- Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της $f(x)=\frac{1}{x}$ στο $x=\alpha$, όπου $\alpha \neq 0$.
- Τί συμβαίνει καθώς αυξάνεται το α

Λύση

Ε, εδω κοιτω κατα μηδεν. Υποθετουμε οτι $\alpha \neq 0$.

$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$: Για να βρουμε που τεινει η εφαπτομενη.

$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{\alpha-x}{x\alpha}}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha-x}{x\alpha(x-\alpha)} =$

$= \lim_{x\to\alpha} \frac{-(x-\alpha)}{x\alpha(x-\alpha)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{-1}{x\alpha} = \frac{-1}{\alpha^2}$

β) Ομοιως, απο τον τυπο που ειδαμε στο α), η εφαπτομενη τεινει στο 0

- Βρείτε αν είναι διαφορίσιμη και συνεχής η $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$

Λύση

Εφτιαξε εξαφανη που συνεχεια. Στην αλλη συνεχεια δεν εσπαγε διαφορισιμοτητα

Για $x>0$ το $f(x)$ ειναι x^2 πολυωνυμο αρα συνεχες

Και για $x<0$ $f(x)=x$ πολυωνυμο αρα συνεχες

Μενει να δουμε για $x=0$. $f(0)=0^2=0$

$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \\ &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \overset{0}{=} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ συνεχεια στο 0.

Μενει η διαφορισιμοτητα

Για $x>0$ το $f'(x)$: $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{x-\alpha} =$

$= \lim_{x\to\alpha} (x+\alpha) = \alpha+\alpha = 2\alpha$

Για $x<0$ $\Rightarrow f'(x)$: $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{x-\alpha}{x-\alpha} = 1$

Για $x=0^+$ αν $\lim f'(x) = 1$

Για $x=0^-$ αν $\lim f'(x) = 2\cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ δεν υπαρχει $\lim_{x\to 0} f'(x)$ αρα δεν ειναι διαφορισιμη

- Βρείτε τις συνθέσεις που ορίστηκαν της ασκησεις $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$ στο $(0,0)$ προέκυψε και το σημείο $(1,2)$.

Λύση

$f'(x) = \left(\frac{4x}{x^2+1}\right)' = \frac{(4x)'(x^2+1)-4x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{4(x^2+1)-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{4x^2+4-4x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4-4x^2}{(x^2+1)^2}$

Τωρα $(0,0)$ η εφαπτομενη ειναι $y-0 = f'(0)(x-0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y-0 = \frac{4-4\cdot 0^2}{(0^2+1)^2} x \Rightarrow y = 4x$

Τωρα $(1,2)$ η εφαπτομενη ειναι $y-2 = f'(1)(x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow y-2 = \frac{4-4\cdot 1^2}{(1^2+1)^2}(x-1) \Rightarrow y-2 = 0\cdot(x-1) \Rightarrow y-2=0 \Rightarrow y=2$

- Βρείτε την τιμή των α, β που κάνει διαφορίσιμη την παρακάτω συνάρτηση για όλες τις τιμές x

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, & x>-1 \\ 3x^2-2x, & x\leq -1 \end{cases}$$

Λύση

Παρατ: Η β δεν παιζει καποιο ρολο.

Για $x<-1$ το $f(x)$ ειναι πολυωνυμο και συνεχες

Για $x<-1$ το $f(x)=3x^2-2x$ πολυωνυμο και συνεχες

Μενει να δουμε που ειναι συνεχες για $x=-1$

$f(-1) = \alpha(-1)+\beta = -\alpha+\beta$ (1)

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} 3x^2-2x = 3(-1)^2-2(-1) = 3+2 = 5$ (2)

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \alpha x+\beta = \alpha(-1)+\beta = -\alpha+\beta$ (3)

Για να υπαρχει $\lim_{x\to -1} f(x)$ θελω $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ (η αλλιως οταν τα πλευρικα οριακα ειναι ισα)

Και η ισοτητα που θελω $\lim_{x\to -1} f(x)$ γινεται $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ (4)

Αν τωρα στις (2), (3) κανω $-\alpha+\beta = 5 \Rightarrow \beta = 5+\alpha$ (5)

Θελω β ωστε $x=-1$ σημειο συνεχειας

Αρα $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow 3\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow$

Τωρα $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3f(-1)$ αφου $x<-1$ οποτε $f(x)=3x^2-2x$

Και $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$ αφου $x>-1$ οποτε $f(x)=\alpha x+\beta$

$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} 3(\alpha x+\beta) = \lim_{x\to -1^+} (\alpha x+\beta) \Rightarrow 3(\alpha\cdot(-1)+\beta) = \alpha\cdot(-1)+\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(-\alpha+\beta) = -\alpha+\beta \Rightarrow -3\alpha+3\beta = -\alpha+\beta \Rightarrow -2\alpha+2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

Αρα για $\alpha=\beta$ η $f(x)$ ειναι συνεχης & παραγωγισιμη

- Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ όταν $y=\frac{u}{5}+7$ και $u=5x-35$

Λύση

Η f ειναι πολυωνυμο συνεχειας

Αρα $\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\ &\frac{dy}{du} = \left(\frac{u}{5}+7\right)' = \frac{1}{5}+0 = \frac{1}{5} \\ &\frac{du}{dx} = (5x-35)' = 5x-0 = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{1} = 1$

- Να διερευνήσετε ότι κάθε συνάρτηση του ερωτήματος της ασκησεις $y=\frac{1}{(1-4x)^2}$ έχει θετική κλίση.

Λύση

$y(x) = f(g(x))$ οπου $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $g(x)=1-4x$

Αρα $y'(x) = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$ (1)

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(g(x)) = -\frac{2}{(g(x))^3}$

$= \frac{-2}{1(x)^3} = -\frac{2}{(1-4x)^3}$ (2)

$g'(x) = (1-4x)' = 0-4x' = -4\cdot 1 = -4$ (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow y'(x) = -\frac{2}{(1-4x)^3}\cdot(-4) = \frac{+2}{(1-4x)^3} > 0$

Οπου $1-4x>0$ & $(1-4x)^3>0$ δηλαδη η εφαπτομενη ειναι θετικη

- Να βρεθούν η 1η και 2η παράγωγος της $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}$

Λύση

$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x} = x^{-2} - 4x^{-1} \Rightarrow \boxed{f'(x) = (x^{-2})' + 4(x^{-1})'} =$

$= -2x^{-2-1} + 4(-1)x^{-1-1} = \boxed{-2x^{-3} + 4x^{-2}} \Rightarrow \boxed{f''(x) =}$

$= \left(f'(x)\right)' = \left(-2x^{-3} + 4x^{-2}\right)' = -2(x^{-3})' + 4(x^{-2})' =$

$= -2(-3)x^{-3-1} + 4(-2)x^{-2-1} = \boxed{6x^{-4} - 8x^{-3}}$

- Να βρεθούν η 1η και 2η παράγωγος της $y=\frac{x^4}{2}-\frac{3}{2}x^2-1$

$\boxed{y'(x)} = \frac{1}{2}(x^4)' - \frac{3}{2}(x^2)' - 1^{\overset{0}{\prime}} = \frac{1}{2}\cdot 4x^{4-1} - \frac{3}{2}\cdot 2x^{2-1} =$

$= \boxed{2x^3 - 3x} \Rightarrow \boxed{y''(x)} = \left(y'(x)\right)' = \left(2x^3-3x\right)' =$

$= 2(x^3)' - 3x' = 2\cdot 3x^{3-1} - 3\cdot 1 = \boxed{6x^2 - 3}$

- Όταν ένα βιντεοπαιχνίδι ηχογράφει σε ένα φορητό ζωμ στον υπολογιστικόν βιντεο, η ηλεκτρικής των βιντεοπαιχνιδιών συμβαίνει να αξιόπιστα για τέτοιο, αλλά στη συνέχεια σταμάτησε να αναπτύσσεται και άρχισε να μειώνεται.
- Τα μέγιστα που ολοήμερα τη χρονική στιγμή t (μέρες) είναι $h=10t^2-\frac{1}{3}t^3$. Βρείτε τους ρυθμούς ανάπτυξης στις
  - $t=1$ μέρες
  - $t=5$ μέρες
  - $t=10$ μέρες

Λύση

Ο ρυθμος αναπτυξης ειναι η παραγωγος της συναρτ h ωστε

$h'(t)$.

$h'(t) = (10t^2 - \frac{1}{3}t^3)' = \left(\frac{10}{1}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)' = 10\cdot 2t^{2-1} - \frac{1}{3}\cdot 3t^{3-1} =$

$= 10t - t^2$

$h'(0) = 10^2 - 0^2 = 10^2 > 0$ αυξηση

$h'(5) = 10^2 - 5^2 = 10^2 - 25 = 10\cdot 10 - 25 = 10^2 - 10^2 = 0$ σταθερος

$h'(10) = 10^2 - 10^2 = 10^2 - 10^2 = -10^2 < 0$ πεση