

Ποκνωτές και Διηλεκτρικά

Άσκηση 1

Κάθε οπλισμός ενός επίπεδου πυκνωτή έχει επιφάνεια $A = 2\text{cm}^2 = 2 \times 10^{-4}\text{m}^2$ και η απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι $d = 1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$. Υπολογίστε την χωρητικότητα του.

Λύση

Η σχέση που δίνει την χωρητικότητα ενός πυκνωτή είναι:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (1)$$

Ο επίπεδος πυκνωτής είναι αυτός που οι οπλισμοί του είναι 2 παράλληλες πλάκες επιφάνειας **A**. Η χωρητικότητα του δίνεται από την σχέση:

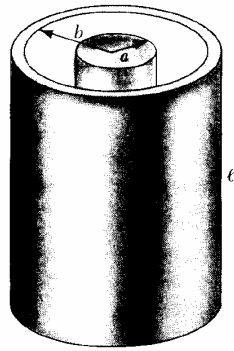
$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2)$$

Επομένως αντικαθιστώντας από τα δεδομένα της άσκησης στην (2) έχουμε:

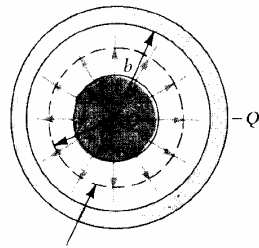
$$C = \left(8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) * \left(\frac{2 \cdot 10^{-4} \text{m}^2}{1 \cdot 10^{-3} \text{m}} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C = 1.77 \text{pF}$$

Άσκηση 2

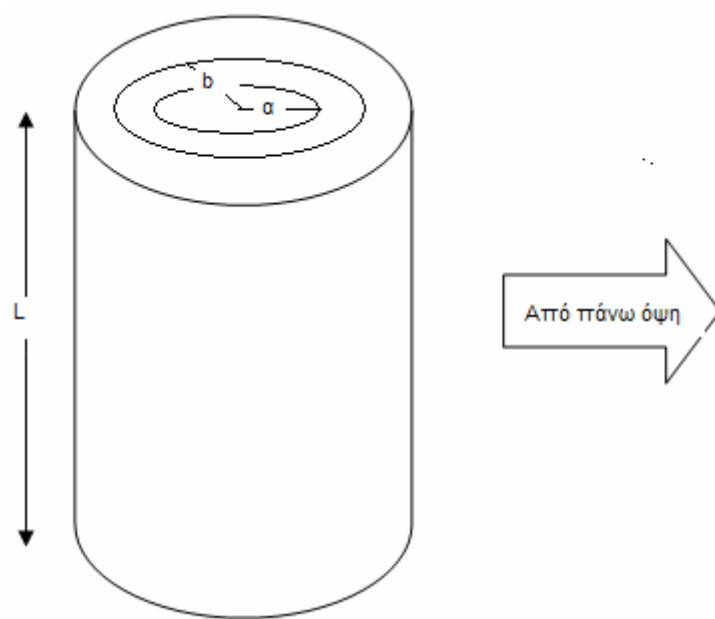
Ένας κυλινδρικός αγωγός ακτίνας a φορτισμένος με φορτίο $+Q$ είναι διατεταγμένος ομοαξονικά με έναν αγωγίμο κυλινδρικό φλοιό ακτίνας b φορτισμένο με φορτίο $-Q$ (δες παρακάτω σχήμα). Το μήκος της διάταξης αυτής είναι l . Υπολογίστε την χωρητικότητα της.

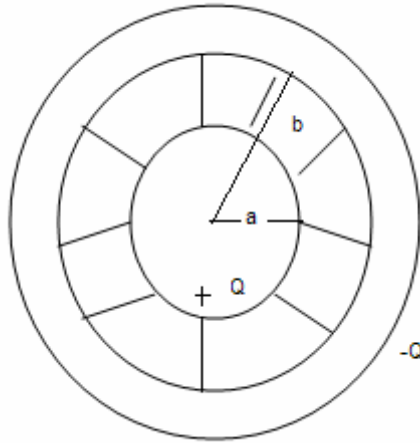


(a)



Λύση





Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή δίνεται από την σχέση : $C = \frac{Q}{V}$ (1)

Πρέπει να υπολογιστεί η διαφορά δυναμικού V ανάμεσα στους αγωγούς.

Η διαφορά δυναμικού V μπορεί να υπολογιστεί μέσω του Η.Π Ε από την σχέση

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (2)$$

Μέσω νόμου του Gauss έχουμε για κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας $a < r < b$:

$$\oint E dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E 2\pi r l = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q_{in}}{2\pi\epsilon_0 r l} \quad (3)$$

Από (3) στην (2):

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = V = -\int_a^b E dr = -\int_a^b \frac{Q_{in}}{2\pi\epsilon_0 l r} dr =$$

$$\Leftrightarrow V_b - V_a = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln r \Big|_a^b = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (1) έχω:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (5)$$

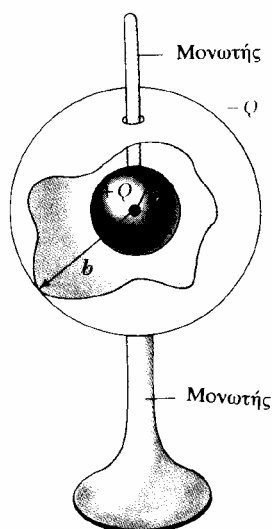
Από (5) παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα ενός κυλινδρικού πυκνωτή εξαρτάται από:

(α) Μήκος οπλισμού l

(β) Ακτίνες οπλισμού

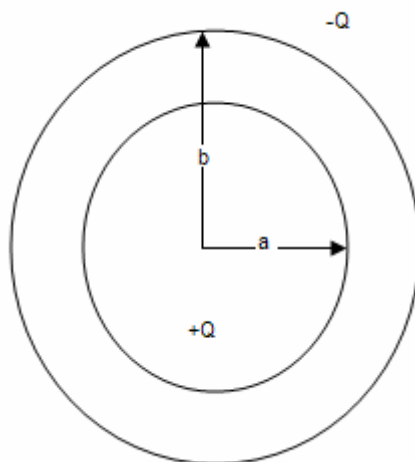
Άσκηση 3

Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από ένα αγωγίμο σφαιρικό φλοιό ακτίνας b φορτισμένο με φορτίο $-Q$ και ομόκεντρο με μια μικρότερη αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a και φορτίου $+Q$ (δες σχήμα). Βρείτε την χωρητικότητα του.



Λύση

Το σχήμα της άσκησης μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής :



Η χωρητικότητα $C = \frac{Q}{V}$ θα υπολογισθεί με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσαμε την

χωρητικότητα ενός κυλινδρικού πυκνωτή. Άρα:

Από τον νόμο του Gauss υπολογίζω για σφαιρική επιφάνεια το Η.Π ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή: ($a < r < b$).

$$\oint E dA = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{Q_{in}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad (1)$$

Το δυναμικό ανάμεσα στους οπλισμούς δίνεται από την σχέση :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\vec{\nabla} * V \Rightarrow V &= -\int_a^b E dr = -\int_a^b \frac{Q_{in}}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \\ &= -\frac{Q_{in}}{4\pi \epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = +\frac{Q_{in}}{4\pi \epsilon_0} \int_a^b d(1/r) = \frac{Q_{in}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

Επομένως :

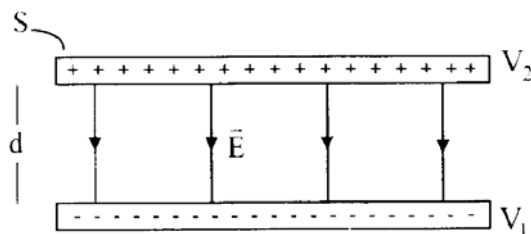
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{a-b}{ba}\right)} = \frac{ab}{k(b-a)} \quad (2)$$

Για την εξαγωγή του αποτελέσματος (2) έχουμε πάρει την απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού.

Άσκηση 4

Υπολογίστε την χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή του παρακάτω σχήματος.



Λύση

Ένας επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από 2 παράλληλες μεταλλικές πλάκες. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν στον χώρο ανάμεσα τους είναι ίσο με:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0} \quad (1)$$

Θεωρώ ότι το Η.Π (1) έχει φορά κατά μήκος του άξονα x επομένως:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} * V \Leftrightarrow E = -\frac{\partial V}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \int_0^d E dx = \frac{Q}{S\epsilon_0} \int_0^d dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{Qd}{S\epsilon_0} \quad (2)$$

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή δίνεται από την σχέση:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Qd}{S\epsilon_0}} = \epsilon_0 = \frac{S}{d}$$

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι οι οπλισμοί ενός πυκνωτή με επίπεδες και παράλληλες πλάκες εμβαδού S και απόστασης d , έλκονται μεταξύ τους με δύναμη: $F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$.

Επίσης να δειχθεί ότι η πίεση που ασκείται είναι ίση με την πυκνότητα ενέργειας στο πεδίο.

Λύση

Αν η απόσταση μεταξύ των οπλισμών d αυξηθεί κατά dx τότε το έργο που απαιτείται για την μετακίνηση τους είναι ίσο με:

$$dW = \vec{F} * d\vec{x} = Fdx \quad (1)$$

Όπου $\vec{F}$ η δύναμη που ασκείται μεταξύ των οπλισμών. Το έργο που δαπανάται Ισούται με την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στον πυκνωτή. Άρα:

$$dU = \frac{\epsilon_0}{2} * E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 S dx \quad (2)$$

Όπου dV = στοιχειώδης όγκος = Sdx μεταξύ των οπλισμών.

Εξισώνοντας τις (1),(2) έχω:

$$\begin{aligned} Fdx &= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 S dx \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \frac{\epsilon_0 E^2 S}{2} \quad (3) \end{aligned}$$

Από τον νόμο του Gauss έχω μια σχέση που συνδέει την ηλεκτρική ποή με το εγκλωβιζόμενο φορτίο. Άρα:

$$E * S = \frac{Q * m}{\epsilon_0} \quad (4)$$

Αντικαθιστώ (4) στην (3) οπότε:

$$F = \frac{\epsilon_0 \frac{q^2}{\epsilon_0 S^2} * S}{2} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S}$$

Η πίεση που ασκείται είναι ίση με:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S * S} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 S^2} \quad (5)$$

Από (4) έχω: $E = \frac{q}{\epsilon_0 S}$ }

$$\Rightarrow P = \frac{E^2 \epsilon_0^2}{2\epsilon_0} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \quad (6)$$

Αν συγκρίνουμε την (6) με την (2) έχω:

$$P = \frac{dU}{dV} = \text{πυκνότητα ενέργειας.}$$

Άσκηση 6

Στα άκρα ενός πυκνωτή χωρητικότητας $C_1 = 20\mu F$ εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού $V = 500\text{Volt}$. Στην συνέχεια στα άκρα του πυκνωτή αυτού συνδέεται παράλληλα ένας αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητας $C_2 = 5\mu F$. Να υπολογιστεί η διαφορά της ενέργειας στο σύστημα.

Λύση

Ενέργεια αρχικά: $U_0 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2$ (1)

Παράλληλη σύνδεση πυκνωτή σημαίνει: (α) $C_{ολ} = C_1 + C_2$

(β) $V_{τελ} = V_0$

Επομένως η τελική ενέργεια : $V_{τελ} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{ολ}}$ (2)

Ο πυκνωτής C_2 είναι αρχικά αφόρτιστος άρα: $Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V$ (3)

Αντικαθιστώ την (2) στην (3) οπότε: $V_{τελ} = \frac{1}{2} \frac{C_1^2 V^2}{C_1 + C_2}$ (4)

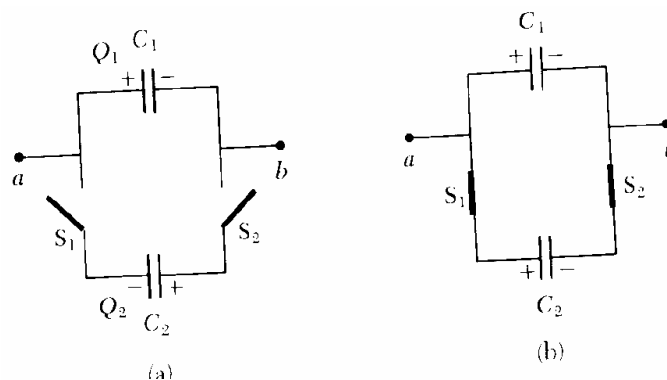
Αφαιρώ κατά μέλη την (4) από την (1) :

$$V_{τελ} - V_0 = \frac{1}{2} \frac{C_1^2 V^2}{C_1 + C_2} - \frac{1}{2} C_1 V^2 = \frac{1}{2} C_1 V^2 * \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{τελ} - V_0 = -0.5 \text{ joules}$$

Άσκηση 7

Δυο φορτισμένοι πυκνωτές C_1 και C_2 (όπου $C_1 > C_2$) έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού V_0 αλλά αντίθετη πολικότητα. Τους αποσυνδέουμε από την μπαταρία και τους συνδέουμε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Κατόπιν κλείνουμε τους διακόπτες S_1 και S_2 όπως φαίνεται επίσης στο παρακάτω σχήμα. (α) Υπολογίστε την τελική διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία a και b , αφού κλείσουν οι διακόπτες. (β) Βρείτε την ολική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στους πυκνωτές προτού και αφού κλείσουν οι διακόπτες



Λύση

$$(α) \quad V_{ab} = V_{c1} = V_{c2}$$

Πριν κλείσουν οι διακόπτες τα φορτία των πυκνωτών είναι:

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = C_1 V_0 \\ Q_2 = C_2 V_0 \end{array} \right\}$$

Με το που θα κλείσουν οι διακόπτες S_1 και S_2 το φορτίο θα ανακατανεμηθεί αλλά το ολικό φορτίο διατηρείται .ΑΡΑ:

$$Q_{ol} = Q_{tel} = Q_1 + Q_2 = (C_1 - C_2) * V_0$$

Οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα απότε έχουν την ίδια τάση στα άκρα τους. Η ολική χωρητικότητα ισούται με:

$$C_{ol} = \frac{Q}{V} \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{Q}{V} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right) * V_0$$

(β) Η ολική ενέργεια πριν κλείσουν οι διακόπτες είναι:

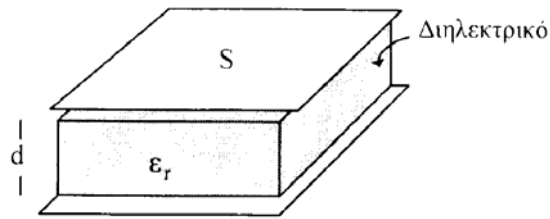
$$U_{ol} = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = \frac{1}{2} (C_1 + C_2) V_0^2 \quad (2)$$

Μετά από το κλείσιμο του διακόπτη η ενέργεια είναι ίση με:

$$\begin{aligned} U_{tel_{ol}} &= U_{1_{tel}} + U_{2_{tel}} = \frac{1}{2} C_1 V_{tel}^2 + \frac{1}{2} C_2 V_{tel}^2 = \\ &= \frac{1}{2} (C_1 + C_2) * \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 V_0^2 = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} \right)^2 U_i \end{aligned}$$

Άσκηση 8

Ένας επίπεδος πυκνωτής με οπλισμούς εμβαδού S που βρίσκονται σε απόσταση d μεταξύ τους είναι γεμάτος με μονωτικό υλικό σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_r . Να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή αυτού.



Λύση

Παρουσία διηλεκτρικού η χωρητικότητα ενός πυκνωτή μεγαλώνει. Έτσι:

$$C = kC_0 = k \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (1)$$

Το $k = \epsilon_r$ ονομάζεται σχετική διηλεκτρική σταθερά και είναι ίση με

$$k = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$$

Την (1) θέλουμε να την αποδείξουμε:

Ξεκινάμε από τον νόμο Gauss για διηλεκτρικά :

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta S = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = \frac{Q}{S} \quad (2)$$

Όπου Q είναι τα ελεύθερα φορτία του απλισμού του πυκνωτή.

Η σχέση που συνδέει την διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$ με το Η.Π είναι:

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow^{(2)} E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \quad (3)$$

Η διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των οπλισμών του είναι:

$$E = -\vec{V} \cdot \Delta V \Rightarrow \Delta V = \int_0^d E dx = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \int_0^d dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Delta V = \frac{Qd}{\epsilon_0 \epsilon_r S} \quad (4)$$

Επομένως:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \stackrel{(4)}{=} \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r SQ}{Qd} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \varepsilon_r C_0$$

Άσκηση 9

Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει διαστάσεις $2\text{cm} \times 3\text{cm}$. Οι οπλισμοί χωρίζονται με χαρτί πάχους 1mm . (α) Υπολογίστε την χωρητικότητα του, (β) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που μπορούμε να θέσουμε στον πυκνωτή αυτό;

Λύση

(α) Η χωρητικότητα του πυκνωτή δίνεται από την σχέση:

$$C = k \frac{\varepsilon_0 A}{d} = (3.7) * (8.85 * 10^{-12} \text{C}^2 / \text{Nm}^2) * \left(\frac{6 * 10^{-4} \text{m}^2}{10^{-3} \text{m}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = 19.6 * 10^{-12} \text{F} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = 19.6 \text{pF}$$

(β) Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή ορίζεται από την γενικότερη σχέση:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow Q = C * V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{\max} = C * V_{\max}^{(1)}$$

$$V_{\max} = E_{\max} * d \quad (2)$$

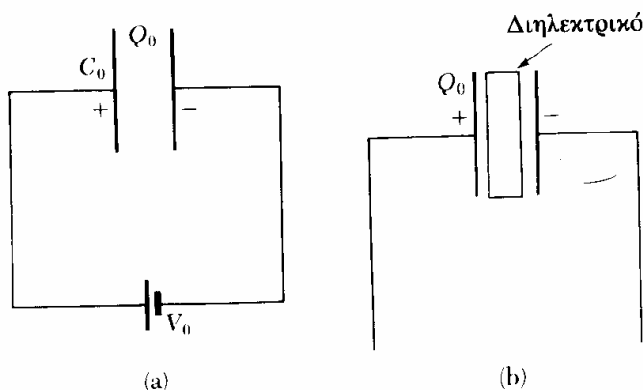
$E_{\max}$ = το μέγιστο Η.Π που μπορεί να αντέξει το χαρτί που από πίνακα βρίσκεται ότι είναι ίσο με $16 * 10^6 \text{ Volt/m}$ Άρα:

$$\Rightarrow^{(1)} Q_{\max} = C * E_{\max} d = 19.6 * 10^{-12} * 16 * 10^6 * 10^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q_{\max} = 313.6 * 10^{-9} = 0.31 \mu\text{C}$$

Άσκηση 10

Χρησιμοποιώντας μπαταρία φορτίζουμε έναν επίπεδο πυκνωτή με φορτίο Q_0 όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα (a). Αποσυνδέουμε κατόπιν την μπαταρία και εισάγουμε ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή διηλεκτρικό σταθεράς k όπως φαίνεται επίσης στο παρακάτω σχήμα (b). Βρείτε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στον πυκνωτή πριν και μετά από την εισαγωγή του διηλεκτρικού



Λύση

Χωρίς το διηλεκτρικό έχουμε ότι:

$$U_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} C_0 \frac{Q_0^2}{C_0^2} = \frac{Q_0^2}{2C_0} \quad (1)$$

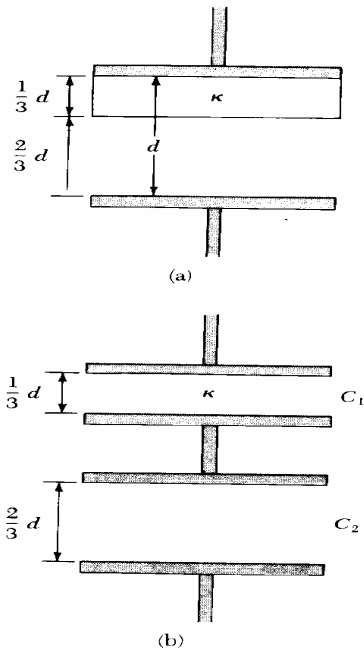
Με την εισαγωγή του διηλεκτρικού διηλεκτρικής σταθερά K η χωρητικότητα του πυκνωτή γίνεται $C = kC_0$ και επίσης το φορτίο Q_0 διατηρείται. Άρα:

$$U_{tel} = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2kC_0} = \frac{U_0}{k} \quad (2)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η αποθηκευμένη ενέργεια είναι μικρότερη με την εισαγωγή του διηλεκτρικού. Η ενέργεια που λείπει έχει καταναλωθεί κατά την διάρκεια της εισαγωγής του διηλεκτρικού διότι τα φορτία του πυκνωτή έλκουν το διηλεκτρικό καθώς το εισάγουμε και εμείς πρέπει να παράγουμε αρνητικό έργο για να μην επιταχυνθεί το διηλεκτρικό. Το έργο αυτό ισούται με την διαφορά ενέργειας $U - U_0$

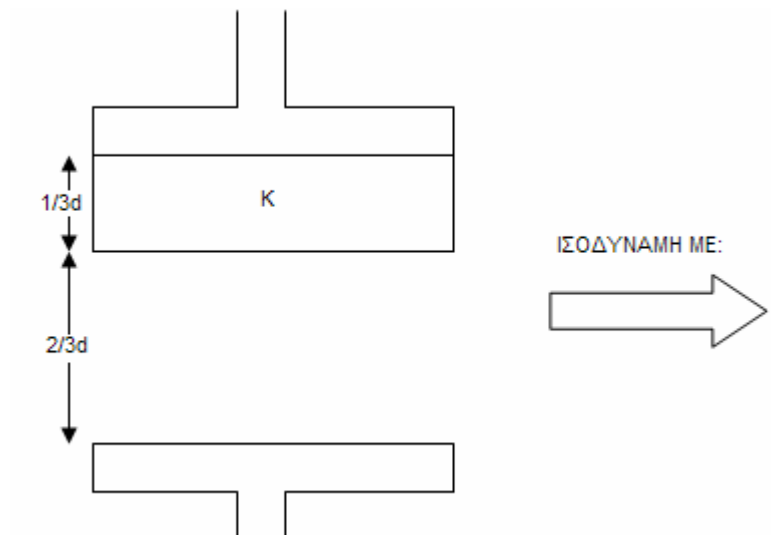
Άσκηση 11

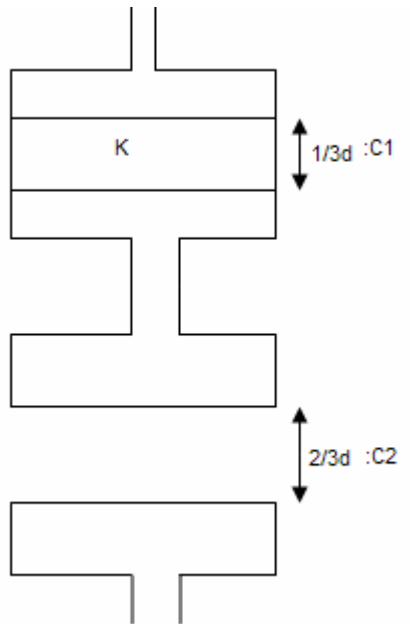
Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει χωρητικότητα C_0 όταν δεν υπάρχει σε αυτόν διηλεκτρικό. Τοποθετούμε ανάμεσα στους οπλισμούς του διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθεράς κ και πάχους $d/3$. Υπολογίστε την χωρητικότητα του με παρουσία διηλεκτρικού.



Λύση

Αρχικά:





Πατηρούμε ότι ο αρχικός πυκνωτής ισοδυναμεί με 2 πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά με τον χώρο του 1^{ου} πυκνωτή να είναι κατηλλειμένος με διηλεκτρικό διηλεκτρικής σταθερας K ενώ ο χώρος ανάμεσα στους οπλισμούς του 2^{ου} είναι άδειο.

Η ολική χωρητικότητα 2 πυκνωτών που συνδέονται σε σειρά είναι:

$$\frac{1}{C_{ol}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (1)$$

Η χωρητικότητα του αρχικού επίπεδου πυκνωτή δίνεται από:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad (2)$$

Από σχήμα έχω:

$$C_1 = k \frac{\epsilon_0 S}{\frac{1}{3}d} = 3kC_0 \quad (3)$$

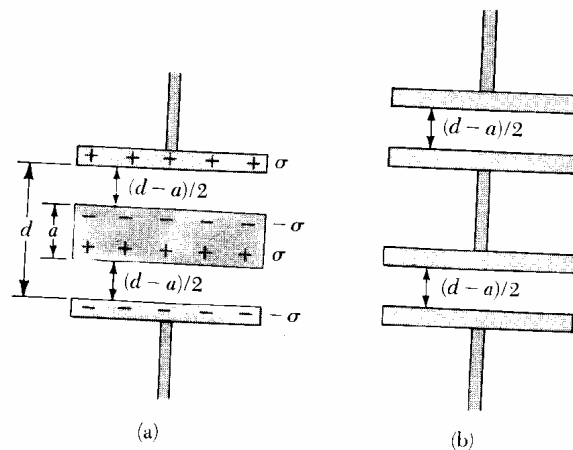
$$C_2 = \epsilon_0 \frac{S}{\frac{2}{3}d} = \frac{3\epsilon_0 S}{2d} = \frac{3}{2}C_0 \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{ol}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{3kC_0} + \frac{1}{\frac{3}{2}C_0} = \\ &= \frac{1}{3kC_0} + \frac{2}{3C_0} = \frac{1+2k}{3kC_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_{ol} = \frac{3k}{(1+2k)} C_0\end{aligned}$$

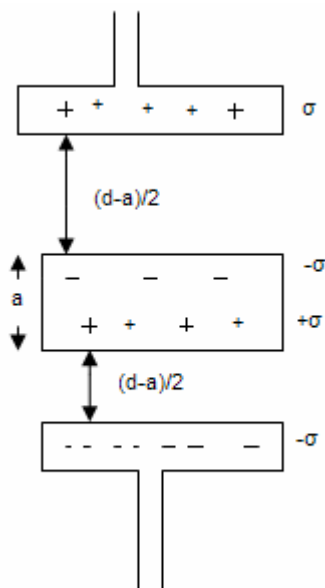
Άσκηση 12

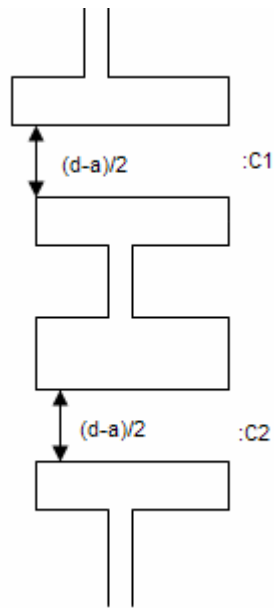
Οι οπλισμοί ενός επίπεδου πυκνωτή έχουν επιφάνεια A και έχουν μεταξύ τους απόσταση d . Εισάγουμε στο μέσον της απόστασης των δυο οπλισμών μια αφόρτιστη μεταλλική πλάκα πάχους a όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Υπολογίστε την χωρητικότητα του συστήματος.



Λύση

Το φορτίο του οπλισμού επάγει ίσο και αντίθετο φορτίο στην επιφάνεια της μεταλλικής πλάκας. Επομένως το Η.Π μέσα στην πλάκα είναι μηδέν. $\Rightarrow$ (ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΙ)





Παρατηρούμε ότι η συνολική χωρητικότητα είναι:

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (1)$$

$$C_1 = C_2 = \epsilon_0 \frac{2A}{(d-a)} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{ολ}} &= \frac{2}{C_1} = \frac{2}{\frac{\epsilon_0 2A}{(d-a)}} = \frac{(d-a)}{\epsilon_0 A} \\ \Rightarrow C_{ολ} &= \frac{\epsilon_0 A}{(d-a)} \end{aligned}$$

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η ενέργεια αλληλεπίδρασης για μια χωρική πυκνότητα φορτίων ρ δίνεται από την σχέση $U = \int E^2 dV$

Λύση

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ φορτίων μιας χωρικής κατανομής δίνεται από την σχέση:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_j q_i \quad (1)$$

Εάν η κατανομή είναι συνεχής με πυκνότητα ρ η (1) μπορεί να γραφεί ως:

$$\left. \begin{aligned} U_{ij} &= \frac{1}{2} \int V dq \\ dq &= \rho dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int V \rho dV \quad (2)$$

Από διαφορική μορφή νόμου Gauss έχω:

$$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \nabla E \quad (3)$$

Αντικαθιστώ την (3) στην (2) άρα:

$$U = \frac{1}{2} \int V \epsilon_0 \nabla V dV \quad (4)$$

$$\nabla \cdot (VE) = V(\nabla E) + E(\nabla V) = V(\nabla E) - E^2 \quad (5)$$

Εάν ολοκληρώσω την (5) σε μις σφαίρα ακτίνας $R \rightarrow \infty$ και επίσης:

$$\begin{aligned} V &\sim \frac{1}{r} \\ E &\sim \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad \text{άρα το γινόμενο } V \cdot E \sim \frac{1}{r^3} \rightarrow 0$$

Επομένως στην (5) έχω:

$$V(\nabla E) = E^2 \quad (6)$$

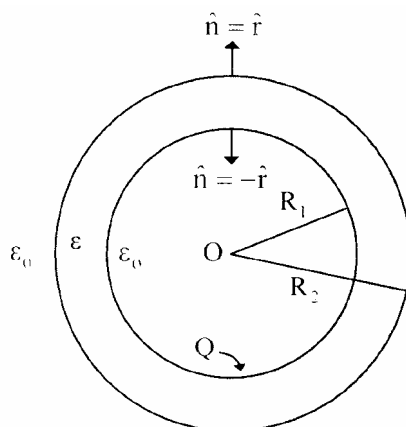
Αντικαθιστώ την (6) στην (4) άρα:

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

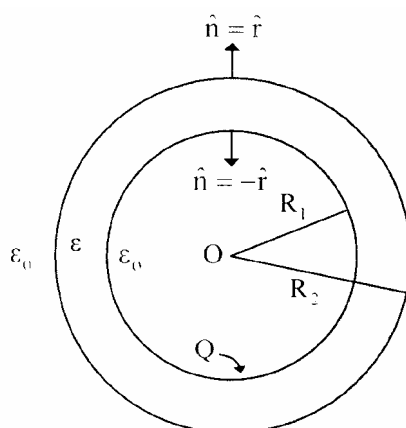
Άσκηση 14

Ο χώρος μεταξύ 2 ομόκεντρων σφαιρικών επιφανειών ακτίνων R_1 και R_2 είναι γεμάτος με διηλεκτρικό απόλυτης διηλεκτρικής σταθεράς ϵ , ενώ η εσωτερική

σφαιρική επιφάνεια είναι φορτισμένη με φορτίο Q . Να υπολογιστούν τα μεγέθη $\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}$ καθώς και οι πυκνότητες των δέσμιων φορτίων σ_p και ρ_p παντού στο χώρο.



Λύση



Η διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$ δίνεται από την σχέση:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (1)$$

Εφόσον δεν γνωρίζουμε τα μεγέθη $\vec{E}, \vec{P}$ θα υπολογίσουμε την διηλεκτρική μετατόπιση μέσω του νόμου του Gauss για τα διηλεκτρικά:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_f$$

$$\text{Για } r < R_1 \quad \oint_S \vec{D}_1 d\vec{S} = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

$$\text{Για } R_1 < r < R_2 : \oint_S \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = q_F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \oint_S D_2 dS = q_F \Leftrightarrow D_2 4\pi r^2 = q_F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_2 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\text{Για } r > R_2 : \oint \vec{D}_3 dS = q_F \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_3 4\pi r^2 = Q \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_3 = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ συνδέεται με την διηλεκτρική μετατόπιση $\vec{D}$ με την σχέση:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} r < R_1 = 0 \text{ Nt/Cb} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r < R_2 = \frac{Q}{\varepsilon 4\pi r^2} \hat{r} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r > R_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \hat{r} \end{array} \right.$$

Το διάνυσμα της πόλωσης $\vec{P}$ μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση (1):

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \left\{ \begin{array}{l} r < R_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 < r < R_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} - \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r > R_2 = \frac{Q}{4\pi r^2} - \varepsilon_0 \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = 0 \end{array} \right.$$

Η επιφανειακή πυκνότητα σ_p δίνεται μέσω της σχέσης :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (2)$$

$$\text{Για } r < R_1 : \sigma_p = 0 \text{ Cb/m}^2$$

Για $r = R_1$ έχω : $\hat{n} = -\hat{r}$ οπότε απο (2) έχω;

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \hat{r} * \hat{n} = \\ &= \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \hat{r} * (-\hat{r}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma_p = \frac{Q}{4\pi R_1^2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)\end{aligned}$$

Για την εξωτερική επιφάνεια όπου $r = R_2$ έχω:

$\hat{r} = \hat{n}$ επομένως:

$$\sigma_p = \vec{P} * \hat{n} = \frac{Q}{4\pi R_2^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)$$

Η χωρική πυκνότητα p_p δίνεται απο την γενικότερη σχέση:

$$p_p = -\vec{\nabla} * \vec{P} \quad (3)$$

Η πόλωση $\vec{P}$ είδαμε ότι είναι ίση με:

$$\left. \begin{aligned}\vec{P} &= \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \hat{r} \\ \hat{r} &= \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{P} &= \frac{Q}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{\vec{r}}{r} = \\ &= \frac{Q}{4\pi r^3} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \vec{r} = \\ &= \frac{Q}{4\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^{3/2}} \quad (4)\end{aligned}$$

Από 4 η 3 γράφεται:

$$p_p = -(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}) \left[\frac{Q}{4\pi} (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \left(\frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_p = -\frac{Q}{4\pi} (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_p = \frac{Q}{4\pi} (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} (x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2) = 0$$

Άρα $p_p = 0$ δηλαδή τα χωρικά δέσματα φορτία είναι μηδέν.