



Λογισμός Ι

1^ο Σετ Ασκήσεων

1. Χρησιμοποιήστε τον **αυστηρό ορισμό** του ορίου (κατά Cauchy) για να αποδείξετε τα ακόλουθα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (8x + 5) = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (-2x + 8) = 2$$

2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 \cos \frac{1}{2x} = 0$

3. Να βρεθούν όλες οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2x - 1}$

4. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αληθεύει $x - x^2 \leq f(x) - 3 \leq x + x^2$ να υπολογιστούν τα όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x}$



5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{4 - x}$	b. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^x + 5}{3 \cdot 5^x - 2}$	c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{x^2 - 8x + 7}$
d. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x + 16} - 5}{x - 3}$	e. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} \left(\frac{1}{\sqrt{x + 1}} - \frac{1}{2} \right)$	f. $\lim_{t \rightarrow 1/3} \frac{t - 1/3}{(3t - 1)^2}$
g. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$	h. $\lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^5 - 1}{p - 1}$	i. $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{\sqrt[4]{x} - 3}{x - 81}$
j. $\lim_{\theta \rightarrow \pi/4} \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$	k. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{4x + 10}$	l. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 1}{x^5 + 2}$
m. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 3^x + 5^x}{3 \cdot 5^x - 2^x}$	n. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$	o. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25x^2 + 8}}{x + 2}$
p. $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos r + 1}$	q. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 7}{x(x - 5)^2}$	r. $\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{x - 5}{x + 5}$
s. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x - 4}{x^2 - 3x}$	t. $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u - 1}{\sin u}$	u. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{\tan x}$

6. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι συνεχείς.

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

b. $g(x) = \frac{2x}{x^3 - 25x}$

c. $h(x) = \cos \sqrt{x}$

7. Προσδιορίστε τις τιμές των σταθερών a, b για τις οποίες η G είναι συνεχής στο $\chi = 1$.

$$G(x) = \begin{cases} 5x - 2 & \text{εαν } \chi < 1 \\ a & \text{εαν } \chi = 1 \\ ax^2 + bx & \text{εαν } \chi > 1 \end{cases}$$



8. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
 $|xf(x) - |x|| \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση **ΔΕΝ** είναι συνεχής
στο μηδέν.
9. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $xf(x) - \sqrt{x^2 + 5} = 2f(x) + a \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- α) Αποδείξτε ότι $a = -3$
β) Υπολογίστε την τιμή $f(2)$
10. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες
ισχύει $f(\alpha)g(\beta) > 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{(x-\alpha)} + \frac{g(x)}{(x-\beta)} = 0$ έχει μια
τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .