Digital Signal Processing Laboratory
Department of Electrical & Computer Engineering

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Εργαστήριο 5

Μετασχηματισμός Ζ

Δρ. Κωνσταντίνος Καραμπίδης

Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Ζ είναι ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο για τη μελέτη διακριτών σημάτων και συστημάτων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί:

- Για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές.
- Στον υπολογισμό της απόκρισης ενός γραμμικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος σε δεδομένη είσοδο.
- Στη σχεδίαση γραμμικών φίλτρων.

Εισαγωγή

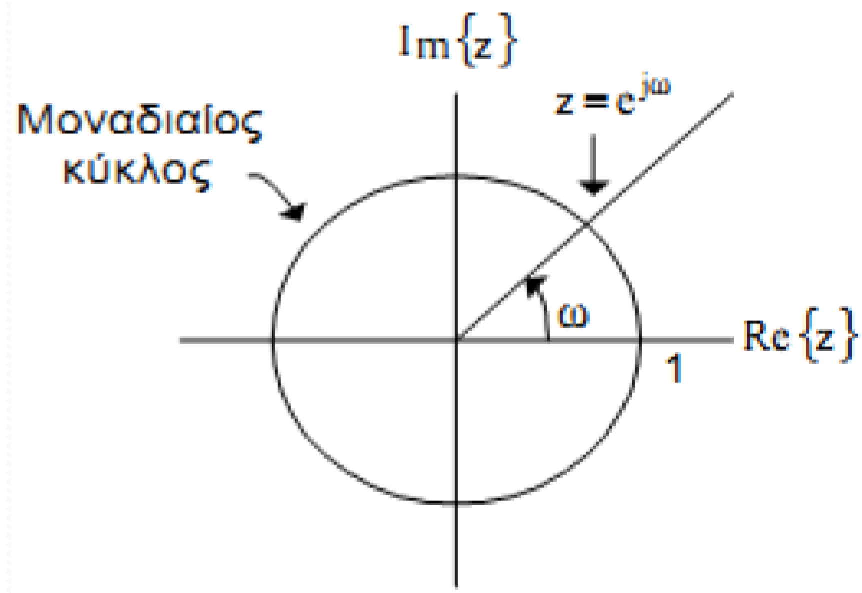
Ο μετασχηματισμός Z, μιας ακολουθίας διακριτού χρόνου x(n) ορίζεται από τη σχέση:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Το z είναι μιγαδικός αριθμός, οπότε σε πολική μορφή:

$Z=Re(z)+jIm(z) = re^{j\omega}$

όπου r το μέτρο της z και ω η γωνία.



Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Z, μιας ακολουθίας διακριτού χρόνου x(n) ορίζεται από τη σχέση:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

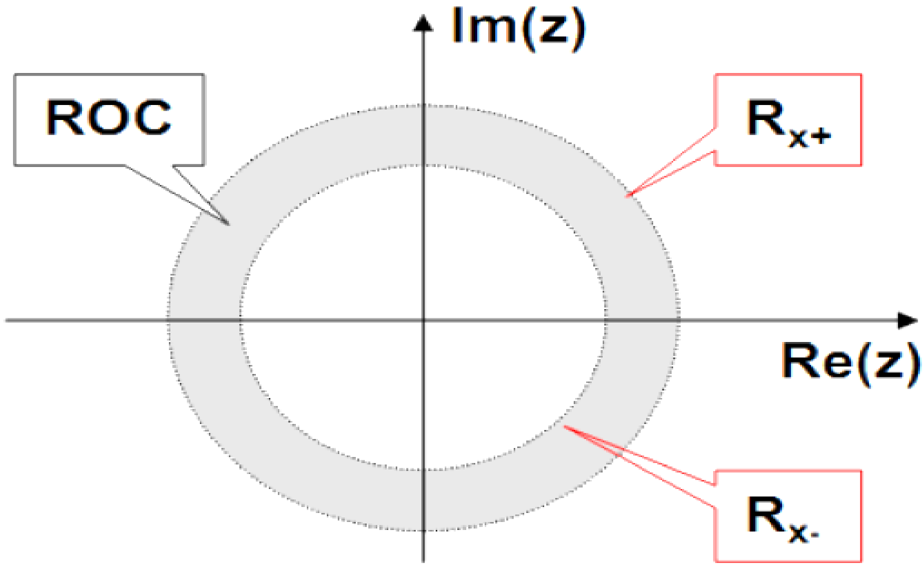
Αν μια ακολουθία x(n) έχει μετασχηματισμό Z τη X(z), τότε γράφουμε:

$$x(n) \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)$$

Περιοχή Σύγκλισης

Το σύνολο των τιμών του z που ο X(z) υπάρχει ορίζουν μια περιοχή στο επίπεδο z, η οποία ονομάζεται **περιοχή σύγκλισης** ή **R**egion **O**f **C**onvergence (ROC). Καθορίζεται από δύο θετικούς αριθμούς R_{x+} και R_{x-} .

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$



Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της διακριτής ακολουθίας δ(n).

Λύση

$$\delta(n) \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) z^{-n} \Rightarrow$$

Ιδιότητα:
Είναι 0 (μηδέν) επειδή το x(n)=0 για κάθε n > 0

$$=> \delta(0)z^{0} + \delta(1)z^{-1} + \delta(2)z^{-2} + \cdots$$

$$=> 1 * 1 + 0 + 0 + \cdots$$

$$= 1$$

Ιδιότητα της Μετατόπισης

Μετατοπίζοντας μια ακολουθία (με καθυστέρηση ή προπόρευση) ο μετασχηματισμός Z πολλαπλασιάζεται με μια δύναμη του . Δηλαδή, αν η x(n) έχει μετασχηματισμό Z τη X(z), τότε:

$$x(n-n_0) \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)$$

Επομένως για παράδειγμα:

$$\delta(n-n_0) \overset{Z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z) = z^{-n_0} * 1 = z^{-n_0}$$

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z της βηματικής ακολουθίας u(n).

Λύση

$$u(n) \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow u(-\infty)z^{-(-\infty)} + \cdots + u(0)z^{-0} + u(1)z^{-1} + \cdots + u(\infty)z^{-\infty}$

$\Rightarrow 0 * z^{+\infty} + \cdots + 1*1 + 1*z^{-1} + 1*z^{-2} + 1*z^{-3} \cdots + 1*z^{-\infty}$

$\Rightarrow 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots + z^{-\infty}$

$\Rightarrow 1 + (z^{-1})^{1} + (z^{-1})^{2} + (z^{-1})^{3} + \cdots + (z^{-1})^{+\infty}$

$\Rightarrow 1/1\text{-}z^{-1}$

Στην προηγούμενη άσκηση χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω ταυτότητα:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Ax^{n} = \frac{A}{1-x} \qquad |x| < 1$$

Αν θυμηθούμε τον παρακάτω τύπο από τις γεωμετρικές σειρές:

$$A + Ax + Ax^{2} + \cdots + Ax^{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} Ax^{n} = \frac{A - Ax^{n}}{1-x}$$

Βλέπουμε ότι αν $|x| < 1$ τότε $x^{n} \rightarrow 0$ καθώς το $N \rightarrow \infty$ και έτσι παίρνουμε την αρχική μας σχέση.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Ζ της παρακάτω ακολουθίας

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 0.8, 0.64, 0.512, \dots\}$$

Το βελάκι δείχνει την τιμή για την χρονική στιγμή n=0

Λύση

$$x(n) \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} X(z) &= x(0)z^{-0} + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots \\ &= 1*1 + 0.8z^{-1} + 0.64z^{-2} + 0.512z^{-3} + \cdots \\ &= 1 + (0.8z^{-1})^1 + (0.8z^{-1})^2 + (0.8z^{-1})^3 + \cdots \\ &= 1/1-0.8z^{-1} \end{aligned}$$

Πίνακας Μετασχηματισμών Z

Μετασχηματισμοί Z γνωστών ακολουθιών:

Ακολουθία	**Μετασχηματισμός Z**	**Περιοχή Σύγκλισης**
$\delta(n)$	1	Όλες οι τιμές του z
$\delta(n-n_0)$	z^{-n0}	Όλες οι τιμές του z, εκτός z=0 αν $n_0>0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$

Μετασχηματισμός Ζ

Ο μετασχηματισμός Ζ ως μια ρητή συνάρτηση του z:

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{q} b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^{p} a(k)z^{-k}}=C\frac{\prod_{k=1}^{q}(1-\beta_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{p}(1-\alpha_k z^{-1})}$$

Οι ρίζες του αριθμητή β_k καλούνται μηδενικά (zeros) ενώ οι ρίζες του παρονομαστή α_k καλούνται πόλοι (poles).

Οι πόλοι και τα μηδενικά παρέχουν μια σύντομη αναπαράσταση της X(z) η οποία συχνά παριστάνεται γραφικά με τα διαγράμματα πόλων - μηδενικών.

Οι θέσεις των πόλων συμβολίζονται με “x” και οι θέσεις των μηδενικών με “o”. Η περιοχή σύγκλισης συμβολίζεται με τη σκίαση της αντίστοιχης περιοχής στο μιγαδικό επίπεδο -z.

Η συνάρτηση tf2zpk

[z, p, k] = scipy.signal.tf2zpk*(num, den)*

Convert transfer functions to poles-and-zero representations.
Returns the zeros and poles of the system defined by num/den.
k is a gain associated with the system zeros.

Note You should use `tf2zp` when working with positive powers ($s^2 + s + 1$), such as in continuous-time transfer functions. A similar function, `tf2zpk`, is more useful when working with transfer functions expressed in inverse powers ($1 + z^{-1} + z^{-2}$), which is how transfer functions are usually expressed in DSP.

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{a_1 s^{m-1} + \cdots + a_{m-1}s + a_m}$$

The vector a specifies the coefficients of the denominator polynomial $A(s)$ (or $A(z)$) in descending powers of s (z^{-1}).

Παράδειγμα 4

Βρείτε τα μηδενικά, τους πόλους και τον συντελεστή C της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις της Python.

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z}{z^2 + 0.4z + 1}$$

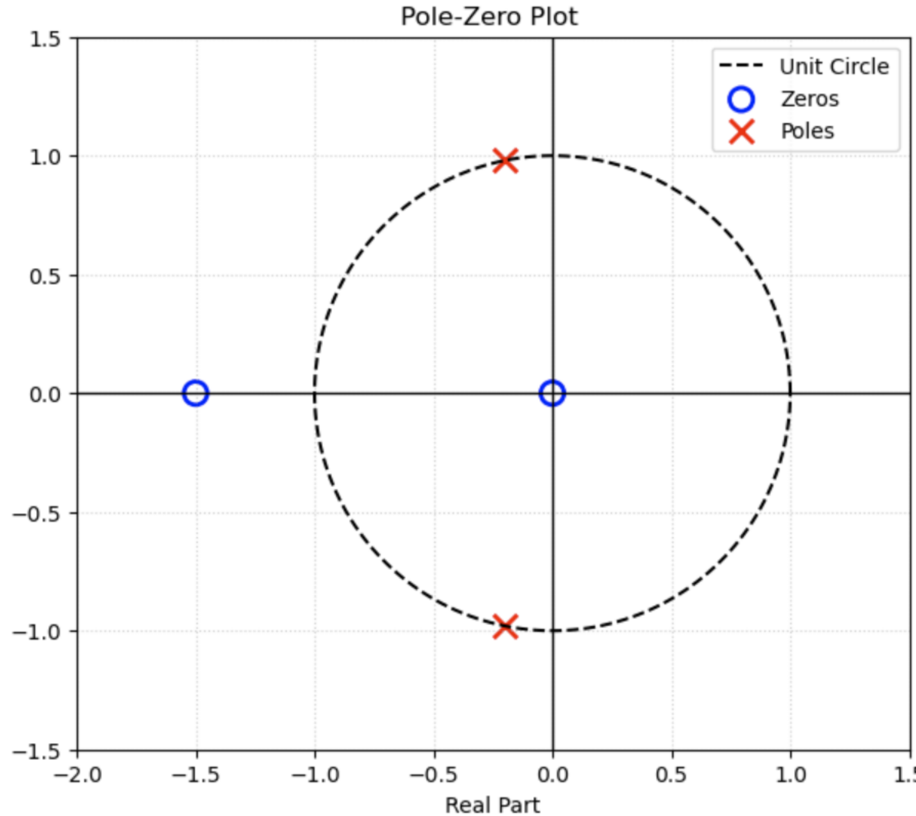
Λύση

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal
```

```
num = [2, 3, 0]
den = [1, 0.4, 1]

# Υπολογισμός ριζών
zeros, poles, k = signal.tf2zpk(num, den)

fig, ax = plt.subplots(figsize=(7, 7))

# Σχεδίαση Μοναδιαίου Κύκλου
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
ax.plot(np.cos(theta), np.sin(theta), color='black', linestyle='--
', linewidth=1.5, label='Unit Circle')
```

```
# Σχεδίαση Πόλων (x) και Μηδενικών (o)
ax.scatter(np.real(zeros), np.imag(zeros), s=120, marker='o',
facecolors='none', edgecolors='blue', linewidth=2,
label='Zeros')
ax.scatter(np.real(poles), np.imag(poles), s=120, marker='x',
color='red', linewidth=2, label='Poles')

# Ρυθμίσεις εμφάνισης και αξόνων
ax.axhline(0, color='black', lw=1)
ax.axvline(0, color='black', lw=1)
ax.set_xlim([-2.0, 1.5])
ax.set_ylim([-1.5, 1.5])
ax.set_aspect('equal')
```

```
ax.grid(True, linestyle=':', alpha=0.6)

plt.title(r'Pole-Zero Plot ', fontsize=12)
plt.xlabel('Real Part')
plt.ylabel('Imaginary Part')
plt.legend()
plt.show()
```



Παράδειγμα 5

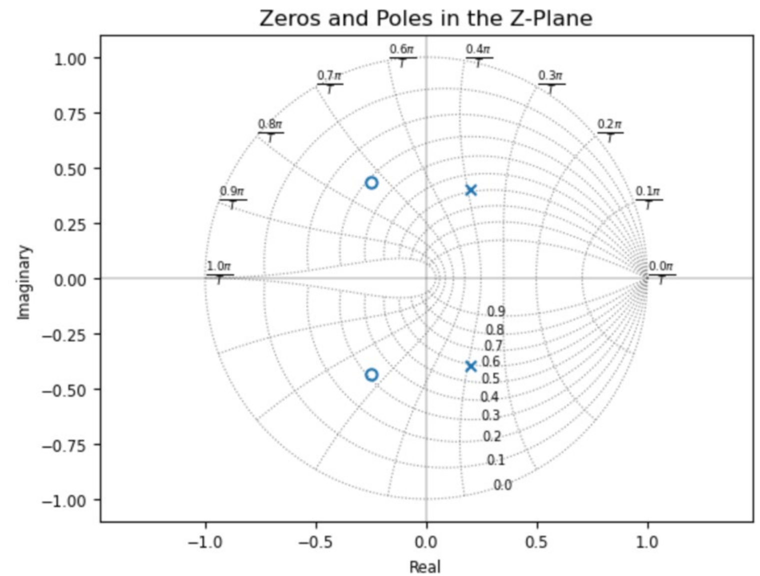
Βρείτε τα μηδενικά και τους πόλους της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις της Python.

$$H(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 - 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2}}$$

Λύση#1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import control as ctrl
# Define the transfer function
numerator = [1, 0.5, 0.25]
denominator = [1, -0.4, 0.2]
```

```
system = ctrl.TransferFunction(numerator, denominator, True)
# Plot the zeros and poles. pzmap #cannot compute the gain
poles, zeros = ctrl.pzmap(system, plot=True, grid=True)

# Print the poles and zeros
print("Poles:", poles)
print("Zeros:", zeros)
plt.title('Zeros and Poles in the Z-Plane')
plt.show()
```

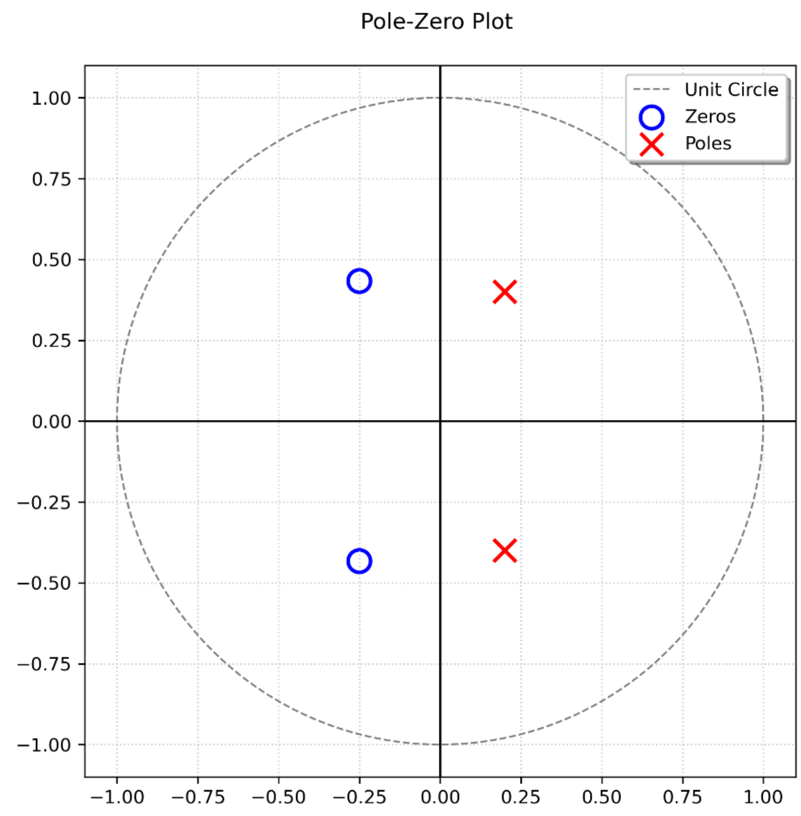


Λύση #2

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal

# Συντελεστές
num = [1, 0.5, 0.25]
den = [1, -0.4, 0.2]

# Υπολογισμός Πόλων/Μηδενικών
zeros, poles, k = signal.tf2zpk(num, den)
plt.figure(figsize=(6, 6), facecolor='white')

# Σχεδίαση Μοναδιαίου Κύκλου
```

```
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
plt.plot(np.cos(theta), np.sin(theta), color='gray', linestyle='--', label='Unit Circle')

# Σχεδίαση Σημείων
plt.scatter(np.real(zeros), np.imag(zeros), s=120, marker='o', facecolors='none', edgecolors='blue', linewidth=2, label='Zeros')
plt.scatter(np.real(poles), np.imag(poles), s=120, marker='x', color='red', linewidth=2, label='Poles')
plt.axhline(0, color='black', lw=1)
plt.axvline(0, color='black', lw=1)

plt.xlim([-1.1, 1.1])
plt.ylim([-1.1, 1.1])
```

```
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.grid(True, linestyle=':', alpha=0.5)
plt.title(r'Pole – zero plot', fontsize=12)
plt.legend(loc='upper      right',
frameon=True).set_zorder(5)
plt.legend()
plt.show()
```



Παράδειγμα 6

Να βρείτε τον μετασχηματισμό Z της παρακάτω ακολουθίας:

x(n)= 3δ(n)+ δ(n-2)+ δ(n+2)

Λύση

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-2}^{2}x(n)z^{-n}$$

$$= x(-2)z^{2} + x(-1)z^{1} + x(0)z^{0} + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2}$$

$$= z^{2} + 0 + 3 + 0 + z^{-2}$$

$$= z^{2} + 3 + z^{-2}$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει ότι x(-2)=1, x(-1)=0, x(0)=3, x(1)=0, x(2)=1 .

Παράδειγμα 7

Να βρείτε τον μετασχηματισμό Ζ της παρακάτω ακολουθίας:

$x(n)= 2\delta(n)+ 5\delta(n-3)+ \delta(n+1)$

Λύση

$X(z)=\sum_{-1}^{3} x(n)z^{-n}= x(-1)z+x(0)z^{0}+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+x(3)z^{-3}$

$= 1z+2+0+0+5z^{-3} = z+2+5z^{-3}$

Παράδειγμα 8

Να βρείτε τον μετασχηματισμό Z της παρακάτω ακολουθίας:

x(n)= 5u(n)

Λύση

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 5u(n) z^{-n} = 5\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Παράδειγμα 9

Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς.

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.5}$$

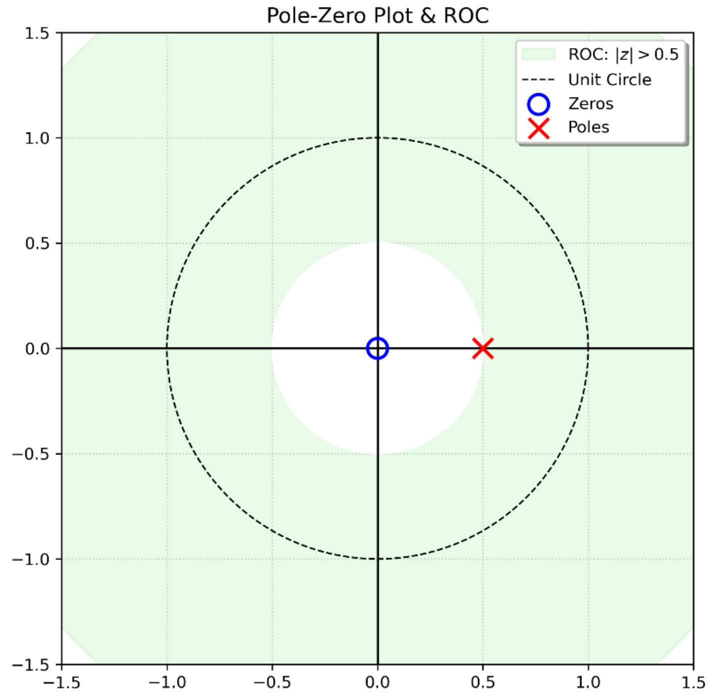
Λύση

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import signal

num = [1, 0]
den = [1, -0.5]

# Εύρεση Πόλων και Μηδενικών
```

```
zeros, poles, gain = signal.tf2zpk(num, den)
fig, ax = plt.subplots(figsize=(7, 7), facecolor='white')

# Σχεδίαση ROC - Αιτιατό Σύστημα
# Σχεδιάζουμε το "φόντο" της ROC
roc_area = plt.Circle((0, 0), 2.0, color='lightgreen', alpha=0.2, label='ROC: $|z| > 0.5$')
ax.add_artist(roc_area)
# "Τρύπα" στο κέντρο μέχρι τον πόλο
white_center = plt.Circle((0, 0), np.max(np.abs(poles)), color='white', zorder=2)
ax.add_artist(white_center)
# Σχεδίαση Μοναδιαίου Κύκλου
theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
```

```
ax.plot(np.cos(theta), np.sin(theta), color='black', linestyle='--',
linewidth=1, label='Unit Circle')

# Σχεδίαση Πόλων και Μηδενικών
ax.scatter(np.real(zeros), np.imag(zeros), s=150, marker='o',
facecolors='none',
        edgecolors='blue', linewidth=2, label='Zeros', zorder=3)
ax.scatter(np.real(poles), np.imag(poles), s=150, marker='x',
color='red',
        linewidth=2, label='Poles', zorder=3)

# Ρυθμίσεις Αξόνων & Legend
ax.axhline(0, color='black', lw=1.2)
ax.axvline(0, color='black', lw=1.2)
```

```
ax.set_xlim([-1.5, 1.5])
ax.set_ylim([-1.5, 1.5])
ax.set_aspect('equal')
ax.grid(True, linestyle=':', alpha=0.6)
# Legend Top Right
ax.legend(loc='upper right', frameon=True, shadow=True)
plt.title(r'Pole-Zero Plot & ROC using $tf2zpk$', fontsize=13)
plt.show()
```



Tip

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε την παρακάτω συνάρτηση plot_z_plane και να κάνουμε κλήση της σε κάθε παράδειγμα.

```
def plot_z_plane(zeros, poles, show_roc=1):
    fig, ax = plt.subplots(figsize=(7, 7), facecolor='white')

    # Μέγιστος πόλος για τον υπολογισμό της ROC και των ορίων
    max_p = np.max(np.abs(poles)) if len(poles) > 0 else 0

    # Σχεδίαση ROC (Μόνο αν show_roc == 1)
    if show_roc == 1:
        roc_limit = max(2.5, max_p + 1.0)
        # Πράσινη περιοχή (πίσω-πίσω)
```

```
    roc_area = plt.Circle((0, 0), roc_limit, color='lightgreen',
alpha=0.2, label=f'ROC: $|z| > {max_p:.2f}$', zorder=1)
    ax.add_artist(roc_area)
    # Λευκή "τρύπα" (πάνω από την ROC, κάτω από τα X)
    white_center = plt.Circle((0, 0), max_p, color='white',
    zorder=2)
    ax.add_artist(white_center)

  # Μοναδιαίος Κύκλος
  theta = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
  ax.plot(np.cos(theta), np.sin(theta), color='black', linestyle='--',
      linewidth=1, label='Unit Circle', zorder=3)

  # Πόλοι και Μηδενικά
```

```
ax.scatter(np.real(zeros), np.imag(zeros), s=150, marker='o',
        facecolors='none', edgecolors='blue', linewidth=2,
        label='Zeros', zorder=4)
ax.scatter(np.real(poles), np.imag(poles), s=150, marker='x',
        color='red', linewidth=2, label='Poles', zorder=4)

# Αυτόματη προσαρμογή αξόνων
all_coords = np.concatenate(([1.2], np.abs(poles), np.abs(zeros)))
limit = np.max(all_coords) + 0.3
ax.set_xlim([-limit, limit])
ax.set_ylim([-limit, limit])

ax.axhline(0, color='black', lw=1, zorder=3)
```

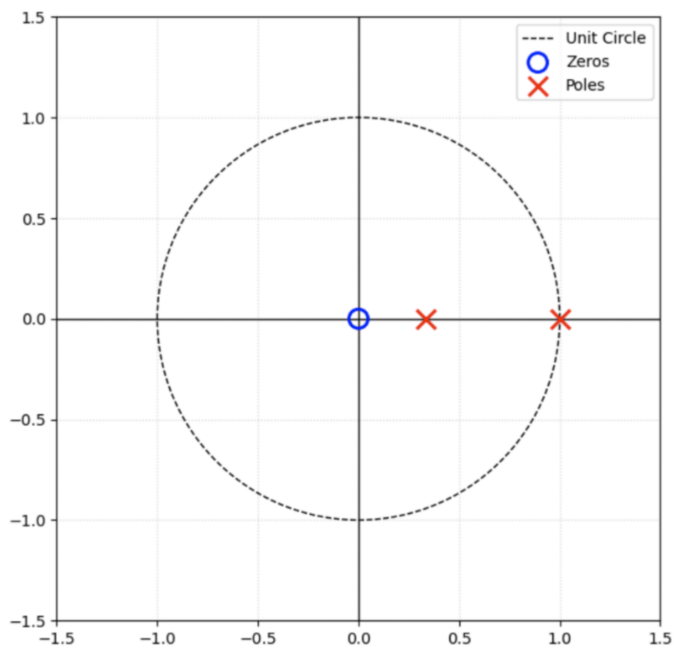
```
ax.axvline(0, color='black', lw=1, zorder=3)
ax.set_aspect('equal')
ax.legend(loc='upper right', frameon=True).set_zorder(5)
ax.grid(True, linestyle=':', alpha=0.5, zorder=0)
plt.show()
```

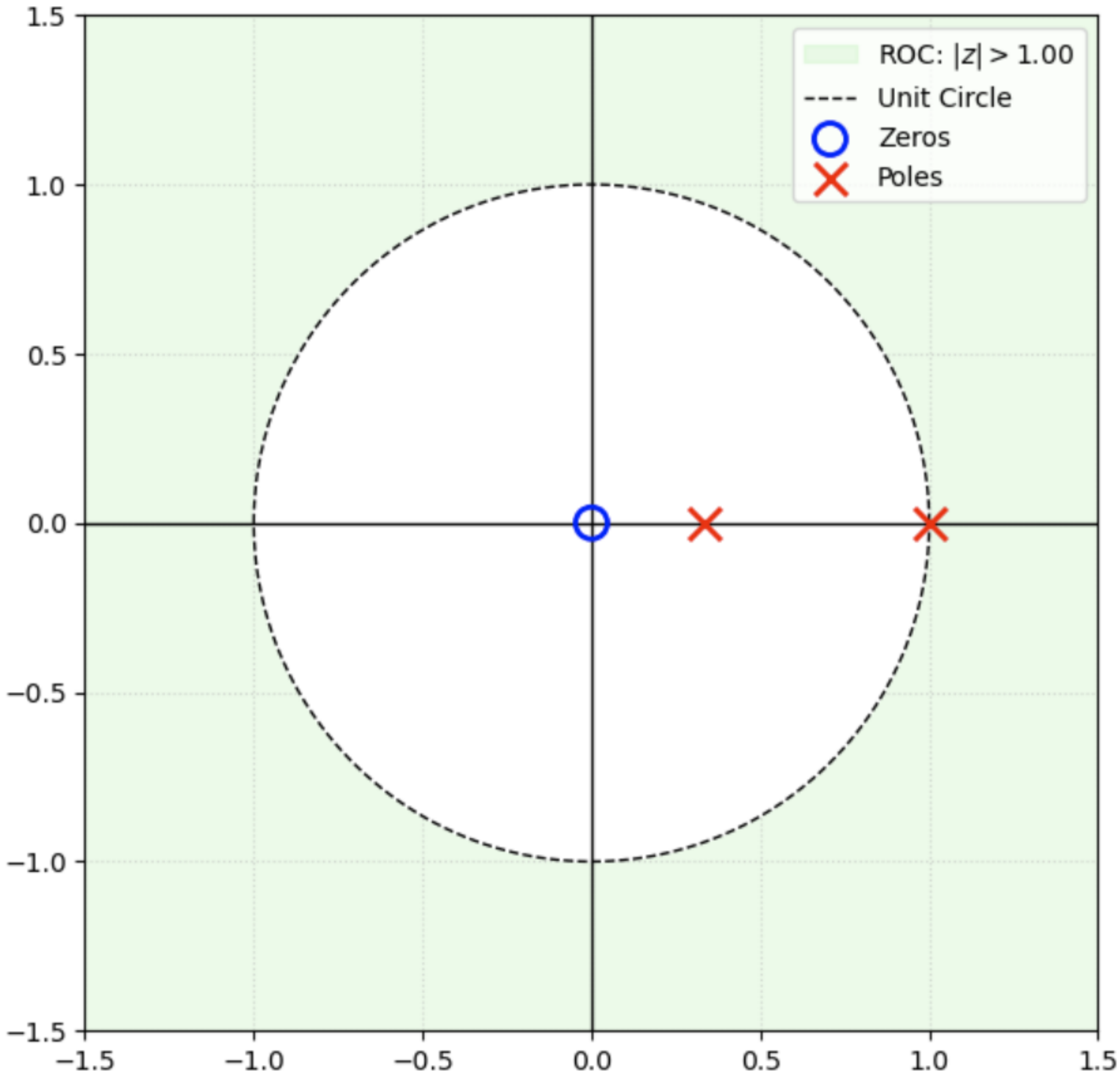
Παράδειγμα 10

Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς.

$$G(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1}$$

```
b = [0, 1, 0]
a = [3, -4, 1]
z, p, c = scipy.signal.tf2zpk(b,a)
plot_z_plane(z,p,show_roc=0)
# plot_z_plane(z,p,show_roc=1)
```




ROC: |z| > 1.00
Unit Circle
Zeros
Poles
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

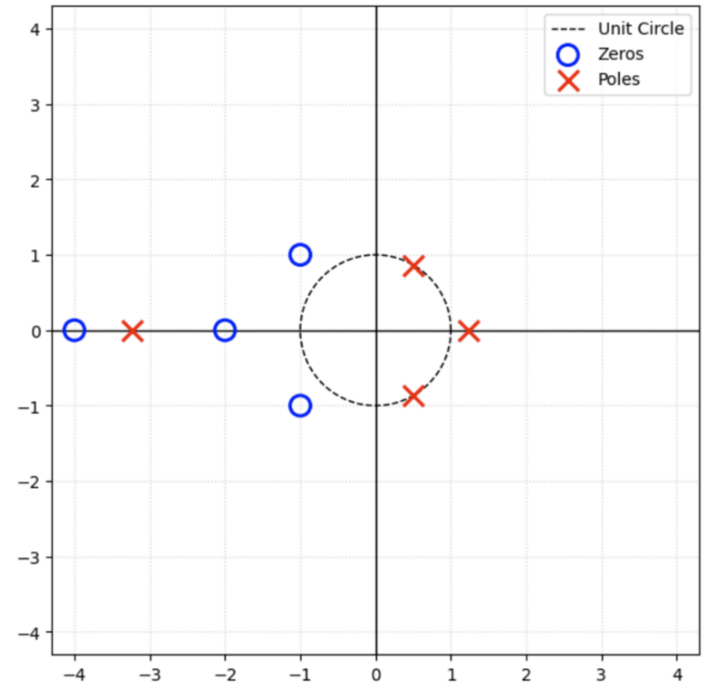
Παράδειγμα 11

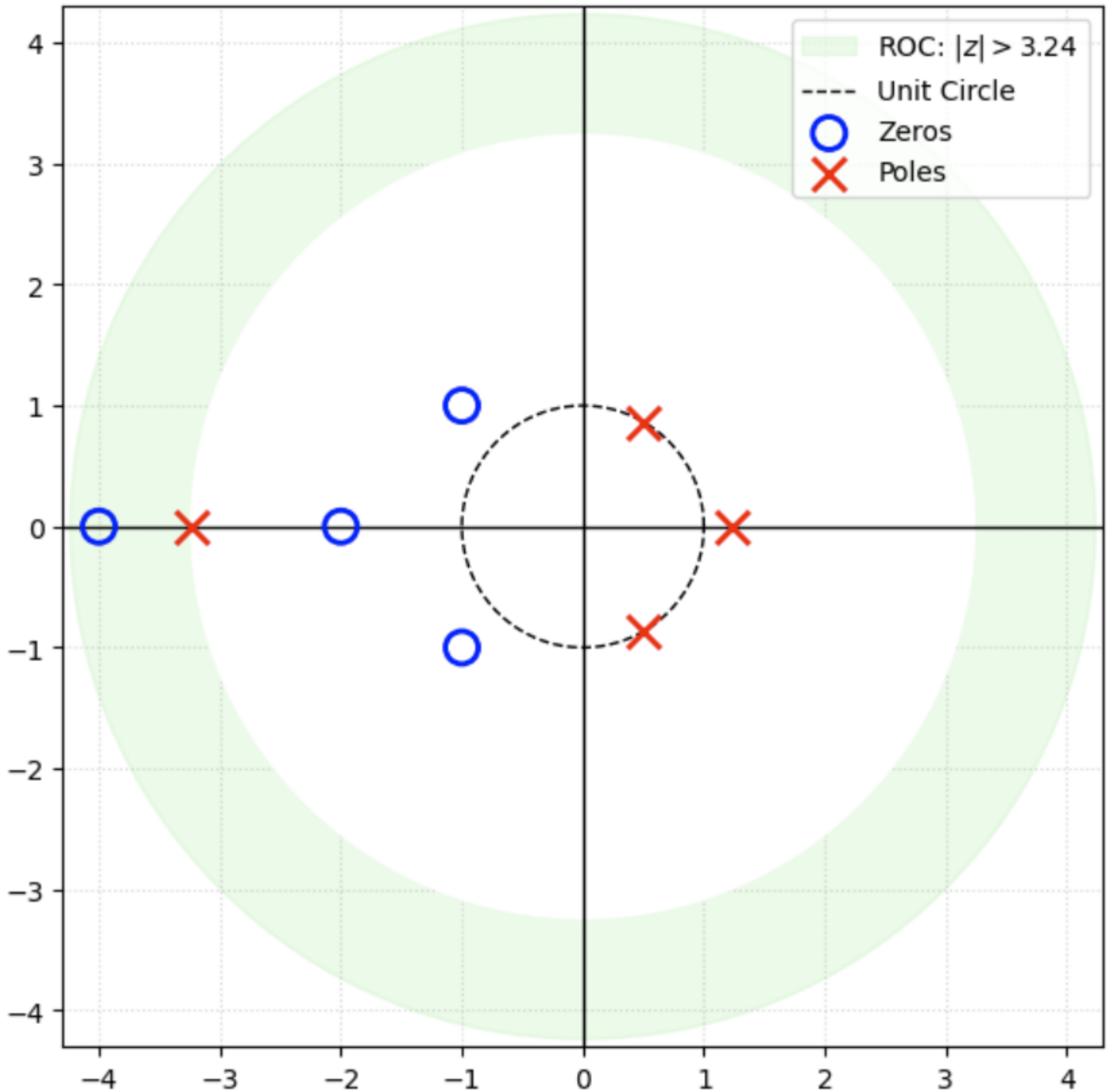
- Προσδιορίστε την περιοχή σύγκλισης της παρακάτω συνάρτησης μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{2z^4 + 16z^3 + 44z^2 + 56z + 32}{3z^4 + 3z^3 - 15z^2 + 18z - 12}$$

- Λύση:

```
b = [2, 16, 44, 56, 32]
a = [3, 3, -15, 18, -12]

z, p, c = scipy.signal.tf2zpk(b,a)
plot_z_plane(z,p, show_roc=0)
# plot_z_plane(z,p, show_roc=1)
```




ROC: $|z| > 3.24$
Unit Circle
Zeros
Poles
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4