Φροντιστήριο στο μάθημα «Απειροστικός Ι»

Παράγωγος και Ιδιότητες: Μέρος 2ο

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

1. Διαφορικά
2. Παράγωγοι αντίστροφων συναρτήσεων
3. Ακρότατα
4. Θεώρημα Rolle
5. Θεώρημα Rolle
6. Θεώρημα Μέσης Τιμής
7. Μονοτονία
8. Κυρτότητα
9. Σημεία Καμπής
10. Σχεδιασμός Γραφικής Παράστασης Συναρτήσεως
11. Del' Hospital

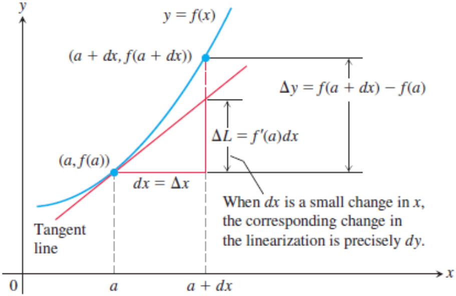
Διαφορικά

- Έστω $y = f(x)$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση.

Διαφορικά

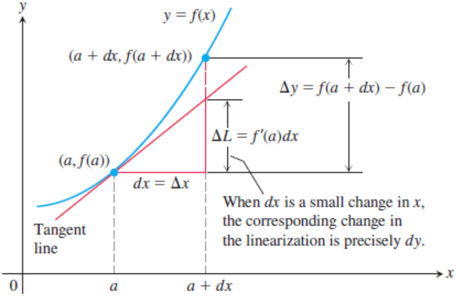
- Έστω $y = f(x)$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση.
- Τότε, το διαφορικό dx είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το διαφορικό dy είναι εξαρτημένη μεταβλητή ίση με $f'(x)dx$

Διαφορικά



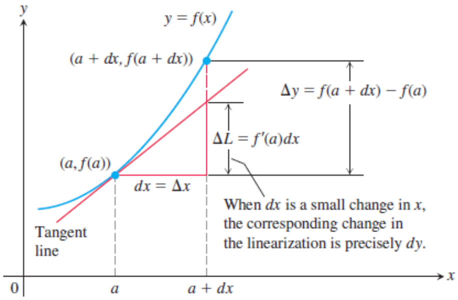
- Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ και 2 σημεία $a, f(a)$ και $a + \Delta x, f(a + \Delta x)$,

Διαφορικά



- Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ και 2 σημεία $a, f(a)$ και $a + \Delta x, f(a + \Delta x)$,
- Τότε, ορίζομε $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ η οποία εξαρτάται τόσο από το a όσο και από την απόσταση Δx

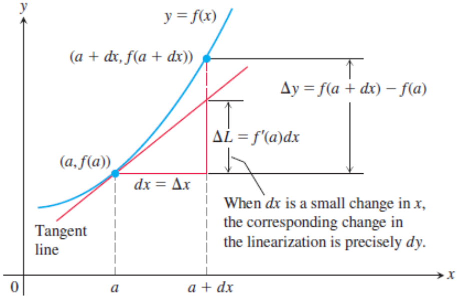
Διαφορικά



- Έστω συνάρτηση $y = f(x)$ και 2 σημεία $a, f(a)$ και $a + \Delta x, f(a + \Delta x)$,
- Τότε, ορίζομε $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ η οποία εξαρτάται τόσο από το a όσο και από την απόσταση Δx
- Αν η απόσταση Δx ισούται με dx (κοινώς είναι αρκετά μικρή), θα ισχύει ότι:

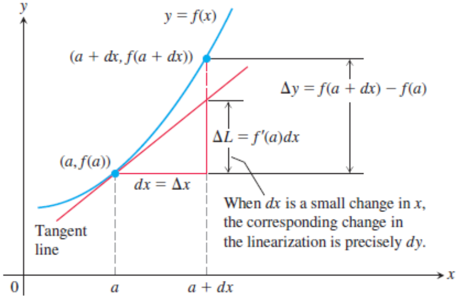
$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

Παράδειγμα



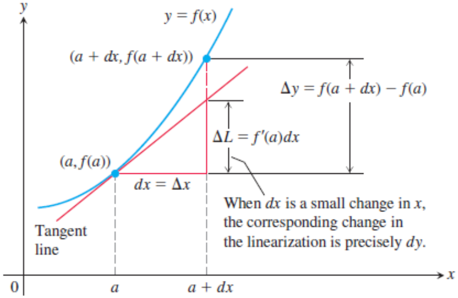
- Η ακτίνα r ενός κύκλου αυξάνεται από $a = 10m$ σε $10.1m$

Παράδειγμα



- Η ακτίνα r ενός κύκλου αυξάνεται από $a = 10m$ σε $10.1m$
- Χρησιμοποιήστε dA για να υπολογίσετε την αύξηση του εμβαδού του κύκλου.

Παράδειγμα



- Η ακτίνα r ενός κύκλου αυξάνεται από $a = 10m$ σε $10.1m$
- Χρησιμοποιήστε dA για να υπολογίσετε την αύξηση του εμβαδού του κύκλου.
- Υπολογίστε το εμβαδόν του μεγεθύνετε τον κύκλο και συγκρίνετε την εκτίμησή σας με την πραγματική περιοχή που βρέθηκε με άμεσο υπολογισμό.

Σφάλμα Διαφορικής Προσεγγίσεως

- Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη στο $x = a$ και Δx μικρή μεταβολή του x.

Σφάλμα Διαφορικής Προσεγγίσεως

- Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη στο $x = a$ και Δx μικρή μεταβολή του x.
- Πραγματική μεταβολή: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$

Σφάλμα Διαφορικής Προσεγγίσεως

- Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη στο $x = a$ και Δx μικρή μεταβολή του x.
- Πραγματική μεταβολή: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$
- Διαφορική Εκτίμηση: $dy = f'(a)dx$

Σφάλμα Διαφορικής Προσεγγίσεως

- Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη στο $x = a$ και Δx μικρή μεταβολή του x.
- Πραγματική μεταβολή: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$
- Διαφορική Εκτίμηση: $dy = f'(a)dx$
- Τότε ορίζομε ως Σφάλμα Προσεγγίσεως την ποσότητα:

$$\begin{aligned} A &= \Delta y - dy && (1) \\ &= f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x && (2) \\ &= \left(\underbrace{\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)}_{\epsilon} \right) \Delta x && (3) \\ &= \epsilon \Delta x && (4) \end{aligned}$$

με το ϵ να τείνει στο 0, καθώς $\Delta x \to 0$.

Σφάλμα Διαφορικής Προσεγγίσεως

- Έστω $y = f(x)$ διαφορίσιμη στο $x = a$ και Δx μικρή μεταβολή του x.
- Πραγματική μεταβολή: $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$
- Διαφορική Εκτίμηση: $dy = f'(a)dx$
- Τότε ορίζομε ως Σφάλμα Προσεγγίσεως την ποσότητα:

$$\begin{aligned} A &= \Delta y - dy && (1) \\ &= f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a)\Delta x && (2) \\ &= \left(\underbrace{\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)}_{\epsilon}\right)\Delta x && (3) \\ &= \epsilon \Delta x && (4) \end{aligned}$$

  με το ϵ να τείνει στο 0, καθώς $\Delta x \to 0$.
- Η εξίσωση $dy = f'(a)dx$ είναι ένας δείκτης ευαισθησίας μεταβολής της $f(x)$ καθώς αλλάζει το x ενώ αρχικώς είμαστε στο $x = a$.

Παράγωγοι αντίστροφων συναρτήσεων

- Έστω συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέψιμη διαφορίσιμη με παράγωγο στο σημείο x_0 ίση με

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Παράγωγοι αντίστροφων συναρτήσεων

- Έστω συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέψιμη διαφορίσιμη με παράγωγο στο σημείο x_0 ίση με

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Τότε, η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}(x)$ θα έχει παράγωγο:

$$\left(f^{-1}(x_0)\right)' = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}$$

Παράγωγοι αντίστροφων συναρτήσεων

- Έστω συνάρτηση $f(x)$ αντιστρέψιμη διαφορίσιμη με παράγωγο στο σημείο x_0 ίση με

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Τότε, η αντίστροφή της συνάρτηση $f^{-1}(x)$ θα έχει παράγωγο:

$$\left(f^{-1}(x_0)\right)' = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}$$

- Αντικαθιστώντας x_0 με $f(y_0)$ και x με $f(y)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(x_0)\right)' &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(f(y)) - f^{-1}(f(y_0))}{f(y) - f(y_0)} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)} = \frac{1}{f'(y_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}\end{aligned}$$

Παράδειγμα

- Δείξτε ότι η παράγωγος της αντίστροφης εφαπτομένης $\arctan(x)$ είναι $\dfrac{1}{1+x^2}$

Παράδειγμα

- Δείξτε ότι η παράγωγος της αντίστροφης εφαπτομένης $\arctan(x)$ είναι $\dfrac{1}{1+x^2}$
- Δείξτε ότι η παράγωγος του αντίστροφου ημιτόνου είναι $\arcsin(x)$ είναι $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ολικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.

Ολικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.
- Τότε ορίζομε τις εξής έννοιες:

Ολικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.
- Τότε ορίζομε τις εξής έννοιες:
    - Ολικό ή απόλυτο μέγιστο: Σημείο $c \in D$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(c), \ \forall x \in D$

Ολικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.
- Τότε ορίζομε τις εξής έννοιες:
  - Ολικό ή απόλυτο μέγιστο: Σημείο $c \in D$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in D$
  - Ολικό ή απόλυτο ελάχιστο: Σημείο $c \in D$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in D$

Θεώρημα Ακροτάτων

- Έστω $f(x) \in C[a, b]$.

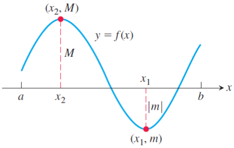
Θεώρημα Ακροτάτων

- Έστω $f(x) \in C[a, b]$.
- Τότε η f έχει μια απόλυτη μέγιστη τιμή M και μια απόλυτη ελάχιστη τιμή m στο $[a, b]$.

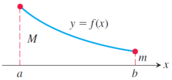
Θεώρημα Ακροτάτων

- Έστω $f(x) \in C[a, b]$.
- Τότε η f έχει μια απόλυτη μέγιστη τιμή M και μια απόλυτη ελάχιστη τιμή m στο $[a, b]$.
- Ήτοι, υπάρχουν $x_1, \ x_2 \in [a, b]$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) = m, \ f(x_2) = M$ και $m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b]$

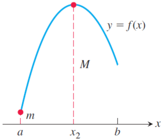
Θεώρημα Ακροτάτων



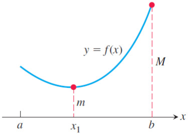
Maximum and minimum
at interior points



Maximum and minimum
at endpoints



Maximum at interior point,
minimum at endpoint



Minimum at interior point,
maximum at endpoint

Παραδείγματα

Τοπικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.

Τοπικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.
- Τότε ορίζομε τις εξής έννοιες:

Τοπικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.
- Τότε ορίζομε τις εξής έννοιες:
    - Τοπικό μέγιστο: Σημείο $c \in D$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(c)$ για x πλησίον του c

Τοπικά Ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με πεδίο ορισμού D.
- Τότε ορίζομε τις εξής έννοιες:
  - Τοπικό μέγιστο: Σημείο $c \in D$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(c)$ για x πλησίον του c
  - Ολικό ή απόλυτο ελάχιστο: Σημείο $c \in D$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(c)$ για x πλησίον του c

Θεώρημα πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με τοπικό ακρότατο (μέγιστο/ελάχιστο) στο σημείο $x = c$.

Θεώρημα πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με τοπικό ακρότατο (μέγιστο/ελάχιστο) στο σημείο $x = c$.
- Αν είναι διαφορίσιμη στο εν λόγω σημείο, τότε

$$f'(c) = 0$$

Θεώρημα πρώτης παραγώγου για τοπικά ακρότατα

- Έστω $f(x)$ με τοπικό ακρότατο (μέγιστο/ελάχιστο) στο σημείο $x = c$.
- Αν είναι διαφορίσιμη στο εν λόγω σημείο, τότε

$$f'(c) = 0$$

- Γενικά, τα σημεία στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται ή δεν ορίζεται, ονομάζονται κρίσιμα σημεία.

Μέθοδος ευρέσεως ακροτάτων

- Έστω $f(x)$ ορισμένη στο κλειστό πεδίο ορισμού D.

Μέθοδος ευρέσεως ακροτάτων

- Έστω $f(x)$ ορισμένη στο κλειστό πεδίο ορισμού D.
- Για την εύρεση ολικών ακροτάτων:

Μέθοδος ευρέσεως ακροτάτων

- Έστω $f(x)$ ορισμένη στο κλειστό πεδίο ορισμού D.
- Για την εύρεση ολικών ακροτάτων:
    1. Βρίσκομε τα κρίσιμα σημεία (όλα τα σημεία $x \in D: \ f(x) = 0 \text{ή} \nexists f'(x))$ και τα άκρα του πεδίου ορισμού.

Μέθοδος ευρέσεως ακροτάτων

- Έστω $f(x)$ ορισμένη στο κλειστό πεδίο ορισμού D.
- Για την εύρεση ολικών ακροτάτων:
  1. Βρίσκομε τα κρίσιμα σημεία (όλα τα σημεία $x \in D: \ f(x) = 0$ ή $\nexists f'(x)$) και τα άκρα του πεδίου ορισμού.
  2. Υπολογίζομε για κάθε σημείο την $f(x)$.

Μέθοδος ευρέσεως ακροτάτων

- Έστω $f(x)$ ορισμένη στο κλειστό πεδίο ορισμού D.
- Για την εύρεση ολικών ακροτάτων:
  1. Βρίσκομε τα κρίσιμα σημεία (όλα τα σημεία $x \in D: \;\; f(x) = 0 ή \nexists f'(x)$) και τα άκρα του πεδίου ορισμού.
  2. Υπολογίζομε για κάθε σημείο την $f(x)$.
  3. Κρατάμε ως ολικό μέγιστο και ελάχιστο εκ των παραπάνω τα σημεία με την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συναρτήσεως.

Παραδείγματα

- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία:

Παραδείγματα

- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία:
  - $f(x) = x^2 - 32\sqrt{x}$

Παραδείγματα

- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία:
  - $f(x) = x^2 - 32\sqrt{x}$
  - $g(x) = \ln(x+1) - \arctan x$

Παραδείγματα

- Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία:
  - $f(x) = x^2 - 32\sqrt{x}$
  - $g(x) = \ln(x+1) - \arctan x$
  - $h(x) = 2\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$

Παράδειγμα: Εξεταστική Σεπτεμβρίου 2024

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι τής μορφής $\kappa\alpha^x + \lambda\beta^x + \mu\gamma^x, 0 < \alpha, \beta, \gamma \neq 1$, και κ, λ, μ, δοθέντες πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι, αν $f(x) \geq \kappa + \lambda + \mu$, τότε $\alpha^\kappa \beta^\lambda \gamma^\mu = 1$

Θεώρημα Rolle

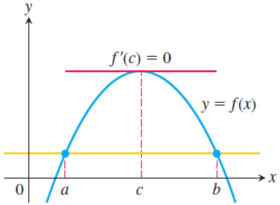
- Ας υποθέσουμε ότι το $y = f(x)$ είναι συνεχές στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του εσωτερικού του (a, b).

Θεώρημα Rolle

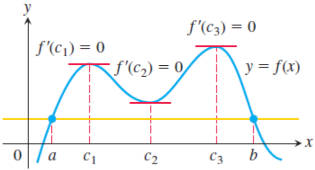
- Ας υποθέσουμε ότι το $y = f(x)$ είναι συνεχές στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμο σε κάθε σημείο του εσωτερικού του (a, b).
- Αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(c) = 0$$

Θεώρημα Rolle



(a)



Παραδείγματα

- Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 1$ έχει ακριβώς 1 λύση.

Παραδείγματα

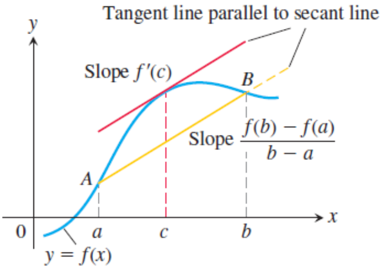
- Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + 1$ έχει ακριβώς 1 λύση.
- Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ μηδενίζεται για $x = 0$ και $x = 1$, όμως για κάθε $x \in (0, 1)$ η παράγωγος είναι $f'(x) = 1$. Πώς γίνεται αυτό· Δεν ισχύει το θεώρημα του Rolle. Εξηγήστε.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

- Ας υποθέσουμε ότι $y = f(x)$ είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο εσωτερικό του διαστήματος (a, b). Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $c \in (a, b)$ στο οποίο ισχύει:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής



Θεώρημα Μέσης Τιμής

- Πόρισμα 1ο: Αν $f'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, τότε $f(x) = c$, $\forall x \in (a, b)$.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

- Πόρισμα 1ο: Αν $f'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, τότε $f(x) = c$, $\forall x \in (a, b)$.
- Πόρισμα 2ο: Αν $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, τότε $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in (a, b)$.

Παραδείγματα

- Για ποιες τιμές a, b, m η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3, \ \ x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, \ \ 0 < x < 1 \\ mx + b, \ \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[0, 2]$;

Παραδείγματα

- Για ποιες τιμές a, b, m η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3, \ \ x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, \ 0 < x < 1 \\ mx + b, \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[0, 2]$;
- Δεδομένου ότι $f'(x) \leq 1, \ \forall x \in [1, 4]$,δείξτε ότι $f(4) - f(1) \leq 3$.

Παραδείγματα

- Για ποιες τιμές a, b, m η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης τιμής στο διάστημα $[0, 2]$;

- Δεδομένου ότι $f'(x) \leq 1, \ \forall x \in [1, 4]$,δείξτε ότι $f(4) - f(1) \leq 3$.
- Δείξτε ότι η ανισότητα $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Μονοτονία

- Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b).

Μονοτονία

- Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b).
- Τότε ισχύουν τα εξής:

Μονοτονία

- Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b).
- Τότε ισχύουν τα εξής:
  - Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε σημείο $x \in (a, b)$, τότε η φ είναι αύξουσα στο $[a, b]$.

Μονοτονία

- Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και διαφορίσιμη στο (a, b).
- Τότε ισχύουν τα εξής:
  - Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε σημείο $x \in (a, b)$, τότε η φ είναι αύξουσα στο $[a, b]$.
  - Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε σημείο $x \in (a, b)$, τότε η φ είναι φθίνουσα στο $[a, b]$.

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5$

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5$

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$

Παράδείγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0$

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.
  $f'(x) = 0$

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.
  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.
  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12$

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.
  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$

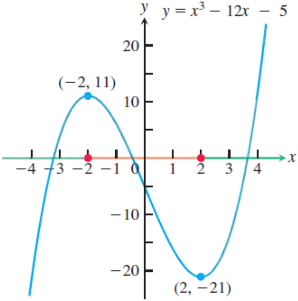
Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.
  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
- Η αποτίμηση ενός πολυώνυμο 2ου βαθμού με 2 ρίζες $x_1,\ x_2$ για συγκεκριμένη τιμή του x έχει πρόσημο ίδιο με τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή του αν $x \notin (x_1,\ x_2)$ έχει και διαφορετικό πρόσημο αν $x \in (x_1,\ x_2)$.

Παράδειγμα 1ο

- Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x) = x^3 - 12x - 5$ και προσδιορίστε τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία η φ αυξάνεται και εκείνα στα οποία η φ μειώνεται.
- $f(x) = x^3 - 12x - 5 \Rightarrow f'(x) = (x^3)' - 12x' - 5'$
  $\Rightarrow f'(x) = 3(x^{3-1})' - 12 \cdot 1 - 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$
- Τα κρίσιμα σημεία είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η παράγωγος $f'(x)$.
  $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
- Η αποτίμηση ενός πολυώνυμο 2ου βαθμού με 2 ρίζες $x_1,\ x_2$ για συγκεκριμένη τιμή του x έχει πρόσημο ίδιο με τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή του αν $x \notin (x_1,\ x_2)$ έχει και διαφορετικό πρόσημο αν $x \in (x_1,\ x_2)$.
- Στην περίπτωσή μας, ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής της παραγώγου $f'(x)$ είναι $3 > 0$, άρα θα είναι η παράγωγος θετική (και, κατά συνέπειαν, η συνάρτηση αύξουσα) για $x \notin (-2, 2)$ και αρνητική (και, κατά συνέπειαν, η συνάρτηση φθίνουσα) για $x \in (-2, 2)$.

Παράδειγμα 1ο



Κριτήριο 1ης Παραγώγου για ακρότατα

- Ας υποθέσουμε ότι το c είναι ένα κρίσιμο σημείο μιας συνεχούς συνάρτησης f, και ότι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο κάποιου διαστήματος που περιέχει το ς εκτός πιθανώς από το ίδιο το ς.

Κριτήριο 1ης Παραγώγου για ακρότατα

- Ας υποθέσουμε ότι το c είναι ένα κρίσιμο σημείο μιας συνεχούς συνάρτησης f , και ότι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο κάποιου διαστήματος που περιέχει το ς εκτός πιθανώς από το ίδιο το ς.
- Μετακινώντας σε αυτό το διάστημα από αριστερά προς τα δεξιά,

Κριτήριο 1ης Παραγώγου για ακρότατα

- Ας υποθέσουμε ότι το c είναι ένα κρίσιμο σημείο μιας συνεχούς συνάρτησης f , και ότι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο κάποιου διαστήματος που περιέχει το ς εκτός πιθανώς από το ίδιο το ς.
- Μετακινώντας σε αυτό το διάστημα από αριστερά προς τα δεξιά,
  - αν η f' αλλάξει από αρνητικό σε θετικό στο c, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c.

Κριτήριο 1ης Παραγώγου για ακρότατα

- Ας υποθέσουμε ότι το c είναι ένα κρίσιμο σημείο μιας συνεχούς συνάρτησης f , και ότι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο κάποιου διαστήματος που περιέχει το ς εκτός πιθανώς από το ίδιο το ς.
- Μετακινώντας σε αυτό το διάστημα από αριστερά προς τα δεξιά,
  - αν η f' αλλάξει από αρνητικό σε θετικό στο c, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c.
  - αν η f' αλλάξει από θετική σε αρνητική στο c, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο c.

Κριτήριο 1ης Παραγώγου για ακρότατα

- Ας υποθέσουμε ότι το c είναι ένα κρίσιμο σημείο μιας συνεχούς συνάρτησης f , και ότι η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο κάποιου διαστήματος που περιέχει το ς εκτός πιθανώς από το ίδιο το ς.
- Μετακινώντας σε αυτό το διάστημα από αριστερά προς τα δεξιά,
  - αν η f' αλλάξει από αρνητικό σε θετικό στο c, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c.
  - αν η f' αλλάξει από θετική σε αρνητική στο c, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο c.
  - αν η f' δεν αλλάξει πρόσημο στο c (δηλαδή, η f' είναι θετική και στις δύο πλευρές του c ή αρνητική και στις δύο πλευρές), τότε η f δεν έχει τοπικό άκρο στο c.

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το ολικό μέγιστο της $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ και ποια είναι η τιμή.

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το ολικό μέγιστο της $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ και ποια είναι η τιμή.
2. Να αποδειχθούν τα εξής:

Παραδείγματα

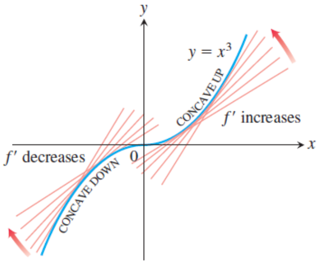
1. Να βρεθεί το ολικό μέγιστο της $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ και ποια είναι η τιμή.
2. Να αποδειχθούν τα εξής:
    1. $e^x \geq 1 + x, \ \forall x \geq 0$

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το ολικό μέγιστο της $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ και ποια είναι η τιμή.
2. Να αποδειχθούν τα εξής:
   1. $e^x \geq 1 + x, \ \forall x \geq 0$
   2. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

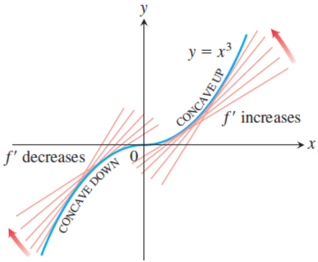
Κυρτότητα

- Η γραφική παράσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι



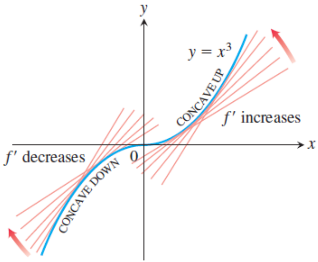
Κυρτότητα

- Η γραφική παράσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι
  - κυρτή σε ένα ανοιχτό διάστημα I εάν η f' αύξουσα στο I.



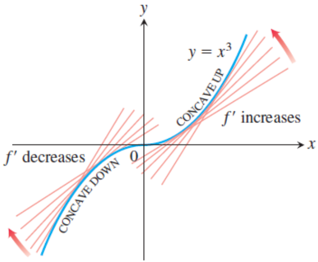
Κυρτότητα

- Η γραφική παράσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι
  - κυρτή σε ένα ανοιχτό διάστημα I εάν η f' αύξουσα στο I.
  - κοίλη σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η f' φθίνουσα στο I.



Κυρτότητα

- Η γραφική παράσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι
  - κυρτή σε ένα ανοιχτό διάστημα I εάν η f' αύξουσα στο I.
  - κοίλη σε ένα ανοιχτό διάστημα I αν η f' φθίνουσα στο I.
- Στην πρωτη περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω, ενώ στην δεύτερη ότι στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.



Κριτήριο 2ης Παραγώγου για κυρτότητα

- Έστω συνάρτηση $f \in C^2(I)$, ήτοι 2 φορές παραγωγίσιμη στο I.

Κριτήριο 2ης Παραγώγου για κυρτότητα

- Έστω συνάρτηση $f \in C^2(I)$, ήτοι 2 φορές παραγωγίσιμη στο I.
- Τότε:

Κριτήριο 2ης Παραγώγου για κυρτότητα

- Έστω συνάρτηση $f \in C^2(I)$, ήτοι 2 φορές παραγωγίσιμη στο I.
- Τότε:
  - κυρτή στο διάστημα I εάν η $f'' > 0$ στο I.

Κριτήριο 2ης Παραγώγου για κυρτότητα

- Έστω συνάρτηση $f \in C^2(I)$, ήτοι 2 φορές παραγωγίσιμη στο I.
- Τότε:
  - κυρτή στο διάστημα I εάν η $f'' > 0$ στο I.
  - κοίλη στο διάστημα I αν η $f'' < 0$ στο I.

Παράδειγμα

Σημεία Καμπής

- Ένα σημείο $(c, f(c))$ όπου η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει μια εφαπτομένη και όπου η κυρτότητα μεταβάλλεται ονομάζεται σημείο καμπής.

Σημεία Καμπής

- Ένα σημείο $(c, f(c))$ όπου η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει μια εφαπτομένη και όπου η κυρτότητα μεταβάλλεται ονομάζεται σημείο καμπής.
- Πρόκειται για σημείο όπου $f''(c) = 0$ ή δεν ορίζεται η 2η παράγωγος.

Παραδείγματα

- Να προσδιορίσετε την κοιλότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

- Τα βήματα είναι τα εξής:

Σχεδιασμός Γραφικής Παράστασης Συναρτήσεως

- Τα βήματα είναι τα εξής:
    1. Εύρεση ακροτάτων

Σχεδιασμός Γραφικής Παράστασης Συναρτήσεως

- Τα βήματα είναι τα εξής:
  1. Εύρεση ακροτάτων
  2. Εύρεση διαστημάτων στα οποία η f αυξάνεται ή μειώνεται.

Σχεδιασμός Γραφικής Παράστασης Συναρτήσεως

- Τα βήματα είναι τα εξής:
  1. Εύρεση ακροτάτων
  2. Εύρεση διαστημάτων στα οποία η f αυξάνεται ή μειώνεται.
  3. Εύρεση διαστημάτων η γραφική παράσταση της φ είναι κοίλη ή κυρτή.

Σχεδιασμός Γραφικής Παράστασης Συναρτήσεως

- Τα βήματα είναι τα εξής:
  1. Εύρεση ακροτάτων
  2. Εύρεση διαστημάτων στα οποία η f αυξάνεται ή μειώνεται.
  3. Εύρεση διαστημάτων η γραφική παράσταση της φ είναι κοίλη ή κυρτή.
  4. Σχεδιασμός του γενικού σχήματος της γραφικής παράστασης για f.

Σχεδιασμός Γραφικής Παράστασης Συναρτήσεως

- Τα βήματα είναι τα εξής:
  1. Εύρεση ακροτάτων
  2. Εύρεση διαστημάτων στα οποία η f αυξάνεται ή μειώνεται.
  3. Εύρεση διαστημάτων η γραφική παράσταση της φ είναι κοίλη ή κυρτή.
  4. Σχεδιασμός του γενικού σχήματος της γραφικής παράστασης για f.
  5. Σχεδιασμός ορισμένων συγκεκριμένων σημείων , όπως τοπικά μέγιστα και ελάχιστα σημεία, σημεία καμπής, και αναχαιτίζει. Στη συνέχεια σχεδιάστε την καμπύλη.

Παραδείγματα

- Να σχεδιαστεί η $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

Απροσδιόριστη Μορφή

- Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

και γνωρίζω ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Απροσδιόριστη Μορφή

- Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  και γνωρίζω ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.
- Τότε το ζητούμενο όριο τείνει σε κλάσμα της μορφής

$$\frac{0}{0}$$

  το οποίο αποακλείται Απροσδιόριστη Μορφή.

Απροσδιόριστη Μορφή

- Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  και γνωρίζω ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.
- Τότε το ζητούμενο όριο τείνει σε κλάσμα της μορφής

$$\frac{0}{0}$$

  το οποίο αποακλείται Απροσδιόριστη Μορφή.
- Άλλες Απροσδιόριστες Μορφές:

$$\frac{\infty}{\infty}, \infty \cdot 0, \infty - \infty$$

Κανόνας του Del' Hospital

- Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  και γνωρίζω ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

Κανόνας του Del' Hospital

- Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

  και γνωρίζω ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.
- Αν είναι διαφορίσιμες σε ένα διάστημα I που περιέχει το x_0 και $g'(x) \neq 0$ στο I αν $x \neq x_0$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  εφ'όσον το δεξιό όριο υπάρχει.

Κανόνας του Del' Hospital

- Έστω ότι ζητείται ο υπολογισμός του ορίου

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

και γνωρίζω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

- Αν είναι διαφορίσιμες σε ένα διάστημα I που περιέχει το x_0 και $g'(x) \neq 0$ στο I αν $x \neq x_0$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

εφ'όσον το δεξιό όριο υπάρχει.

- Η διαδικασία είναι η εξής: Όσο είναι σε απροσδιόριστη μορφή, εφαρμόζω τον κανόνα του Del' Hospitalεως ότου να μην μηδενίζεται ο αριθμητής ή ο παρωνομαστής.

Παραδείγματα

- Βρείτε τα παρακάτω όρια:

Παραδείγματα

- Βρείτε τα παρακάτω όρια:
  - $\lim_{x \to 0} (\pi - 2 \arctan x) \ln x$

Παραδείγματα

- Βρείτε τα παρακάτω όρια:
  - $\lim_{x\to 0}(\pi - 2\arctan x)\ln x$
  - $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

Παραδείγματα

- Βρείτε τα παρακάτω όρια:
  - $\lim_{x\to 0}(\pi - 2\arctan x)\ln x$
  - $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$
  - $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\tan(x^2)}$