Λυσεις 1ο σετ Ασκησεων

1. Θελουμε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τετοιο ωστε

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(8x+5) - 13| < \varepsilon$$

$$|(8x+5) - 13| = |8x - 8| = 8|x-1|$$

Αρα $8|x-1| < \varepsilon$

$|x-1| < \frac{\varepsilon}{8}$ Αρα $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$

ομοιως $|(-2x+8) - 2| = |-2x+6| = 2|x-3|$

$2|x-3| < \varepsilon$

$|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad \delta = \frac{\varepsilon}{2}$

2. Απο Κριτήριο παρεμβολης

$$\left| x^4 \cdot \cos\frac{1}{2x} \right| \leq x^4$$

$\lim\limits_{x \to 0} x^4 = 0$ Αρα $\lim\limits_{x \to 0} x^4 \cdot \cos\frac{1}{2x} = 0$

3

$D_f = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{x^2-3x+1}{2x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{x^2-3x+1}{2x-1} = +\infty$$

Αρα η ευθεια $x = \frac{1}{2}$ κατακορυφη ασυμπτωτη

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-3x+1}{2x^2-x} = +\frac{1}{2}$$

Αρα $a = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - a \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2-3x+1}{2x-1} - \frac{1}{2}x \right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{5}{4}x+1}{2x-1} = -\frac{5}{4}$$

ομοιως $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - ax) = -\frac{5}{4}$

Πλαγια ασυμπτωτη η $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

4.

$$x - x^2 \le f(x) - 3 \le x + x^2$$

$$x - x^2 + 3 \le f(x) \le 3 + x + x^2$$

$$\lim_{x\to 0} (3 + x + x^2) = \lim_{x\to 0} (3 + x + x^2) = 3$$

Απο Κριτηριο παρεμβολης

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

$$x - x^2 \le f(x) - 3 \le x + x^2$$

$x > 0$ $\quad \frac{x - x^2}{x} \le \frac{f(x) - 3}{x} \le \frac{x + x^2}{x}$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - x^2}{x} = 1$

$x < 0$ $\quad \frac{x - x^2}{x} \ge \frac{f(x) - 3}{x} \ge \frac{x + x^2}{x}$ $\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x + x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x - x^2}{x} = 1$

Αρα $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 1$

5

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{4 - x} = \frac{1 - 7 + 12}{4 - 1} = 2$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{2\cdot 3^x + 5}{3\cdot 5^x - 2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{5}{5^x}}{3 - \frac{2}{5^x}} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{a}{5^x} = 0$$

c) $$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{x^2 - 8x + 7} = \lim_{x\to 1} \frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-7)} = \frac{1}{3}$$

d. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x+16}-5}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{(3x+16)-25}{(x-3)\cdot(\sqrt{3x+16}+5)} =$

$= \frac{3\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{3x+16}+5)} = \frac{3}{10}$

e. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{2-\sqrt{x+1}}{(x-3)2\sqrt{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \frac{3-x}{(x-3)2\sqrt{x+1}\cdot(2+\sqrt{x+1})} = \frac{-\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}2\sqrt{x+1}(2+\sqrt{x+1})} = -\frac{1}{16}$

f. $\lim\limits_{t\to \frac{1}{3}} \frac{t-\frac{1}{3}}{(3t-1)^2} = \lim\limits_{t\to\frac{1}{3}} \frac{3t-1}{3(3t-1)^2} = \lim\limits_{t\to\frac{1}{3}} \frac{1}{3(3t-1)}$ • Δεν υπαρχει.

$t\to\frac{1}{3}^+ \quad +\infty$

$t\to\frac{1}{3}^- \quad -\infty$

g. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(x^2+9)}{\cancel{x-3}} = 108$

h. $\lim\limits_{p\to 1} \frac{p^5-1}{p-1} = \lim\limits_{p\to 1} \frac{\cancel{(p-1)}(p^4+p^3+p^2+p+1)}{\cancel{p-1}} = 5$

$p^5-1 = (p-1)(p^4+p^3+p^2+p+1)$

i. $\lim_{x \to 81} \frac{\sqrt[4]{x}-3}{x-81} = \lim_{x \to 81} \frac{\sqrt[4]{x}-3}{(\sqrt{x}+9)(\sqrt[4]{x}+3)(\sqrt[4]{x}-3)} =$

$$\lim_{x \to 81} \frac{1}{(\sqrt{x}+9)(\sqrt[4]{x}+3)} = \frac{1}{108}$$

j. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cancel{(\sin\theta - \cos\theta)}(\sin\theta + \cos\theta)}{\cancel{\sin\theta - \cos\theta}} = \sqrt{2}$

k. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{4x+10} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{4+\frac{10}{x}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

l. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4-1}{x^5+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^5}}{1+\left(\frac{2}{x^5}\right)} = 0$

m. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\cdot 3^x+5^x}{3\cdot 5^x-2^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^x\left(2\cancel{\left(\frac{3}{5}\right)^x}^{\to 0}+1\right)}{5^x\left(3-\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^x}^{\to 0}\right)} = \frac{1}{3}$

n. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2}$

o. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{25x^2+8}}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{25+\frac{8}{x^2}}}{1+\frac{2}{x}} = 5$

p. $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{\cos t+1}$: Δεν υπαρχει. , cos t ταλαντωνεται στο $[-1,1]$

q. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-7}{x(x-5)^2} = -\infty$

r. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x-5}{x+5} = -\infty$

s. $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-4}{x^2-3x} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-4}{x(x-3)} = +\infty$

t. $\lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{u-1}{\sin u} = -\infty$

u. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{\tan x} = -\infty$

6. $f(x) = \sqrt{x^2-5}$

$D_f : (-\infty,\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5},+\infty)$ $\sqrt{x}$, x^2-5 συνεχεις συναρτησεις.

Αρα η $f(x)$ συνεχης στο D_f

b. $g(x) = \dfrac{2x}{x^3 - 25x}$

$x^3 - 25x = x(x-5)(x+5)$

$D_f = (-\infty, -5) \cup (-5, 0) \cup (5, +\infty)$

$g(x)$ ρητη συναρτηση με Π.Ο. το D_f.

Αρα $g(x)$ συνεχης στο D_f

c. $h(x) = \cos\sqrt{x}$ $\qquad D_f = [0, +\infty)$

$\cos x$ συνεχης συναρτηση

$\sqrt{x}$ συνεχης για $x \geq 0$

Αρα η $h(x)$ συνεχης στο D_f.

7.

$\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 3$

πρεπει $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = g(1) \Rightarrow$

$g(1) = a$ $\qquad a = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = a + b = 3 + b$

πρεπει $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = g(1) \Rightarrow$

$3 + b = 3 \Rightarrow$

$b = 0$

8.

Για να ειναι συνεχω πρεπει

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$|x f(x) - |x|| \leq x^2 \Rightarrow$$

$$-x^2 \leq x f(x) - |x| \leq x^2$$

$$-x^2 + |x| \leq x f(x) \leq x^2 + |x|$$

$$x \neq 0 \quad \frac{-x^2 + |x|}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + |x|}{x}$$

Για $x > 0$ $\quad \frac{-x^2 + x}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 + x}{x}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + x}{x} = 1$$

Απο κριτηριο παρεμβολης $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Για $x < 0$

$$\frac{-x^2 - x}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^2 - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - x}{x} = -1$$

Απο κριτηριο παρεμβολης $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ Αρα Δεν ειναι συνεχης

9.

$$x \cdot f(x) - \sqrt{x^2+5} = 2f(x) + a \Rightarrow$$

$$x \cdot f(x) - 2f(x) = \sqrt{x^2+5} + a \Rightarrow$$

$$(x-2) \cdot f(x) = \sqrt{x^2+5} + a$$

$$x \neq 2 \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} + a}{x-2}$$

f συνεχης στο $x=2$.

$\lim_{x \to 2} f(x)$ πρεπει να ειναι πεπερασμενο.

Αρα πρεπει ο αριθμητης να μηδενιζεται για $x=2$.

$$\sqrt{x^2+5} + a = 0 \overset{x=2}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt{9} + a = 0$$

$$a = -3.$$

$a = -3$

$x \neq 2$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2}$$

Θα υπολογισουμε οριο της $f(x)$ για $x \to 2$. Αυτο θα ειναι ισο με το $f(2)$ λογω συνεχειας

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5} - 3)(\sqrt{x^2+5} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5} + 3} = \frac{2}{3}$$

Αρα $f(2) = \frac{2}{3}$

10/

Θέτω $h(x) = \frac{f(x)}{(x-a)} + \frac{g(x)}{(x-\beta)} =$

$= \frac{f(x)(x-\beta) + (x-a)\cdot g(x)}{(x-a)(x-\beta)}$

Θέτω $u(x) = f(x)(x-\beta) + (x-a)\cdot g(x)$.

η $u(x)$ είναι συνεχής ως γινόμενο / άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$u(a) = (a-\beta)\cdot f(a) + (a-a)\cdot g(a) = (a-\beta)\cdot f(a)$

$u(\beta) = (\beta-\beta)\cdot f(\beta) + (\beta-a)\cdot g(\beta) = (\beta-a)\cdot g(\beta)$

Από $f(a)\cdot f(\beta) > 0$ προκύπτει ότι $f(a), f(\beta)$ έχουν ίδιο πρόσημο. Επίσης $\beta > a$ άρα $\beta - a > 0$ και $a - \beta < 0$

Άρα $u(a)\cdot u(\beta) < 0$

Bolzano $\exists$ $x_0 \in (a,\beta)$ τ.ω. $u(x_0) = 0$

$(x_0-\beta)\cdot f(x_0) + (x_0-a)\cdot g(x_0) = 0$

$x_0 \in (a,\beta)$ άρα $(x_0-a)(x_0-\beta) \neq 0$

$\frac{f(x_0)}{x_0-a} + \frac{g(x_0)}{x_0-\beta} = 0$.

Η εξίσωση έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο (a,β)