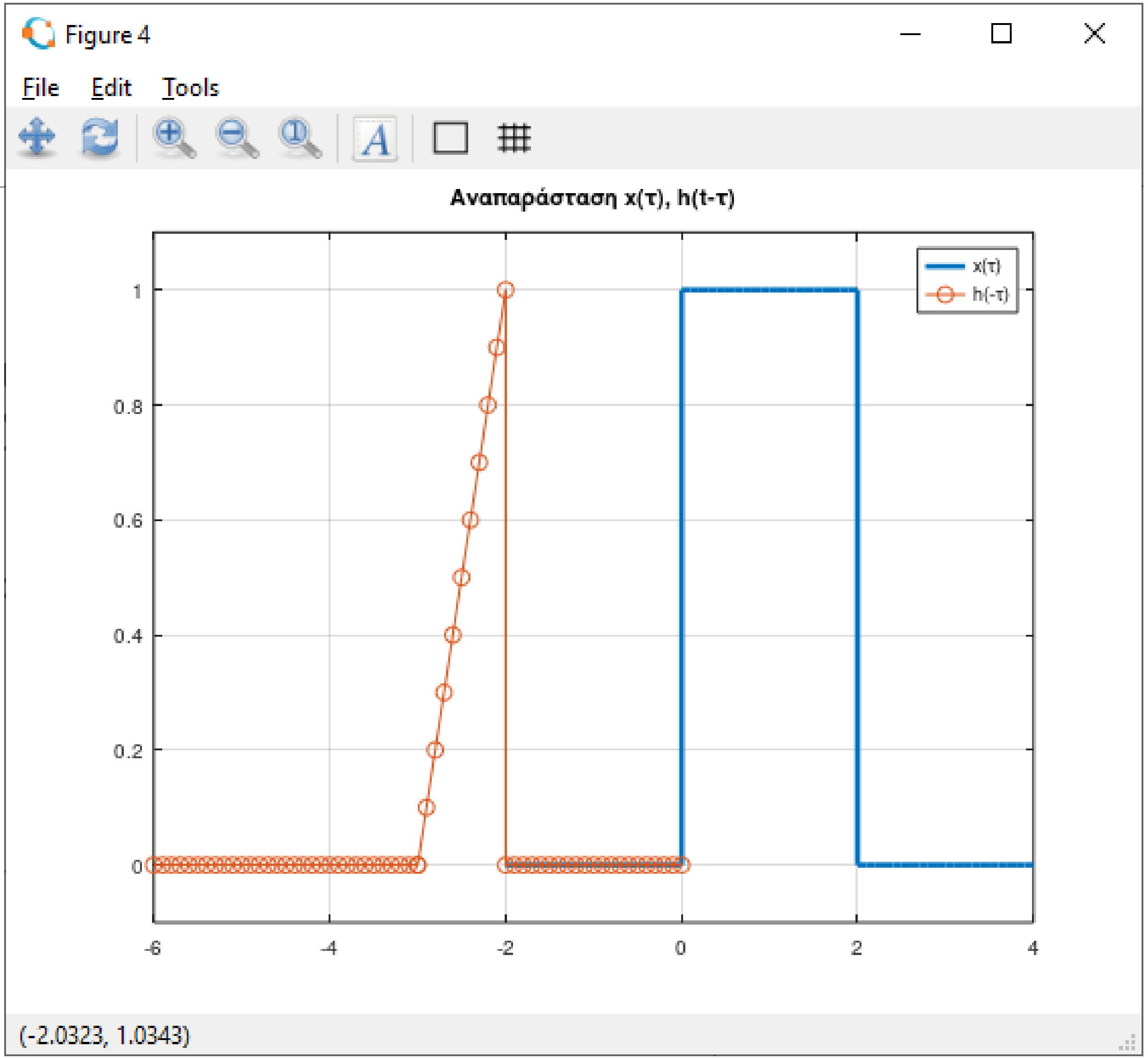
```
figure(3)
plot(tx,x,'linewidth',2,-th,h,'-o') %ανάκλαση με -th
ylim([-0.1 1.1])
legend('x(τ)', 'h(-τ)')
grid
title('Αναπαράσταση x(τ), h(-τ)')
```



Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

- Άσκηση 1:
  - 3ο βήμα ***Μετατόπιση,*** το h(-τ) μετατοπίζεται κατά t δηλαδή σχεδιάζουμε το h(t-τ), όπου t μια σταθερά. (θα εξετάσουμε το t=-2).

```
» figure(4)
» t=-2;
» plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t,h,'-o') %μετατόπιση h(t-τ)
» ylim([-0.1 1.1])
» legend('x(τ)', 'h(-τ)')
» grid
» title ('Αναπαράσταση x(τ), h(t-τ)')
```



Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

❖ Άσκηση 1:

- 4º βήμα ***Ολίσθηση,*** η τιμή της εξόδου *y(t)* εξαρτάται από την επικάλυψη (μηδενική, μερική, πλήρης) που εμφανίζουν τα σήματα *x(t)*, *h(t)* την χρονική στιγμή *t*. Για να εξετάσουμε τις τιμές εξόδου, ολισθαίνουμε το σήμα *h(t) από -∞ έως +∞, ενώ το x(t) παραμένει σταθερό.*

  - Για t<0 (εξετάζουμε t=-2) τα σήματα έχουν **μηδενική** επικάλυψη άρα η έξοδος y(t)=0.
  - Για 0<t<1 (εξετάζουμε t=0,5) τα σήματα έχουν **μερική** επικάλυψη
  - Για 1<t<2 (εξετάζουμε t=1,5) τα σήματα έχουν **πλήρη** επικάλυψη
  - Για 2<t<3 (εξετάζουμε t=2,5) τα σήματα έχουν **μερική** επικάλυψη
  - Για 3<t<4 (εξετάζουμε t=3,5) τα σήματα έχουν **μηδενική** επικάλυψη άρα η έξοδος y(t)=0.

Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

- Άσκηση 1:
  - 4ο βήμα ***Ολίσθηση***

```
figure(5)
t=-2; t1=0.5; t2=1.5; t3=2.5; t4=3.5;
subplot(3,2,1)
plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t,h,'-o')
ylim([-0.1 1.1])
legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
grid
title ('Επικάλυψη για t<0 (εξετάζουμε t=-2)')
hold on
subplot(3,2,2)
plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t1,h,'-o')
ylim([-0.1 1.1])
legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
grid
title ('Επικάλυψη 0<t<1 (εξετάζουμε t=0,5)')
hold on
```

```
subplot(3, 2, 3)
plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t2,h,'-o')
ylim([-0.1 1.1])
legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
grid
title ('Επικάλυψη 1<t<2 (εξετάζουμε t=1,5)')
hold on
subplot(3,2,4)
plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t3,h,'-o')
ylim([-0.1 1.1])
legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
grid
title ('Επικάλυψη 2<t<3 (εξετάζουμε t=2,5)')
hold on
subplot(3,2,5)
plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t4,h,'-o')
ylim([-0.1 1.1])
legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
grid
title ('Επικάλυψη 3<t<4 (εξετάζουμε t=3,5)')
```

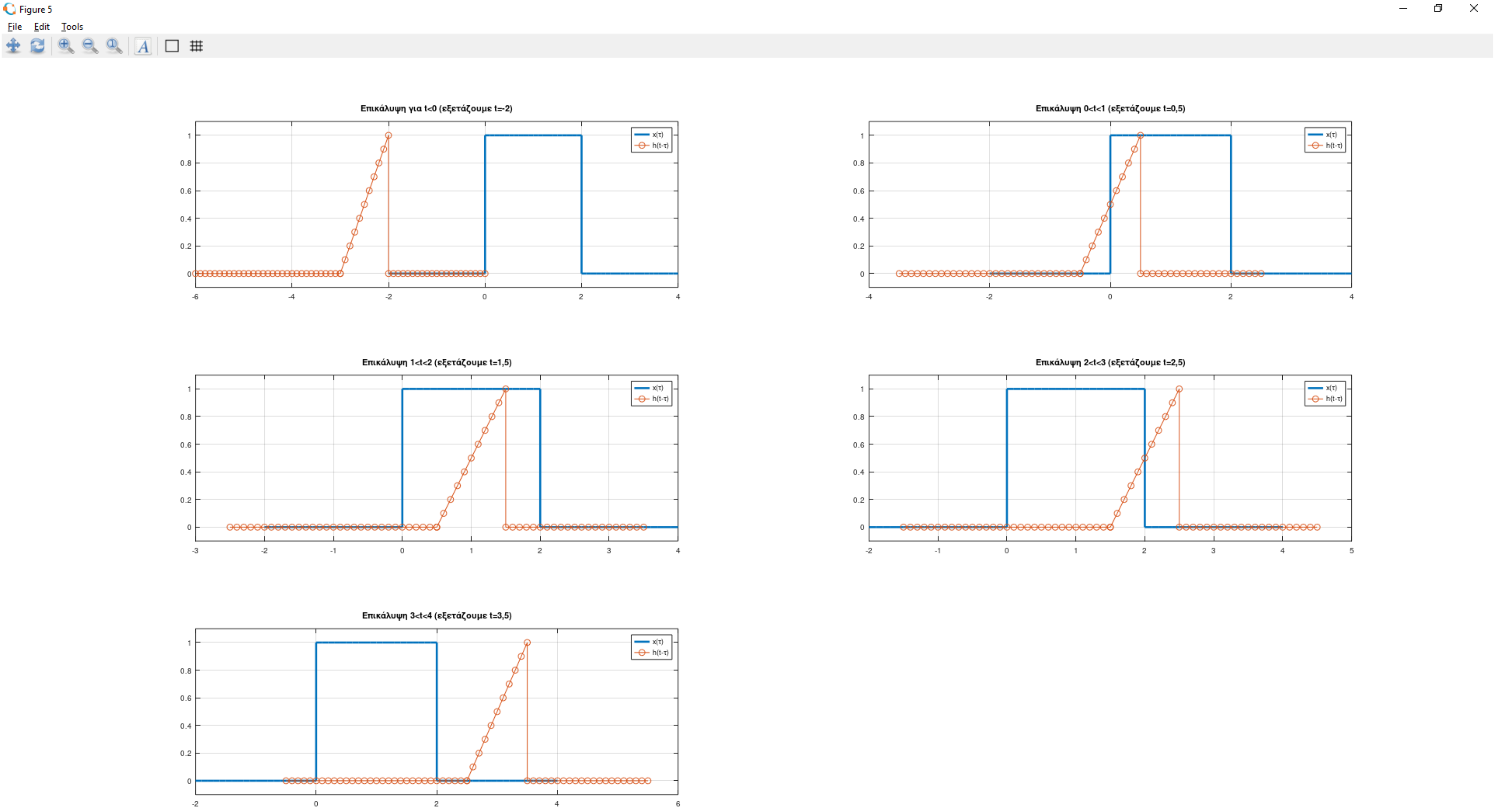


Figure 5
File Edit Tools
Επικάλυψη για t<0 (εξετάζουμε t=-2)
Επικάλυψη 0<t<1 (εξετάζουμε t=0,5)
Επικάλυψη 1<t<2 (εξετάζουμε t=1,5)
Επικάλυψη 2<t<3 (εξετάζουμε t=2,5)
Επικάλυψη 3<t<4 (εξετάζουμε t=3,5)
x(τ)
h(t-τ)

Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

- Άσκηση 1:
  - 5º βήμα ***Καθορισμός ορίων ολοκληρωμάτων και υπολογισμός εξόδου.***
    - Για t<0 τα σήματα έχουν μηδενική επικάλυψή άρα η έξοδος y(t)=0.
    - Για 0<t<1, τα σήματα έχουν μερική επικάλυψή, τα όρια του ολοκληρώματά θα αντιστοιχούν στο εμβαδόν της αλληλοεπικάλυψης των σημάτων, το x(τ)=1 και το *h(t), δίνεται* αντικαθιστώντας το *t* με *t-τ* στο αρχικό σήμα.

      $$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau\,. \quad h(t-\tau) = 1-(t-\tau) = 1-t+\tau$$

    - Για 1<t<2 τα σήματα έχουν πλήρης επικάλυψή $y(t) = \int_{t-1}^{t} 1-t+\tau d\tau\,.$ το οποίο μας δίνει $y(t) = \frac{1}{2},\ 1<t<2.$
    - Για 2<t<3 τα σήματα έχουν μερική επικάλυψή $y(t) = \int_{t-1}^{2} 1-t+\tau d\tau$ το οποίο μας δίνει $y(t) = \frac{1}{2}(3-t)^2,\ 2<t<3.$
    - Για t>3 τα σήματα έχουν μηδενική επικάλυψή. άρα η έξοδος y(t)=0.
  - Επομένως $$y(t) = \begin{cases} t-t^2/2 & 0\le t<1 \\ 1/2 & 1\le t<2 \\ (3-t)^2/2 & 2\le t<3 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

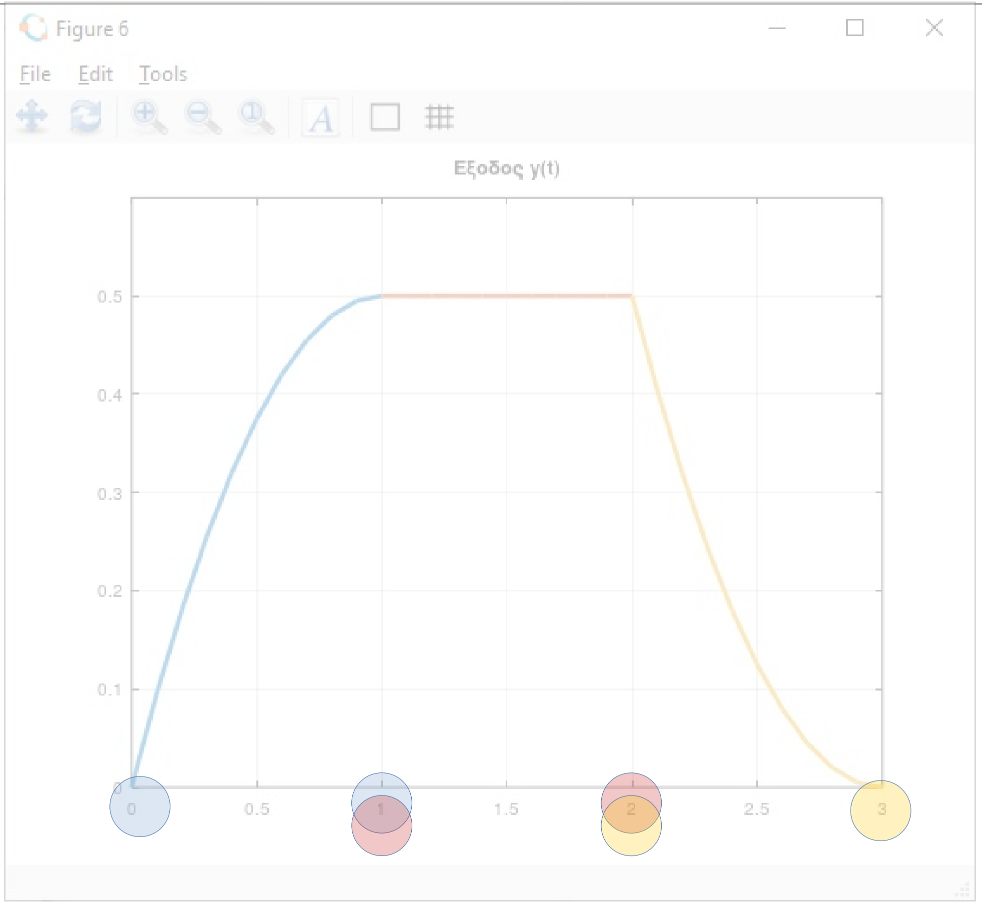
Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave)

❖ Άσκηση 1:

- 5ο βήμα ***Καθορισμός ορίων ολοκληρωμάτων***
- ***και υπολογισμός εξόδου.***

» % Σχεδιασμός εξόδου y(t)
» t1y=0:0.1:1;
» t2y=1:0.1:2;
» t3y=2:0.1:3;
» y1=t1y-(t1y.^2)/2;
» y2=0.5*ones(size(t2y));
» y3=0.5*((3-t3y).^2);
» figure(6)
» plot(t1y,y1,'linewidth',2,t2y,y2,'linewidth',2,t3y,y3,'linewidth',2)

» ylim([0 0.6])
» grid
» title ('Εξοδος y(t)')



Συνέλιξη (conv in MATLAB/Octave)

- Στο MATLAB/Octave η Συνέλιξη υλοποιείται με την εντολή **conv()**. Αναζητήστε την περιγραφή της με >> *help conv*

  conv Convolution and polynomial multiplication.

  C = conv(A, B) convolves vectors A and B.

  The resulting vector is length LENGTH(A)+LENGTH(B)-1

  If A and B are vectors of polynomial coefficients, convolving them is equivalent to multiplying the two polynomials.

- *Για να επιτευχθεί η συνέλιξη 2 σημάτων συνεχούς χρόνου με χρήση της conv χρειάζεται να τηρούνται τα παρακάτω:*

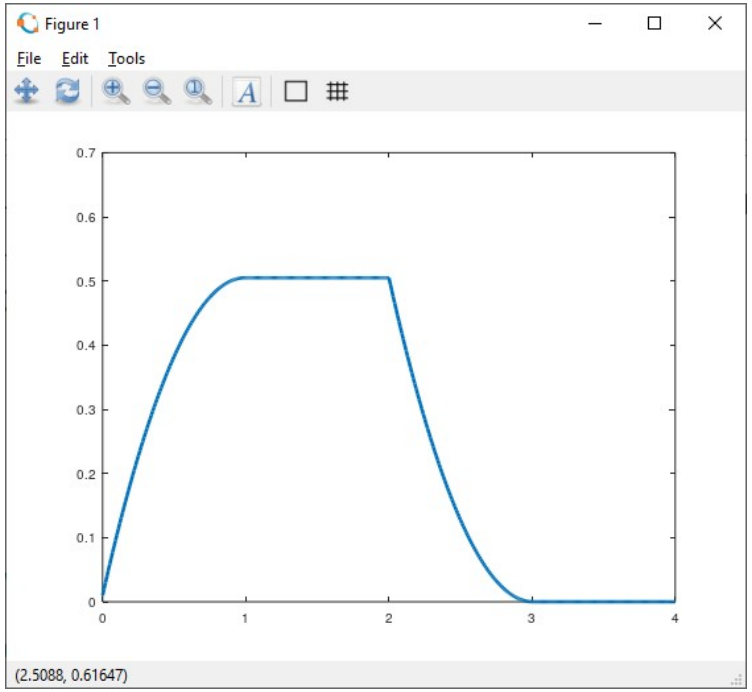
  1. *Τα δύο σήματα πρέπει είναι ορισμένα στο ίδιο χρονικό διάστημα. (Επιλέγουμε το χρονικό διάστημα του σήματος με την μεγαλύτερη διάρκεια)*
  2. *Τα χρονικά διάστημα όπου ορίζεται το σήμα δεν πρέπει να επικαλύπτονται.(π.χ 1 για 0<t<1, 0 για 1<t<2)*
  3. *Ο σωστός υπολογισμός της εξόδου γίνεται πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα της conv με το χρονικό βήμα, καθώς το MATLAB/Octave προσεγγίζει την συνέλιξη ως άθροισμα.*
  4. *Το χρονικό διάστημα σχεδιασμού ορίζεται ως το διπλάσιο του χρονικού διαστήματος που ορίζονται δυο τα σήματα, καθώς length(y)= length (x)+ length(h)-1.*

Συνέλιξη

- Άσκηση 2: Σύμφωνα με τα παραπάνω θα υλοποιήσουμε την άσκηση 1 με χρήση της εντολής conv. Άρα τα σήματα θα ορίζονται ως εξής:

$$x(t) = 1,\ 0 \le t \le 2 \qquad h(t) = \begin{cases} 1-t, 0 \le t \le 1 \\ 0,\ 1 < t \le 2 \end{cases}.$$

```
% Convolution y(t)=h(t)*x(t),using conv()
step=0.01;
t=0:step:2;
x=ones(size(t));
t1=0:step:1;
t2=1+step:step:2 %1+step για αποφυγή
%επικάλυψης χρονικών διαστημάτων, (Σημ. 2)
h1=1-t1;
h2=zeros(size(t2)); %Ορίζω στο μεγαλύτερο
%χρονικό διάστημα (Σημ.1)
h=[h1 h2];
y=conv(x,h)*step; %Πολλαπλασιάζω με time step (Σημ.3)
ty=0:step:4;        %Ορίζω τον χρόνο σχεδίασης στο διπλάσιο
#του χρόνου ορισμού των σημάτων. (Σημ.4)
plot(ty,y,'linewidth',2);
```



*Ελέγξτε τι θα συμβεί στο σήμα εξόδου σας εάν δεν τηρούνται οι 4 σημειώσεις που δόθηκαν.

Συνέλιξη

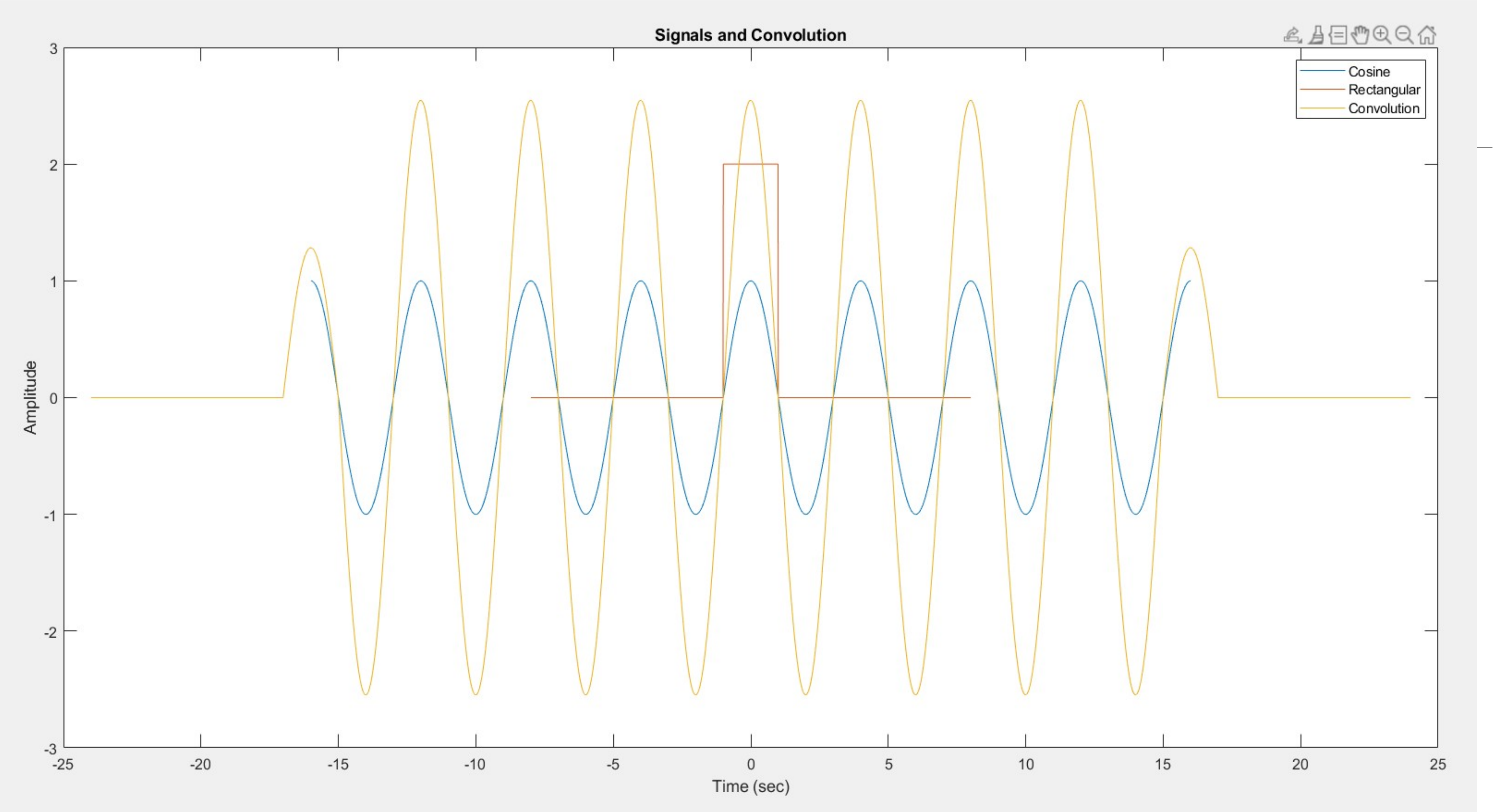
- Άσκηση 3: Για τα παρακάτω σήματα συνεχούς χρόνου, υπολογίστε την συνέλιξη τους.

$x(t) = \cos(\pi t/2), \ \ -5 \leq t \leq 5$, $h(t) = 2rect(t/2)$ από –T/8 έως T/8

Λύση % Convolution y(t)=h(t)*x(t),using conv

```
pkg load signal % used for function rectpuls
step = 0.01;                % Βήμα χρόνου
tx = -16:step:16;       % Διάνυσμα χρόνου για x(t)
x = cos(pi * tx/ 2);            % σήμα x(t)
th = -8:step:8;          % Διάνυσμα χρόνου για h(t)
h = 2*rectpuls(th/2);  % h(t)
ty = -24:step:24;       % Διάνυσμα χρόνου συνέλιξης [tx1+th1, tx2+th2]
y = conv(x,h)*step;    % Συνέλιξη
plot(tx, x, th, h,ty, y);
xlabel('Time (sec)');
ylabel('Amplitude');
title('Signals and Convolution');
legend('Cosine', 'Rectangular', 'Convolution');
```

❖ Άσκηση 3:

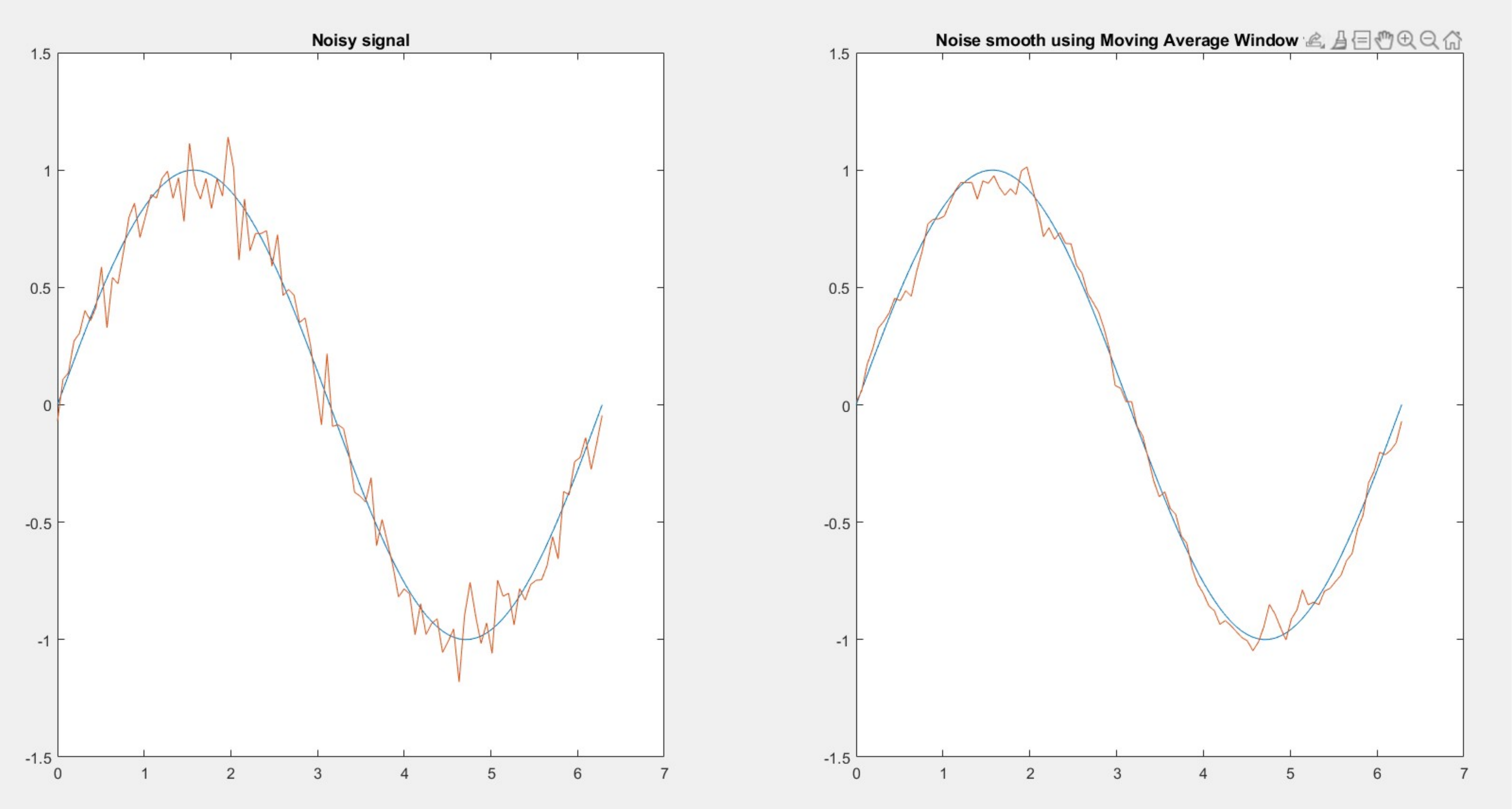

Signals and Convolution
Cosine
Rectangular
Convolution
Amplitude
Time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25

Συνέλιξη

❖ Άσκηση 4: Η conv χρησιμοποιείται και για την εφαρμογή φίλτρων στο σήμα, όπως αυτό του Moving Average Window

```
» pkg load statistics  %used for normrnd function
» x=linspace(0,2*pi,100);
» z=sin(x)
» noise1=normrnd(0,0.1,[1,length(z)]);    %  Δημιουργία θορύβου normrnd(μ, σ, [size])
» mask=ones(1,3);                %  Μάσκα [1 1 1] για Moving Average
» ysmooth=conv(z+noise1, mask, shape='same') / length(mask); %  Εφαρμογή φίλτρου Moving Average με conv()
  %shape='same': Return the central part of the convolution with the same size as z.
» figure(1)
» subplot (1,2,1)
» plot(x, z, x, z+noise1)
» title('Noisy signal')
» Subplot (1, 2, 2)
» plot(x, z, x, ysmooth)
» title('Noise smooth using Moving Average Window with conv ')
```

Άσκηση 4:



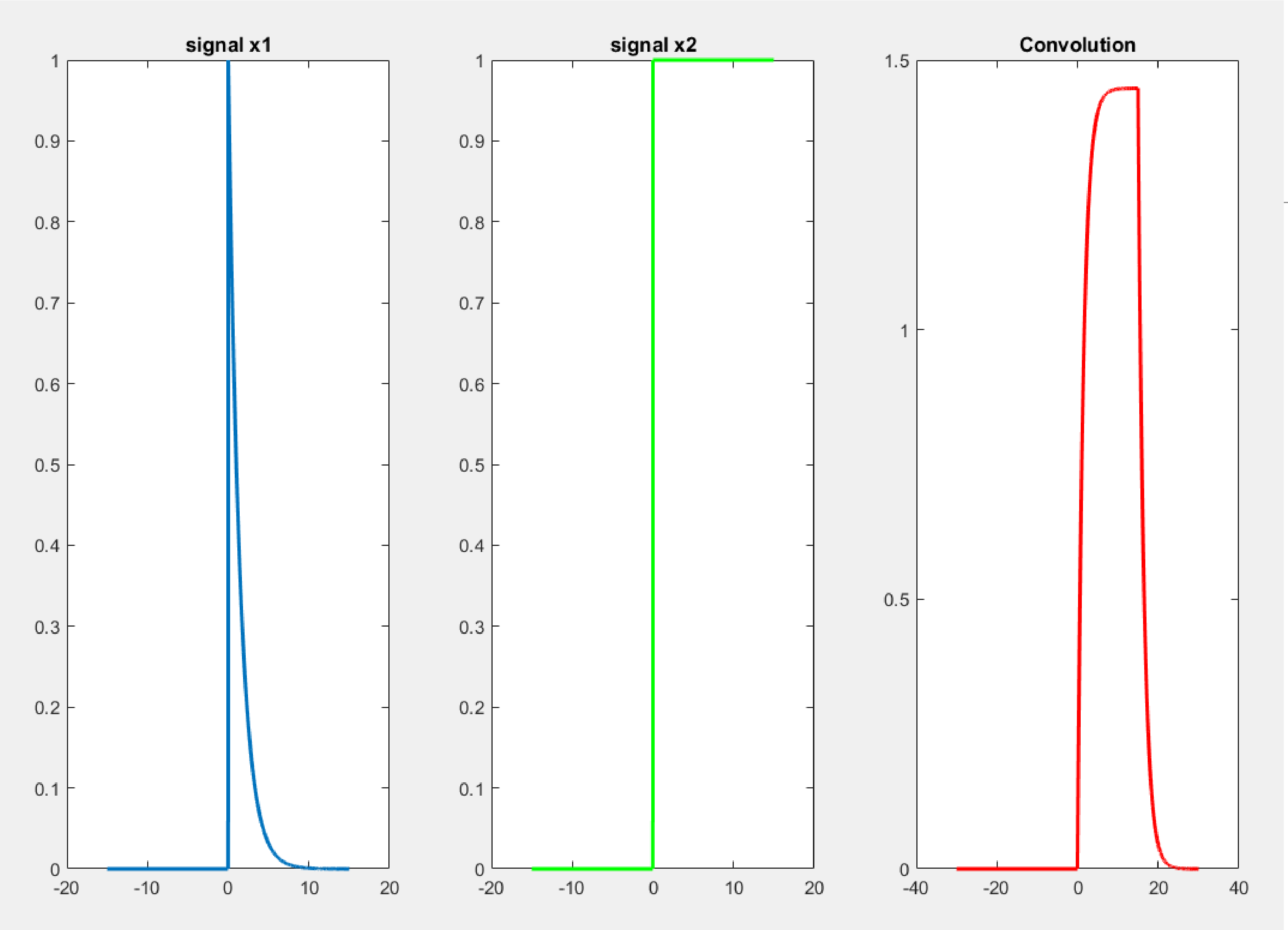
Noisy signal
Noise smooth using Moving Average Window
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7

Συνέλιξη

Άσκηση 5: Υπολογίστε την συνέλιξη των σημάτων X1(t)= (1/2)^|t|.*u(t), X2(t)= u(t)

```
step=0.01;                                        %Βήμα χρόνου
t1 = -15:step:15;                                 %Διάνυσμα χρόνου
x1 = (1/2).^abs(t1).*(t1>=0);  %Πρώτο σήμα  (u(t) = μοναδιαίο βήμα – unit step)
x2 = 1*(t1>=0);                                   %SOS: Πολλαπλασιασμός με 1
z = conv(x1,x2)*step;                 %Συνέλιξη
tconv=2*t1(1):step:2*t1(end);  %Άξονας χρόνου
figure(1)
subplot(1,3,1)
plot(t1,x1,'linewidth', 2);
title('signal x1')
subplot(1,3,2)
plot(t1,x2,'g','linewidth',2);
title('signal x2')
subplot(1,3,3)
plot(tconv,z,'r','linewidth',2);
title('Convolution')
```

Άσκηση 5:



signal x1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-20
-10
0
10
20
signal x2
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-20
-10
0
10
20
Convolution
1.5
1
0.5
0
-40
-20
0
20
40

Αναφορές

Το παρόν έγγραφο δημιουργήθηκε με βάση τα παρακάτω συγγράμματα, εκπαιδευτικά υλικά:

[1] Νικόλαος Ασημάκης, Μαρία Αδάμ, Σήματα και Συστήματα, ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ-Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2015.

[2] Β. Διακολουκάς, "Σήματα και Συστήματα," Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.

[3] Καραμπογιάς, Σ. (2003). Σήματα και Συστήματα. Αθήνα: Έκδοση Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

[4] VinayK. Ingle and John G.Proakis, "Digital Signal Processing," Bookware Companion Series, 2003.

[5] Αναστασία Βελώνη, Σήματα και Συστήματα, Τμήμα Η.Υ.Σ, Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα