

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

2.1.6.1. Ορισμός γραμμικής συνέλιξης

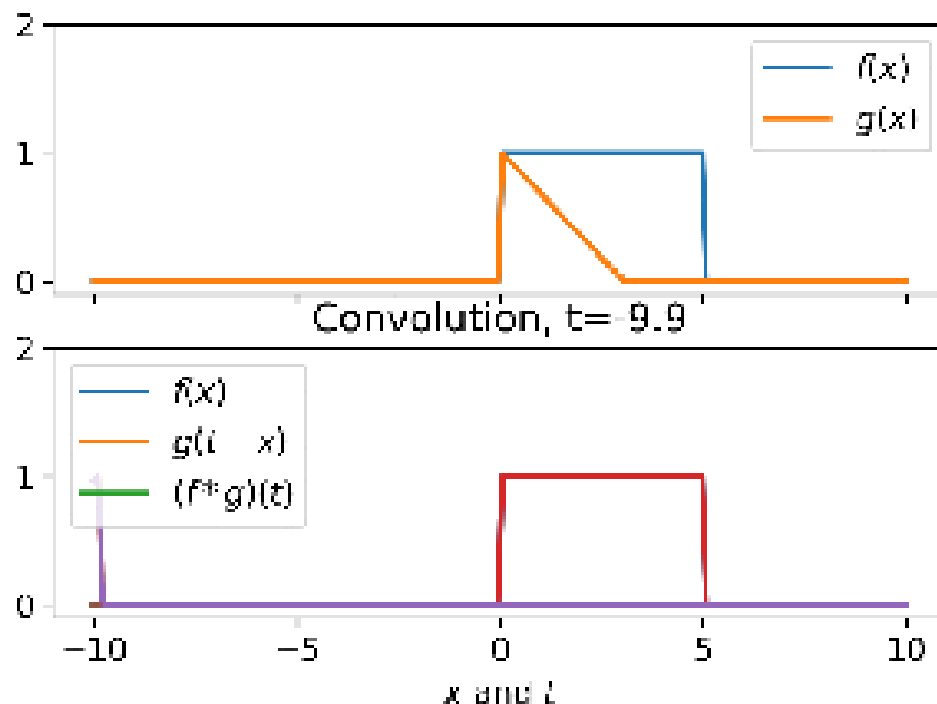
Η **γραμμική συνέλιξη (linear convolution)** δύο σημάτων διακριτού χρόνου $x_1(n)$ και $x_2(n)$ ορίζεται ως ακολούθως:

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k) \cdot x_2(n-k) \quad (2.8)$$

Το σύμβολο της γραμμικής συνέλιξης είναι το «*».

Συνέλιξη (convolution) - (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

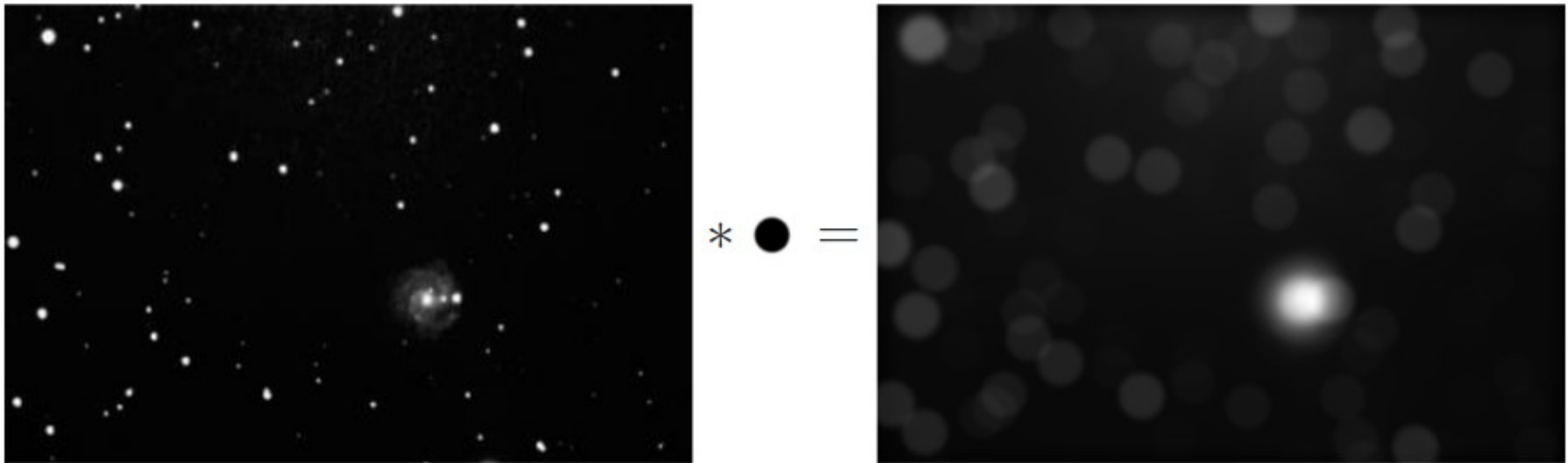
Η Συνέλιξη (convolution) είναι μια πράξη μεταξύ δύο σημάτων που έχει σαν αποτέλεσμα ένα τρίτο σήμα. Σε ένα σύστημα, η συνέλιξη του με την dirac (συνάρτηση δ), θα μας δώσει την κρουστική του απόκριση (impulse response)




Συνέλιξη (convolution) - (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Convolution: optics example

If a projective lens is out of focus, the blurred image is equal to the original image convolved with the aperture shape (e.g., a filled circle):





Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Η ετεροσυσχέτιση (cross-correlation) εκφράζει το βαθμό ομοιότητας μεταξύ σημάτων.

Μπορεί ένα σύστημα επικοινωνίας να συγκρίνει ένα εισερχόμενο σήμα με μια βιβλιοθήκη πιθανών προτύπων για να εντοπίσει εάν είναι ένα από αυτά.

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Η αυτοσυσχέτιση (autocorrelation), γνωστή και ως σειριακή συσχέτιση, είναι η συσχέτιση ενός σήματος με ένα αντίγραφο το οποίο έχει υποστεί μετατόπιση. Άτυπα είναι η ομοιότητα μεταξύ παρατηρήσεων σε συνάρτηση με την καθυστέρηση μεταξύ τους.

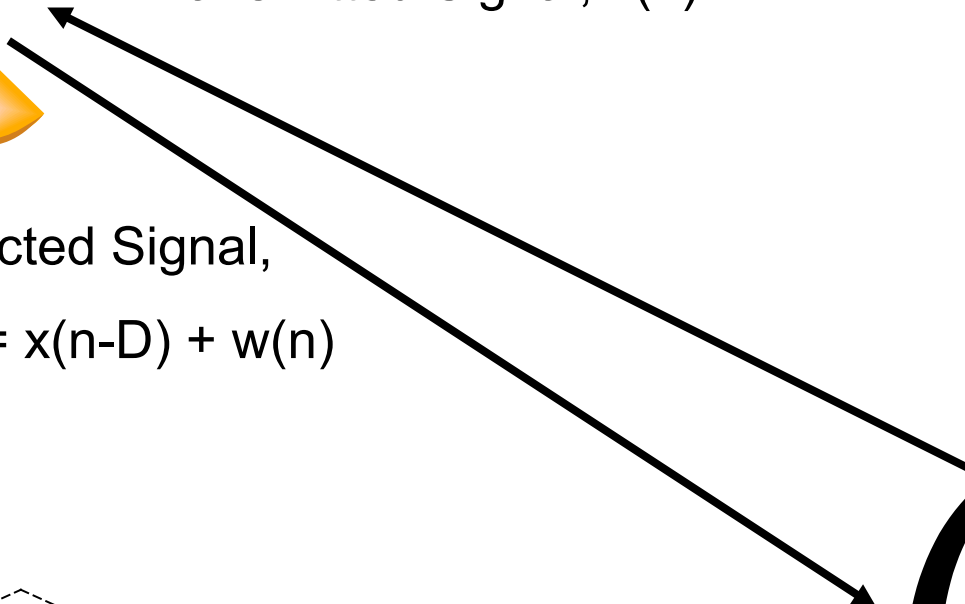
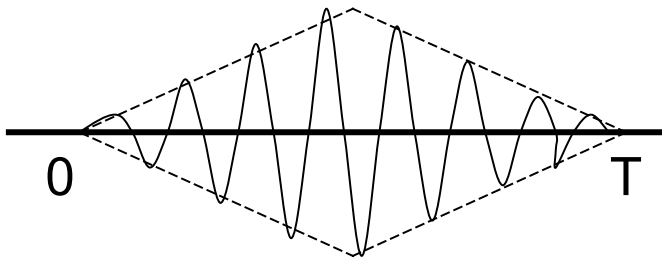
Μπορεί να εντοπίσει επαναλαμβανόμενες ακολουθίες όπως η παρουσία ενός περιοδικού σήματος το οποίο έχει θόρυβο, ή για την αναγνώριση της θεμελιώδους συχνότητας σε ένα σήμα το οποίο μπορεί να υπονοηθεί από τις αρμονικές του συχνότητες.

Correlation

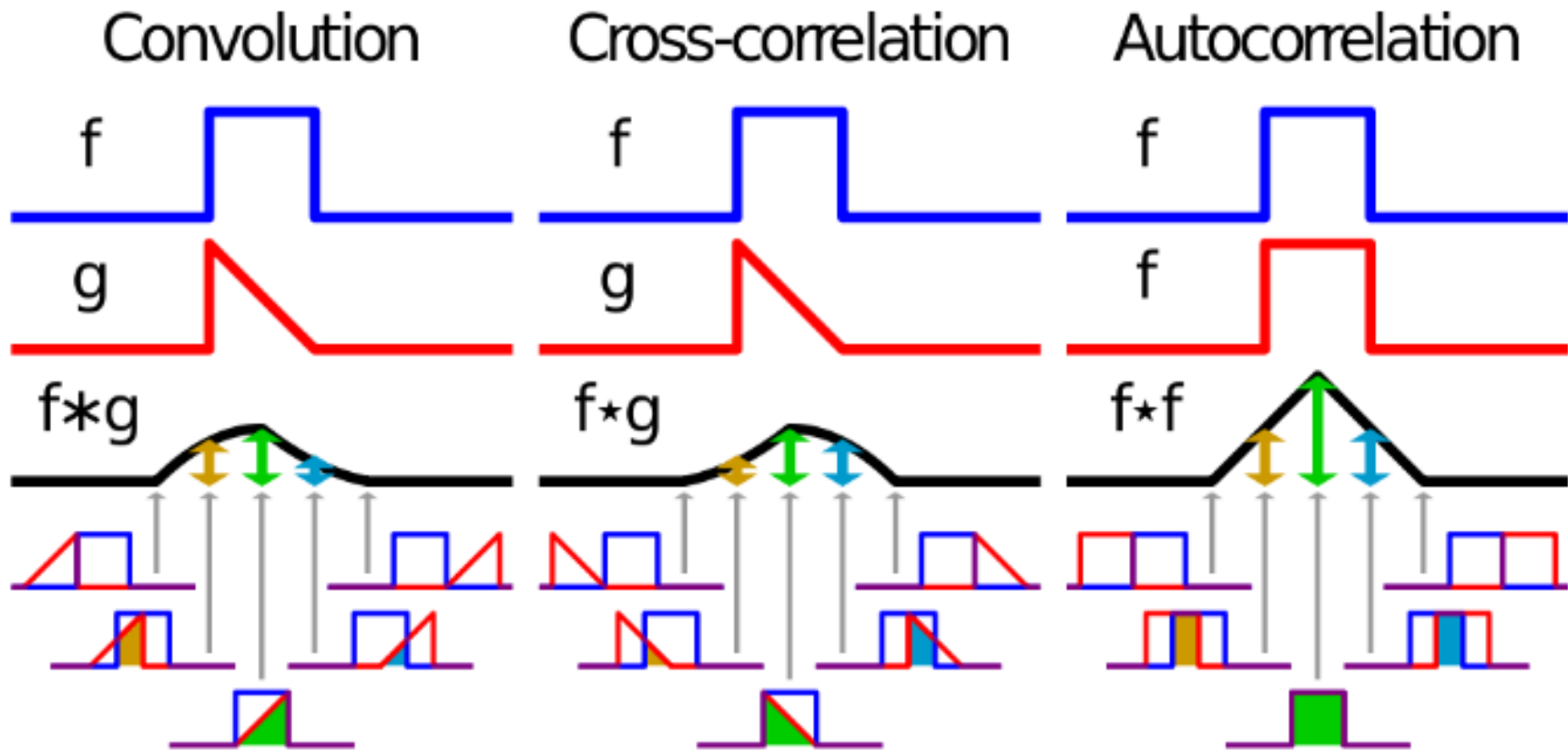


Transmitted Signal, $x(n)$

Reflected Signal,
 $y(n) = x(n-D) + w(n)$



Συνέλιξη (convolution) - (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)



Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Η διαδικασία του υπολογισμού της γραμμικής συνέλιξης γίνεται σε τέσσερα βήματα:

1. Αναδίπλωση του ενός σήματος.
2. Μετατόπιση του αναδιπλωμένου σήματος στο διάστημα χρόνου του άλλου(αμετακίνητου) σήματος. Η μετατόπιση γίνεται από τη στιγμή που το αναδιπλωμένο σήμα εισέρχεται στο διάστημα χρόνου του σταθερού σήματος μέχρι τη στιγμή που το αναδιπλωμένο σήμα εξέρχεται από το διάστημα χρόνου του σταθερού σήματος.
3. Πολλαπλασιασμός των τιμών του αμετακίνητου σήματος με τις τιμές του μετατοπισμένου σήματος.
4. Πρόσθεση των τιμών.

Συνέλιξη (convolution) - (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Ο υπολογισμός της γραμμικής συνέλιξης φαίνεται παρακάτω:

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
$x_1(k)$			4	5	6	7			
$x_2(k)$					3	2	1		
$x_2(-k)$	1	2	3						$x(0) = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 12$
$x_2(1-k)$		1	2	3					$x(1) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 23$
$x_2(2-k)$			1	2	3				$x(2) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 32$
$x_2(3-k)$				1	2	3			$x(3) = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 38$
$x_2(4-k)$					1	2	3		$x(4) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 = 20$
$x_2(5-k)$						1	2	3	$x(5) = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 7$

Υπολογισμός γραμμικής συνέλιξης

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Παράδειγμα.

Δίνονται τα σήματα

$$x_1(n) = 4\delta(n+1) + 5\delta(n) + 6\delta(n-1) + 7\delta(n-2)$$

και

$$x_2(n) = 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$$

Θεωρούνται τα πολυώνυμα:

$$f(x) = 4 + 5 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3$$

και

$$g(x) = 3 + 2 \cdot x + x^2$$

που έχουν συντελεστές τις τιμές των σημάτων.

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Θεωρούνται τα πολυώνυμα:

$$f(x) = 4 + 5 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3$$

και

$$g(x) = 3 + 2 \cdot x + x^2$$

που έχουν συντελεστές τις τιμές των σημάτων.

Τότε ο πολλαπλασιασμός των πολυωνύμων είναι:

$$f(x) \cdot g(x) = (4 + 5 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3) \cdot (3 + 2 \cdot x + x^2) = 12 + 23 \cdot x + 32 \cdot x^2 + 38 \cdot x^3 + 20 \cdot x^4 + 7 \cdot x^5$$

ή

$$g(x) \cdot f(x) = (3 + 2 \cdot x + x^2) \cdot (4 + 5 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 7 \cdot x^3) = 12 + 23 \cdot x + 32 \cdot x^2 + 38 \cdot x^3 + 20 \cdot x^4 + 7 \cdot x^5$$

Είναι φανερό ότι οι συντελεστές του γινομένου των πολυωνύμων είναι οι τιμές της γραμμικής συνέλιξης $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$.

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Η εντολή του MATLAB η οποία υλοποιεί τη συνέλιξη δύο σημάτων είναι η `conv`. Κατά συνέπεια αν x είναι το διάνυσμα που παριστάνει την είσοδο στο σύστημα και h το διάνυσμα που παριστάνει την κρουστική του απόκριση, η έξοδος του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί μέσω της κλήσης $y = \text{conv}(h, x)$ ή ισοδύναμα μέσω της $y = \text{conv}(x, h)$ αφού η πράξη του συγκερασμού είναι αντιμεταθετική.

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Όταν το σύστημα και η ακολουθία εισόδου είναι αιτιατά (δηλαδή $h(n)=x(n)=0$, για κάθε $n<0$ με μήκος δείγματος M,N αντίστοιχα) τότε αλλάζουν τα όρια του αθροίσματος και η εξίσωση της συνέλιξης παίρνει τη μορφή:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k)h(n-k) \quad \text{Για } n=0, \dots, N+M-2$$

Τότε η απόκριση $y(n)$ έχει μήκος $M+N-1$

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Properties of convolution

For arbitrary sequences $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ and scalars a , b :

→ Convolution is associative

$$(\{p_n\} * \{q_n\}) * \{r_n\} = \{p_n\} * (\{q_n\} * \{r_n\})$$

→ Convolution is commutative

$$\{p_n\} * \{q_n\} = \{q_n\} * \{p_n\}$$

→ Convolution is linear

$$\{p_n\} * \{a \cdot q_n + b \cdot r_n\} = a \cdot (\{p_n\} * \{q_n\}) + b \cdot (\{p_n\} * \{r_n\})$$

Συνέλιξη (convolution) – (αύτο-έτερο)-συσχέτιση (auto/cross-correlation)

Πηγές:

1. Asimakis, N., Adam, M. 2015. Σήματα διακριτού και συνεχούς χρόνου. [Book Chapter]. In Asimakis, N., Adam, M. 2015. Σήματα και Συστήματα.
2. Oppenheim, A. V., & Schaffer, R. W. (1975). Digital signal processing [by] Alan V. Oppenheim [and] Ronald W. Schaffer. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.