Φροντιστήριο στο μάθημα «Απειροστικός Ι»

Όρια (και Συνέχεια;)

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

Τί είναι όριο

- Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού D και πεδίο τιμών $f(D)$

Τί είναι όριο

- Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού D και πεδίο τιμών $f(D)$
- Τότε ορίζεται μία ποσότητα ονόματι όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 ως εξής:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

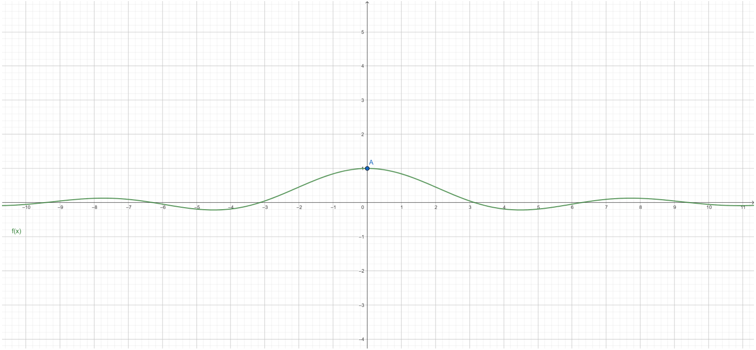
Τί είναι όριο

- Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού D και πεδίο τιμών $f(D)$
- Τότε ορίζεται μία ποσότητα ονόματι όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 ως εξής:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Πρακτικά είναι το όριο της συνάρτησης $f(x)$ στο x_0 είναι η τιμή την οποία τείνει να πάρει η συνάρτηση καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή x προσεγγίζει την ποσότητα x_0.

Παράδειγμα



Σχήμα: Γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Παρατηρούμε ότι καθώς το x τείνει στο 0, η $f(x)$ τείνει στο 1

Χρήση των ορίων

- Τα όρια είναι ιδιαίτερα σημαντικά στον Απειροστικό Λογισμό στον υπολογισμό των παργώγων και, κατά συνέπεια, των ολοκλητωμάτων.

Χρήση των ορίων

- Τα όρια είναι ιδιαίτερα σημαντικά στον Απειροστικό Λογισμό στον υπολογισμό των παργώγων και, κατά συνέπεια, των ολοκλητωμάτων.
- Βοηθούν πολύ στην ανάλυση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων.

Χρήση των ορίων

- Τα όρια είναι ιδιαίτερα σημαντικά στον Απειροστικό Λογισμό στον υπολογισμό των παργώγων και, κατά συνέπεια, των ολοκλητωμάτων.
- Βοηθούν πολύ στην ανάλυση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων.
- Χρήσιμα στην επίλυση προβλημάτων Φυσικής και Μηχανικής.

Μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Οι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων είναι οι εξής:

Μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Οι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων είναι οι εξής:
  - Άμεση μέθοδος

Μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Οι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων είναι οι εξής:
  - Άμεση μέθοδος
  - Έμμεσες μέθοδοι:

Μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Οι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων είναι οι εξής:
  - Άμεση μέθοδος
  - Έμμεσες μέθοδοι:
    - Θεώρημα Παρεμβολής (ή Θεώρημα Sandwich)

Μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Οι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων είναι οι εξής:
  - Άμεση μέθοδος
  - Έμμεσες μέθοδοι:
    - Θεώρημα Παρεμβολής (ή Θεώρημα Sandwich)
    - Πλευρικά όρια (Χρήσιμα σε κλαδικές συναρτήσεις)

Μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Οι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων είναι οι εξής:
  - Άμεση μέθοδος
  - Έμμεσες μέθοδοι:
    - Θεώρημα Παρεμβολής (ή Θεώρημα Sandwich)
    - Πλευρικά όρια (Χρήσιμα σε κλαδικές συναρτήσεις)
    - Μέθοδος de L'Hospital (για αυτήν θα γίνει λόγος αργότερα)

Μέθοδοι υπολογισμού των ορίων

- Οι μέθοδοι υπολογισμού των ορίων είναι οι εξής:
  - Άμεση μέθοδος
  - Έμμεσες μέθοδοι:
    - Θεώρημα Παρεμβολής (ή Θεώρημα Sandwich)
    - Πλευρικά όρια (Χρήσιμα σε κλαδικές συναρτήσεις)
    - Μέθοδος de L'Hospital (για αυτήν θα γίνει λόγος αργότερα)
- Χρήσιμες είναι και οι ιδιότητες των ορίων στην περίπτωση υπολογισμού ορίων πολυπλοκότερων συναρτήσεων.

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x),\ g(x)$ και $L,\ M$ τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x)$, $g(x)$ και L, M τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.
- Τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x)$, $g(x)$ και L, M τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.
- Τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  - $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x)$, $g(x)$ και L, M τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.
- Τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  - $\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
  - $\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot L$

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x)$, $g(x)$ και L, M τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.
- Τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  - $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
  - $\lim\limits_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot L$
  - $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x)$, $g(x)$ και L, M τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.
- Τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  - $\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
  - $\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot L$
  - $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
  - $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ εφ'όσον $M \neq 0$

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x)$, $g(x)$ και L, M τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.
- Τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  - $\lim_{x \to c} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
  - $\lim_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot L$
  - $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
  - $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ εφ'όσον $M \neq 0$
  - $\lim_{x \to c} [f(x)]^a = L^a$, $a \in \mathbb{R}$, (στην περίπτωση που είναι αρνητικός θα πρέπει $L \neq 0$)

Ιδιότητες Ορίων

- Έστω $f(x),\ g(x)$ και $L,\ M$ τα αντίστοιχα όρια των στο $x = c$.
- Τότε θα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:
  - $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M$
  - $\lim\limits_{x \to c} k \cdot f(x) = k \cdot L$
  - $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
  - $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ εφ'όσον $M \neq 0$
  - $\lim\limits_{x \to c}[f(x)]^a = L^a, a \in \mathbb{R}$, (στην περίπτωση που είναι αρνητικός θα πρέπει $L \neq 0$)
  - $\lim\limits_{x \to c}[f(x)]^{g(x)} = L^M$

Βασικά όρια

- Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων:

Βασικά όρια

- Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Βασικά όρια

- Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
  - Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Βασικά όρια

- Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
  - Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Όρια ρητών συναρτήσεων:

Βασικά όρια

- Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
  - Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Όρια ρητών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ και $g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Βασικά όρια

- Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
  - Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Όρια ρητών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ και $g(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
  - Τότε $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, εφόσον $g(x_0) \neq 0$.

Βασικά όρια

- Όρια πολυωνυμικών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
  - Τότε $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- Όρια ρητών συναρτήσεων:
  - Εστω $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ και $g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.
  - Τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, εφόσον $g(x_0) \neq 0$.
  - Στην περίπτωση που ο αριθμητής και ο παρωνομαστής μηδενίζονται, τότε προσπαθούμε μέσω παραγοντοποίησης να απλοποιηθούν και εξαληφθεί ο κοινός παράγοντας.

Παράδειγμα

- $\lim_{x \to c} x^3 + x - 1 = c^2 + c - 1$

Παράδειγμα

- $\lim\limits_{x \to c} x^3 + x - 1 = c^2 + c - 1$
- $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{c^3 + c - 2}{c^2 + 1}$

Παράδειγμα

- $\lim_{x \to c} x^3 + x - 1 = c^2 + c - 1$
- $\lim_{x \to c} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{c^3 + c - 2}{c^2 + 1}$
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

Παράδειγμα

- $\lim\limits_{x \to c} x^3 + x - 1 = c^2 + c - 1$
- $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{c^3 + c - 2}{c^2 + 1}$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

Παράδειγμα

- $\lim_{x \to c} x^3 + x - 1 = c^2 + c - 1$
- $\lim_{x \to c} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{c^3 + c - 2}{c^2 + 1}$
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}$

Παράδειγμα

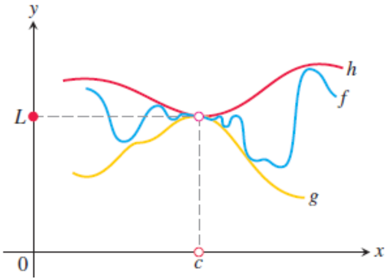
- $\lim_{x \to c} x^3 + x - 1 = c^2 + c - 1$
- $\lim_{x \to c} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{c^3 + c - 2}{c^2 + 1}$
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \dfrac{x+2}{x}$
  παυσε$= \dfrac{1+2}{1}$

Παράδειγμα

- $\lim\limits_{x\to c} x^3 + x - 1 = c^2 + c - 1$
- $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} = \dfrac{c^3 + c - 2}{c^2 + 1}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x}$
  παυσε$= \dfrac{1+2}{1} = 3$

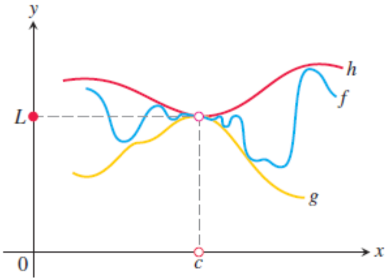
Θεώρημα Παραμβολής (ή Θεώρημα Σαντουιτς)

- Έστω $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε x πλησίον του x_0



Θεώρημα Παραμβολής (ή Θεώρημα Σαντουιτς)

- Έστω $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε x πλησίον του x_0
- Αν $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, τότε συνεπάγεται ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$



Μαθηματικός Ορισμός του ορίου

- Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού D και πεδίο τιμών $f(D)$

Μαθηματικός Ορισμός του ορίου

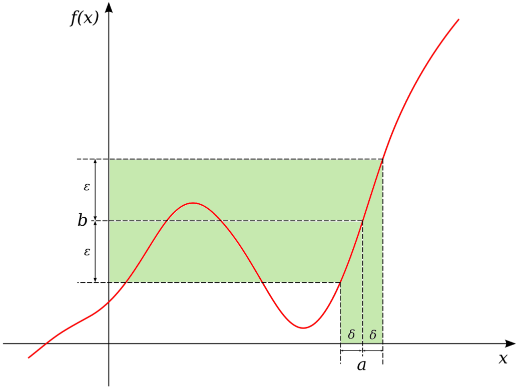
- Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού D και πεδίο τιμών $f(D)$
- Τότε θα λέμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει αριθμός $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon, \ \forall x : |x - x_0| < \delta$$

Σχηματική επεξήγηση



Σχήμα: Γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Παρατηρούμε ότι καθώς το x τείνει στο 0, η $f(x)$ τείνει στο 1

Μέθοδος επίλυσης ε-δ

- Έστω ότι θέλω να αποδείξω ότι το όριο μιας συνάρτησης/παράστασης είναι $\lim_{x \to c} f(x) = L$

Μέθοδος επίλυσης ε-δ

- Έστω ότι θέλω να αποδείξω ότι το όριο μιας συνάρτησης/παράστασης είναι $\lim_{x \to c} f(x) = L$
- Τότε κάνω τα εξής βήματα:

Μέθοδος επίλυσης ε-δ

- Έστω ότι θέλω να αποδείξω ότι το όριο μιας συνάρτησης/παράστασης είναι $\lim_{x \to c} f(x) = L$
- Τότε κάνω τα εξής βήματα:

1. Αρχικά, δεδομένου τυχαίου αριθμού $\epsilon > 0$, ξεκινώ από την ανισότητα

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

και λύνω ως προς $f(x)$ με στόχο να βρω διάστημα a, b ώστε να ισχύει σε αυτό η ανιστότητα και το c να ανήκει σε αυτό το διάστημα.

Μέθοδος επίλυσης ε-δ

- Έστω ότι θέλω να αποδείξω ότι το όριο μιας συνάρτησης/παράστασης είναι $\lim_{x\to c} f(x) = L$
- Τότε κάνω τα εξής βήματα:

1. Αρχικά, δεδομένου τυχαίου αριθμού $\epsilon > 0$, ξεκινώ από την ανισότητα

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

   και λύνω ως προς $f(x)$ με στόχο να βρω διάστημα a, b ώστε να ισχύει σε αυτό η ανιστότητα και το c να ανήκει σε αυτό το διάστημα.
2. Με κέντρο το c, ψάχνω δ τέτοιο ώστε να ισχύει $(c - \delta, c + \delta) \in (a, b)$.

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 9| < \epsilon, \ \forall x : |x - 2| < \delta$

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 9| < \epsilon,\ \forall x : |x - 2| < \delta$
- $|f(x) - 9| < \epsilon$

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 9| < \epsilon$, $\forall x : |x - 2| < \delta$
- $|f(x) - 9| < \epsilon$

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 9| < \epsilon, \ \forall x : |x - 2| < \delta$
- $|f(x) - 9| < \epsilon \Rightarrow |4x + 1 - 9| < \epsilon$

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 9| < \epsilon, \ \forall x : |x - 2| < \delta$
- $|f(x) - 9| < \epsilon \Rightarrow |4x + 1 - 9| < \epsilon \Rightarrow |4x - 8| < \epsilon$

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 9| < \epsilon, \ \forall x : |x - 2| < \delta$
- $|f(x) - 9| < \epsilon \Rightarrow |4x + 1 - 9| < \epsilon \Rightarrow |4x - 8| < \epsilon \Rightarrow 4|x - 2| < \epsilon$

Παράδειγμα

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 4x + 1$ στο 2 είναι 9.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 9| < \epsilon, \ \forall x : |x - 2| < \delta$
- $|f(x) - 9| < \epsilon \Rightarrow |4x + 1 - 9| < \epsilon \Rightarrow |4x - 8| < \epsilon \Rightarrow 4|x - 2| < \epsilon \Rightarrow |x - 2| < \dfrac{\epsilon}{4}$.
- Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ βρέθηκε ένα $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ το οποίο ικανοποιεί την επιθυμητή συνθήκη.

Παράδειγμα 2ο

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 2x$ στο 4 είναι 8.

Παράδειγμα 2ο

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 2x$ στο 4 είναι 8.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 8| < \epsilon, \ \forall x : |x - 4| < \delta$

Παράδειγμα 2ο

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 2x$ στο 4 είναι 8.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 8| < \epsilon, \ \forall x : |x - 4| < \delta$
- $|f(x) - 8| < \epsilon$

Παράδειγμα 2ο

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 2x$ στο 4 είναι 8.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 8| < \epsilon, \ \forall x : |x - 4| < \delta$
- $|f(x) - 8| < \epsilon$

Παράδειγμα 2ο

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 2x$ στο 4 είναι 8.
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 8| < \epsilon, \ \forall x : |x - 4| < \delta$
- $|f(x) - 8| < \epsilon \Rightarrow |2x - 8| < \epsilon$

Παράδειγμα 2ο

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 2x$ στο 4 είναι 8.
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 8| < \epsilon, \ \forall x : |x - 4| < \delta$
- $|f(x) - 8| < \epsilon \Rightarrow |2x - 8| < \epsilon \Rightarrow 2|x - 4| < \epsilon$

Παράδειγμα 2ο

- Να δείξετε ότι το όριο της $f(x) = 2x$ στο 4 είναι 8.
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 8| < \epsilon,\ \forall x : |x - 4| < \delta$
- $|f(x) - 8| < \epsilon \Rightarrow |2x - 8| < \epsilon \Rightarrow 2|x - 4| < \epsilon \Rightarrow |x - 4| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
- Άρα για κάθε $\epsilon > 0$ βρέθηκε ένα $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ το οποίο ικανοποιεί την επιθυμητή συνθήκη.

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x)$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x)$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt{x-1}$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1}$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4}$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x - 5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5 \Rightarrow -0.5 + 2 < \sqrt{x-1} < 0.5 + 2$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x - 5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5 \Rightarrow -0.5 + 2 < \sqrt{x-1} < 0.5 + 2 \Rightarrow 1.5 < \sqrt{x-1} < 2.5$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5 \Rightarrow -0.5 + 2 < \sqrt{x-1} < 0.5 + 2 \Rightarrow 1.5 < \sqrt{x-1} < 2.5 \Rightarrow 1.5^2 < \left(\sqrt{x-1}\right)^2 < 2.5^2$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5 \Rightarrow -0.5 + 2 < \sqrt{x-1} < 0.5 + 2 \Rightarrow 1.5 < \sqrt{x-1} < 2.5 \Rightarrow 1.5^2 < \left(\sqrt{x-1}\right)^2 < 2.5^2$

  $\Rightarrow 3.25 < x < 7.25$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5 \Rightarrow -0.5 + 2 < \sqrt{x-1} < 0.5 + 2 \Rightarrow 1.5 < \sqrt{x-1} < 2.5 \Rightarrow 1.5^2 < \left(\sqrt{x-1}\right)^2 < 2.5^2$
  $\Rightarrow 3.25 < x < 7.25 \xRightarrow{-5} 3.25 - 5 < x - 5 < 7.25 - 5$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim_{x\to 5} f(x) = \lim_{x\to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγκατικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5 \Rightarrow -0.5 + 2 < \sqrt{x-1} < 0.5 + 2 \Rightarrow 1.5 < \sqrt{x-1} < 2.5 \Rightarrow 1.5^2 < \left(\sqrt{x-1}\right)^2 < 2.5^2$

  $\Rightarrow 3.25 < x < 7.25 \xRightarrow{-5} 3.25 - 5 < x - 5 < 7.25 - 5$

  $\Rightarrow -1.75 < x - 5 < 2.25$

Παράδειγμα 3ο

- Υπολογίστε το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5.
- Για $\epsilon = 0.5$ να βρεθεί δ ώστε να ισχύει το όριο της $f(x) = \sqrt{x-1}$ στο 5 είναι 2.
- $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1} = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2.$
- Έστω πραγματικός αριθμός $\epsilon = 0.5 > 0$. Αυτό που χρειάζεται είναι να βρεθεί δ τέτοιο ώστε να ισχύει $|f(x) - 2| < 0.5, \ \forall x : |x-5| < \delta$
- $|\sqrt{x-1} - 2| < 0.5 \Rightarrow -0.5 < \sqrt{x-1} - 2 < 0.5 \Rightarrow -0.5 + 2 < \sqrt{x-1} < 0.5 + 2 \Rightarrow 1.5 < \sqrt{x-1} < 2.5 \Rightarrow 1.5^2 < \left(\sqrt{x-1}\right)^2 < 2.5^2$

  $\Rightarrow 3.25 < x < 7.25 \xRightarrow{-5} 3.25 - 5 < x - 5 < 7.25 - 5$

  $\Rightarrow -1.75 < x - 5 < 2.25 \xRightarrow[=1.75]{min(|-1.75|,|2.25|)} -1.75 < x - 5 < 1.75.$
- Άρα για $\epsilon = 0.5$ βρέθηκε ένα δ το οποίο ικανοποιεί την επιθυμητή συνθήκη.

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \sin \theta$

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \sin \theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta$

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta\to 0} \cos\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$ όπου $\alpha,\ \beta$ μη μηδενικές πραγματικές σταθερές.

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$.
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \alpha\theta}{\beta\theta}$ όπου α, β μη μηδενικές πραγματικές σταθερές.
- Υπόδειξη:

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$ όπου $\alpha,\ \beta$ μη μηδενικές πραγματικές σταθερές.
- Υπόδειξη:
  - $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta}$.
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$ όπου α, β μη μηδενικές πραγματικές σταθερές.
- Υπόδειξη:
  - $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$
  - $-|\theta| \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|$

Παράδειγμα 4ο

- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \cos\theta$
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}$.
- Υπολογίστε το όριο της $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$ όπου α, β μη μηδενικές πραγματικές σταθερές.
- Υπόδειξη:
  - $-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta|$
  - $-|\theta| \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|$
  - $\cos\theta \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} 1 - \cos\theta = 0$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 0$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 0$.
  $\Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0.$
$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} 1 - \cos \theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 0$.
$\Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos \theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin \theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin \alpha\theta}{\beta\theta}$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 0$. $\Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0$.
$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \dfrac{u}{\alpha})$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0.$ $\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \dfrac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha \cdot 0 = 0$.

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0.$
$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \dfrac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha \cdot 0 = 0$.Άρα
$\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim\limits_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim\limits_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim\limits_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim\limits_{\theta \to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\theta \to 0} 1 - \lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 0.$ $\Rightarrow \lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim\limits_{\theta \to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta \to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \dfrac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha \cdot 0 = 0$.Άρα
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta} = \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{\beta \frac{u}{\alpha}}$$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\theta\to 0} 1 - \lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 0$.
$\Rightarrow \lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim\limits_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim\limits_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \dfrac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha \cdot 0 = 0$.Άρα
$\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{\beta\frac{u}{\alpha}} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} \dfrac{\sin u}{u}$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0.$
$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \frac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha \cdot 0 = 0$.Άρα
$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{\beta\frac{u}{\alpha}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0$.
$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \dfrac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha \cdot 0 = 0$.Άρα
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{\beta\frac{u}{\alpha}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}$$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

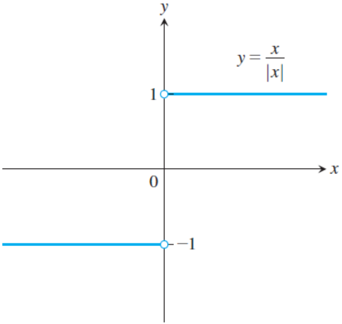
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 0.$
$\Rightarrow \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \frac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha\cdot 0 = 0$.Άρα
$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{\beta\frac{u}{\alpha}} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{\sin u}{u} = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta}\lim_{u\to 0}\cdot 1$

Παράδειγμα 4ο-Λύση

- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$.
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = -|\theta|$ και $h(\theta) = |\theta|$ είναι πολυωνυμικές οπότε ισχύει $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$.Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} 1 - \cos\theta = 0 \Rightarrow \lim_{\theta\to 0} 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0 \Rightarrow 1 - \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 0.$ $\Rightarrow \lim_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$
- Οι συναρτήσεις $g(\theta) = \cos\theta$ και $h(\theta) = 1$ γνωστά όρια αντίστοιχα $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = g(0) = 0$ και $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = h(0) = 0$. Τότε, βάσει του θεωρήματος παρεμβολής, ισχύει $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.
- $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta}$. Θέτω $u = \alpha\theta (\Leftrightarrow \theta = \frac{u}{\alpha})$. Άρα αν $\theta \to 0$, τότε συνεπάγεται ότι $u \to \alpha \cdot 0 = 0$.Άρα $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\alpha\theta}{\beta\theta} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{\beta\frac{u}{\alpha}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{\sin u}{u} = \frac{1}{\frac{\beta}{\alpha}} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{\alpha}{\beta} \lim_{u\to 0} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta}$

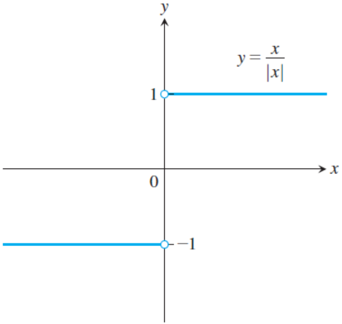
Πλευρικά Όρια

- Κάποιες φορές μία συνάρτηση μπορεί στο σημείο c να προσεγγίζει άλλη τιμή καθώς το πλησιάζει εκ δεξιών και άλλη καθώς προσεγγίζει εξ αριστερών.



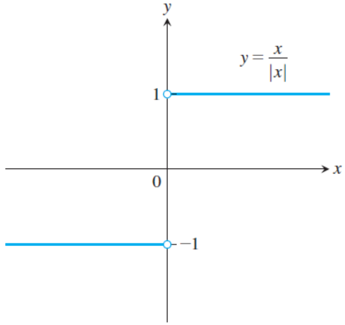
Πλευρικά Όρια

- Κάποιες φορές μία συνάρτηση μπορεί στο σημείο c να προσεγγίζει άλλη τιμή καθώς το πλησιάζει εκ δεξιών και άλλη καθώς προσεγγίζει εξ αριστερών.
- Κάτι τέτοιο είναι εμφανές στην παρακάτω συνάρτηση $y = \dfrac{x}{|x|}$.



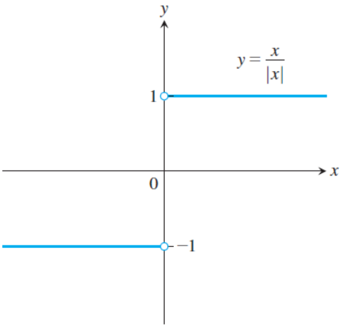
Πλευρικά Όρια

- Κάποιες φορές μία συνάρτηση μπορεί στο σημείο c να προσεγγίζει άλλη τιμή καθώς το πλησιάζει εκ δεξιών και άλλη καθώς προσεγγίζει εξ αριστερών.
- Κάτι τέτοιο είναι εμφανές στην παρακάτω συνάρτηση $y = \dfrac{x}{|x|}$.
- Σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται ένα άλλο είδος ορίου ονόματι πλευρικό.



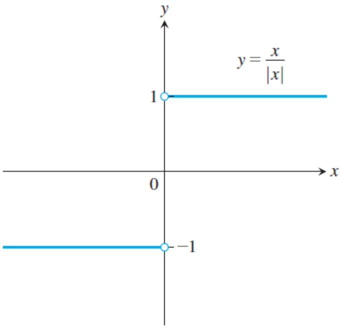
Ορισμός πλευρικού ορίου

- Δύο είναι τα πλευρικά όρια:



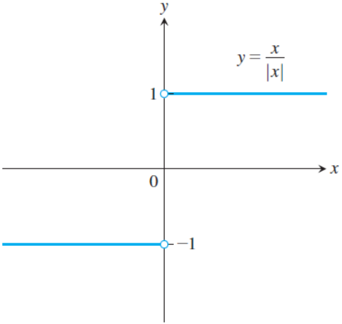
Ορισμός πλευρικού ορίου

- Δύο είναι τα πλευρικά όρια:
  - Δεξιό πλευρικό όριο ($\lim_{x \to c^+} f(x)$): Η τιμή που τείνει να λάβει η $f(x)$ καθώς προσεγγείζεται το σημείο c εκ δεξιών.



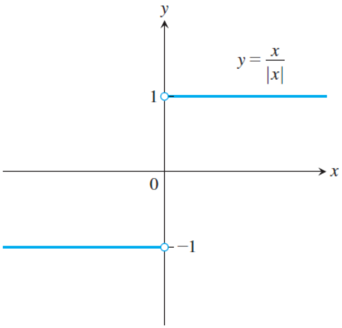
Ορισμός πλευρικού ορίου

- Δύο είναι τα πλευρικά όρια:
  - Δεξιό πλευρικό όριο ($\lim_{x \to c^+} f(x)$): Η τιμή που τείνει να λάβει η $f(x)$ καθώς προσεγγείζεται το σημείο c εκ δεξιών.
  - Αριστερό πλευρικό όριο ($\lim_{x \to c^-} f(x)$): Η τιμή που τείνει να λάβει η $f(x)$ καθώς προσεγγείζεται το σημείο c εξ αριστερών.



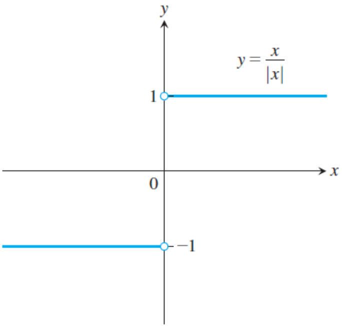
Ορισμός πλευρικού ορίου

- Δύο είναι τα πλευρικά όρια:
  - Δεξιό πλευρικό όριο ($\lim_{x \to c^+} f(x)$): Η τιμή που τείνει να λάβει η $f(x)$ καθώς προσεγγείζεται το σημείο c εκ δεξιών.
  - Αριστερό πλευρικό όριο ($\lim_{x \to c^-} f(x)$): Η τιμή που τείνει να λάβει η $f(x)$ καθώς προσεγγείζεται το σημείο c εξ αριστερών.
- Στην περίπτωση μας το δεξιό πλευρικό όριο είναι 1, ενώ το αριστερό είναι -1.



Ορισμός πλευρικού ορίου

- Δύο είναι τα πλευρικά όρια:
  - Δεξιό πλευρικό όριο ($\lim_{x \to c^+} f(x)$): Η τιμή που τείνει να λάβει η $f(x)$ καθώς προσεγγείζεται το σημείο c εκ δεξιών.
  - Αριστερό πλευρικό όριο ($\lim_{x \to c^-} f(x)$): Η τιμή που τείνει να λάβει η $f(x)$ καθώς προσεγγείζεται το σημείο c εξ αριστερών.
- Στην περίπτωση μας το δεξιό πλευρικό όριο είναι 1, ενώ το αριστερό είναι -1.
- Ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις κλαδικών συναρτήσεων.



Παραδείγματα

- Να βρεθούν τα πλευρικά όρια των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία αλλαγής κλάδων:

Παραδείγματα

- Να βρεθούν τα πλευρικά όρια των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία αλλαγής κλάδων:
  - $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

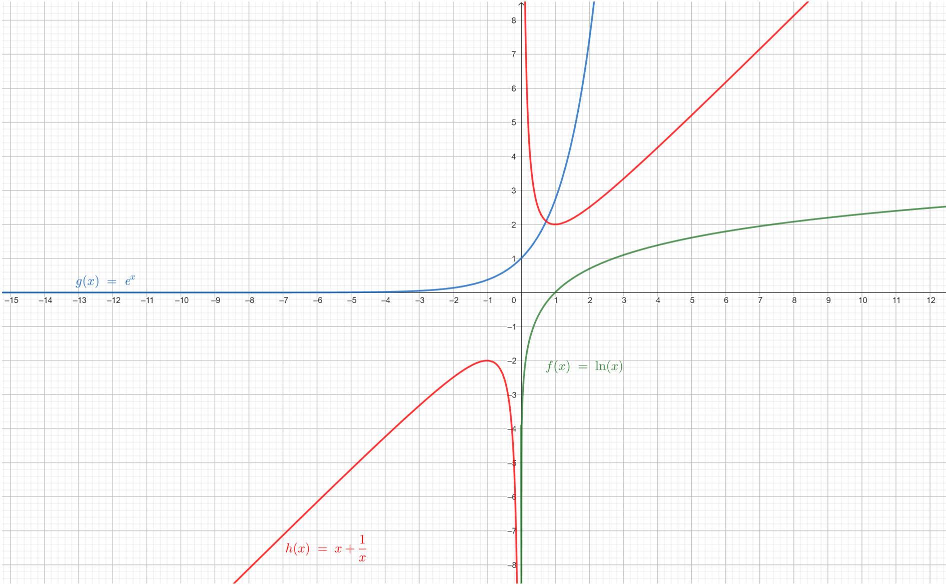
Παραδείγματα

- Να βρεθούν τα πλευρικά όρια των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία αλλαγής κλάδων:
    - $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$
    - $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$

Σχέση κλασικού ορίου και πλευρικών ορίων

- $\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$

Ασύμπτωτες


$g(x) = e^x$
$f(x) = \ln(x)$
$h(x) = x + \frac{1}{x}$
–15 –14 –13 –12 –11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
8 7 6 5 4 3 2 1 –1 –2 –3 –4 –5 –6 –7 –8

Ορισμός

- Ασυμπτωτη είναι η γραμμή στην οποία τείνει να πλησιάσει η γραφική παράσταση της $f(x)$ για κάποιο x_0

Ορισμός

- Ασυμπτωτη είναι η γραμμή στην οποία τείνει να πλησιάσει η γραφική παράσταση της $f(x)$ για κάποιο x_0
- Υπάρχουν 3 είδη:

Ορισμός

- Ασυμπτωτη είναι η γραμμή στην οποία τείνει να πλησιάσει η γραφική παράσταση της $f(x)$ για κάποιο x_0
- Υπάρχουν 3 είδη:
  - Κατακόρυφη: ϑα είναι η κάθετη στον άξονα xx' γραμμή $x = x_0$ αν ισχύει $\lim_{x \to x_0} = \pm\infty$.

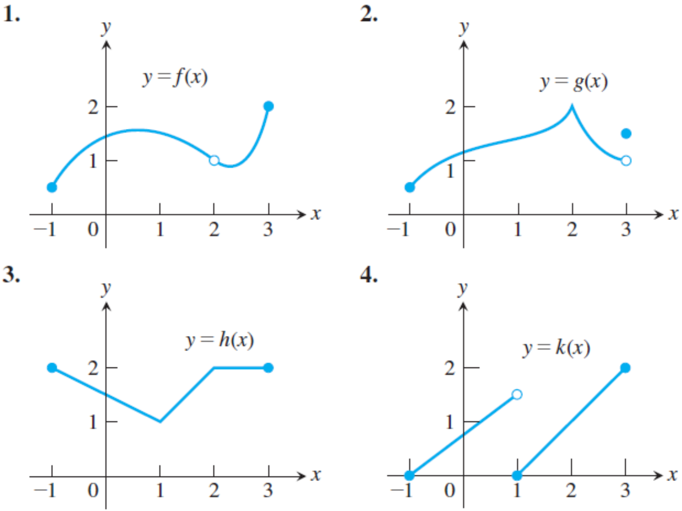
Ορισμός

- Ασυμπτωτη είναι η γραμμή στην οποία τείνει να πλησιάσει η γραφική παράσταση της $f(x)$ για κάποιο x_0
- Υπάρχουν 3 είδη:
  - Κατακόρυφη: θα είναι η κάθετη στον άξονα xx' γραμμή $x = x_0$ αν ισχύει $\lim_{x \to x_0} = \pm\infty$.
  - Οριζόντια: θα είναι η παράλληλη στον άξονα xx' γραμμή $y = y_0$ αν ισχύει $\lim_{x \to -\infty} = y_0$ ή $\lim_{x \to \infty} = y_0$

Ορισμός

- Ασυμπτωτη είναι η γραμμή στην οποία τείνει να πλησιάσει η γραφική παράσταση της $f(x)$ για κάποιο x_0
- Υπάρχουν 3 είδη:
  - Κατακόρυφη: θα είναι η κάθετη στον άξονα xx' γραμμή $x = x_0$ αν ισχύει $\lim_{x \to x_0} = \pm\infty$.
  - Οριζόντια: θα είναι η παράλληλη στον άξονα xx' γραμμή $y = y_0$ αν ισχύει $\lim_{x \to -\infty} = y_0$ ή $\lim_{x \to \infty} = y_0$
  - Πλάγια ασύμτωτη: θα είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \to \infty} f(x) - \lambda x$ ή $\lambda = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\beta = \lim_{x \to -\infty} f(x) - \lambda x$

Διερεύνηση



1.
y
y = f(x)
2
1
−1
0
1
2
3
x
2.
y
y = g(x)
2
1
−1
0
1
2
3
x
3.
y
y = h(x)
2
1
−1
0
1
2
3
x
4.
y
y = k(x)
2
1
−1
0
1
2
3
x

Συνέχεια

- Μία συνάρτηση $f(x)$ θα λέμε ότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο αν η γραφική παράσταση δεν εμφανίζει διακοπές ή ασυνέπειες.

Συνέχεια

- Μία συνάρτηση $f(x)$ θα λέμε ότι είναι συνεχής σε κάθε σημείο αν η γραφική παράσταση δεν εμφανίζει διακοπές ή ασυνέπειες.
- Μαθηματικώς, λέμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής αν σε κάθε σημείο x_0 ορίζεται το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$, υπάρχει η $f(x_0)$ και οι 2 τιμές είναι ίσες.

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x)$, $g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x)$, $g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:
  - $f(x) \pm g(x)$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x),\ g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:
  - $f(x) \pm g(x)$
  - $k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x),\ g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:
  - $f(x) \pm g(x)$
  - $k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$
  - $f(x) \cdot g(x)$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x),\ g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:
  - $f(x) \pm g(x)$
  - $k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$
  - $f(x) \cdot g(x)$
  - $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x),\ g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:
  - $f(x) \pm g(x)$
  - $k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$
  - $f(x) \cdot g(x)$
  - $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
  - $f^n(x),\ n \in \mathbb{Z}^+$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x),\ g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:
  - $f(x) \pm g(x)$
  - $k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$
  - $f(x) \cdot g(x)$
  - $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
  - $f^n(x),\ n \in \mathbb{Z}^+$
  - $\sqrt[n]{f(x)},\ n \in \mathbb{Z}^+$

Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων

- Αν $f(x),\ g(x)$ συνεχής στο σημείο $x = c$, τότε και οι ακόλουθες πράξεις συναρτήσεων είναι συνεχής στο $x = c$:
  - $f(x) \pm g(x)$
  - $k \cdot f(x),\ k \in \mathbb{R}$
  - $f(x) \cdot g(x)$
  - $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
  - $f^n(x),\ n \in \mathbb{Z}^+$
  - $\sqrt[n]{f(x)},\ n \in \mathbb{Z}^+$
  - Αν $\lim_{x \to c} g(x) = a$ και η $f(x)$ συνεχής στο $x = a$, τότε

$$lim_{x \to c} f(g(x)) = lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Παραδείγματα

- Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

Παραδείγματα

- Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:
  - $f(x) = |x|$

Παραδείγματα

- Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = \sqrt{2|x|}$

Παραδείγματα

- Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = \sqrt{2|x|}$
  - $f(x) = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

Παραδείγματα

- Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:
  - $f(x) = |x|$
  - $f(x) = \sqrt{2|x|}$
  - $f(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$
  - Για ποιες τιμές των a, b είναι η παρακάτω κλαδική συνάρτηση συνεχής·

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2b, \ x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, \ 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, \ x > 2 \end{cases}$$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

- Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, $f(a) < f(b)$ (ή $f(b) < f(a)$).

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

- Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, $f(a) < f(b)$ (ή $f(b) < f(a)$).
- Τότε, για οποιαδήποτε τιμή u η οποία ανήκει στο $(f(a), f(b))$ (ή στο $(f(b), f(a))$) υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $\xi \in (a, b): \ f(\xi) = u$

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

- Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, $f(a) < f(b)$ (ή $f(b) < f(a)$).
- Τότε, για οποιαδήποτε τιμή u η οποία ανήκει στο $(f(a), f(b))$ (ή στο $(f(b), f(a))$) υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή $\xi \in (a, b) : \ f(\xi) = u$
- Στην περίπτωση που $u = 0$, τότε έχομε το γνωστό θεώρημα Bolzano.

Παραδείγματα

- Αποδείξτε ότι:

Παραδείγματα

- Αποδείξτε ότι:
  - Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x - 2 = 0$ έχει ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

Παραδείγματα

- Αποδείξτε ότι:
  - Η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x - 2 = 0$ έχει ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.
  - Η εξίσωση $e^x + x^3 = 4$ είναι επιλύσιμη στο διάστημα $[0, 2]$.