Φροντιστήριο στο μάθημα «Απειροστικός Ι»

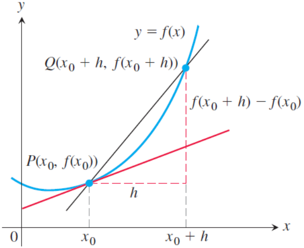
Παράγωγος και Ιδιότητες: Μέρος 1ο

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

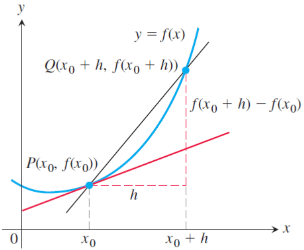
kspan@ics.forth.gr

Κλίση εφαπτομένης



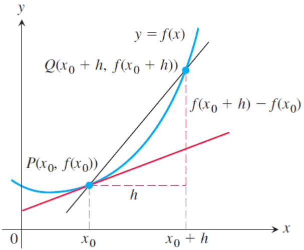
- Για την εύρεση της κλίσης μίας εφαπτομένης στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ της συνάρτησης $f(x)$, φέρομε μια ευθεία από το σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ στο σημείο $(x_0 + h,\ f(x_0 + h))$.

Κλίση εφαπτομένης



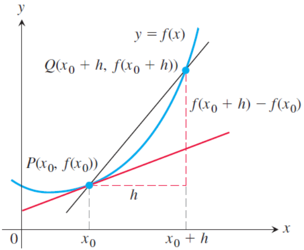
- Για την εύρεση της κλίσης μίας εφαπτομένης στο σημείο $(x_0, \; f(x_0))$ της συνάρτησης $f(x)$, φέρομε μια ευθεία από το σημείο $(x_0, \; f(x_0))$ στο σημείο $(x_0 + h, \; f(x_0 + h))$.
- Αρχικά αποκλίνοντας από την ζητούμενη εφαπτομένη ευθεία, όσο η ποσότητα h, που ορίζει την απόσταση των 2 σημείων, τείνει στο 0, τόσο η κατασκευασμένη ευθεία θα τείνει στην εφαπτομένη.

Κλίση εφαπτομένης



- Για την εύρεση της κλίσης μίας εφαπτομένης στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ της συνάρτησης $f(x)$, φέρομε μια ευθεία από το σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ στο σημείο $(x_0+h,\ f(x_0+h))$.
- Αρχικά αποκλίνοντας από την ζητούμενη εφαπτομένη ευθεία, όσο η ποσότητα h, που ορίζει την απόσταση των 2 σημείων, τείνει στο 0, τόσο η κατασκευασμένη ευθεία θα τείνει στην εφαπτομένη.
- Δεδομένων 2 σημείων $(x_0,\ f(x_0))$ και $(x_1,\ f(x_1))$, η κλίση της ευθείας που τα ενώνει είναι $\lambda = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Κλίση εφαπτομένης



- Για την εύρεση της κλίσης μίας εφαπτομένης στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ της συνάρτησης $f(x)$, φέρομε μια ευθεία από το σημείο $(x_0,\ f(x_0))$ στο σημείο $(x_0 + h,\ f(x_0 + h))$.
- Αρχικά αποκλίνοντας από την ζητούμενη εφαπτομένη ευθεία, όσο η ποσότητα h, που ορίζει την απόσταση των 2 σημείων, τείνει στο 0, τόσο η κατασκευασμένη ευθεία θα τείνει στην εφαπτομένη.
- Δεδομένων 2 σημείων $(x_0,\ f(x_0))$ και $(x_1,\ f(x_1))$, η κλίση της ευθείας που τα ενώνει είναι $\lambda = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.
- Στην περίπτωση της εφαπτομένης, ελέγχεται (καθώς $h \to 0$), ορίζεται το όριο

$$\lambda = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Παραδείγματα

- Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $x = \alpha$, όπου $\alpha \neq 0$.

Παραδείγματα

- Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $x = \alpha$, όπου $\alpha \neq 0$.
- Τί συμβαίνει καθώς αυξάνεται το α

Παράγωγος

- Το όριο με το οποίο ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$. ονομάζεται παράγωγος και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

ή

$$f'(x_0) = \lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Παράγωγος

- Το όριο με το οποίο ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$. ονομάζεται παράγωγος και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ (1)$$

ή

$$f'(x_0) = \lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (2)$$

- Η παράγωγος έχει τις εξής ισοδύναμες έννοιες:

Παράγωγος

- Το όριο με το οποίο ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$. ονομάζεται παράγωγος και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

  ή

$$f'(x_0) = \lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

- Η παράγωγος έχει τις εξής ισοδύναμες έννοιες:
  - Κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$.

Παράγωγος

- Το όριο με το οποίο ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$. ονομάζεται παράγωγος και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ (1)$$

ή

$$f'(x_0) = \lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ (2)$$

- Η παράγωγος έχει τις εξής ισοδύναμες έννοιες:
    - Κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$.
    - Ρυθμός μεταβολής συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$.

Παράγωγος

- Το όριο με το οποίο ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$. ονομάζεται παράγωγος και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ (1)$$

ή

$$f'(x_0) = \lim_{x_0\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ (2)$$

- Η παράγωγος έχει τις εξής ισοδύναμες έννοιες:
  - Κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$.
  - Ρυθμός μεταβολής συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$.
- Πρακτικά η παράγωγος $f'(x)$ είναι συνάρτηση η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο $(x_0,\ f(x_0))$, εφόσον ορζεται το όριο (1) (και κατά συνέπεια το (2)).

Παράγωγος

- Το όριο με το οποίο ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$. ονομάζεται παράγωγος και ορίζεται ως εξής:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

ή

$$f'(x_0) = \lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

- Η παράγωγος έχει τις εξής ισοδύναμες έννοιες:
  - Κλίση της εφαπτομένης μιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$.
  - Ρυθμός μεταβολής συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $(x_0,\ f(x_0))$.
- Πρακτικά η παράγωγος $f'(x)$ είναι συνάρτηση η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο $(x_0,\ f(x_0))$, εφόσον ορζεται το όριο (1) (και κατά συνέπεια το (2)).
- Άλλοι συμβολισμοί της παραγώγου είναι: $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{df}{dx},\ \dfrac{df(x)}{dx}$

Παραδείγματα

- Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $x = \alpha$, όπου $\alpha \neq 0$.

Παραδείγματα

- Βρείτε την κλίση της εφαπτομένης της $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $x = \alpha$, όπου $\alpha \neq 0$.
- Τί συμβαίνει καθώς αυξάνεται το α

Διαφορισιμότητα

- Μία συνάρτηση θα είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) αν και μόνο αν υπάρχει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \ \forall x_0 \in (a, b) \tag{1}$$

Διαφορισιμότητα

- Μία συνάρτηση θα είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) αν και μόνο αν υπάρχει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \ \forall x_0 \in (a, b) \tag{1}$$

- Μία συνάρτηση θα είναι διαφορίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ αν και μόνο αν υπάρχουν:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \ \forall x_0 \in (a, b) \tag{2}$$

και

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \ \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \tag{3}$$

Διαφορισιμότητα και συνέχεια

- Αν μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη τότε είναι και συνεχής.

Διαφορισιμότητα και συνέχεια

- Αν μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη τότε είναι και συνεχής.
- Πραγματι αν μία $f(x)$ είναι διαφορίσιμη σε οποιοδήποτε σημείο, τότε θα ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)L = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Παραδείγματα

- Βρείτε αν είναι διαφορίσιμη και συνεχής η $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

Κανόνες Παραγώγισης

- $f(x) = c \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$

Κανόνες Παραγώγισης

- $f(x) = c \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(c) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{R}$

Κανόνες Παραγώγισης

- $f(x) = c \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(c) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}, \;\; n \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Κανόνες Παραγώγισης

- $f(x) = c \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(c) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}, \ \ n \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(kf(x))' = kf'(x), \ \ k \in \mathbb{R}$

Κανόνες Παραγώγισης

- $f(x) = c \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(c) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}, \; n \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(kf(x))' = kf'(x), \; k \in \mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Κανόνες Παραγώγισης

- $f(x) = c \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^n)) = nx^{n-1}, \; n \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(kf(x))' = kf'(x), \; k \in \mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \forall x : g(x) \neq 0$

Κανόνες Παραγώγισης

- $f(x) = c \Rightarrow \dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(c) = 0$
- $f(x) = x^n \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(kf(x))' = kf'(x),\ k \in \mathbb{R}$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \forall x : g(x) \neq 0$
- Αν $h(x) = f(g(x))$, τότε $h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dx}$

Παραδείγματα

- Βρείτε τις ευθείες που εφάπτονται της καμπύλης $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ στο (0,0) προέλευση και το σημείο (1, 2).

Παραδείγματα

- Βρείτε τις ευθείες που εφάπτονται της καμπύλης $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ στο (0,0) προέλευση και το σημείο (1, 2).
- Βρείτε την τιμή των $a, \ b$ που κάνει διαφορίσιμη την παρακάτω συνάρτηση για όλες τις τιμές x.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > -1 \\ bx^2 - 3x, & x \leq -1 \end{cases}$$

Παραδείγματα

- Βρείτε τις ευθείες που εφάπτονται της καμπύλης $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ στο $(0{,}0)$ προέλευση και το σημείο $(1,\ 2)$.
- Βρείτε την τιμή των $a,\ b$ που κάνει διαφορίσιμη την παρακάτω συνάρτηση για όλες τις τιμές x.
$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > -1 \\ bx^2 - 3x, & x \leq -1 \end{cases}$$
- Να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ όταν $y = \dfrac{u}{5} + 7$ και $u = 5x - 35$

Παραδείγματα

- Βρείτε τις ευθείες που εφάπτονται της καμπύλης $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ στο (0,0) προέλευση και το σημείο (1, 2).
- Βρείτε την τιμή των $a,\ b$ που κάνει διαφορίσιμη την παρακάτω συνάρτηση για όλες τις τιμές x.
$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > -1 \\ bx^2 - 3x, & x \leq -1 \end{cases}$$
- Να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ όταν $y = \dfrac{u}{5} + 7$ και $u = 5x - 35$
- Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία που εφάπτεται της καμπύλης $y = \dfrac{1}{(1-4x)^3}$ έχει θετική κλίση.

Παράγωγοι ανωτέρων τάξεων

- Αν $y = f(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε και η $f'(x)$ είναι συνάρτηση.

Παράγωγοι ανωτέρων τάξεων

- Αν $y = f(x)$ διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε και η $f'(x)$ είναι συνάρτηση.
- Αν είναι διαφορίσιμη συνάρτηση η $f'(x)$, τότε μπορούμε να πάρομε μία συνάρτηση ονόματι δεύτερη παράγωγος η οποία είναι ίση με:

$$f''(x) = y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{df'}{dx}$$

Παράδειγμα

- Να βρεθούν η 1η και 2η παράγωγος της $f(s) = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{4}{s}$

Παράδειγμα

- Να βρεθούν η 1η και 2η παράγωγος της $f(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s}$
- Να βρεθούν η 1η και 2η παράγωγος της $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - 1$

Παράγωγος ώς ρυμθός μεταβολής

- Έστω ότι η $s(t)$ είναι η απόσταση που διανύει ένα σώμα.

Παράγωγος ώς ρυμθός μεταβολής

- Έστω ότι η $s(t)$ είναι η απόσταση που διανύει ένα σώμα.
- Η μέση ταχύτητα ορίζεται ως εξής:

$$U = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} \tag{4}$$

όπου a, b τα χρονικά όρια στα οποία διένυσε το σώμα την απόσταση $f(b) - f(a)$.

Παράγωγος ώς ρυμθός μεταβολής

- Έστω ότι η $s(t)$ είναι η απόσταση που διανύει ένα σώμα.
- Η μέση ταχύτητα ορίζεται ως εξής:

$$U = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} \tag{4}$$

όπου a, b τα χρονικά όρια στα οποία διένυσε το σώμα την απόσταση $f(b) - f(a)$.

- Όταν $b \to a$, τότε ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα

$$u(t) = \lim_{b \to a} \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = s'(t) \tag{5}$$

Παράγωγος ώς ρυμθός μεταβολής

- Έστω ότι η $s(t)$ είναι η απόσταση που διανύει ένα σώμα.
- Η μέση ταχύτητα ορίζεται ως εξής:

$$U = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} \tag{4}$$

όπου a, b τα χρονικά όρια στα οποία διένυσε το σώμα την απόσταση $f(b) - f(a)$.

- Όταν $b \to a$, τότε ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα

$$u(t) = \lim_{b \to a} \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = s'(t) \tag{5}$$

- Κατά συνέπεια ορίζεται και η στιγμιαία επιτάχυνση:

$$a(t) = \left(u'(t)\right)' = s''(t) \tag{6}$$

Παράγωγος ώς ρυμθός μεταβολής

- Έστω ότι η $s(t)$ είναι η απόσταση που διανύει ένα σώμα.
- Η μέση ταχύτητα ορίζεται ως εξής:

$$U = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} \tag{4}$$

όπου a, b τα χρονικά όρια στα οποία διένυσε το σώμα την απόσταση $f(b) - f(a)$.

- Όταν $b \to a$, τότε ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα

$$u(t) = \lim_{b \to a} \frac{s(b) - s(a)}{b - a} = s'(t) \tag{5}$$

- Κατά συνέπεια ορίζεται και η στιγμιαία επιτάχυνση:

$$a(t) = \left(u'(t)\right)' = s''(t) \tag{6}$$

- Με άλλα λόγια, η παράγωγος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της μεταβολής ενός μεγέθους.

Παράδειγμα

- Όταν ένα βακτηριοκτόνο προστέθηκε σε έναν θρεπτικό ζωμό στον οποίο αναπτύσσονταν βακτήρια, ο πληθυσμός των βακτηρίων συνέχισε να αυξάνεται για λίγο, αλλά στη συνέχεια σταμάτησε να αναπτύσσεται και άρχισε να μειώνεται.

Παράδειγμα

- Όταν ένα βακτηριοκτόνο προστέθηκε σε έναν θρεπτικό ζωμό στον οποίο αναπτύσσονταν βακτήρια, ο πληθυσμός των βακτηρίων συνέχισε να αυξάνεται για λίγο, αλλά στη συνέχεια σταμάτησε να αναπτύσσεται και άρχισε να μειώνεται.
- Το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t (ώρες) ήταν $b = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Βρείτε τους ρυθμούς ανάπτυξης στις

Παράδειγμα

- Όταν ένα βακτηριοκτόνο προστέθηκε σε έναν θρεπτικό ζωμό στον οποίο αναπτύσσονταν βακτήρια, ο πληθυσμός των βακτηρίων συνέχισε να αυξάνεται για λίγο, αλλά στη συνέχεια σταμάτησε να αναπτύσσεται και άρχισε να μειώνεται.
- Το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t (ώρες) ήταν $b = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Βρείτε τους ρυθμούς ανάπτυξης στις
  - $t = 0$ ώρες

Παράδειγμα

- Όταν ένα βακτηριοκτόνο προστέθηκε σε έναν θρεπτικό ζωμό στον οποίο αναπτύσσονταν βακτήρια, ο πληθυσμός των βακτηρίων συνέχισε να αυξάνεται για λίγο, αλλά στη συνέχεια σταμάτησε να αναπτύσσεται και άρχισε να μειώνεται.
- Το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t (ώρες) ήταν $b = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Βρείτε τους ρυθμούς ανάπτυξης στις
  - $t = 0$ ώρες
  - $t = 5$ ώρες

Παράδειγμα

- Όταν ένα βακτηριοκτόνο προστέθηκε σε έναν θρεπτικό ζωμό στον οποίο αναπτύσσονταν βακτήρια, ο πληθυσμός των βακτηρίων συνέχισε να αυξάνεται για λίγο, αλλά στη συνέχεια σταμάτησε να αναπτύσσεται και άρχισε να μειώνεται.
- Το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή t (ώρες) ήταν $b = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$. Βρείτε τους ρυθμούς ανάπτυξης στις
  - $t = 0$ ώρες
  - $t = 5$ ώρες
  - $t = 10$ ώρες

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\dfrac{d}{dx}(\sin(x))' = \cos(x)$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\dfrac{d}{dx}(\sin(x))' = \cos(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\cos(x))' = -\sin(x)$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\dfrac{d}{dx}(\sin(x))' = \cos(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\tan(x))' = \sec^2(x)$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\dfrac{d}{dx}(\sin(x))' = \cos(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\tan(x))' = \sec^2(x)$
- $\dfrac{d}{dx}(\sec(x))' = \sec(x)\cos(x)$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\frac{d}{dx}(\sin(x))' = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}(\tan(x))' = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx}(\sec(x))' = \sec(x)\cos(x)$
- $\frac{d}{dx}(\csc(x))' = \csc(x)\cot(x)$

Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

- $\frac{d}{dx}(\sin(x))' = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx}(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx}(\tan(x))' = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx}(\sec(x))' = \sec(x)\cos(x)$
- $\frac{d}{dx}(\csc(x))' = \csc(x)\cot(x)$
- $\frac{d}{dx}(\cot(x))' = \csc^2(x)$

Γραμμικοποίηση Συναρτήσεως

- Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = a$, τότε η προσεγγιστική συνάρτηση $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ είναι η γραμμικοποίηση της f στο a.

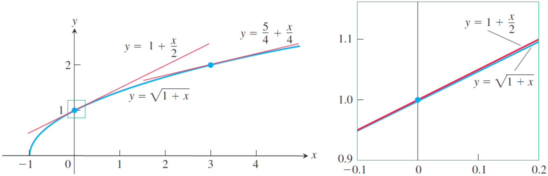
Γραμμικοποίηση Συναρτήσεως

- Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = a$, τότε η προσεγγιστική συνάρτηση $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ είναι η γραμμικοποίηση της f στο a.
- Η προσέγγιση $f(x) \approx L(x)$ του f μέσω του L είναι η τυπική γραμμική προσέγγιση του f στο a.

Γραμμικοποίηση Συναρτήσεως

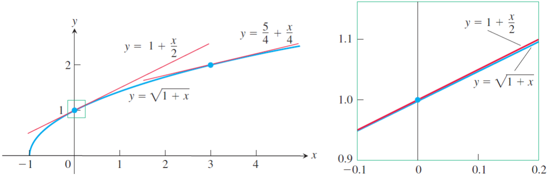
- Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x = a$, τότε η προσεγγιστική συνάρτηση $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ είναι η γραμμικοποίηση της f στο a.
- Η προσέγγιση $f(x) \approx L(x)$ του f μέσω του L είναι η τυπική γραμμική προσέγγιση του f στο a.
- Το σημείο $x = a$ είναι το κέντρο της προσέγγισης.

Παράδειγμα



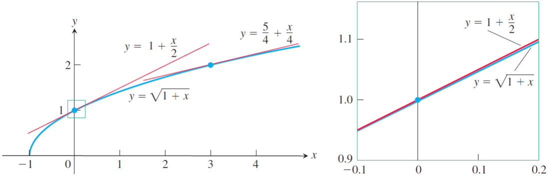
- $y = \sqrt{1+x}$

Παράδειγμα



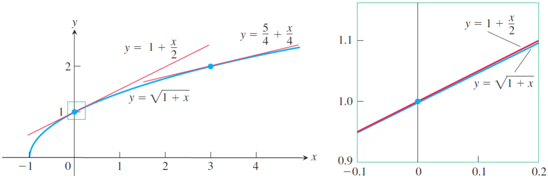
- $y = \sqrt{1+x}$

Παράδειγμα



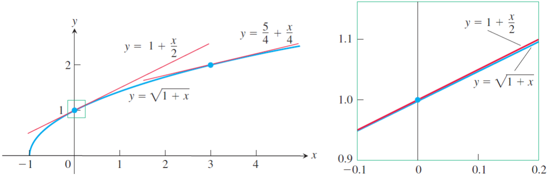
- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)'$

Παράδειγμα



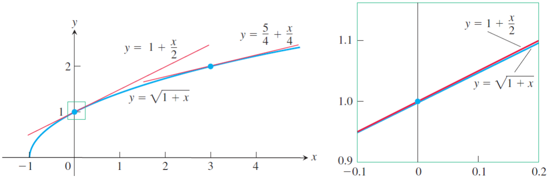
- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1' + x')$

Παράδειγμα



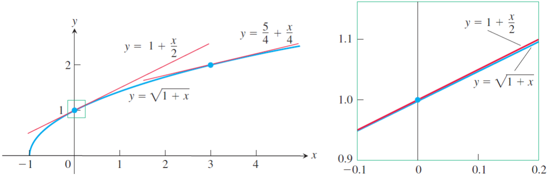
- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1'+x') \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(0+1)$

Παράδειγμα



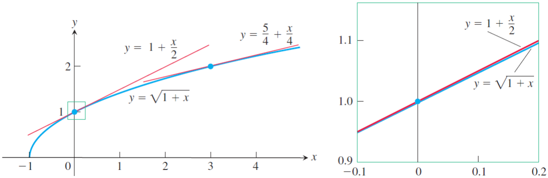
- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1'+x') \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(0+1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$
- Για $x = 0$ ισχύει $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}}$

Παράδειγμα



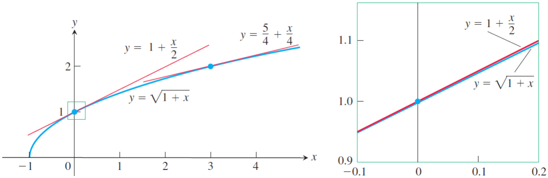
- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1' + x') \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(0+1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$
- Για $x = 0$ ισχύει $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}}$

Παράδειγμα



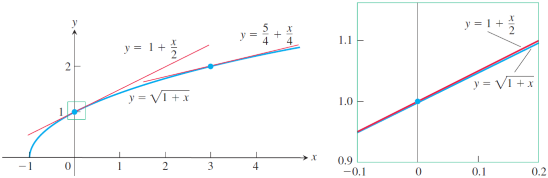
- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1'+x') \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(0+1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$
- Για $x = 0$ ισχύει $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2}$

Παράδειγμα



- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1'+x') \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(0+1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$
- Για $x = 0$ ισχύει $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow L = f'(0)(x-0) + y(0)$

Παράδειγμα



- $y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1+x)' \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(1'+x') \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}(0+1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$
- Για $x = 0$ ισχύει $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+0}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow L = f'(0)(x-0) + y(0) \Rightarrow L = \dfrac{1}{2}x + 1$

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

- Κάποιες φορές δεν είναι εξακάθαρη η σχέση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

- Κάποιες φορές δεν είναι εξακάθαρη η σχέση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
- Παράδειγματα

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

- Κάποιες φορές δεν είναι εξακάθαρη η σχέση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
- Παραδείγματα
  - $y^3 - y = x$

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

- Κάποιες φορές δεν είναι εξακάθαρη η σχέση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
- Παράδειγματα
  - $y^3 - y = x$
  - $x^2 + y^2 = 25$

Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

- Κάποιες φορές δεν είναι εξακάθαρη η σχέση μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής.
- Παράδειγματα
  - $y^3 - y = x$
  - $x^2 + y^2 = 25$
- Σε αυτήν την περίπτωση, η παράγωγος μπορεί να βρεθεί χωρίς να λύσουμε τις εξισώσεις ως προς ψ, μέσω της παραγώγισης πεπλεγμένων συναρτήσεων

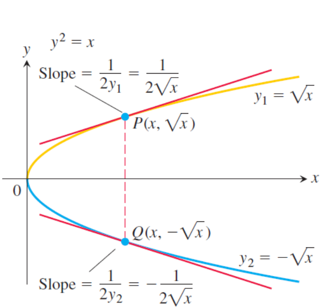
Μέθοδος παραγώγισης Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

- Παραγωγίζομε όλα τα μέλη της πεπλεγμένης συναρτήσεως ως προς x, διατηρώντας την y ως εξαρτημένη μεταβλητή

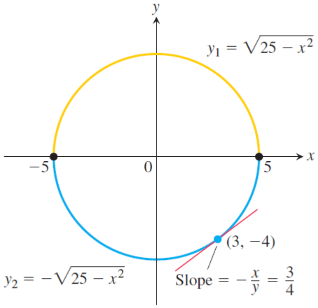
Μέθοδος παραγώγισης Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

- Παραγωγίζομε όλα τα μέλη της πεπλεγμένης συναρτήσεως ως προς x, διατηρώντας την y ως εξαρτημένη μεταβλητή
- Βρίσκομε τους όρους που έχουν $\dfrac{dy}{dx}$ (δηλαδή την παράγωγο της y) και λύνομε ως προς $\dfrac{dy}{dx}$.

Παράδειγματα



(α′): Παραβολή



(β′): Κύκλος

- $y^2 = x \Rightarrow (y^2)' = x' \Rightarrow 2yy' = 1 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2y}$

Εξεταστική 2023-2024: Θέμα 2ο

- Να βρείτε όλα τα σημεία τής καμπύλης $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ (1), στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x.

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)'$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow (3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow (3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$

    $6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$

    $6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y)$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφενός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
    $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφενός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):

    $y' = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
    $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφενός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφέτερου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):

    $y' = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
  $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
  $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x\neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφενός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
  $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
    $6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\dfrac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφενός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
    $y' = 0 \Rightarrow -\dfrac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
    $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} \quad (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφενός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
    $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
    $6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\dfrac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφέτέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
    $y' = 0 \Rightarrow -\dfrac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
    $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$ $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφέτέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2): $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφέτέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
  $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
  $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \xRightarrow{y \leftarrow -2x} 3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφέτέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
  $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
  $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \xRightarrow{y \leftarrow -2x} 3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$
  $$\Rightarrow 3x^2 + 4 \cdot 4x^2 - 6x^2 = 24$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x\neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
  $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
  $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \xRightarrow{y \leftarrow -2x} 3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$
  $$\Rightarrow 3x^2 + 4 \cdot 4x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 3x^2 + 16x^2 - 6x^2 = 24$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x\neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
  $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
  $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \xRightarrow{y\leftarrow -2x} 3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$
  $$\Rightarrow 3x^2 + 4 \cdot 4x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 3x^2 + 16x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 13x^2 = 24$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x \neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφέτέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
  $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
  $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \xRightarrow{y \leftarrow -2x} 3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$
  $$\Rightarrow 3x^2 + 4 \cdot 4x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 3x^2 + 16x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 13x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = \frac{24}{13}$$

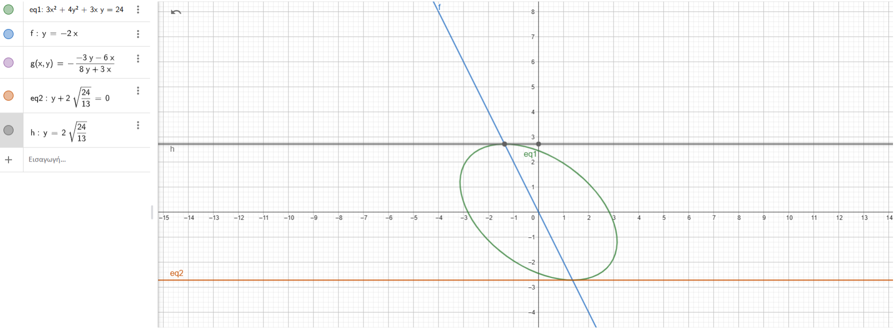
Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$
    $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$
    $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
    $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x\neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφενός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφετέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
    $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
    $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \xRightarrow{y\leftarrow -2x} 3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$
    $$\Rightarrow 3x^2 + 4 \cdot 4x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 3x^2 + 16x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 13x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = \frac{24}{13}$$
    $$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{24}{13}}$$

Λύση

- Πρόκειται για πεπλεγμένη συνάρτηση οπότε καταφεύγομε στην μεθοδολογία που είδαμε νωρίτερα:
- Η εφαπτομένη της $y = f(x)$ σε κάποιο σημείο της γραφικής παραστάσεως είναι παράλληλη στον άξονα xx', αν $y' = f'(x) = 0$.
- Άρα θα πρέπει να βρούμε σε ποια σημεία (x, y) η παράγωγος μηδενίζεται.
  - Παραγώγιση ως προς x: $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \Rightarrow (3x^2 + 4y^2 + 3xy)' = (24)' \Rightarrow$ $(3x^2)' + (4y^2)' + (3xy)' = 0 \Rightarrow 3(x^2)' + 4(y^2)' + 3(xy)' = 0 \Rightarrow$ $3 \cdot 2x + 4 \cdot 2yy' + 3(x'y + xy') = 0 \Rightarrow 6x + 8yy' + 3x'y + 3xy' = 0 \Rightarrow$
  $$6x + (8y + 3x)y' + 3y = 0 \Rightarrow (8y + 3x)y' = -(6x + 3y) \xRightarrow{8y+3x\neq 0} y' = -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} (2)$$
  - Αναζητούνται τα σημεία (x, y), τα οποία, αφένός, ικανοποιούν την εξίσωση (1)· αφέτέρου μηδενίζουν την παράγωγο (2).
  - Τα σημεία (x, y) που μηδενίζουν την παράγωγο είναι αυτά που μηδενίζουν τον αριθμητή του κλάσματος (2):
  $$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6x + 3y}{8y + 3x} = 0 \Rightarrow 6x + 3y = 0 \Rightarrow 3y = -6x \Rightarrow y = -2x$$
  - Αντικαθιστώντας στην (1) όπου y με το $-2x$, προκύπτει ότι
  $$3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24 \xRightarrow{y \leftarrow -2x} 3x^2 + 4(-2x)^2 + 3x(-2x) = 24$$
  $$\Rightarrow 3x^2 + 4 \cdot 4x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 3x^2 + 16x^2 - 6x^2 = 24 \Rightarrow 13x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = \frac{24}{13}$$
  $$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{24}{13}} \Rightarrow y = \mp 2\sqrt{\frac{24}{13}}$$

Λύση (Συν.)


eq1: 3x² + 4y² + 3x y = 24
f : y = −2 x
g(x, y) = − (−3 y − 6 x)/(8 y + 3 x)
eq2 : y + 2 √(24/13) = 0
h : y = 2 √(24/13)
Εισαγωγή...
f
h
eq1
eq2