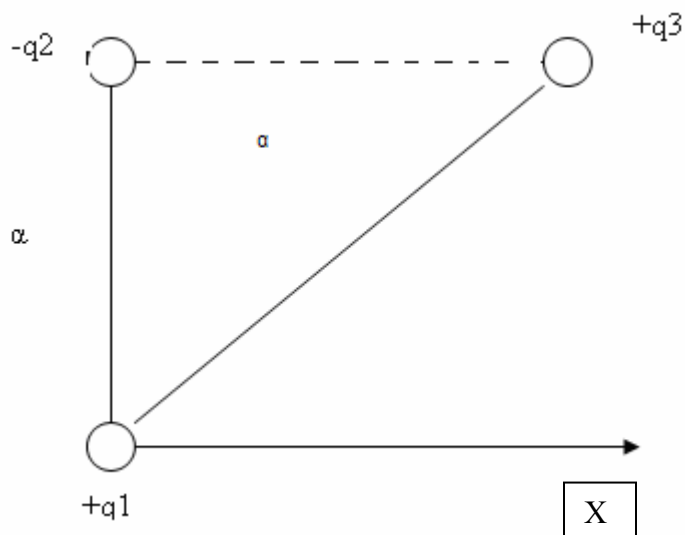


‘ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΠΕΔΙΑ’

ΑΣΚΗΣΗ 1

Θεωρήστε ότι 3 σημειακά φορτία κεινούνται στις κορυφές ενός τριγώνου όπως στο παρακάτω σχήμα. Τα φορτία $q_1=q_3=5\mu\text{C}$ και $q_2=-2\mu\text{C}$ ($1\mu\text{C}=10^{-6}\text{C}$) και $a=6,1\text{ m}$. Βρείτε την συνισταμένη δύναμη στο q_3 .

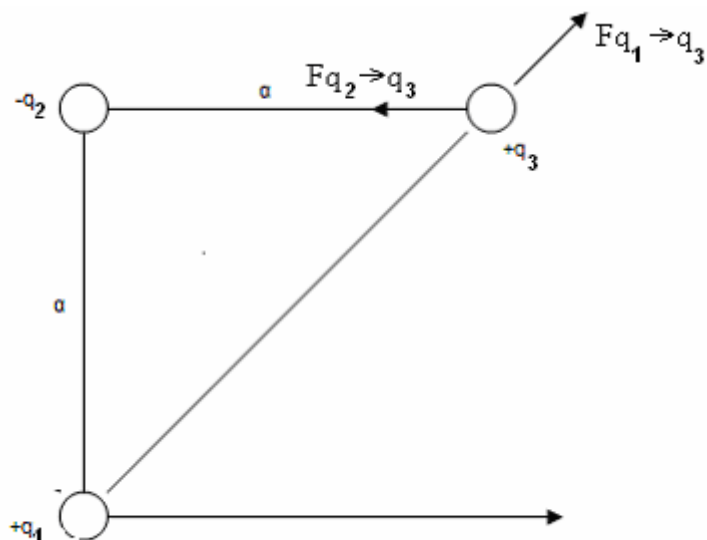
ΛΥΣΗ



Η δύναμη μεταξύ σημειακών φορτίων δίνεται από τον νόμο του Coulomb. Το μέτρο της δύναμης αυτής είναι:

$$F = k_{\eta\lambda} \frac{|q_1| |q_2|}{r^2} \quad (1)$$

Θα πρέπει να θυμάστε ότι ομώνυμα φορτία απωθούνται ενώ τα ετερόνυμα έλκονται. Επομένως :

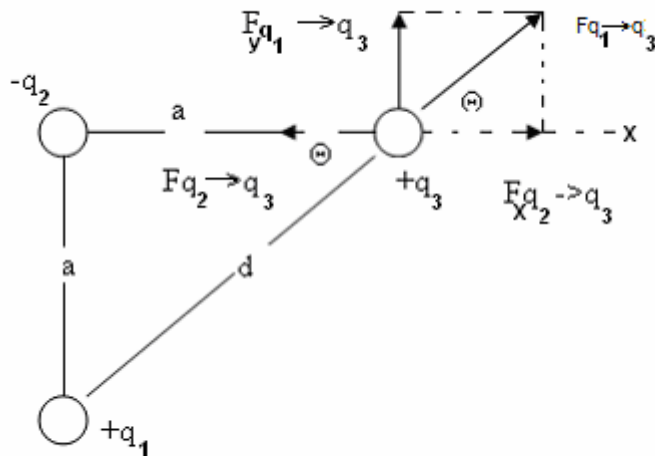


Επίσης θα πρέπει να θυμάστε από την θεωρία ότι οι $F_{q_2 \rightarrow q_3}$, $F_{q_1 \rightarrow q_3}$ ενεργούν πάνω στην ευθεία που συνδέει τα 2 φορτία.

Λόγω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ολική δύναμη πάνω στο σημείο που βρίσκεται το q_3 θα πρέπει:

1. Να αναλύσω τις $F_{q_1 \rightarrow q_3}$, $F_{q_2 \rightarrow q_3}$ στις συνισταμένες τους στους άξονες X,Y.
2. Να υπολογίσω το μέτρο της κάθε συνισταμένης ΣF_x , ΣF_y κάνοντας χρήση της (1) .
3. Υπολογίζω την ολική δύναμη.

ΕΠΟΜΕΝΩΣ:



Συνιστώσες $F_{q1 \rightarrow q3}$: **άξονας X**

$$F_{q1 \rightarrow q3x} = F_{q1 \rightarrow q3} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{q1 \rightarrow q3x} = K_{\eta\lambda} \frac{|q_1| |q_3|}{d^2} \cos \theta (2)$$

Από ορθογώνιο τρίγωνο παραπάνω σχήματος έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} \cos \Theta = a / d \\ d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos \Theta = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (3)$$

Από (3) και (2) έχω ότι:

$$F_{q1 \rightarrow q3(x)} = K_{\eta\lambda} \frac{|q_1| |q_3|}{2a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{q1 \rightarrow q3(x)} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_{q1 \rightarrow q3(x)} = 7.97 \text{ Nt}$$

Στον άξονα X ασκείται η $F_{q2 \rightarrow q3}$ της οποίας το μέτρο είναι ίσο με :

$$\begin{aligned}
F_{q2 \rightarrow q3} &= K_{\eta\lambda} \frac{|q_2||q_3|}{a^2} \Rightarrow \\
\Rightarrow F_{q2 \rightarrow q3} &= 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \Rightarrow \\
\Rightarrow F_{q2 \rightarrow q3} &= 9 \text{ Nt}
\end{aligned}$$

Άξονα Υ: Στον άξονα αυτό υπάρχει μονάχα η $F_{yq1 \rightarrow q3}$ επομένως

$$\left. \begin{aligned}
F_{q1 \rightarrow q3y} &= K_{\eta\lambda} \frac{|q_1||q_3|}{(a\sqrt{2})^2} \sin \Theta \\
\sin \Theta &= a/d = a/a\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow F_{q1 \rightarrow q3y} &= 9 \cdot 10^9 \frac{25 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 0.01} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Rightarrow F_{q1 \rightarrow q3y} &= 7.97 \text{ Nt}
\end{aligned}$$

Επομένως η ολική δύναμη στο σημείο που είναι το $q3$ γράφεται ως διάνυσμα :

$$F_{\eta\lambda} = (-1.03i + 7.97j) \text{ Nt} \quad (4)$$

Το μέτρο της 4 είναι

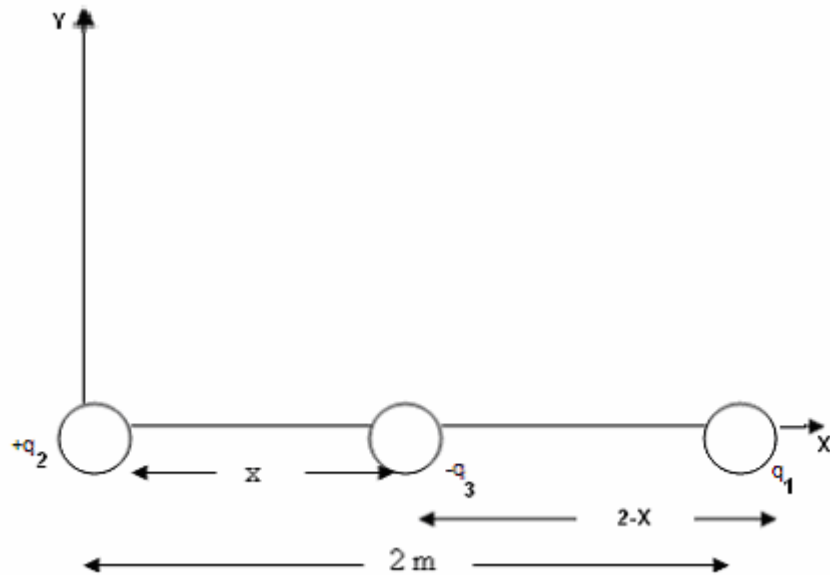
$$\begin{aligned}
|F_{\eta\lambda}| &= \sqrt{(F_{\eta\lambda x})^2 + (F_{\eta\lambda y})^2} = \\
&= \sqrt{1.06 + 63.52} \Rightarrow \\
\Rightarrow |F_{\eta\lambda}| &= \sqrt{64.58} = 8 \text{ Nt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan \theta &= \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = 7.97/1.03 = 7.73 \\
\theta &= \tan^{-1} 7.73 = 1.44 \text{ rad}
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

3 φορτία κείνται πάνω στον άξονα Χ, όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Το θετικό φορτίο $q1=15\mu\text{C}$ είναι στην θέση $x=2\text{m}$, επίσης θετικό φορτίο $q2=6\mu\text{C}$ είναι πάνω στην αρχή των συντεταγμένων ποθ πρέπει να τοποθετηθεί ένα αρνητικό φορτίο το $q3$, στον άξονα Χ ώστε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται επάνω του να είναι μηδενική.

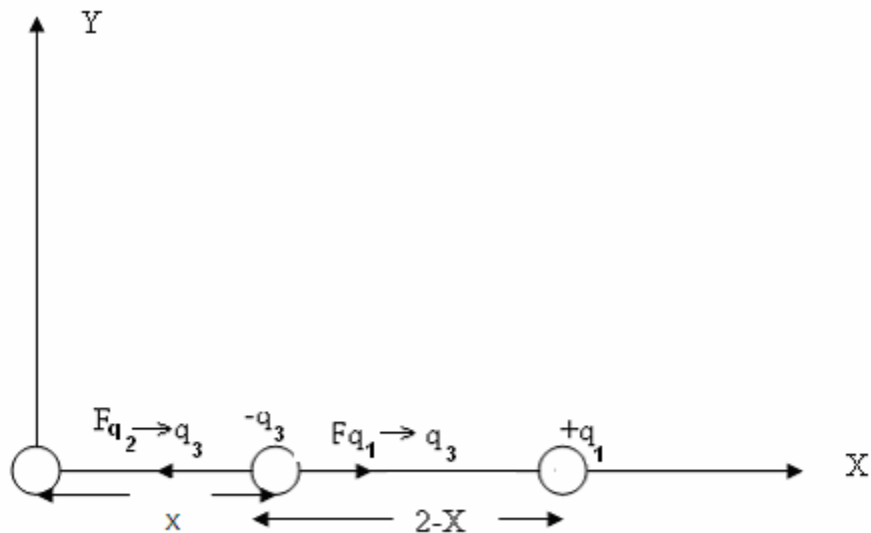
ΛΥΣΗ



Το φορτίο q_3 θα πρέπει να τοποθετηθεί ανάμεσα στα 2 θετικά φορτία έτσι ώστε η συνισταμένη δύναμη να είναι **ΜΗΔΕΝ**.

Αν τοποθετηθεί στα αριστερά ή στα δεξιά ενός από τα q_2, q_1 η δύναμη δεν θα είναι **ΠΟΤΕ ΜΗΔΕΝ**.

ΑΡΑ



ΜΕΤΡΟ ΔΥΝΑΜΗΣ $F_{q_2 \rightarrow q_3}$

$$Fq_2 \rightarrow q_3 = k_{\eta\lambda} \frac{q_2 q_3}{x^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{q_2 q_3}{x^2} \quad (1)$$

ΜΕΤΡΟ ΔΥΝΑΜΗΣ $Fq_1 \rightarrow q_3$

$$Fq_1 \rightarrow q_3 = k_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_3}{(2-X)^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{q_1 q_3}{(2-X)^2} \quad (2)$$

Η συνισταμένη των δυνάμεων πρέπει να είναι **ΜΗΔΕΝ** άρα:

$$\begin{aligned} Fq_1 \rightarrow q_3 &= Fq_2 \rightarrow q_3 \Rightarrow^{(1),(2)} k_{\eta\lambda} \frac{q_2 q_3}{X^2} = k_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_3}{(2-X)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow q_2 (2-X)^2 &= q_1 X^2 \Leftrightarrow q_2 (4-4X+X^2) = q_1 X^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6 \cdot 10^{-6} (4-4X+X^2) &= 15 \cdot 10^{-6} X^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 2.66X - 2.66 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Η (3) είναι 2^{ου} βαθμού εξίσωση με λύσεις :

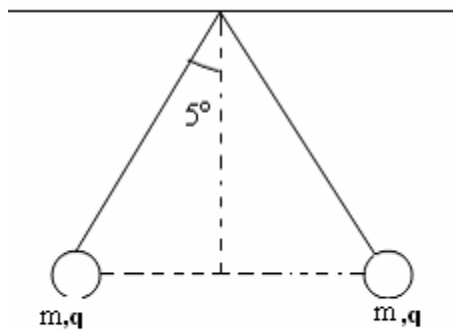
$$\begin{aligned} \rho_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2,66 \pm \sqrt{7,07 - 4(1)(-2,66)}}{2} = \\ &= \frac{-2,66 \pm \sqrt{7,07 + 10,64}}{2} = \frac{-2,66 \pm \sqrt{17,71}}{2} = \\ &= \frac{-2,66 \pm 4,2}{2} \Leftrightarrow \rho_1 = 0.77m \text{ \& } \rho_2 = -3.43m \end{aligned}$$

Άρα το φορτίο θα πρέπει να τοποθετηθεί σε απόσταση $X=0,77$ m από την αρχή των αξόνων.

ΑΣΚΗΣΗ 3

2 μικρές σφαίρες η καθεμιά μάζας $m=3 \cdot 10^{-2}$ kgf είναι ηλεκτρικά φορτισμένες και ισοποπούν καθώς είναι αναρτημένες από νήμα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το μήκος καθενος νήματος είναι 0,15m και η γωνία που σχηματίζεται από το καθένα και την κατακόρυφο είναι 5°. Υπολογίστε το φορτίο υποθέτοντας ότι είναι το ίδιο και στη μια αλλά και στην άλλη σφαίρα .

ΛΥΣΗ



Στην 1^η φάση θα σχεδιάσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στα 2 σώματα.

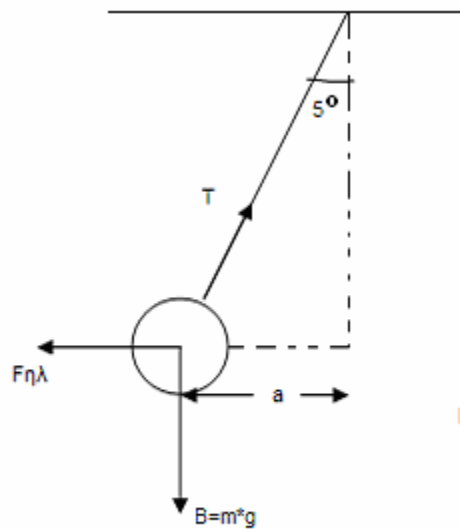
Αφού χαρακτηρίζονται από μάζα m ασκείται πάνω τους βαρυκή δύναμη $B = m \cdot g$ (1)

Έχουν ομόσημο φορτίο q επομένως ασκείται μια απωστική δύναμη μεταξύ τους

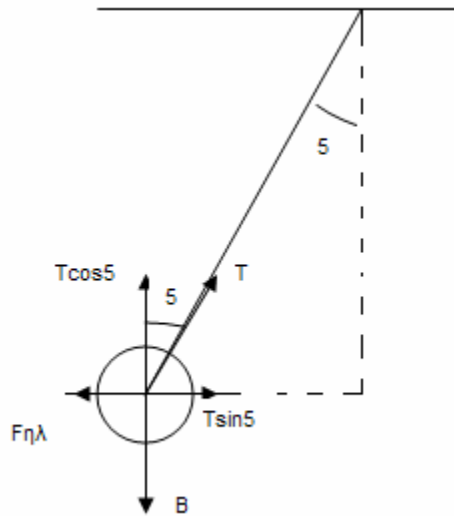
Το μέτρο της δίνεται από τον νόμο του Coulomb .Έτσι:

$$F_{\eta\lambda} = K_{\eta\lambda} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (2)$$

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις αυτές στο σχήμα και έχουμε:



Το σχήμα ισορροπεί: Έπομένως η συνισταμένη των δυνάμεων πάνω του είναι μηδεν. Αναλύουμε τις δυνάμεις σε άξονες X,Y. Άρα



ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΩΜΑΤΟΣ

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \sin 5^\circ = F_{\eta\lambda} \Rightarrow^{(1)}$$

$$\Rightarrow T \sin 5^\circ = k_{\eta\lambda} \frac{Q^2}{(2a)^2} \quad (3)$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T \cos 5^\circ = mg \quad (4)$$

Διαιρώ την 3 με την 4 κατά μέλη και έχω:

$$\tan 5^\circ = \frac{K_{\eta\lambda} \frac{Q^2}{(2a)^2}}{mg} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mg \tan 5^\circ = K_{\eta\lambda} \frac{Q^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4a^2 mg \tan 5^\circ}{K_{\eta\lambda}} = Q^2$$

$$\sin \theta = \frac{a}{l} \Rightarrow l \sin \theta = a$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{al^2 \sin^2 5^\circ mg \tan 5^\circ}{K_{\eta\lambda}} \Rightarrow |Q| = 44 \cdot 10^8 \text{ Cb}$$

$$\text{Με } K_{\eta\lambda} = 9 \cdot 10^{+9} \text{ Nt} \cdot \text{m}^2 / \text{Cb}^2$$

$$G = 10 \text{ m/sec}^2$$

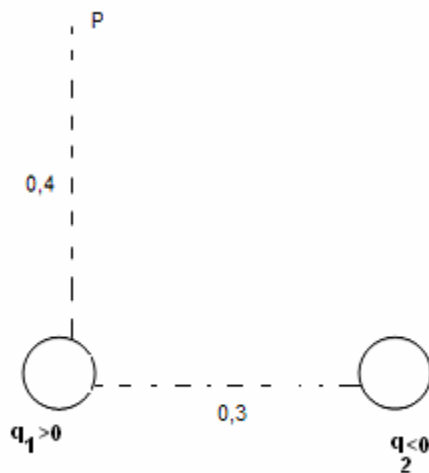
$$L = 0.15 \text{ m}$$

$$m = 3 \cdot 10^{-2} \text{ kgr}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα φορτίο $q_1 = 7 \mu\text{C}$ είναι τοποθετημένο στην αρχή των συντεταγμένων και ένα άλλο φορτίο $q_2 = -5 \mu\text{C}$ βρίσκεται πάνω στον άξονα x σε απόσταση 0,3m από το 1°. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που έχει συντεταγμένες (0,0.4)m.

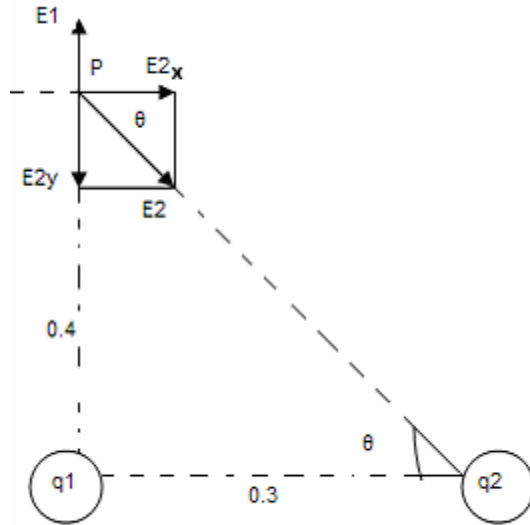
ΛΥΣΗ



Στο σημείο P θεωρούμε ότι υπάρχει ένα θετικό σημειακό φορτίο q.

Σχεδιάζουμε την φορά του ηλεκτρικού πεδίου λόγω των q_1, q_2 στο σημείο P.

ΑΡΑ



Στο σημείο P το ηλεκτρικό πεδίο είναι το άθροισμα των E_1 και E_2 στις συνιστώσες τους.
ΑΡΑ:

$$\tan \theta = 0.4 / 0.3 = 1.333 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 0,023 \text{ rad}$$

Συνισταμένη στον άξονα y:

$$E_{y\text{ολ}} = E_1 - E_{2y} =$$

$$= k_{\eta\lambda} \frac{|q_1|}{(0.4)^2} - E_{2y} \sin \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{y\text{ολ}} = 9 \cdot 10^9 \frac{7 \cdot 10^{-6}}{(0.4)^2} - 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6}}{(0.4)^2 + (0.3)^2} \cdot \frac{0.4}{\sqrt{(0.4)^2 + (0.3)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{y\text{ολ}} = 393.75 \cdot 10^3 - 144 \cdot 10^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{y\text{ολ}} = 249.75 \cdot 10^3 \text{ Nt / Cb}$$

Συνισταμένη στον άξονα x:

$$\begin{aligned}
E_{2x} &= k_{\eta\lambda} \frac{q_2 \cos \theta}{[(0.4)^2 + (0.3)^2]} = \\
&= k_{\eta\lambda} \frac{q_2}{[(0.4)^2 + (0.3)^2]} \cdot \frac{0.3}{\sqrt{(0.4)^2 + (0.3)^2}} \Rightarrow \\
\Rightarrow E_{2x} &= 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 0.3}{0.25^{3/2}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow E_{2x} &= 108 \cdot 10^3 \text{ Nt / Cb}
\end{aligned}$$

Επομένως :

$$E_{ol} = 108 \cdot 10^3 i + 249.75 \cdot 10^3 j$$

Η κατεύθυνση του $\overline{E_{ol}}$ είναι

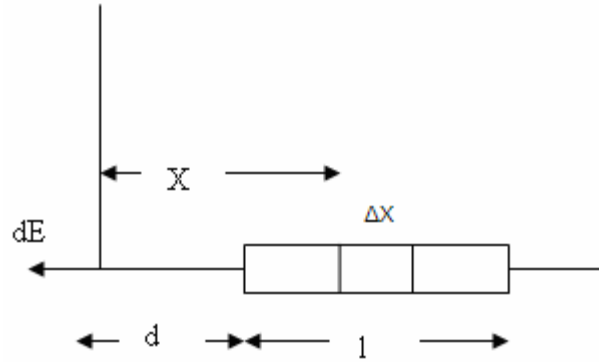
$$\begin{aligned}
\tan \theta &= \frac{E_y}{E_x} = 249.75 / 108 = 2.31 \Rightarrow \\
\Rightarrow \theta &= 66^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|E| &= \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2} = \\
&= \sqrt{11664 \cdot 10^6 + 62375 \cdot 0.62 \cdot 10^6} = \\
&= \sqrt{74039 \cdot 0625 \cdot 10^6} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow |E| &= 272.1 \cdot 10^3 \text{ Nt / Cb}
\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Μια ράβδος μήκους L είναι ομοιόμορφα φορτισμένη θετικά και έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ και συνολικό φορτίο Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται πάνω στην προέκταση της ράβδου σε απόσταση d από το ένα άκρο της .

ΛΥΣΗ



Ο τύπος του νόμου του Coulomb ισχύει για σημειακά φορτία.Επομένως θα διαιρέσουμε την ράβδο σε στοιχειώδη τμήματα Δx το κάθε ένα έχει φορτίο ίσο με $\Delta q = \lambda \Delta x$ (1)

Το στοιχείο φορτίου ΔQ δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται απο την σχέση

$$\begin{aligned}\Delta E &= K_{\eta\lambda} \frac{\Delta q}{r^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta E &= K_{\eta\lambda} \frac{\lambda \Delta x}{x^2}\end{aligned}\quad (2)$$

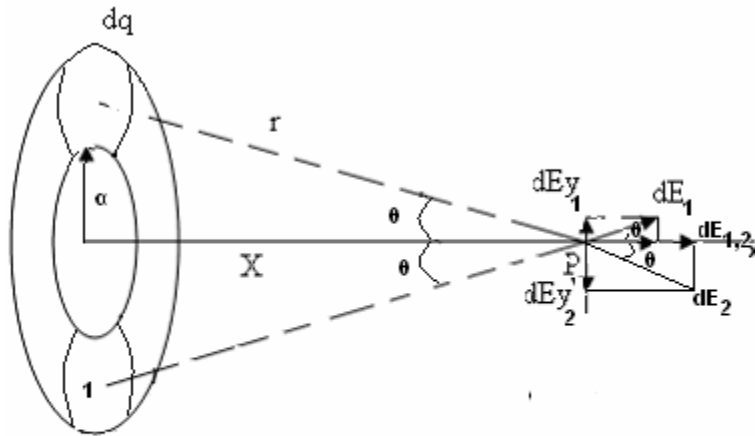
Ολοκληρώνοντας την (2) έχουμε

$$\begin{aligned}E &= K_{\eta\lambda} \int_d^{l+d} \frac{\lambda dx}{x^2} = K_{\eta\lambda} \int_d^{l+d} \frac{dx}{x^2} = \\ &= K_{\eta\lambda} \int_d^{l+d} x^{-2} dx = \\ &= K_{\eta\lambda} \lambda \int_d^{l+d} -dX^{-1} = K_{\eta\lambda} \lambda \int_{l+d}^d d(1/x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E &= K_{\eta\lambda} (1/d - 1/(l+d)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E &= K_{\eta\lambda} \frac{\lambda l}{d(l+d)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E &= K_{\eta\lambda} \frac{Q}{d(l+d)}\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένας δακτύλιος ακτίνας a έχει ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου συνολικής τιμής Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P . Το P βρίσκεται πάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας του δακτυλίου σε απόσταση x από το κέντρο του

ΛΥΣΗ



$$\left. \begin{aligned} dE &= K_{\eta\lambda} \frac{dq}{r^2} \\ r^2 &= a^2 + x^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow dE = K_{\eta\lambda} \frac{dq}{a^2 + x^2} \quad (1)$$

Το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στον δακτύλιο. Από συμμετρία σχήματος παρατηρούμε ότι οι κάθετες συνιστώσες στον άξονα y αλληλοεξουδετερώνονται.

Επομένως το ολικό Η.Π στο σημείο P είναι της μορφής :

$$\left. \begin{aligned} dE &= k_{\eta\lambda} \frac{dq}{a^2 + x^2} \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow dE = k_{\eta\lambda} \frac{xdq}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Ολοκληρώνοντας την 2 υπολογίζουμε το ολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P. **ΑΠΑ:**

$$\begin{aligned} E_P &= K_{\eta\lambda} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^Q dq \Rightarrow \\ \Rightarrow E_P &= K_{\eta\lambda} \frac{xQ}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (3)$$

Στο κέντρο του βρόχου το η.π είναι ίσο με $x=0$

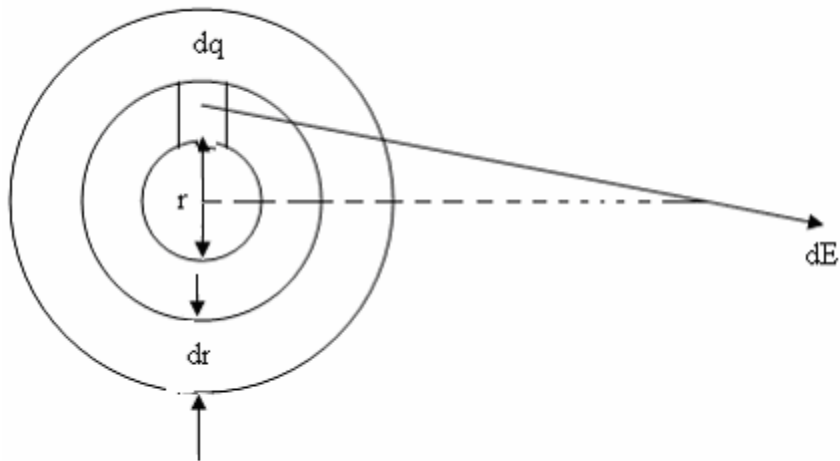
$$\begin{aligned} \Rightarrow^{(3)} x &\gg a \\ E_P &= K_{\eta\lambda} \frac{Q}{x^2} \end{aligned}$$

που είναι το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένας δίσκος ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον κάθετο άξονα του δίσκου σε απόσταση X από το κέντρο του.

ΛΥΣΗ



Χωρίζουμε τον δίσκο σε απειροστούς στους δίσκους πάχους dr . Τον κάθε δίσκο τον χειριζόμαστε ως ένα δακτύλιο. Από το προηγούμενη άσκηση έχω:

$$dE = K_{\eta\lambda} \frac{x dq}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια του δακτυλίου ΑΡΑ:

$$dq = 2\pi r \sigma dr \quad (2)$$

Αντικαθιστώ την (2) στην (1) και έχω:

$$dE = k_{\eta\lambda} \frac{2\pi r \sigma dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Ολοκληρώνουμε την (3) και έχω:

$$\begin{aligned}
E &= k_{\eta\lambda} (2\pi x \sigma) \int_0^R \frac{r dr}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \\
&= k_{\eta\lambda} 2\pi x \sigma \int_0^R r (x^2 + r^2)^{-3/2} dr = \\
&= k_{\eta\lambda} 2\pi x \sigma \int_0^R \frac{dr^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \\
&= k_{\eta\lambda} \pi x \sigma \int_0^R \frac{d(x^2 + r^2)}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \\
&= k_{\eta\lambda} \pi x \sigma \int_0^R (x^2 + r^2)^{-3/2} d(x^2 + r^2) = \\
&= k_{\eta\lambda} \pi x \sigma \int_0^R (-2) d(x^2 + r^2)^{-1/2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow E = 2k_{\eta\lambda} \pi x \sigma (x^2 + r^2)^{-1/2} \Big|_0^R \Rightarrow \\
&\Rightarrow E = 2k_{\eta\lambda} \pi x \sigma \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow E = 2k_{\eta\lambda} \pi \sigma \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \right]
\end{aligned}$$

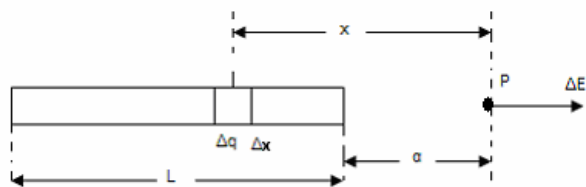
ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνεται λεπτή ράβδος μήκους l η οποία είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με θετικό φορτίο Q . Να υπολογιστεί το Η/Π σε σημείο το οποίο:

- α) βρίσκεται σε απόσταση a από το ένα άκρο της ράβδου και στον άξονα της .
- β) βρίσκεται σε απόσταση b πάνω από το ένα άκρο της ράβδου.
- γ) βρίσκεται σε απόσταση c πάνω από το μέσο της ράβδου.

ΛΥΣΗ

α)



Χωρίζουμε την ράβδο σε στοιχειώδη τμήματα Δx που έχουν φορτίο Δq . Επομένως :

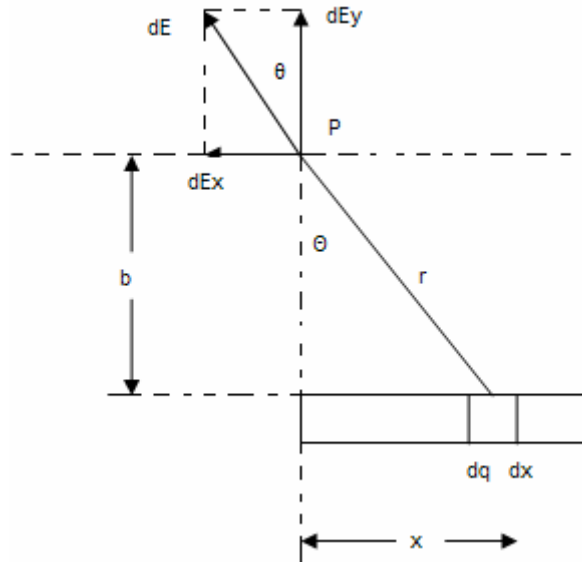
$$\Delta E = K_{\eta\lambda} \frac{\Delta q}{x^2} (1)$$

Η φορά του ΔE είναι μακριά από το σημείο P λόγω του ότι θεωρείτε ότι στο σημείο αυτό υπάρχει θετικό φορτίο.

Από (1) **έχω:**

$$\begin{aligned} dE &= k_{\eta\lambda} \frac{\lambda dx}{x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{ol} &= K_{\eta\lambda} \int_a^{L+a} \frac{\lambda dx}{x^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{ol} &= K_{\eta\lambda} \int_a^{L+a} \frac{dx}{x^2} = \\ &= -K_{\eta\lambda} \lambda \int_a^{a+L} dx^{-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{ol} &= \lambda K_{\eta\lambda} \int_{L+a}^a d(1/x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{ol} &= \lambda K_{\eta\lambda} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E_{ol} &= \frac{Q}{L} K_{\eta\lambda} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L} \right) \end{aligned}$$

β)



$$dE_y = dE \cos \theta (2)$$

$$dE_x = dE \sin \theta (3)$$

$$dE = K_{\eta\lambda} \frac{dq}{r^2} = K_{\eta\lambda} \frac{\lambda dx}{(b^2 + x^2)} (4)$$

$$\cos \theta = \frac{b}{(b^2 + x^2)^{1/2}} (5)$$

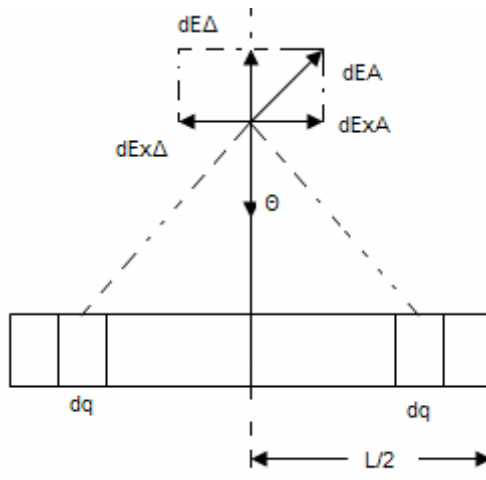
$$\sin \theta = \frac{x}{(b^2 + x^2)^{1/2}} (6)$$

Αντικαθιστώ (5),(6),(4) στις (2),(3) και έχω:

$$\begin{aligned}
dE_x &= K_{\eta\lambda} \frac{\lambda d\chi}{(b^2 + x^2)} \frac{x}{(b^2 + x^2)^{1/2}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow dE_x &= K_{\eta\lambda} \frac{\lambda dx dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow E_x &= K_{\eta\lambda} \lambda d \int_0^L \frac{x dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow E_x &= K_{\eta\lambda} \lambda d \int_0^L \frac{1}{2} \frac{dx^2}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow E_x &= \frac{\lambda d K_{\eta\lambda}}{2} \int_0^L \frac{d(b^2 + x^2)}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \\
&= E_x = \lambda d K_{\eta\lambda} \frac{1}{(b^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_0^L \\
\Leftrightarrow E_x &= \frac{Q}{L} b K_{\eta\lambda} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{b^2 + L^2}} \right] (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dE_y &= K_{\eta\lambda} \frac{\lambda d\chi}{(b^2 + x^2)} \frac{b}{(b^2 + x^2)^{1/2}} = \\
&= K_{\eta\lambda} \frac{\lambda b d\chi}{(b^2 + x^2)^{3/2}} \Rightarrow \\
\Rightarrow E_y &= K_{\eta\lambda} \frac{Qb}{L} \int_0^L \frac{dx}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \\
&= K_{\eta\lambda} \frac{Qb}{L} \frac{x}{b^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \Big|_0^L \\
\Leftrightarrow E_y &= K_{\eta\lambda} \frac{Qb}{L} \left[\frac{L}{b^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \right] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow E_y &= K_{\eta\lambda} \frac{Q}{b^2 \sqrt{L^2 + b^2}} (8)
\end{aligned}$$

2)



Από συμμετρία σχήματος παρατηρούμε ότι οι οριζόντιες συνιστώσες του σχήματος αλληλοεξουδετερώνονται. Άρα υπάρχει μονάχα οι κατακόρυφες συνιστώσες

ΑΡΑ

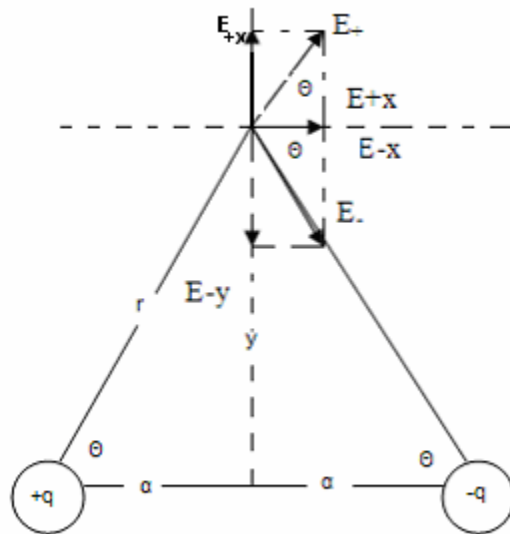
$$\begin{aligned}
 dE_{oy} &= 2dE_y = \\
 &= 2K_{\eta\lambda} \frac{dq}{r^2} \cos \theta = \\
 &= 2K_{\eta\lambda} \frac{dq}{r^2} \frac{c}{\sqrt{c^2 + x^2}} = \\
 &= 2K_{\eta\lambda} \frac{dq}{c^2 + x^2} \frac{c}{\sqrt{c^2 + x^2}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow E_{oy} &= 2K_{\eta\lambda} \int_0^{L/2} \frac{c}{(c^2 + x^2)^{3/2}} \lambda dx \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{oy} &= K_{\eta\lambda} Q \frac{1}{c \sqrt{\frac{L}{4} + c^2}}
 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Ορίζουμε ότι ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο ίσα άλλα αντίθετα φορτία $+q$ που έχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$ όπως είναι στο σχήμα.

Βρείτε το Η/Π Ε που δημιουργείται από τα φορτία του διπόλου στο σημείο Ρ το οποίο είναι πάνω στον άξονα y. Το Ρ απέχει y από την αρχή των συντεταγμένων. Υποθέστε ότι $y \gg a$.

ΛΥΣΗ



Το ολικό Η/Π πάνω στον άξονα y είναι μηδέν Πάνω στον άξονα x το ολικό Η/Π είναι ίδιο με

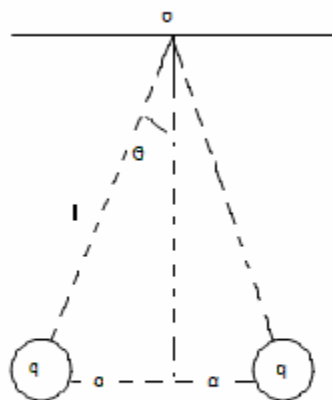
$$\begin{aligned}
 E_{ολ} &= E_{+x} + E_{-x} = \\
 &= E_{+} \cos \theta + E_{-} \cos \theta = \\
 &= K_{\eta\lambda} \frac{q}{(a^2 + y^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} + K_{\eta\lambda} \frac{q}{(a^2 + y^2)} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow E_{ολ} \frac{2K_{\eta\lambda}qa}{(a^2 + y^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Για } y \gg a \Rightarrow E_{ολ} = 2K_{\eta\lambda} \frac{qa}{y^3}$$

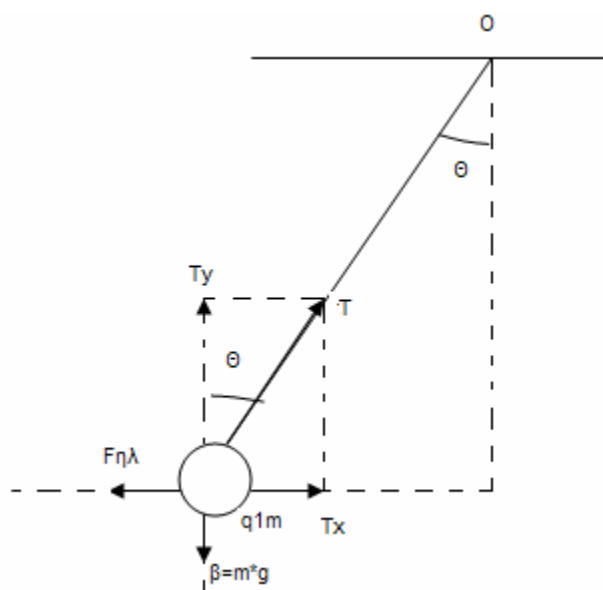
ΑΣΚΗΣΗ 10

2 σφαίρες με ίσες μάζες m είναι δεμένες με νήματα μήκους l από το ίδιο σημείο της οροφής O. Αν οι 2 σφαίρες έχουν φορτίο q η καθεμιά, να βρεθεί η γωνία Θ που σχηματίζουν τα νήματα με την κατακόρυφο λόγω της άπωσης των σφαιρών.

ΛΥΣΗ



Στο δίπλα σχήμα εικονίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στις 2 σφαίρες.



Οι 2 σφαίρες ισορροπούν επομένως :

$$\Sigma F_x = 0 \text{ Nt}(1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \text{ Nt}(2)$$

$$T_x = F_{\eta\lambda} \Rightarrow T \sin \theta = K_{\eta\lambda} \frac{q^2}{4a^2} \quad (3)$$

$$T_y = B \Rightarrow T \cos \theta = m \cdot q \quad (4)$$

$$\sin \theta = \frac{a}{l} \Rightarrow a = l \sin \theta \quad (5)$$

Διαιρώ την (3),(4) κατά μέλη:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{K_{\eta\lambda} \frac{q^2}{4a^2}}{mg} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{K_{\eta\lambda} q^2}{4a^2 mg} \Leftrightarrow \tan \theta = \frac{K_{\eta\lambda} q^2}{4 \sin^2 \theta l^2 mg} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin^2 \theta \tan \theta = K_{\eta\lambda} \frac{q^2}{4l^2 mg} \Leftrightarrow \frac{\sin^3 \theta}{\cos \theta} = \frac{K_{\eta\lambda} q^2}{4l^2 mg} \quad (6) \end{aligned}$$

Κάνοντας την προσέγγιση ότι $\theta \ll 5^\circ \Rightarrow \sin \theta \rightarrow \theta$

$$\cos \theta \rightarrow 1$$

} (7)

Από 7 και 6 έχουμε:

$$\theta^3 = \frac{K_{\eta\lambda} q^2}{4l^2 mg} \Rightarrow \theta = \left(\frac{K_{\eta\lambda} q^2}{4l^2 mg} \right)^{1/3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Η καθεμία από 2 μικρές σφαίρες είναι θετικά φορτισμένη ενώ το άθροισμα των 2 φορτίων τους είναι $5 \cdot 10^{-5} \text{Cb}$. Αν η κάθε σφαίρα απωθεί την άλλη με δύναμη 1.0 Nt όταν αυτές απέχουν μεταξύ τους 2.0 m² πώς είναι κατανομημένο το συνολικό φορτίο στις σφαίρες;

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε από εκφώνηση ότι: $q_1 + q_2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{Cb}$ (1)

Η δύναμη μεταξύ σημειακών φορτίων δίνεται από τον νόμο του Coulomb. Επομένως :

$$\begin{aligned}
F_{q1 \rightarrow q2} &= K_{\eta\lambda} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \\
&= 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1 q_2}{4} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1 = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1 q_2}{4} \Leftrightarrow q_1 q_2 = \frac{4}{9 \cdot 10^9} \Leftrightarrow q_1 q_2 = 0.44 \cdot 10^{-9} \text{ Cb} \Leftrightarrow \quad (2) \\
&\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} q_1 \cdot (5 \cdot 10^{-5} - q_1) = 0.44 \cdot 10^{-9} \Leftrightarrow 5 \cdot 10^{-5} q_1 - q_1^2 - 0.44 \cdot 10^{-9} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow q_1^2 - 5 \cdot 10^{-5} q_1 + 0.44 \cdot 10^{-9} = 0
\end{aligned}$$

Επίλυση της (2)

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 \cdot 10^{-10} - 1,76 \cdot 10^{-9} = 7,4 \cdot 10^{-10}$$

$$\begin{aligned}
q_{1,2} &= \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \pm \sqrt{7,4 \cdot 10^{-10}}}{2} \\
q_1 &= 3.86 \cdot 10^{-5} \\
q_1 &= 1.13 \cdot 10^{-5} \quad (3)
\end{aligned}$$

$$q_2 = 1.14 \cdot 10^{-5} \text{ Cb}$$

και

$$q_2 = 3.87 \cdot 10^{-5} \text{ Cb}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Κάποιο φορτίο Q πρόκειται να διαχωριστεί σε 2 μέρη q και Q-q. Ποια είναι η σχέση των Q με το q αν τα 2 μέρη που βρίσκονται σε δεδομένη απόσταση πρέπει να απωθούνται με την μέγιστη δύναμη Coulomb;

ΛΥΣΗ

Η δύναμη μεταξύ σημειακών φορτίων δίνεται από τον νόμο του coulomb και είναι:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(Q-q)}{r^2} \quad (1)$$

Από την εκφώνηση το r είναι σταθερό. Άρα για να γίνει η (1) μέγιστη θα πρέπει ο παράγων $q^*(Q-q)$ να πάρει την μέγιστη τιμή του.

Το άθροισμα τους είναι σταθερό.

Το γινόμενο τους γίνεται μέγιστο εφόσον είναι ίσοι οι 2 αριθμοί. ΑΡΑ:

$$q = (Q - q) \Rightarrow \\ \Rightarrow q = \frac{1}{2}Q$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Εκτιμήστε χοντρικά τον αριθμό των Cb των θετικών φορτίων σε ένα ποτήρι νερό.

Υποθέστε ότι ο όγκος του νερού είναι 250 gr

ΛΥΣΗ

1 mole H_2O είναι 18 gr

18 gr περιέχουν $6,023 \cdot 10^{23}$ μόρια

250 gr περιέχουν X μόρια

$X = 250 \cdot 6,023 \cdot 10^{23} / 18 \Rightarrow$ $N = 8,3 \cdot 10^{23} \text{ μόρια}$
--

Κάθε μόριο νερού περιέχει 18e άρα $8,3 \cdot 10^{24}$ μόρια νερού.

Περιέχουν:

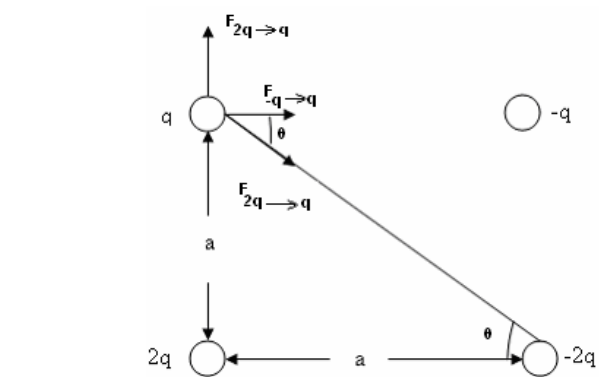
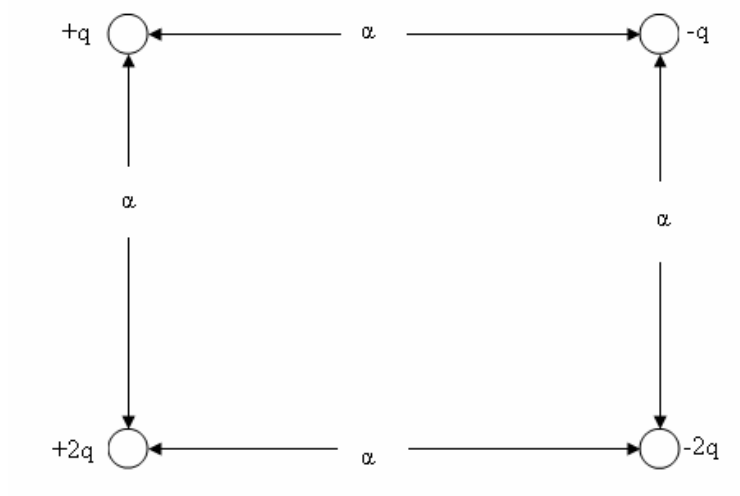
$$18(e) \cdot 8,3 \cdot 10^{24} = 179,4 \cdot 10^{24}(e)$$

$$\text{Άρα } Q_+ = 179,4 \cdot 10^{24} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C = 239,04 \cdot 10^5 C$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Στο παρακάτω σχήμα ποιά είναι η συνισταμένη δύναμη πάνω στο φορτίο που βρίσκεται στην επάνω αριστερή γωνία του τετραγώνου; Υποθέστε ότι $q = 1 \cdot 10^{-10} C$ και $a = 50 cm$. Οι θέσεις των φορτίων είναι σταθερές.

ΛΥΣΗ



Αναλύουμε την $F_{-2q \rightarrow q}$ σε άξονες X,Y και έχουμε:

$$F_{(-2q \rightarrow q)_x} = |F_{-2q \rightarrow q}| \cos \Theta = K_{\eta\lambda} \frac{(2q) \cdot q}{2a^2} \frac{a}{(2a^2)^{1/2}} \Leftrightarrow F_{-2q \rightarrow qx} = K_{\eta\lambda} \frac{2q^2 a}{(2a^2)^{3/2}} =$$

$$= K_{\eta\lambda} \frac{2q^2}{(2)^{3/2} a^2}$$

Ομοίως

$$F_{(-2q \rightarrow q)_y} = K_{\eta\lambda} \frac{(2q) \cdot q}{2a^2} \sin \Theta = K_{\eta\lambda} \frac{(2q)2}{2^{3/2} a^2}$$

ΑΡΑ

$$\Sigma F_x = K_{\eta\lambda} \frac{2q^2}{2^{3/2}a^2} + K_{\eta\lambda} \frac{q^2}{a^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-14}}{2.828 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} + 9 \cdot 10^9 \frac{10^{-14}}{25 \cdot 10^{-4}} = 0.025 + 0.036 = 0.061 \text{ Nt}$$

$$\Sigma F_y = K_{\eta\lambda} \frac{2q^2}{a^2} - K_{\eta\lambda} \frac{2q^2}{2^{3/2}a^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-14}}{25 \cdot 10^{-4}} - 9 \cdot 10^9 \frac{2 \cdot 10^{-14}}{2.28 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma F_y = 0.047$$

ΑΡΑ

$$F_{o\lambda} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} =$$

$$= \sqrt{(0.047)^2 + (0.061)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{o\lambda} = 0.076 \text{ Nt}$$

$$\text{E}\phi\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = 0.77$$

$$E_{total} = \sum_i K_{\eta\lambda} \frac{q_i}{r_i^2}$$

Στο σημείο Α το Η/Π λόγω των q₁, q₂ είναι μηδέν μιας και τα πεδία που δημιουργούν το q₃ στο Α και το q₄ στο Α αλληλοεξουδετερώνονται.

Άρα το πεδίο οφείλεται λόγω των q₁, q₂.

Από την συμμετρία του σχήματος έχουμε ότι οι συνιστώσες y των E₁ και E₂ αλληλοαναιρούνται επομένως :

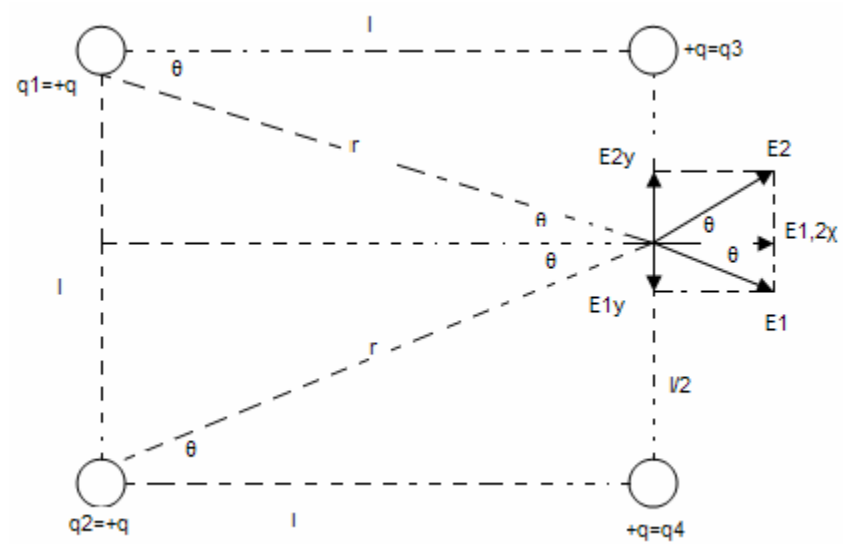
$$E_{ol} = E_{1x} + E_{2x} = |E_1| \cos \theta + |E_2| \cos \theta = 2 \cdot |E| \cos \theta = 2K_{\eta\lambda} \frac{q \cdot l}{r^2 \cdot r} =$$

$$= 2 \cdot K_{\eta\lambda} \frac{q \cdot l}{r^3} \Rightarrow E_{ol} = 2K_{\eta\lambda} \frac{q \cdot l}{(l^2 + l^2 / 4)^{3/2}} \Rightarrow E_{ol} = 2 \cdot K_{\eta\lambda} \frac{q \cdot 2^3}{l^2 (5)^{3/2}} \Rightarrow E_{ol} = 2^4 K_{\eta\lambda} \frac{q}{l^2 5^{3/2}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

4 σημειακά φορτία q είναι τοποθετημένα στις γωνίες ενός τετραγώνου πλευράς l. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του Η/Π που οφείλεται σε αυτά στο μέσο της μιας πλευράς του τετραγώνου.

ΛΥΣΗ



Το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου δίνεται από τις σχέσεις :

$$\left. \begin{aligned} E_A &= \frac{F_A}{q_\Delta} \\ F_A &= K_{\eta\lambda} \frac{q * q_\Delta}{r^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = k_{\eta\lambda} \frac{q}{r^2} \quad (1)$$

Το ολικό ηλεκτρικό πεδίο σημειακών φορτίων δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα όρων σαν των (1). Άρα:

$$E_{TOTAL} = \sum_i k_{\eta\lambda} \frac{q_i}{r_i^2} \quad (2)$$

Στο σημείο A το Η/Π λόγω των \$q_3\$ και \$q_4\$ είναι μηδέν μια και τα πεδία που δημιουργούν τα \$q_3\$ και \$q_4\$ στο A αλληλοεξουδετερώνονται. Άρα το πεδίο οφείλεται λόγω των \$q_1\$ και \$q_2\$. Από συμμετρία σχήματος έχουμε ότι οι συνιστώσες y των \$E_1\$ και \$E_2\$ αλληλοαναιρούνται. Άρα

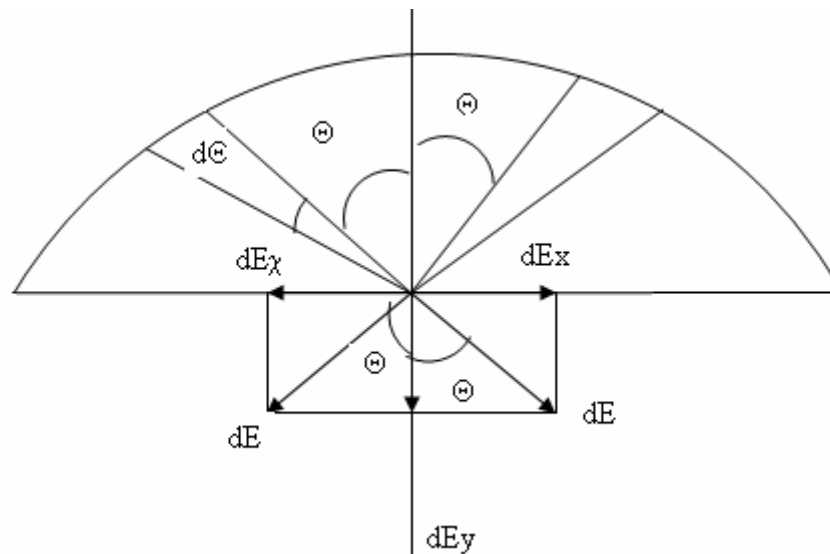
$$E_{total} = E_{1x} + E_{2x} = |E_1| \cos \theta + |E_2| \cos \theta = 2|E| \cos \theta = 2k_{\eta\lambda} \frac{q}{r^2} \frac{l}{r} \Leftrightarrow E_{total} = 2k_{\eta\lambda} \frac{ql}{\left[l^2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Leftrightarrow E_{total} = 2^4 k_{\eta\lambda} \frac{q}{l^2 (5)^{\frac{3}{2}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Φορτίο Q είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα κατά μήκος ενός ημικυκλικού βρόχου ακτίνας R . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του ημικυκλικού βρόχου.

ΛΥΣΗ



Χωρίζουμε το ημικύκλιο σε διαστήματα dS (τόξα μήκους dS). Το dE στο κέντρο του ημικυκλίου δίνεται από την σχέση:

$$dE = K_{\eta\lambda} \frac{dq}{R^2} \Rightarrow dE = K_{\eta\lambda} \frac{\lambda dS}{R^2} \quad (1)$$

$$dq = dS \cdot \lambda$$

$$dS = R \cdot d\Theta \quad (2)$$

Από 1 και 2 έχουμε ότι:

$$dE = K_{\eta\lambda} \frac{\lambda R d\theta}{R^2} = K_{\eta\lambda} \frac{\lambda d\theta}{R} \Rightarrow dE = K_{\eta\lambda} \frac{\frac{Q}{\pi R} d\theta}{R} \Rightarrow dE = K_{\eta\lambda} \frac{Q d\theta}{\pi R^2} \quad (3)$$

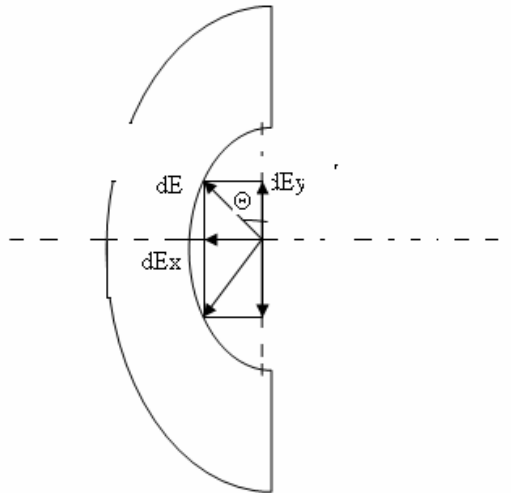
Από συμμετρία προβλήματος παρατηρούμε ότι υπάρχουν μόνο οι Y-συνιστώσες. **ΑΡΑ:**
Οι X- συνιστώσες αλληλοεξουδετερώνονται. **ΕΠΟΜΕΝΩΣ:**

$$\begin{aligned} dE_{o\lambda} &= dE \cos \theta = K_{\eta\lambda} \frac{Q \cos \theta d\theta}{\pi R^2} \Rightarrow E_{o\lambda} = K_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \\ &= K_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d \sin \theta \Leftrightarrow E_{o\lambda} = K_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} 2 \Rightarrow E_{o\lambda} = \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_{o\lambda} R^2} \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 17

Μια ομοιόμορφη φορτισμένη ράβδος μαγνητικό υλικό μήκους 14cm κάμπτεται σε σχήμα ημικυκλίου όπως στο σχήμα. Αν η ράβδος έχει ολικό φορτίο -7,5 μC βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο 0 που είναι το κέντρο του ημικυκλίου.

ΛΥΣΗ



Εργαζόμαστε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Απο συμμετρία σχήματος έχουμε ότι οι συνιστώσες αλληλοαναιρούνται. **ΑΡΑ:**

$$dE_{total} = dE \sin \theta \Leftrightarrow dE_{total} = k_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} d\theta$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{o\lambda} &= k_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \Rightarrow E_{o\lambda} = k_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} \int_0^\pi d(-\cos \theta) = \\ &= k_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} [-\cos \theta_0^\pi] \Leftrightarrow E_{o\lambda} = k_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} 2 \Leftrightarrow E_{o\lambda} = 2k_{\eta\lambda} \frac{Q}{\pi R^2} \end{aligned}$$

Από εκφώνηση έχουμε:

$$\pi R = 14 \text{ cm} \Rightarrow R = 14 \cdot 10^{-2} / 3.14 \Rightarrow R = 4.45 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (2)$$

Από 1 και 2 έχουμε

$$E_{total} = 2.9 \cdot 10^9 \frac{7.5 \cdot 10^{-6}}{3.14 \cdot 19.08 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow E_{o\lambda} = 2.17 \cdot 10^7 \frac{\text{Nt}}{\text{Cb}}$$

Διανυσματικά αυτό γράφεται ως $\overrightarrow{E_{total}} = -21.7 \hat{i} \frac{\text{Nt}}{\text{Cb}}$