



Λογισμός Ι

2° Σετ Ασκήσεων

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha\sqrt{x^2 + 3} + \beta, & x \geq 1 \\ 3x^2 + x + 1, & x < 1 \end{cases}$. Αν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$, να βρεθούν οι σταθερές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:
 - $f(x) = \left(\frac{\sin x}{\sin x + 1}\right)^2$
 - $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
 - $f(x) = \cos^2 \sqrt{3x + 1}$
- Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) - \alpha^3 = f(\beta) - \beta^3$. Να αποδείξετε ότι: $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 3x_0^2$.
- Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις:
 - $f_1(x) = x^2 - x - 1$
 - $f_2(x) = x + \sin(x)$
 - $f_3(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 3}$
 - $f_4(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 4}$
- Βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες:
 - $f_1(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$
 - $f_2(x) = x^2(x - 1)^2$
 - $f_3(x) = \sin(x)$
 - $f_4(x) = \frac{x}{x + 1}$



6. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνεται έτσι ώστε ο όγκος του να αυξάνεται με σταθερή ταχύτητα $2 \text{ cm}^3/\text{sec}$. Να βρεθεί το πόσο γρήγορα αυξάνεται η ακτίνα, όταν ο όγκος του μπαλονιού είναι 50 cm^3 .
(Όγκος σφαίρας: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$)
7. Το μήκος των πλευρών ενός φύλλου αλουμινίου είναι 8 cm και 3 cm αντίστοιχα. Ένα τετράγωνο, πλευράς x , κόβεται από κάθε γωνία του φύλλου αυτού και από το υπόλοιπο κομμάτι φτιάχνουμε ένα ανοικτό κουτί.
- i) Να δείξετε ότι ο όγκος του κουτιού δίνεται από την σχέση: $V(x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x \text{ cm}^3$.
- ii) Να βρεθεί η τιμή του x για την οποία το κουτί έχει το μέγιστο όγκο και να βρεθεί η τιμή του.
8. Το τελικό κόστος C σε ευρώ μιας εταιρίας, για την κατασκευή x τεμαχίων κάποιου συγκεκριμένου είδους δίνεται από την σχέση $C = 600 + 20x, 0 \leq x \leq 100$, ενώ τα έσοδα R από την πώληση αυτών των τεμαχίων δίνονται από την σχέση $R = x(100 - x), 0 \leq x \leq 100$.
- i) Να σχεδιαστούν τα γραφήματα και των δύο συναρτήσεων στους ίδιους καρτεσιανούς άξονες .
- ii) Να βρεθούν οι τιμές του x που ικανοποιούν και τις δύο συναρτήσεις
- iii) Για ποιες τιμές του x η εταιρία θα έχει μέγιστο κέρδος ;
- iv) Να βρεθεί σχέση για το κέρδος (P) που θα έχει η εταιρία μετά την κατασκευή x τεμαχίων και να βρεθεί το μέγιστο κέρδος.
9. Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται παραμετρικά από τις ακόλουθες εξισώσεις:
- i) $\begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^3 - 1 \end{cases}$
- ii) $\begin{cases} x(t) = 2t^3 + 1 \\ y(t) = t^2 \cos(t) \end{cases}$
- iii) $\begin{cases} x(t) = 3\cos(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \end{cases}$
- iv) $\begin{cases} x(t) = a\cos^3(t) \\ y(t) = b\sin^3(t) \end{cases}$



Τμήμα Ηλεκτρολόγων
Μηχανικών & Μηχανικών
Υπολογιστών

Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

10. Αν η εφαπτομένη της καμπύλης $f(x) = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$, $a > 0, x > 0$ τέμνει τους άξονες Ox, Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα να δείξετε ότι το άθροισμα $(OA)+(OB)$ είναι σταθερό.
11. Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor της $f(x) = \sin(x)$ στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$
12. Βρείτε την εξίσωσή της εφαπτομένης στην καμπύλη $x^2 + xy - y^3 = 7$ στο $(3,2)$.