Φροντιστήριο στο μάθημα «Απειροστικός Ι»
Εισαγωγή

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

Απειροστικός Λογισμός

- Ο Απειροστικός Λογισμός, ή απλά Λογισμός είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με την συνεχή αλλαγή/μεταβολή στον χώρο/χρόνο.
- Έχει δύο κύριους κλάδους:
  - τον διαφορικό λογισμό (σχετικά με τα ποσοστά των αλλαγών και τις κλίσεις των καμπυλών)
  - και τον ολοκληρωτικό λογισμό (σχετικά με τη σώρευση των ποσοτήτων και τις περιοχές κάτω από τις καμπύλες)
- Αυτοί οι δύο κλάδοι συνδέονται μεταξύ τους με το θεμελιώδες θεώρημα του λογισμού.
- Ο λογισμός έχει ευρέως διαδεδομένες χρήσεις στον τομέα της επιστήμης, της οικονομίας, και της μηχανικής και μπορεί να λύσει πολλά προβλήματα που η άλγεβρα μόνη της δεν μπορεί.

Λογισμός για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς

- Στην περίπτωση των ηλεκτρολόγων μηχανικών έχει ιδιαίτερη σημασία σε τομείς όπως:

Λογισμός για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς

- Στην περίπτωση των ηλεκτρολόγων μηχανικών έχει ιδιαίτερη σημασία σε τομείς όπως:
  - Ανάλυση κυκλώματος: Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για την ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων και τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς της τάσης και του ρεύματος σε διαφορετικά εξαρτήματα.
  - Συστήματα Ελέγχου: Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση και ανάλυση της συμπεριφοράς συστημάτων ελέγχου στην ηλεκτρική μηχανική
  - Ανάλυση Ηλεκτρομαγνητικού Πεδίου: Οι εξισώσεις του Maxwell, ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων, χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τη συμπεριφορά των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Αυτές οι εξισώσεις είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, το σχεδιασμό κεραιών και την ανάλυση των ηλεκτρομαγνητικών παρεμβολών.
  - Ανάλυση συστημάτων ισχύος: Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση και ανάλυση συστημάτων ισχύος, συμπεριλαμβανομένων των γεννητριών, των μετασχηματιστών και των γραμμών μεταφοράς. Αυτές οι εξισώσεις βοηθούν στη μελέτη της σταθερότητας, της ανάλυσης σφαλμάτων και της παροδικής απόκρισης των συστημάτων ισχύος.
  - Επεξεργασία σήματος: Οι διαφορικές εξισώσεις χρησιμοποιούνται στην επεξεργασία σημάτων για την ανάλυση και το χειρισμό σημάτων. Για παράδειγμα, η διαφορική εξίσωση για ένα φίλτρο χαμηλής διέλευσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αφαίρεση του θορύβου υψηλής συχνότητας από ένα σήμα.

Λογισμός για Μηχανικούς Η/Υ

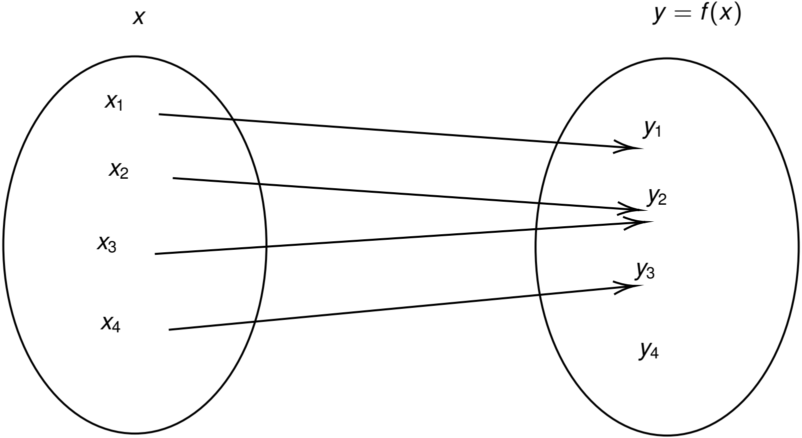
- Στην περίπτωση των ηλεκτρολόγων μηχανικών έχει ιδιαίτερη σημασία σε τομείς όπως:

Λογισμός για Μηχανικούς Η/Υ

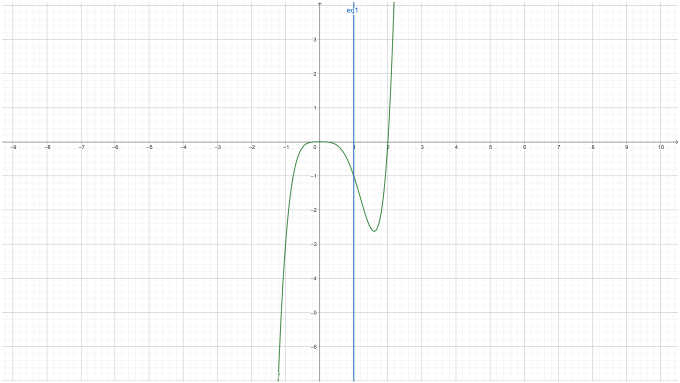
- Στην περίπτωση των ηλεκτρολόγων μηχανικών έχει ιδιαίτερη σημασία σε τομείς όπως:
  - Αλγόριθμοι και Βελτιστοποίηση: Ο λογισμός είναι ζωτικής σημασίας για την κατανόηση και την ανάλυση αλγορίθμων, ειδικά εκείνων που περιλαμβάνουν προβλήματα βελτιστοποίησης. Τεχνικές όπως η gradient descent, που χρησιμοποιούνται στη μηχανική εκμάθηση για τη βελτιστοποίηση μοντέλων, βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στις έννοιες του λογισμού.
  - Αριθμητική ανάλυση: Ο λογισμός παρέχει τη βάση για αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την επίλυση σύνθετων εξισώσεων και προβλημάτων στην επιστήμη των υπολογιστών, όπως η επίλυση διαφορικών εξισώσεων σε προσομοιώσεις φυσικής ή ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων στην απόδοση γραφικών.
  - Γραφικά και Υπολογιστική Όραση: Ο λογισμός είναι απαραίτητος για την κατανόηση του τρόπου μοντελοποίησης και χειρισμού καμπυλών, επιφανειών και όγκων, κάτι που είναι ζωτικής σημασίας για την απόδοση γραφικών, τον σχεδιασμό με τη βοήθεια υπολογιστή (CAD) και τις εφαρμογές όρασης υπολογιστή.
  - Τεχνητή Νοημοσύνη και Μηχανική Μάθηση: Ο λογισμός είναι θεμελιώδης για την κατανόηση των μαθηματικών αρχών πίσω από πολλούς αλγόριθμους μηχανικής μάθησης, όπως τα νευρωνικά δίκτυα, τα οποία βασίζονται στον λογισμό για βελτιστοποίηση και εκπαίδευση.
  - Επιστήμη δεδομένων: Ο λογισμός χρησιμοποιείται στην επιστήμη δεδομένων για εργασίες όπως η στατιστική μοντελοποίηση, ο έλεγχος υποθέσεων και η κατανόηση της συμπεριφοράς μεγάλων συνόλων δεδομένων, τα οποία είναι απαραίτητα για τη λήψη αποφάσεων που βασίζονται σε δεδομένα.
  - Γραφικά υπολογιστών: Ο λογισμός χρησιμοποιείται εκτενώς στα γραφικά υπολογιστών για εργασίες όπως η μοντελοποίηση σχημάτων, η απόδοση σκηνών και η προσομοίωση φυσικών φαινομένων όπως το φως και η κίνηση.

Τί είναι συνάρτηση

- Συνάρτηση $f(x)$ είναι μία μαθηματική σχέση μέσω της οποίας μία τιμή x αντιστοιχίζεται σε μία και μόνο μία τιμή $y = f(x)$.

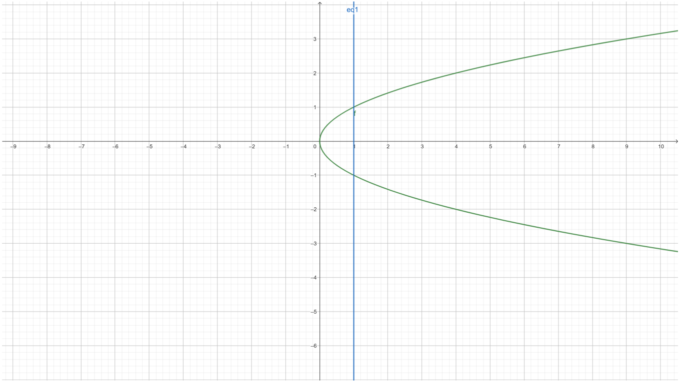


Παράδειγμα 1ο



Σχήμα: Δεδομένου ότι η μπλέ κάθετη γραμμή τέμνει την γραφική παράσταση σε ένα σημείο είναι οπτικό κριτήριο/απόδειξη ότι η εν λόγω γραφική παράσταση είναι γραφική παράσταση συναρτήσεως

Παράδειγμα 2ο



Σχήμα: Δεδομένου ότι η μπλέ κάθετη γραμμή τέμνει την γραφική παράσταση παραπάνω του ενός σημεία είναι οπτικό κριτήριο/απόδειξη ότι η εν λόγω γραφική παράσταση δεν είναι γραφική παράσταση συναρτήσεως

Στοιχεία συναρτήσεως

- Κάθε συνάρτηση έχει 2 πεδία:
  - Πεδίο ορισμού: Σύνολο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Αν η συνάρτηση δεν περιέχει οποιαδήποτε παράσταση με x σε παρωνομαστή, λογάριθμο ή ρίζα, τότε η συνάρτηση θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
  - Πεδίο τιμών: Σύνολο τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής y.

Παράδειγμα

- Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων
  - $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$
  - $g(x) = \dfrac{1}{x-4}$
  - $h(x) = \sqrt{x-3}$
  - $p(x) = \ln(x-2)$

Λύση Παραδείγματος

- Δεδομένου ότι η $f(x)$ είναι πολυωνυμική θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επειδή η συνάρτηση είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού ($\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$), με θετικό συντελεστή του x^2 και διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1 > 0$, τότε έχει ελάχιστη τιμή στο σημείο $-\dfrac{\beta}{2 \cdot \alpha} = -\dfrac{5}{2 \cdot 3} = -\dfrac{5}{6}$ ίση με $-\dfrac{\Delta}{4 \cdot \alpha} = -\dfrac{1}{12}$. Άρα το πεδίο τιμών είναι $\left[-\dfrac{1}{12}, \infty\right)$.
- Η $g(x)$ έχει κλάσμα, το οποίο μπορεί να οριστεί αν και μόνο αν ο παρωνομαστής είναι μη μηδενικός, δηλαδή $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι η ένωση διαστημάτων $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.
- Η $h(x)$ έχει ρίζα, η οποίο μπορεί να οριστεί αν και μόνο αν η υπόρριζη ποσότητα είναι μη αρνητική, δηλαδή $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[3, \infty)$. Επίσης, επειδή το αποτέλεσμα της τετραγωνικής ρίζας είναι επίσης μη αρνητικός αριθμός, τότε το πεδίο τιμών θα είναι $\mathbb{R}^+$, δηλαδή όλοι οι μη αρνητικοί αριθμοί.
- Η $p(x)$ έχει λογάριθμο, η οποίο μπορεί να οριστεί αν και μόνο αν η λογαριθμούμενη ποσότητα $x - 2$ είναι θετική, δηλαδή $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $(2, \infty)$. Το πεδίο τιμών είναι $(-\infty, \ \infty)$.

Βασικά είδη συναρτήσεως

- Βάσει συμμετρίας υπάρχουν 2 ειδών συναρτήσεις:
  - Περιττές: Ισχύει $f(-x) = -f(x)$
  - Άρτιες: Ισχύει $f(-x) = f(x)$
- Μία συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να είναι άρτια, περιττή ή τίποτα.

Βασικά είδη συναρτήσεως

- Βάσει συμπεριφοράς υπάρχουν 2 ειδών συναρτήσεις:
  - Αύξουσα: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$. Τότε, ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - Φθίνουσα: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$. Τότε, ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Μία συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να είναι αύξουσα, φθίνουσα ή «μεικτή».

Παράδειγμα 1ο

- Αναλύστε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την συμμετρία
  - $f(x) = x^3$
  - $g(x) = e^{|x|}$
  - $h(x) = x + 1$

Παράδειγμα 1ο

- $f(x) = x^3$

Παράδειγμα 1ο

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Άρα είναι περιττή.
- $g(x) = e^{|x|}$

Παράδειγμα 1ο

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Άρα είναι περιττή.
- $g(x) = e^{|x|} \Rightarrow g(-x) = e^{|-x|}$

Παράδειγμα 1ο

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Άρα είναι περιττή.
- $g(x) = e^{|x|} \Rightarrow g(-x) = e^{|-x|} \xRightarrow{|-x|=|x|} g(-x) = e^{|x|} = g(x)$. Άρα είναι άρτια.
- $h(x) = x + 1$

Παράδειγμα 1ο

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Άρα είναι περιττή.
- $g(x) = e^{|x|} \Rightarrow g(-x) = e^{|-x|} \xRightarrow{|-x|=|x|} g(-x) = e^{|x|} = g(x)$. Άρα είναι άρτια.
- $h(x) = x + 1 \Rightarrow h(-x) = -x + 1$

Παράδειγμα 1ο

- $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Άρα είναι περιττή.
- $g(x) = e^{|x|} \Rightarrow g(-x) = e^{|-x|} \xRightarrow{|-x|=|x|} g(-x) = e^{|x|} = g(x)$. Άρα είναι άρτια.
- $h(x) = x + 1 \Rightarrow h(-x) = -x + 1 \neq -f(x), f(x)$. Άρα δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.

Παράδειγμα 2ο

- Αναλύστε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την μεταβολή.
  - $f(x) = \frac{1}{x}$
  - $f(x) = \frac{1}{|x|}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0): \ x_1 < x_2$, ισχύει

  $x_1 < x_2$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεγχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0) :\ x_1 < x_2$, ισχύει

  $x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:

$$x \neq 0$$

- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \frac{x_1}{x_1} > \frac{x_2}{x_1}$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \dfrac{x_1}{x_1} > \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \dfrac{x_2}{x_1}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:

$$x \neq 0$$

- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \frac{x_1}{x_1} > \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \frac{x_2}{x_1} \xRightarrow{x_2} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:

$$x \neq 0$$

- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \frac{x_1}{x_1} > \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \frac{x_2}{x_1} \xRightarrow{x_2} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1 < x_2$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \frac{x_1}{x_1} > \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \frac{x_2}{x_1} \xRightarrow{x_2} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$x_1 < x_2 \Rightarrow$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεγχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \dfrac{x_1}{x_1} > \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \dfrac{x_2}{x_1} \xRightarrow{x_2} \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$x_1 < x_2 \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_1} < \dfrac{x_2}{x_1}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \dfrac{x_1}{x_1} > \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \dfrac{x_2}{x_1} \xRightarrow{x_2} \dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$x_1 < x_2 \Rightarrow \dfrac{x_1}{x_1} < \dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 < \dfrac{x_2}{x_1}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:

$$x \neq 0$$

- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \frac{x_1}{x_1} > \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \frac{x_2}{x_1} \xRightarrow{x_2} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

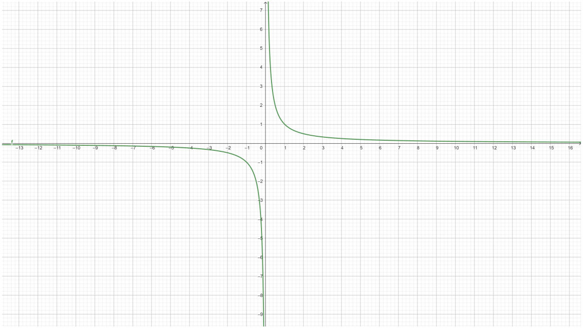
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 < \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$x_1 < x_2 \xRightarrow{x_1<0} \frac{x_1}{x_1} > \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 > \frac{x_2}{x_1} \xRightarrow{x_2} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_1} < \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow 1 < \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 1ο



Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεγχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει

  $|x_1| > |x_2|$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεγχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1, \ x_2 \in (-\infty, 0) : \ x_1 < x_2$, ισχύει

  $|x_1| > |x_2| \Rightarrow$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεγχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_1|} > \dfrac{|x_2|}{|x_1|}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_1|} > \dfrac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \dfrac{|x_2|}{|x_1|}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \frac{1}{|x_2|} > \frac{1}{|x_1|}$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεγχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \frac{1}{|x_2|} > \frac{1}{|x_1|} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι αύξουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| < |x_2|$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_1|} > \dfrac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \dfrac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \dfrac{1}{|x_2|} > \dfrac{1}{|x_1|} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι αύξουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$|x_1| < |x_2| \Rightarrow$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_1|} > \dfrac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \dfrac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \dfrac{1}{|x_2|} > \dfrac{1}{|x_1|} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι αύξουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$|x_1| < |x_2| \Rightarrow \dfrac{|x_1|}{|x_1|} > \dfrac{|x_2|}{|x_1|}$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ \ x_2 \in (-\infty, 0):\ \ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \frac{1}{|x_2|} > \frac{1}{|x_1|} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι αύξουσα.
- Για $x_1,\ \ x_2 \in (0, \infty):\ \ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| < |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 < \frac{|x_2|}{|x_1|}$$

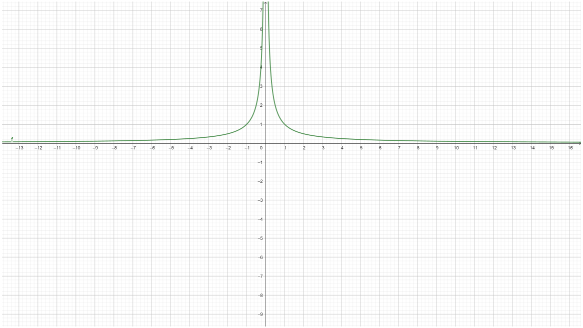
Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \frac{1}{|x_2|} > \frac{1}{|x_1|} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι αύξουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| < |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 < \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$$

Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο

- $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού.
- Αφού ο παρωνομαστής του κλάσματος ισούται με x, για να ορίζεται το κλάσμα θα πρέπει να ισχύει:
$$|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$
- Άρα το πεδίο ορισμού θα είναι $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Θα ελεχθεί η μεταβολή σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.
- Για $x_1,\ x_2 \in (-\infty, 0):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| > |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \frac{1}{|x_2|} > \frac{1}{|x_1|} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι αύξουσα.
- Για $x_1,\ x_2 \in (0, \infty):\ x_1 < x_2$, ισχύει
$$|x_1| < |x_2| \Rightarrow \frac{|x_1|}{|x_1|} > \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow 1 < \frac{|x_2|}{|x_1|} \Rightarrow \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$
- Άρα στο εν λόγω διάστημα είναι φθίνουσα.

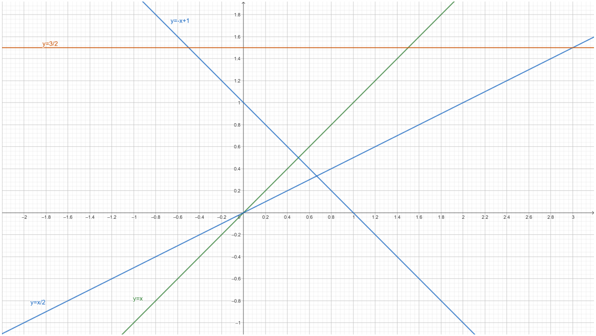
Παράδειγμα 2ο: Ερώτημα 2ο



Κλαδικές και μη κλαδικές συναρτήσεις

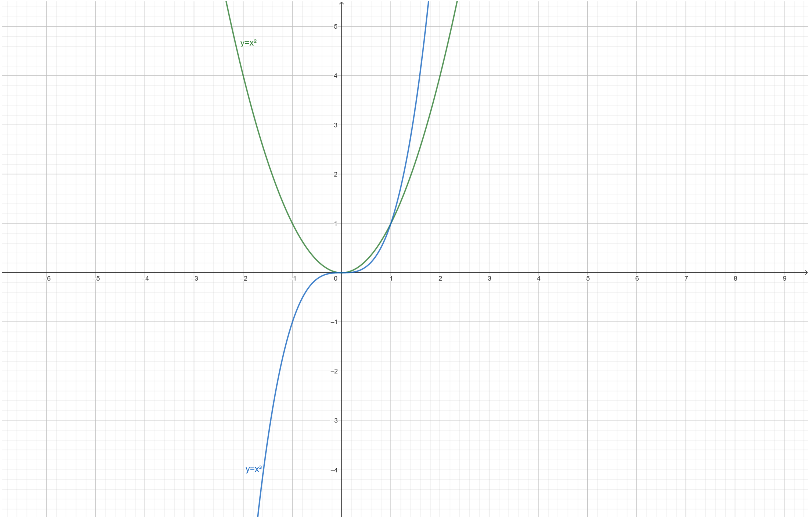
- Οι συναρτήσεις κατηγοριοποιούνται βάσει του ορισμού τους στο πεδίο ορισμού σε
  - Μονοσήμαντες/Μη κλαδικές: Ο ορισμός είναι ένας και μοναδικός για όλο το πεδίο ορισμού πχ
$$f(x) = -x^3 + x - 1$$
$$g(x) = \ln x + 1$$
  - Κλαδικές: Ο ορισμός διαφοροποιείται ανά διάστημα του πεδίου ορισμού, πχ
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

- Γραμμική συνάρτηση: $f(x) = \alpha x + \beta$ όπου α κλίση και β σταθερά.



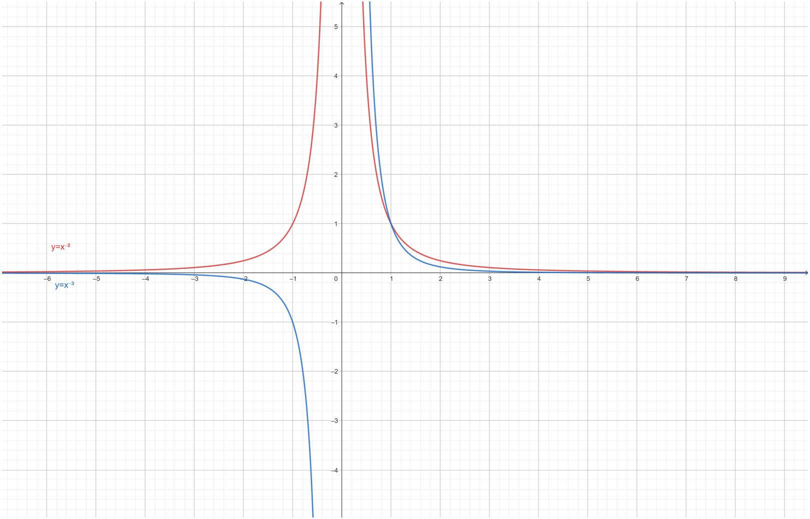
Βασικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις δυνάμεως: $f(x) = x^\alpha$ όπου $\alpha \in \mathbb{N}$ σταθερά.



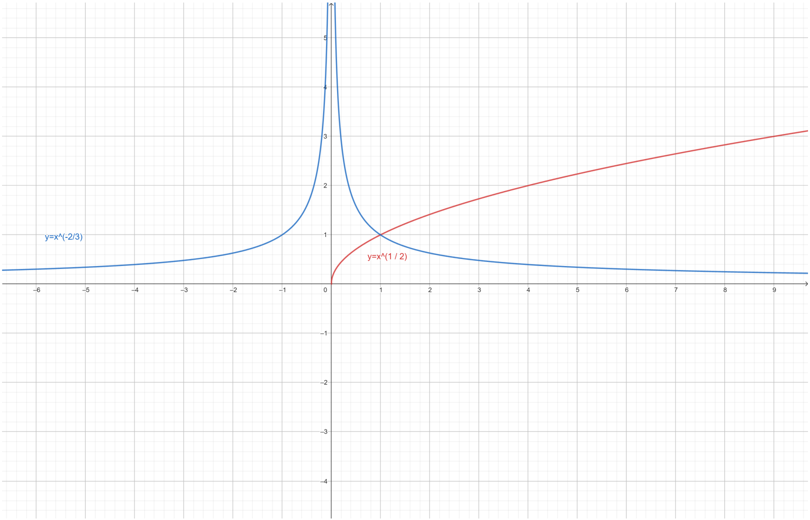
Βασικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις δυνάμεως: $f(x) = x^{\alpha}$ όπου $\alpha \in \mathbb{Q}^{-}$ σταθερά.



Βασικές συναρτήσεις

- Συναρτήσεις δυνάμεως: $f(x) = x^{\alpha}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά.

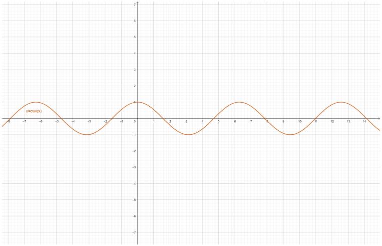


Βασικές συναρτήσεις

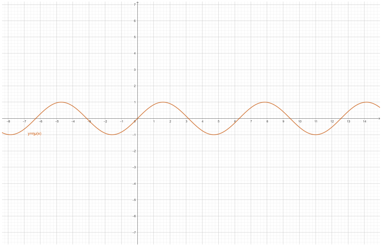
- Πολυωνυμικές συναρτήσεις: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ όπου $n \in \mathbb{Q}^+$ και $a_i \in \mathbb{R}$.

Βασικές συναρτήσεις

- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.



(α′): $f(x) = \cos(x)$

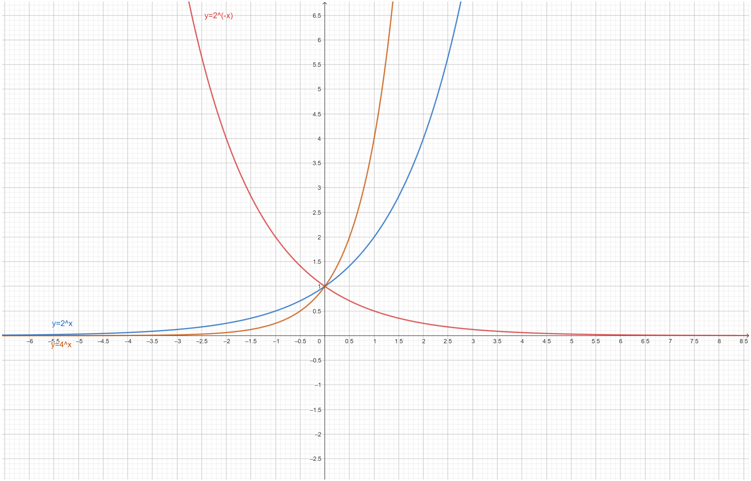


(β′): $f(x) = \sin(x)$

Σχήμα: Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

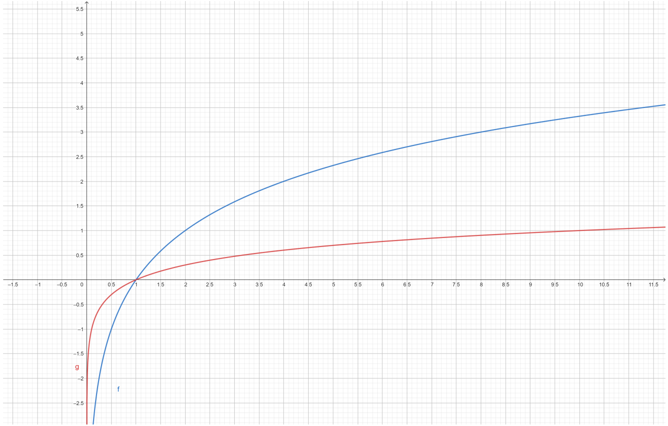
Βασικές συναρτήσεις

- Εκθετική συνάρτηση: $f(x) = a^{cx}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c \in \mathbb{R}$, η οποία έχει έχει πεδίο ορισμού $(-\infty, \ \infty)$ και πεδίο τιμών $(0, \ \infty)$



Βασικές συναρτήσεις

- Λογαριθμική συνάρτηση: $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$, η οποία έχει έχει πεδίο ορισμού $(0,\ \infty)$ και πεδίο τιμών $(-\infty,\ \infty)$.

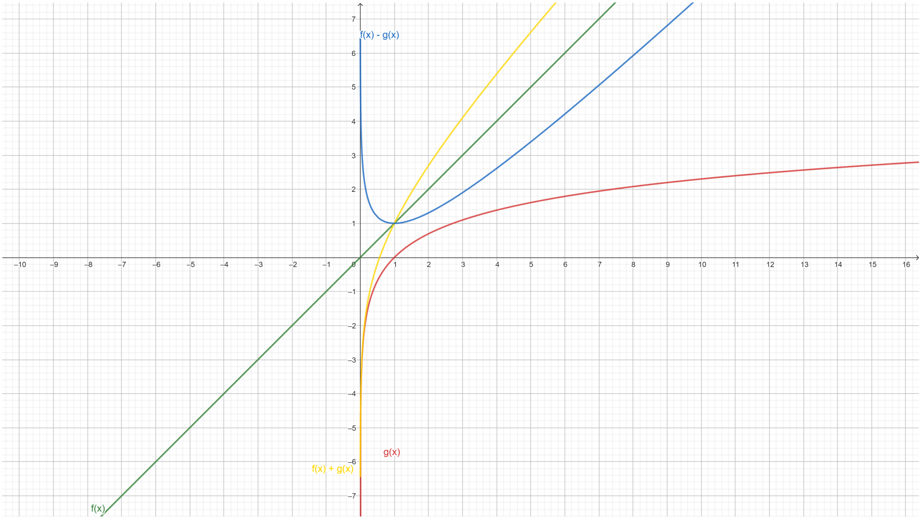


Σχήμα: $f(x) = \log_2 x,\ g(x) = \log_{10} x$

Βασικές πράξεις συναρτήσεων

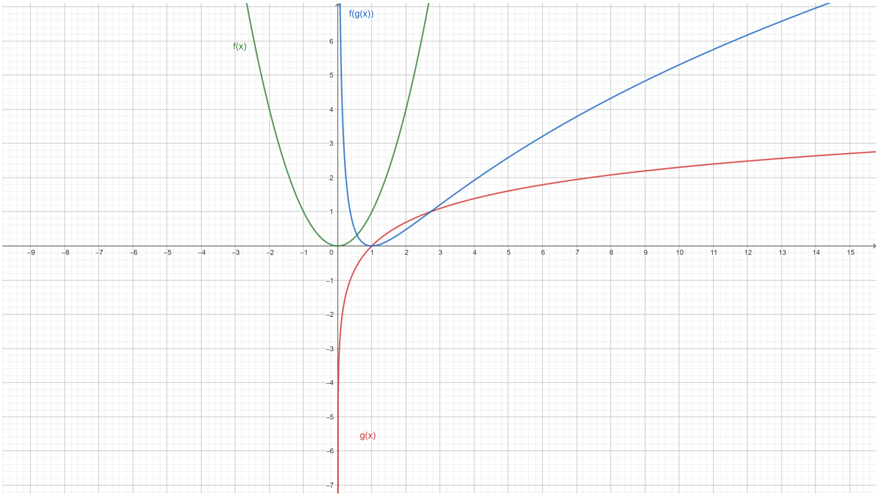
- Έστω $f(x),\ g(x)$ με αντίστοιχα πεδία ορισμού $D_f,\ D_g$.
- Τότε ορίζονται οι ακόλουθες πράξεις μεταξύ των:
  - $(f+g)=f(x)+g(x)$ με πεδίο ορισμού $D_{f+g}=D_f\cap D_g$
  - $(f-g)=f(x)-g(x)$ με πεδίο ορισμού $D_{f-g}=D_f\cap D_g$
  - $(f\cdot g)=f(x)\cdot g(x)$ με πεδίο ορισμού $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$
  - $\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{f(x)}{g(x)}$ με πεδίο ορισμού $D_{\left(\frac{f}{g}\right)}=(D_f\cap D_g)-\{x:\ g(x)=0\}$

Παράδειγμα 1ο



Παράδειγμα 2ο

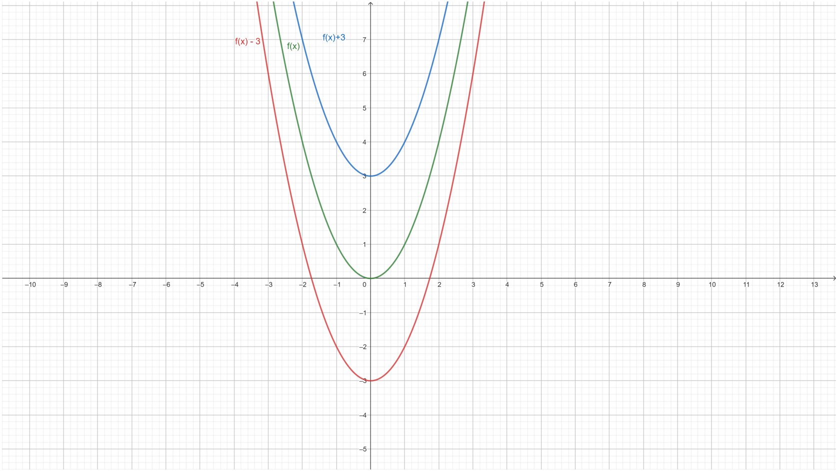
Παράδειγμα 3ο



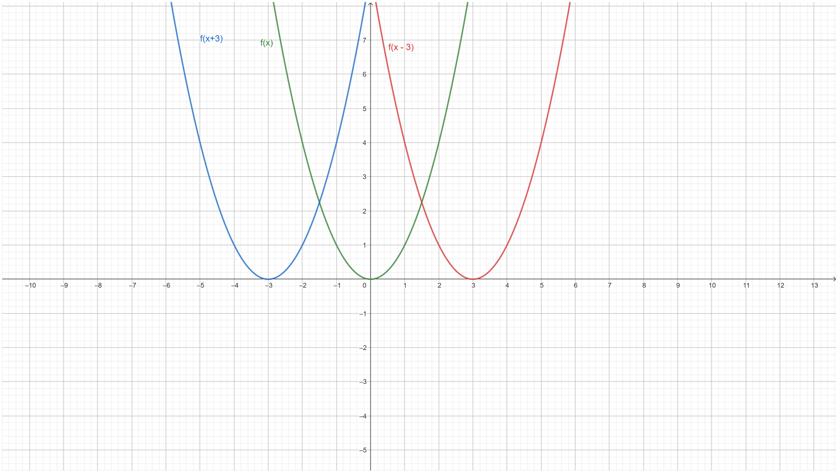
Βασικές πράξεις συναρτήσεων

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D_f.
- Τότε ορίζονται οι ακόλουθες πράξεις μεταξύ των:
  - Κατακόρυφη μετατόπιση $g(x) = f(x) + b$ με πεδίο ορισμού $D_g = D_f$
  - Οριζόντια μετατόπιση $h(x) = f(x + x_0)$ με πεδίο ορισμού $D_h = D_f - x_0$
  - Κατακόρυφη Κλιμάκωση: $p(x) = cf(x)$ με πεδίο ορισμού $D_p = D_f$
  - Οριζόντια Κλιμάκωση: $r(x) = f(cx), \; c > 0$ με πεδίο ορισμού $D_r = \frac{D_f}{c}$
  - Αντανάκλαση:$t(x) = f(-x)$ με πεδίο ορισμού $D_t = -D_f$

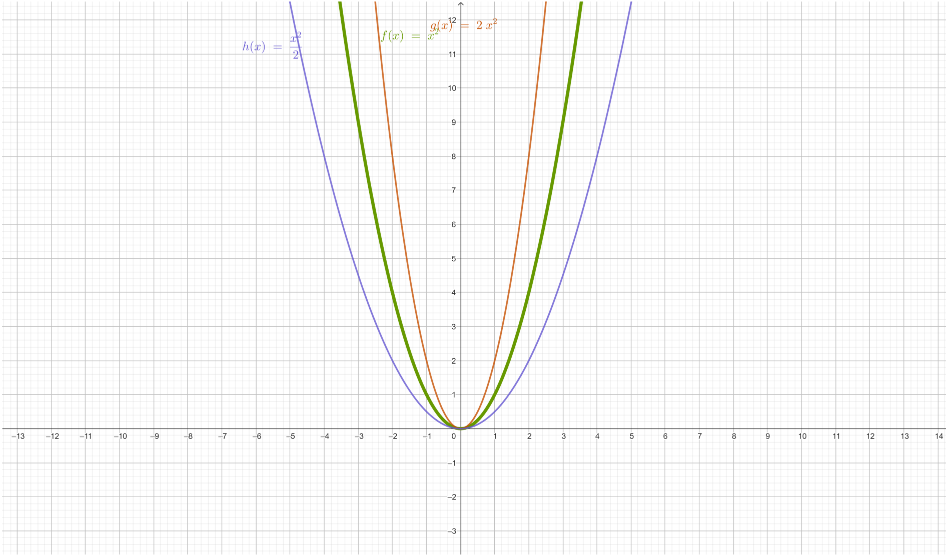
Βασικές πράξεις συναρτήσεων: Κατακόρυφη μετατοπιση



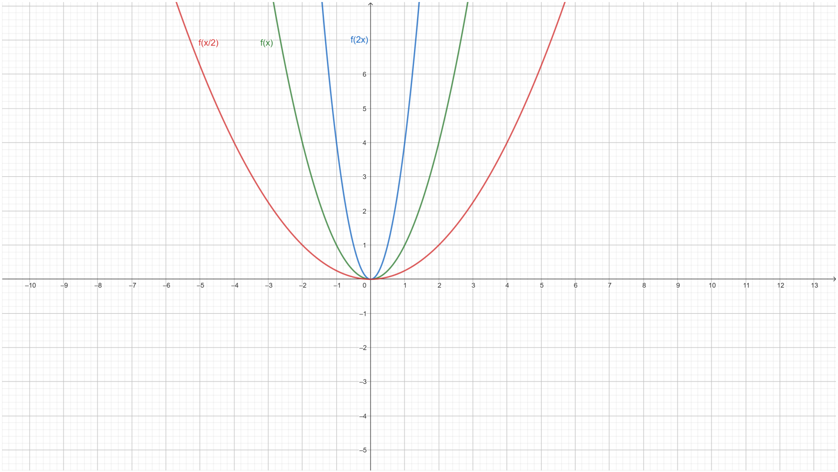
Βασικές πράξεις συναρτήσεων: Οριζόντια μετατοπιση



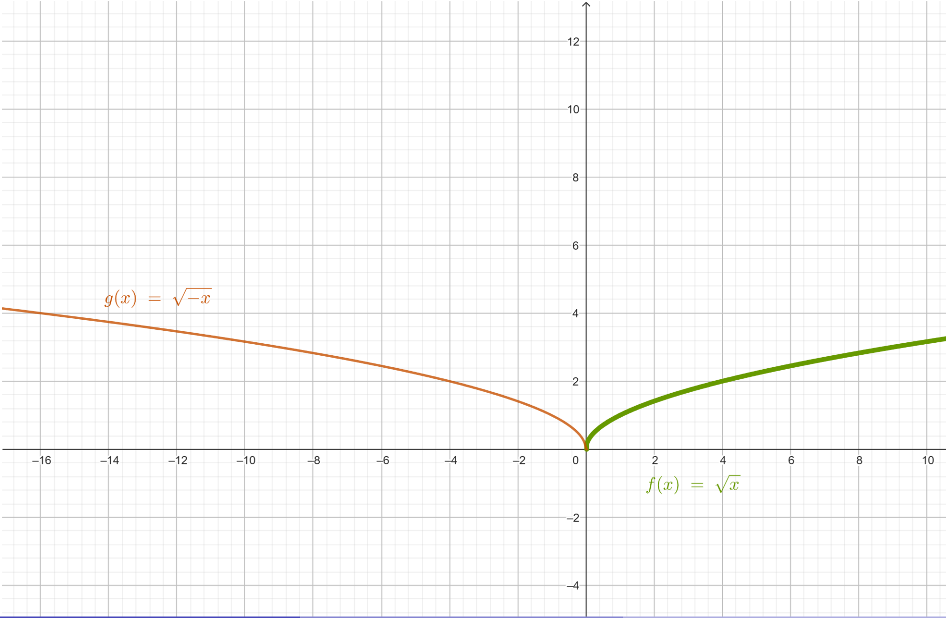
Κατακόρυφη κλιμάκωση



Βασικές πράξεις συναρτήσεων: Οριζόντια Κλιμάκωση



Βασικές πράξεις συναρτήσεων: Ανατανάκλαση



Άσκηση

- Έστω συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού $[0,2]$ και τιμών $[0,1]$.
- Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και τιμών των παρακάτω συναρτήσεων
  - $f(x)+2$
  - $2f(x)$
  - $-f(x)$
  - $f(-x)$
  - $-f(x+2)-1$

Άσκηση 2η

- Έστω συναρτήσεις $f(x) = x - 1$ και $g(x) = x^2 - 1$.
- Να οριστούν οι
  - $f(g(x))$
  - $g(f(x))$
  - $f(f(x))$
  - $g(g(x))$

Άσκηση 3η

- Έστω συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = e^{-|x|}$.
- Να οριστούν και να ελεγχθούν ως προς την συμμετρία και την συμπεριφορά οι κάτωθι συναρτήσεις:
  - $f(g(x))$
  - $g(f(x))$