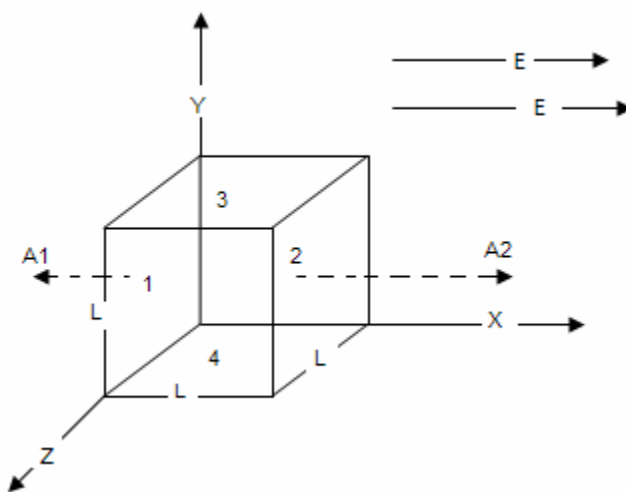


ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E κατευθύνεται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα X . Υπολογίστε την καθαρή ηλεκτρική ροή που διαπερνά τον κύβο ακμής l που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

ΛΥΣΗ



Η ροή μέσα από μια στοιχειώδη επιφάνεια dA δίνεται από την σχέση:

$$d\phi = E * dA \quad (1)$$

Η ολική ροή από την επιφάνεια A δίνεται από την ολοκλήρωση της (1). Άρα:

$$\phi = \int E * dA \quad (2)$$

Η (1) και η (2) εμπεριέχουν το εσωτερικό γινόμενο $\vec{E} * d\vec{A}$ το οποίο αναλυτικά γράφεται:

$$\vec{E} * d\vec{A} = |E| * |dA| * \cos \theta \quad (3)$$

Όπου θ είναι η γωνία μεταξύ του $\vec{E}$ και της καθέτου στην επιφάνεια dA .

Από το σχήμα της άσκησης είναι φανερό ότι η ροή από τις 4 από τις 6 επιφάνειες του κύβου είναι μηδέν λόγω του ότι $\vec{E} \perp \vec{A}$

Η ολική ροή από τον κύβο είναι: διαμέσου των επιφανειών (2),(1): Άρα :

$$d\phi_{(1)} = \vec{E} * d\vec{A}_{(1)} = -EdA \quad (4)$$

$$d\phi_{(2)} = \vec{E} * d\vec{A}_{(2)} = EdA \quad (5)$$

Η ολική ροή είναι το άθροισμα των (4),(5) άρα:

$$\begin{aligned} \phi_{ολ} &= \int_1 E * dA_1 + \int_2 E * dA_2 = E \int_1 dA \cos 180^\circ + E \int dA \cos 0^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi_{ολ} &= -E * l^2 + E * l^2 \Leftrightarrow \phi_{ολ} = 0 \frac{Nt}{Cb} m^2 \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Με αφετηρία τον νόμο του GAUSS υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα απομονωμένο σημειακό φορτίο q. Κατόπιν αποδείξτε πως προκύπτει ο νόμος του Coulomb απο το αποτέλεσμα αυτό.

ΛΥΣΗ

Για ένα απομονωμένο φορτίο q η γκαουσιανή επιφάνεια που επιλ'εγουμε είναι μια σφαίρα που στο κέντρο της υπάρχει το φορτίο q. Άρα:

$$\oint E dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Το Η/Π σημειακού φορτίου είναι ακτινικό προς τα έξω (**για θετικό φορτίο**) άρα $E * dA = EdA$ (2). Επίσης το πεδίο είναι σταθερό (το μέτρο του) πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

$$\begin{aligned} \oint E dA &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E \oint dA = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow E = k_{ηλ} \frac{q}{r^2} \end{aligned} \quad (3)$$

Εάν τοποθετήσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 στην περιοχή του Η/Π τότε σ' αυτό θα ασκηθεί ηλεκτρική δύναμη ίση με:

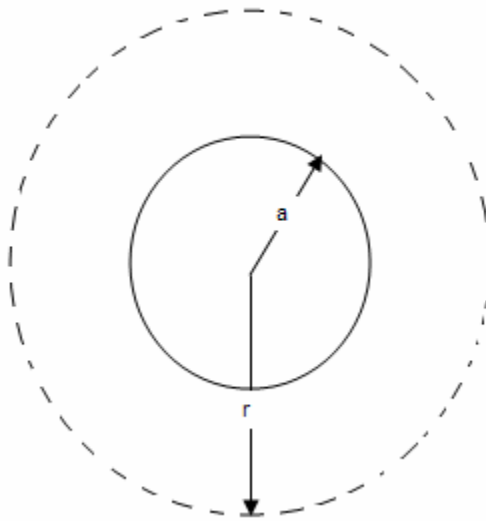
$$F_{\eta\lambda} = E * q_0 \Rightarrow^{(3)} F_{\eta\lambda} = k * \frac{qq_0}{r^2} \quad (4)$$

Η (4) εκφράζει τον νόμο του Coulomb. Άρα υπάρχει ισοδυναμία ανάμεσα στον νόμο του Gauss και του Coulomb.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έχουμε μια σφαίρα κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό. Η σφαίρα είναι φορτισμένη με ολικό φορτίο Q κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο της με πυκνότητα φορτίου ρ , προφανώς σταθερή. (α) Υπολογίστε την ένταση του Η.Π σε κάποιο σημείο που είναι έξω από την σφαίρα. (β) βρείτε την ένταση που έχει μέσα η σφαίρα.

ΛΥΣΗ



(α) Για τον υπολογισμό της έντασης του Η/Π σε σημείο έξω από την σφαίρα διαλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρας ομόκεντρη με την φορτισμένη σφαίρα.

$$\oint E dA = \frac{Qm}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{(a)} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_{(a)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

(β) Για τον υπολογισμό της έντασης $E_{(\beta)}$ διαλέγουμε γκαουσιανή σφαίρα ομόκεντρη με την ομοιόμορφα φορτισμένη και με ακτίνα $r < a$. Άρα η γκαουσιανή δεν εγκλύει το φορτίο Q της σφαίρας

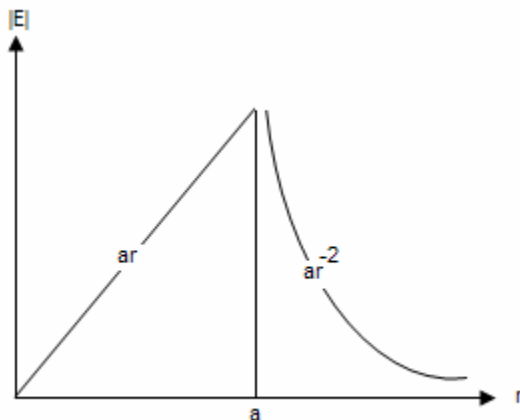
$$\left. \begin{aligned} \oint E_{\beta} dA &= \frac{Qm}{\epsilon_0} \quad (2) \\ Qm &= \rho v = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$E_{\beta} 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_{\beta} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (4)$$

Η (4) μπορεί να γραφεί αντικαθιστώντας την ρ ως:

$$E_{\beta} = \frac{\frac{3Q}{4\pi a^3} - r}{4\epsilon_0 \pi a^3} \quad (5)$$

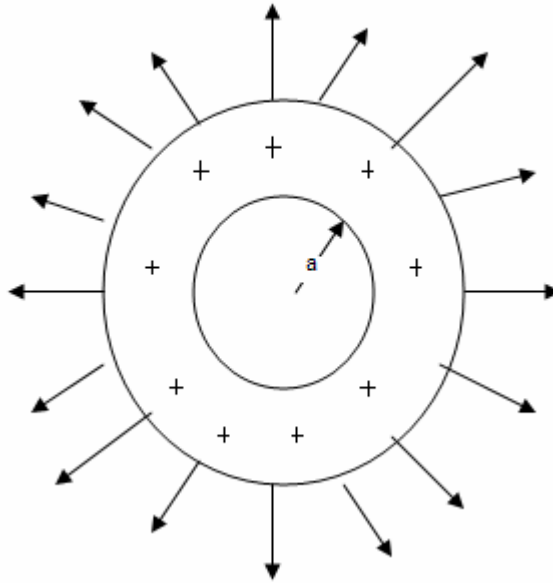
Η γ.π του μέτρου του E ως προς το r είναι το παρακάτω



ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας a έχει ολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια του. Υπολογίστε το H/Π σε σημεία που βρίσκονται μέσα και έξω από το κέλυφος.

ΛΥΣΗ



- (i) Μέσα στο κέλυφος παίρνουμε γκαουσιανή επιφάνεια μια σφαίρα ακτίνας $r < a$. Η σφαίρα αυτή δεν περικλείει φορτίο άρα:

$$\oint E dA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{0}{\epsilon_0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = 0 \frac{Nt}{Cb}$$

- (ii) Για γκαουσιανή επιφάνεια πάλι έξω από τον δακτύλιο έχω σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια με $r > a$. Άρα:

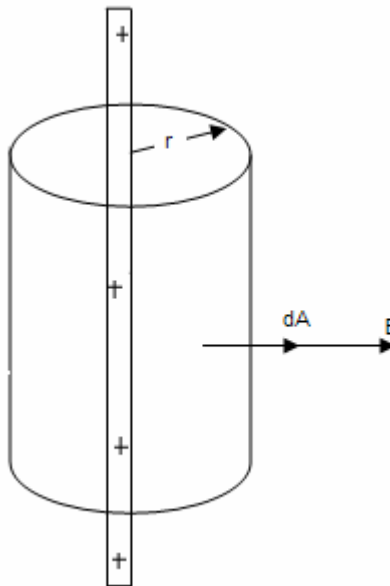
$$\oint E dA = \frac{Qm}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Qm}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Qm}{\epsilon_0 4\pi r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = K_{\eta\lambda} \frac{Qm}{r^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Βρείτε το Η/Π σε απόσταση r από μια ομοιόμορφη φορτισμένη θετικά γραμμή απείρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου (φορτίο ανά μονάδα μήκους) λ =σταθερο.

ΛΥΣΗ



Ως γκαουσιανή επιφάνεια επιλέγουμε έναν κύλινδρο ομόκεντρο με την φορτισμένη ράβδο. Εφαρμόζω τον νόμο του Gauss άρα:

$$\oint E dA = \frac{Qm}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k\lambda / r(1)$$

Προσοχή: ροή έχουμε μόνο από τις κοίλες επιφάνειες του κυλίνδρου. Από τα πάνω και κάτω επίπεδο η ροή είναι μηδέν μια και $E \perp dA \Rightarrow \vec{E}d\vec{A} = 0$

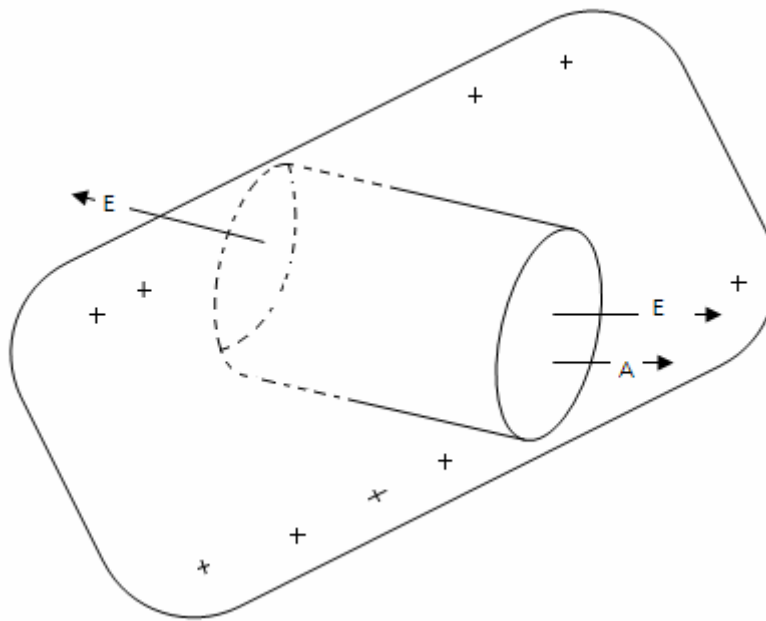
Η (1) ισχύει για απείρου μήκους φορτισμένη ράβδο.

Η (1) ισχύει κατά προσέγγιση για πεπερασμένου μήκους φορτισμένη ράβδο. Ισχύει μονάχα για σημεία πολύ κοντά στην ράβδο και πολύ μακριά από τα άκρα της ράβδου.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Υπολογίστε το Η/Π που δημιουργεί ένα φορτισμένο επίπεδο από μονωτικό υλικό απείρων διαστάσεων το οποίο έχει επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου σ .

ΛΥΣΗ



Το Η/Π εκεί κατεύθυνση προς τα έξω και κάθετα προς το επίπεδο.

Παίρνουμε για γκαουσιανή επιφάνεια ένα κύλινδρο. Ροή Η/Π θα έχουμε από την επίπεδη επιφάνεια μόνο, (όπου $\vec{E} \parallel \vec{A}$).

Στην κοίλη επιφάνεια έχουμε $\vec{E} \perp \vec{A}$.

$$\oint E dA = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Από σχήμα βλέπουμε ότι η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια είναι $2EA$ άρα:

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (2)$$

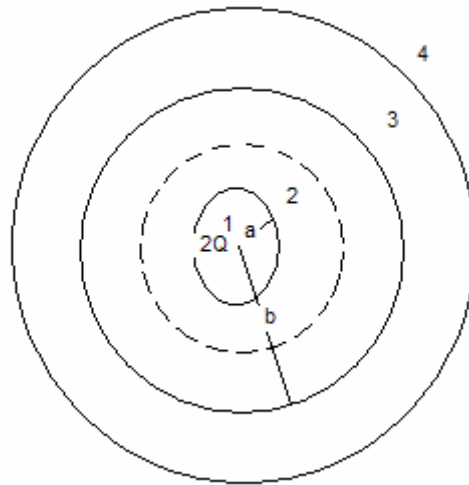
Από (2) συμπεραίνουμε ότι η ένταση του Η/Π δεν εξαρτάται από την απόσταση από το φορτισμένο επίπεδο.

Άρα για οποιαδήποτε απόσταση από το επίπεδο ισχύει η (2).

ΑΣΚΗΣΗ 7

Μια συμπαγής αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a είναι φορτισμένη με καθαρό θετικό φορτίο $2Q$. Ένα αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c είναι ομόκεντρο με την σφαίρα και είναι φορτισμένο με καθαρό φορτίο $-Q$. Χρησιμοποιείστε τον νόμο του GAUSS για να προσδιορίσετε στο παρακάτω σχήμα το Η/Π στις περιοχές (1), (2), (3) και (4) και την κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στο σφαιρικό κέλυφος.

ΛΥΣΗ



Περιοχή (1)

Επιλέγουμε γκαουσιανή επιφάνεια σφαίρας ακτίνας $r < a$. Λόγω του ότι ο αγωγός είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία το Η/Π στο εσωτερικό του θα είναι μηδέν. Το φορτίο $2Q$ της σφαίρας είναι κατανεμημένο στην επιφάνεια της.

Περιοχή (2)

Γκαουσιανή επιφάνεια ακτίνας $a < r < b$ ομόκεντρη με την φορτισμένη σφαίρα και δακτύλιο.

$$\left. \begin{aligned} \oint E dA &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \\ Q_{in} &= 2Q \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$E 4\pi r^2 = \frac{2Q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{Q_{in}}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

Περιοχή (3)

Γκαουσιανή επιφάνεια πάλι σφαίρας ακτίνας $b < r < c$ Άρα:

$$\oint E dA = \frac{Q_m}{\epsilon_0} (1)$$

Στην περιοχή 3 το Η/Π πρέπει να είναι μηδέν λόγω του ότι ο αγωγός βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Επομένως η γκαουσιανή επιφάνεια που περιγράφει η σχέση (1) πρέπει να περιέχει φορτίο $+2Q - 2Q = 0$ Cb

Άρα στο εσωτερικό της (3) υπάρχει φορτίο $-2Q$ το οποίο δημιουργείται επαγωγικά.

Περιοχή 4

Γκαουσιανή επιφάνεια $r > c$

$$Q_{in} = 2Q - Q = Q$$

Άρα από τον νόμο του Gauss:

$$\oint EdA = \frac{Qm}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

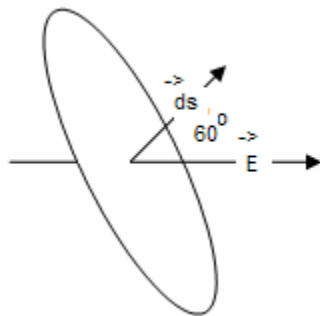
$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = K_{\eta\lambda} \frac{Q}{r^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Ένας δίσκος ακτίνας R προσανατολίζεται έτσι ώστε το μοναδιαίο του κάθετου διάνυσμα σχηματίζει γωνία 60° ως προς ένα ομογενές Η/Π έντασης E . (α) Πόση είναι η ολική ροή διαμέσου του δίσκου; (β) Πόση είναι η ολική ροή αν στραφεί έτσι ώστε το επίπεδο του να είναι παράλληλο προς την ένταση E ; (γ) Πόση είναι η ολική ροή αν η κάθετη σε αυτόν είναι παράλληλη προς την ένταση E ;

ΛΥΣΗ



$$\Phi_c = \int EdA = \int EdA \cos 60^\circ = E \cos 60^\circ \pi R^2 \Leftrightarrow$$

(α)

$$\Leftrightarrow \Phi_c = \frac{E}{2} \pi R^2$$

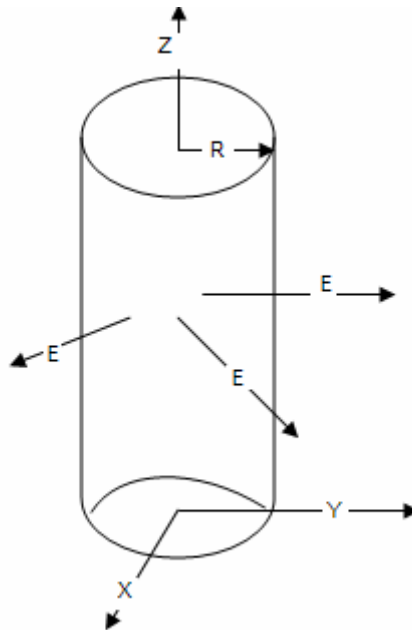
$$(\beta) \quad \Phi_c = \int EdA = \int EdA \cos 90^\circ = 0$$

$$(\gamma) \quad \Phi_c = \int EdA = \int EdA \cos 0^\circ = E \pi R^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Κύλινδρος ακτίνας R και απείρου μήκους είναι ομοιόμορφα θετικά φορτισμένος με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ . Ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα Z . Να υπολογιστούν. (α) Η ένταση του Η/Π σε κάθε σημείο του χώρου. (β) Οι συνιστώσες E_x, E_y, E_z της έντασης του πεδίου στο έσωτερικο του κυλίνδρου. (γ) Να επαληθευτεί ότι η απόκλιση του πεδίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

ΛΥΣΗ



(α) Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss. Άρα:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (1)$$

Η (1) είναι μη μηδενική μονάχα στην κυρτή επιφάνεια του αγωγού.

Το ηλεκτρικό πεδίο κείται στο επίπεδο xy .

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \Leftrightarrow E 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 l \Leftrightarrow E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \hat{r} \quad (2)$$

$$\text{Για } r > R \text{ τότε } E_{\varepsilon\sigma} 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_o} \rho \pi R^2 l \Leftrightarrow E_{\varepsilon\sigma} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_o r} \hat{r} \quad (3)$$

(β) Στο εσωτερικό του κυλίνδρου έχουμε ότι ισχύει η (2)

$$E_{\varepsilon\sigma} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} (x\hat{i} + y\hat{j}) \quad (4)$$

Από την (4) προκύπτει ότι οι συνιστώσες x και y είναι ίσες με

$$\vec{E}_{\varepsilon\sigma_x} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} x\hat{i} \quad \& \quad \vec{E}_{\varepsilon\sigma_y} = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} y\hat{j}$$

$$(\gamma) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\varepsilon\sigma} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{2\varepsilon_o} x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{2\varepsilon_o} y \right) + 0 = \frac{\rho}{2\varepsilon_o} + \frac{\rho}{2\varepsilon_o} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

ΑΣΚΗΣΗ 10

Θετικό φορτίο q είναι κατανεμημένο σε σφαίρα ακτίνας R με πυκνότητα:

$$P = \begin{cases} K & \text{για } r \leq R/2 \\ Kr & \text{για } R/2 < r \leq R \\ 0 & \text{για } r > R \end{cases}$$

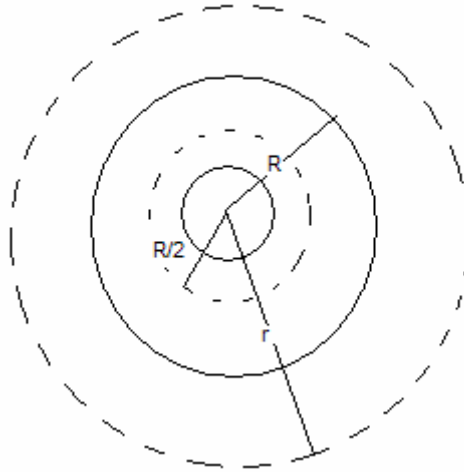
(α) Να προσδιοριστεί η σταθερά K συναρτήση του R

(β) Πως μοιράζεται το φορτίο στις 2 περιοχές διαφορετικής πυκνότητας

(γ) Να υπολογιστεί η ένταση του Η/Π συναρτήση της απόστασης r απο το κέντρο της σφαιρικής αυτής κατανομής φορτίου.

(δ) Να διχθεί ότι ένα (ε) μπορεί να ταλαντωθεί αρμονικά στην εσωτερική περιοχή ($r \leq R/2$) και να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης .

ΛΥΣΗ



(α) Το φορτίο της σφαίρας κατανέμεται στις σφαίρες με ακτίνες $r \leq R/2$ (q_1) και $r > R/2$ (q_2). Επομένως

$$q = q_1 + q_2 \quad (1)$$

$$q_1 = \int_{V_1} \rho \cdot dV = \int_{V_1} K dV = K \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2} \right)^3 = K \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{8} \Leftrightarrow q_1 = K \frac{\pi R^3}{6} \quad (2)$$

$$q_2 = \int_{V_2} \rho \cdot dV = \int_{V_2} K r dV = K \int_{R/2}^R r 4\pi r^2 dr \Leftrightarrow q_2 = 4\pi K \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{4^4} \right) \Leftrightarrow q_2 = \frac{15}{16} \pi K R^4 \quad (3)$$

Επομένως:

$$q = K \frac{\pi R^3}{6} + \frac{15}{16} \pi K R^4 \Leftrightarrow K = \frac{48q}{\pi R^3 (8 + 45R)} \quad (4)$$

(β) Αντικαθιστώ την (4) στις (2), (3) και επομένως:

$$q_1 = \frac{8q}{8+45R}, \quad q_2 = \frac{45qR}{8+45R}$$

$$\begin{aligned} \oint E \cdot dA &= \frac{Q_{in}}{\epsilon_o} \Leftrightarrow \oint E \cdot dA = \frac{1}{\epsilon_o} \int_{R/2}^R \rho dV + q_1 \Leftrightarrow E 4\pi r^2 \\ (\gamma) \text{ Για } r \leq R/2 : &= \frac{1}{\epsilon_o} \int_{R/2}^R Kr 4\pi r^2 dr + \frac{8q}{8+45R} \Leftrightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_o r^2} \frac{8q}{8+45R} \left[1 + \frac{\sigma}{R^3} \left(r^4 - \frac{R^4}{16} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Για } r > R : \oint E \cdot dA = \frac{q}{\epsilon_o} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_o} \Leftrightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_o r^2}$$

(δ) Η δύναμη που ασκείται σε ένα (e) το οποίο βρίσκεται στην περιοχή $r \leq R/2$ είναι:

$$F_{(e)} = -eE_{r \leq R/2} \Leftrightarrow F_{(e)} = -e \frac{Kr}{3\epsilon_o} \hat{r} \quad (5)$$

Η (5) είναι ανάλογη της απομάκρυνσης είναι δηλαδή μια δύναμη επαναφοράς που θα αναγκάσει το σώμα να ταλαντωθεί. Η περίοδος της ταλάντωσης δίνεται από την γενική σχέση

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_e}{k(\text{σταθερά επαναφοράς})}} = 2\pi \sqrt{\frac{3\epsilon_o m_e}{eK}} \quad (6)$$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από την συνάρτηση:

$$V(x, y) = -A(x^3 + 3y) \text{ όπου } A \text{ σταθερά.}$$

(α) Να υπολογιστεί η ένταση του Η/Π

(β) Να υπολογιστεί η χωρική πυκνότητα ρ της κατανομής του φορτίου στην οποία αφείλεται το πεδίο.

ΛΥΣΗ

(α) Το Η/Π συνδέεται με το δυναμικό με την σχέση :

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V \\ V(x, y) &= -A(x^3 + 3y) \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x}(-Ax^3) - \hat{j} \frac{\partial}{\partial y}(-3Ay) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \vec{E} = (3Ax^2)\hat{i} + (3A)\hat{j}$$

(β) Από διαφορική μορφή του νόμου του Gauss έχω:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \rho = \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) = \epsilon_0 (\sigma Ax + 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \rho = \sigma A \epsilon_0 x$$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Η συνάρτηση δυναμικού ενός ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από την σχέση:

$$V(x, y) = K(x^2 - y^2) \text{ όπου } K = \text{σταθερά.}$$

Να υπολογιστούν:

(α) Η ένταση του Η/Π $\vec{E}$ σε τυχαίο σημείο του χώρου

(β) Η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ σε τυχαία θέση.

(γ) Το έργο της ηλεκτρικής δύναμης για μετακίνηση ενός φορτίου q από την θέση Α(1,1) μέχρι την θέση Β(3,4).

ΛΥΣΗ

$$(α) \quad \vec{E} = -\nabla \cdot V = -\hat{i} \frac{\theta}{\theta x} V_x - \hat{j} \frac{\theta}{\theta y} V_y - \hat{k} \frac{\theta}{\theta z} V_z (1)$$

$$V(x, y) = k(x^2 - y^2) (2)$$

Από (1),(2) έχω ότι:

$$\vec{E} = -\hat{i} 2kx + \hat{j} 2ky$$

(β) Σύμφωνα με την διαφορική εξίσωση του νόμου του Gauss έχουμε:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow (\hat{i} \frac{\theta}{\theta x} + \hat{j} \frac{\theta}{\theta y}) * (-\hat{i} 2kx + \hat{j} 2ky) =$$

$$= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \rho = -\varepsilon_0 2k + \varepsilon_0 2k \Rightarrow \rho = 0$$

Δηλαδή το δυναμικό αυτό επικρατεί σε περιοχή ελεύθερων φορτίων.

$$\vec{E} * d\vec{l} \Rightarrow W_{ol} = \int_{1,1}^{3,4} e\vec{E} * d\vec{l} =$$

$$= -2kq \int_{1,1}^{3,4} (x\hat{i} - y\hat{j})(\hat{i}dx + \hat{j}dy) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_{ol} = -2kq \left[\int_1^3 xdx - \int_1^4 ydy \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_{ol} = -2kq \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 + 2kq \frac{y^2}{2} \Big|_1^4 \Leftrightarrow$$

$$(γ) \quad \Leftrightarrow W_{ol} = -2kq \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) + 2kq \left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_{ol} = -2kq(4) + 2kq\left(\frac{15}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_{ol} = -8kq + 15kq \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow W_{ol} = 7kq$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Έστω το δυναμικό $V(r)=a \cdot r^2+b$, όπου a και b σταθερές. Να υπολογιστεί η πυκνότητα φορτίου στην οποία επικρατεί στο δυναμικό αυτό.

ΛΥΣΗ

$$\vec{E} = -\nabla V \Leftrightarrow$$

Γνωρίζουμε ότι $\Leftrightarrow \vec{E} = (-\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} - \hat{k} \frac{\partial}{\partial z})$

$$(ar^2 + b) \Rightarrow \vec{E} = -2a\vec{r}(1)$$

Από διαφορική μορφή Gauss έχω :

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \epsilon_0 (\nabla E) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho = \epsilon_0 (\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}) * (-2a(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})) =$$

$$= (-2a)\epsilon_0 (1+1+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = -3a\epsilon_0$$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Έστω το Η/Π $\vec{E} = \frac{E_0}{a} * (x - y) * \hat{x} - \frac{E_0}{a} (x + y) * \hat{y}$.

(α) Να υπολογιστεί η πυκνότητα φορτίου στον χώρο.

(β) Να υπολογιστεί η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού $V(x,y,z)$ λαμβάνοντας ως σημείο αναφοράς δυναμικού το σημείο $O(0,0,0)$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
 \nabla E &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \\
 (\alpha) \quad &\Leftrightarrow \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) * \left(\frac{E_0}{a} (x-y) \hat{i} - \frac{E_0}{a} (x+y) \hat{j} \right) = \\
 &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \left(\frac{E_0}{a} - \frac{E_0}{a} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \rho = 0
 \end{aligned}$$

Δηλαδή η ένταση του Η/Π περιγράφει περιοχή του χώρου κενό φορτίων

$$\begin{aligned}
 (\beta) \quad \vec{E} &= -\nabla V \Rightarrow \frac{E_0}{a} (x-y) \hat{i} - \frac{E_0}{a} (x+y) \hat{j} = \\
 &= \hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\left. \frac{E_0}{a} (x-y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \frac{E_0}{a} (x+y) = -\frac{\partial V}{\partial y} \right\} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 V &= -\int_0^x \frac{E_0}{a} (x-y) dx = -\int_0^x \frac{E_0}{a} x dx + \frac{E_0}{a} \int_0^x y dx = \\
 &= -\frac{E_0}{a} \frac{x^2}{2} \int_0^x + \frac{E_0}{a} yx \Rightarrow \\
 &\Rightarrow V = +\frac{E_0}{a} \left(-\frac{x^2}{2} + xy \right) + c(y)
 \end{aligned} \quad (3)$$

Όπου $c(y)$ = σταθερά ως προς το y

Παραγωγίζω την (3) ως προς y άρα:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{E_0}{a}x + \frac{\partial c(y)}{\partial y} \Rightarrow^{(2)} \frac{E_0}{a}(x+y) = \frac{E_0}{a}x + \frac{\partial c(y)}{\partial y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{E_0}{a}y &= \frac{\partial c(y)}{\partial y} \Rightarrow c(y) = \frac{y^2}{2} \frac{E_0}{a} + c\end{aligned}$$

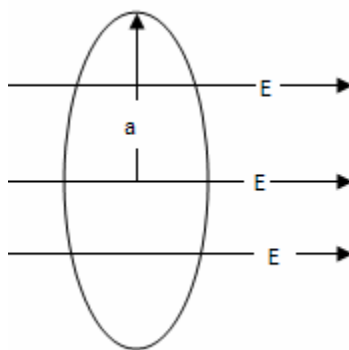
Άρα:

$$V = \frac{E_0}{a} \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy \right) + c$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Απόχη για πεταλούδες βρίσκεται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο όπως δείχνει το σχήμα. Η στεφάνη κύκλος ακτίνας a είναι τοποθετημένη κάθετα στο πεδίο. Βρείτε την ηλεκτρική ροή μέσα από την απόχη.

ΛΥΣΗ

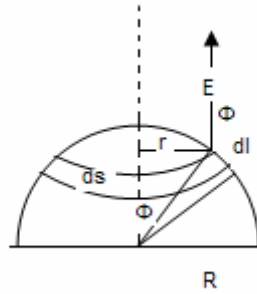


$$\left. \begin{aligned}\Phi_E &= E * A \\ A &= \pi * a^2\end{aligned}\right\} \\ \Rightarrow \Phi_E &= E * \pi * a^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 16

Υπολογίστε την Φ_E μέσα από ημισφαίριο ακτίνας R . Το πεδίο E είναι ομογενές και παράλληλο στον άξονα του ημισφαιρίου.

ΛΥΣΗ



Η ροή διαμέσου της στεφάνης είναι:

$$\left. \begin{aligned} d\Phi &= E * ds = E * ds * \cos \Phi \\ ds &= 2 * \pi * r * dl \\ dl &= R * d\Phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} d\Phi &= E * 2 * \pi * r * R * \cos \phi d\phi \\ r &= R * \eta \mu \phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\Phi = E * 2 * \pi * R^2 * \cos \phi * \eta \mu \phi d\phi$$

$$d\Phi = 2\pi R^2 E \cos \phi \eta \mu \phi d\phi \Rightarrow \Phi_{o\lambda} = 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} \cos \phi \eta \mu \phi d\phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi_{o\lambda} = 2\pi R^2 E \int_0^{\pi/2} \eta \mu \phi d\eta \mu \phi = \pi R^2 E$$