Λυσεις 2ο σετ Ασκησεων

1. f παραγωγισιμη στο $x_0=1$ αρα και συνεχης στο $x_0=1$

Απο συνεχεια $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(a\sqrt{x^2+3}+\beta\right) = 2a+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x^2+x+1) = 5$$

$$f(1) = 2a+\beta$$

Αρα $2a+\beta=5$ (1)

Απο παραγωγισιμοτητα

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(3x^2+x+1)-2a+\beta}{x-1} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{3x^2+x-4}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{3\cancel{(x-1)}(x+4/3)}{\cancel{x-1}} = 7$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\left(a\sqrt{x^2+3}+\beta\right)-(2a+\beta)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{a\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{a(x^2-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{a}{2}$$

Αρα $\frac{a}{2}=7$, $a=14$ και Απο (1) $\beta=-23$

2.

$$y' = 2\left(\frac{\sin x}{\sin x+1}\right)\left(\frac{(\sin x+1)\cos x - \sin x\cos x}{(\sin x+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{(\sin x+1)^3} = \frac{\sin 2x}{(\sin x+1)^3}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$$

$$y' = 2\cos\sqrt{3x+1}\cdot\left(\cos\sqrt{3x+1}\right)' =$$

$$= 2\cos\sqrt{3x+1}\left(-\sin\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{3x+1}\right)' =$$

$$= 2\cos\sqrt{3x+1}\left(-\sin\sqrt{3x+1}\right)\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} =$$

$$- \frac{2\sin\sqrt{3x+1}\cdot\cos\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}}$$

3.

Θετω $g(x) = f(x) - x^3$

$g(x)$ και αυτη συνεχης και παραγωγισιμη (διαφορα συνεχων/παραγωγισιμων συναρτησεων) στο $[\alpha, \beta]$

$$f(\alpha) - \alpha^3 = f(\beta) - \beta^3 \Leftrightarrow g(\alpha) = g(\beta)$$

Αρα απο Rolle στο $[\alpha, \beta]$ $\exists\, x_0 \in (\alpha, \beta)$ τ.ω.

$$g'(x_0) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) - 3x^2$$

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 3x_0^2$$

4.

i) $f_1(x) = x^2 - x - 1$ $\quad D_{f_1} = \mathbb{R}$

$f_1'(x) = 2x - 1$ $\quad f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

γν. φθινουσα $(-\infty, \frac{1}{2})$

γν. αυξουσα $(\frac{1}{2}, +\infty)$

Ολικο ελαχιστο $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$

ii

$f_2(x) = x + \sin x$ $D_{f_2} = \mathbb{R}$

$f_2'(x) = 1 + \cos x$ $f_2'(x) \geq 0$ $f_2'(x) = 0$ για $x = (2k+1)\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

f_2: γν. αυξουσα στο D_{f_2}

Δεν εχει ακροτατα. (δεν αλλαζει το προσημο της $f_2'(x)$)

iii

$$f_3(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3}$$ $D_f = \mathbb{R}$ ($x^2+2x+3 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$f_3'(x) = \frac{(x^2-2x+3)'(x^2+2x+3) - (x^2-2x+3)(x^2+2x+3)'}{(x^2+2x+3)^2} =$$

$$= \frac{4(x^2-3)}{(x^2+2x+3)^2}$$ $f_3'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f_3'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_3(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

γν. αυξουσα $(-\infty, -\sqrt{3})$

γν. φθινουσα $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

γν. αυξουσα $(\sqrt{3}, +\infty)$

τοπικο μεγιστο στο $x = -\sqrt{3}$

το $f_3(-\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$

τοπικο ελαχιστο στο $x = \sqrt{3}$

το $f_3(\sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$

Ειναι και ολικα ακροτατα διοτι $\lim_{x \to \pm\infty} f_3(x) = 1$

iv $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+4}$ $D_{f_4} = [0, +\infty)$

$f_4'(x) = \dfrac{4-x}{2\sqrt{x}\,(x+4)^2}$ $f_4'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

γν. αυξουσα $(0,4)$

γν. φθινουσα $(4,+\infty)$

για $x = 4$ ολικο μεγιστο το $f_4(4) = \frac{1}{4}$.

για $x=0$ ολικο ελαχιστο (Ακρο D_f και $f_4(x) \geq 0 \ \forall x \in D_{f_4}$)
$f_4(0) = 0$

5. i $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

$f_1''(x) = 6(x-1)$ $f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1''(x)$		$-$	0	$+$	
		$\frown$		$\smile$	

Κοιλη στο $(-\infty, 1)$

Κυρτη στο $(1, +\infty)$

Σημειο καμπης στο $x=1$

ii

$f_2(x) = x^2(x-1)^2$

$f_2''(x) = 2(6x^2 - 6x + 1)$

$f_2''(x) = 0 \iff x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$		$+\infty$
$f_2''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$							

Κοιλη στο: $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$

Κυρτη στα $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right)$

σημεια καμπης στα $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

iii)

$f_3(x) = \sin(x)$

$f_3''(x) = -\sin(x)$

Κυρτη στα $(\pi + 2\kappa\pi, 2\pi + 2\kappa\pi)$

Κοιλη στα $(2\kappa\pi, \pi + 2\kappa\pi)$

Σημεια καμπης στα $x = \kappa\pi$ $\kappa \in \mathbb{Z}$

iv $f_4(x) = \dfrac{x}{x+1}$ $D_{f_4}: \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f_4''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

x		-1	
$f_4''(x)$	$+$	‖	$-$
	$\cup$	‖	$\cap$

Κοιλη στο $(-1, +\infty)$

Κυρτη στο $(-\infty, -1)$

Δεν $\exists$ σημειο καμπης

(δεν ορίζεται η f_4 για $x=-1$)

6.

Απο εκφωνηση $\dfrac{dV}{dt} = 2\,cm^3/s$

Γνωριζουμε οτι $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \overset{\frac{dV}{dt}=2}{\Longrightarrow} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi r^2} \quad (1)$$

για $V=50$ $\quad 50 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow r = \left(\frac{75}{2\pi}\right)^{1/3}$

$$(1) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi\left(\frac{75}{2\pi}\right)^{2/3}} = \frac{2\pi^{-\frac{1}{3}}}{75^{2/3}} \simeq 0{,}03 \text{ cm/s}$$

7

Διαστασεις Κουτιου : $(8-2x), (3-2x), x$

Αρα $V(x) = (8-2x)(3-2x)\cdot x = 4x^3-22x^2+24x \ cm^3$

$V'(x) = 4(3x^2-11x+6)$

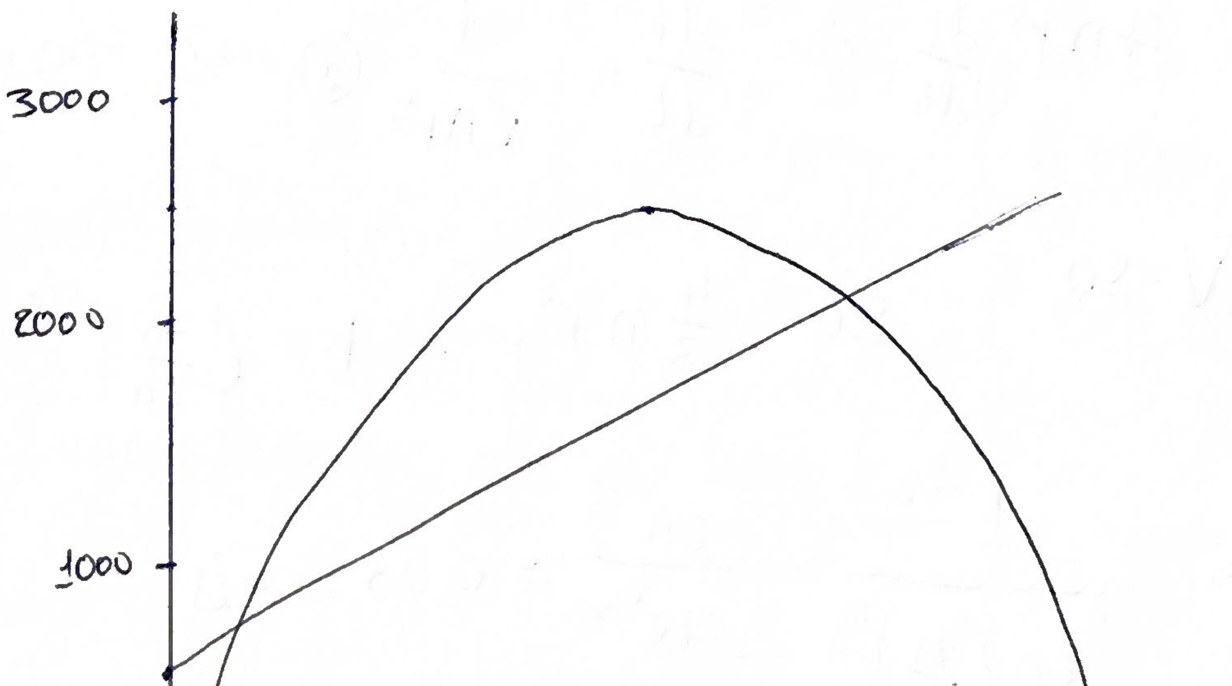
$V'(x)=0$

$x=3$ ή $x=\frac{2}{3}$ ($x=3$ Απορ/ται απο εκφωνηση. Διαστασεις φυλλου 8cm, 3cm.)

Δεκτη η $x=\frac{2}{3}$

$V''(x) = 24x-44$, $V''(\frac{2}{3}) = -28 < 0$ με κριτηριο 2ης παραγωγου για $x=\frac{2}{3}$ εχω μεγιστο το $V(\frac{2}{3}) = \frac{200}{27} \ cm^3$

8



Σημεια τομης: $C(x) = R(x) \iff$

$600 + 20x = x(100 - x) \iff$

$x = 40 \pm 10\sqrt{10}$

Κερδος $P(x) = R(x) - C(x) = -x^2 + 80x - 600$

$P'(x) = -2x + 80$ $\quad P'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$

$P''(x) = -2 < 0$ αρα για $x = 40$

Εχω μεγιστο κερδος

$P(40) = 1000$ €

9. i

$\frac{dx}{dt} = 2t$ $\quad \frac{dy}{dt} = 3t^2$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \overset{\frac{dt}{dx} \neq 0}{=} \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} t \quad (t \neq 0)$

ii

$\frac{dx}{dt} = 6t^2$ $\quad \frac{dy}{dt} = 2t\cos t - t^2 \sin t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2t\cos t - t^2 \sin t}{6t^2} \quad (t \neq 0)$

iv

$\frac{dx}{dt} = a \cdot 3\cos^2 t\,(-\sin t)$

$\frac{dy}{dt} = 3\beta \cdot \sin^2 t \cdot \cos t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{3}\beta \cdot \sin^2 t \cdot \cancel{\cos t}}{-\cancel{3}a \cdot \cos^2 t \cdot \cancel{\sin t}} =$

$= -\frac{\beta}{a} \cdot \tan t \quad (\sin t \cos t \neq 0)$

iii

$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$

$\frac{dy}{dt} = 3\cos t$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t} = -\cot t \quad (\sin t \neq 0)$

10.

Εξισωση εφαπτομενης σε τυχαιο σημειο (x_0, y_0)

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$

$y - (\sqrt{a} - \sqrt{x_0})^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{a}{x_0}}\right)(x - x_0)$ ①, $f'(x) = 1 - \sqrt{\frac{a}{x}}$

Για να βρω ΟΑ θετω στην ① $y = 0$

Αρα $-(\sqrt{a} - \sqrt{x_0})^2 = (x - x_0) - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0) \Rightarrow$

$-(a - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0} + x_0) = x - x_0 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}} \cdot x + \sqrt{a} \cdot \sqrt{x_0} \Rightarrow$

$x = \sqrt{a \cdot x_0}$

Αρα $(OA) = \sqrt{a x_0}$

Ομοιως για OB θετω $x = 0$

Αρα $y - (\sqrt{a} - \sqrt{x_0})^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}\right)(-x_0) \Rightarrow$

$y - (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x_0} + x_0) = -x_0 + \sqrt{a}\sqrt{x_0} \Rightarrow$

$y = a - \sqrt{a x_0}$

Αρα $(OB) = a - \sqrt{a x_0}$

Τελικα $(OA) + (OB) = \sqrt{a x_0} + a - \sqrt{a x_0} = a$ (σταθερο)

11

$f(x) = \sin x = f^{(0)}(x)$ και $f(x_0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 = f^{(4k)}(x_0)$

$f'(x) = \cos x = f^{(1)}(x)$ και $f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = f^{(4k+1)}(x_0)$ $k \in \mathbb{N}$

$f''(x) = -\sin x = f^{(2)}(x)$ και $f''(x_0) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 = f^{(4k+2)}(x_0)$

$f^{(3)}(x) = \cos x$ και $f^{(3)}(x_0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = f^{(4k+3)}(x_0)$

Οταν εχω αρτια παραγωγο (μορφη 2k)

$f^{(2k)}(x_0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

Οταν εχω περιττη παραγωγο (μορφη 2κ+1)

$$f^{(2k+1)}(x_0) = 0$$

Αρα

$$P_{n,\frac{\pi}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k} \quad n \in \mathbb{N}$$

<u>12</u>

$$x^2 + xy - y^3 = 7$$

Παραγωγισω (πεπλεγμενη)

$$2x + \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x-3y^2}$$

Στο (3,2) $\frac{dy}{dx} = \frac{8}{9}$

Αρα εξισωση εφαπτομενης

$$y - 2 = \frac{8}{9}(x-3)$$