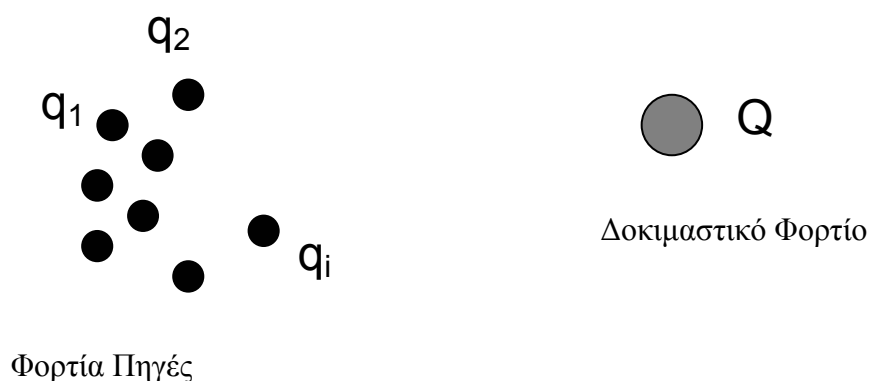


Κεφάλαιο 2^ο : ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

2.1 Το Ηλεκτροστατικό Πεδίο

2.1.1 Εισαγωγή

Το θεμελιώδες πρόβλημα της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας είναι ο υπολογισμός της δύναμης που ασκεί μια ομάδα σημειακών ηλεκτρικών φορτίων $q_1, q_2, \dots, q_N$ (φορτία πηγές) σε ένα φορτίο Q (δοκιμαστικό φορτίο).



Σχήμα 2.1

Τα φορτία – πηγές αλλά και το δοκιμαστικό φορτίο μπορούν να βρίσκονται σε κίνηση.

Με την βοήθεια της **αρχής της επαλληλίας** μπορούμε να υπολογίσουμε την δύναμη αυτή. Σύμφωνα με την παραπάνω αρχή η αλληλεπίδραση μεταξύ 2 οποιανδήποτε σημειακών φορτίων δεν επηρεάζεται καθόλου από παρουσία άλλων φορτίων. Αυτό σημαίνει για να υπολογίσουμε την δύναμη στο Q μπορούμε πρώτα να υπολογίσουμε την δύναμη F_1 που οφείλεται στο q_1 μόνο (αγνοώντας όλα τα άλλα), μετά να υπολογίσουμε την δύναμη F_2 , που οφείλεται στο q_2 μόνο και ούτως καθεξής. Τέλος βρίσκουμε το διανυσματικό άθροισμα όλων των μεμονωμένων δυνάμεων $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$.

Η δύναμη στο Q δεν εξαρτάται μονάχα από την απόσταση που το χωρίζει από το κάθε φορτίο πηγή αλλά και από τις 2 ταχύτητες τους καθώς και από την επιτάχυνση του q . Λόγω του ότι τα «νέα» στον ηλεκτρομαγνητισμό ταξιδεύουν με την ταχύτητα

του φωτός, έτσι το Q το ενδιαφέρει η θέση, ταχύτητα και η επιτάχυνση που είχε το q όταν το μήνυμα έφυγε από αυτό.

Στην αρχή αυτού του μαθήματος θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου όλα τα φορτία πηγές είναι ακίνητα (τα δοκιμαστικά φορτία μπορούν να κινούνται). Η κατάσταση αυτή είναι γνωστή ως **Ηλεκτροστατική**.

2.1.2 Το ηλεκτρικό φορτίο

Η μελέτη της αλληλεπιδράσεως μεταξύ των υλικών σωμάτων οδηγεί στην παραδοχή μιας φυσικής ποσότητας του ηλεκτρικού φορτίου.

Το ηλεκτρικό φορτίο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Στην Φύση απαντούν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου (δυσμός του ηλεκτρικού φορτίου). Τα ομώνυμα φορτία απωθούνται, ενώ τα ετερόνυμα έλκονται.
2. Η δύναμη ανάμεσα σε ηλεκτρικά φορτία είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης τους.
3. Το ηλεκτρικό φορτίο ενός μεμονωμένου συστήματος διατηρείται. Μεμονωμένο είναι εκείνο το σύστημα στο οποίο δεν γίνεται ανταλλαγή μάζας, άρα και φορτίου, με το περιβάλλον.
4. Το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντισμένο, δηλαδή είναι πολλαπλάσιο του φορτίου του ηλεκτρονίου ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Cb}$).

Μονάδα μέτρησης του φορτίου είναι το Coulomb.

2.1.3 Ο Νόμος του Coulomb

Η δύναμη που ασκείται σε ένα σημειακό φορτίο Q από ένα άλλο σημειακό φορτίο q που ηρεμεί σε απόσταση r δίνεται από τον νόμο του Coulomb σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad (2.1)$$

Η σταθερά ϵ_0 ονομάζεται σταθερά του κενού. Στο S.I. η τιμή της σταθεράς αυτής είναι η ακόλουθη

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \quad (2.2)$$

Για άλλα μέσα από το κενό, η σταθερά ϵ_0 στην σχέση (2.1) αντικαθίστανται από την $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ όπου η ϵ_r ονομάζεται σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα του μέσου (ένας καθαρός αριθμός). Σε όλα τα προβλήματα και παραδείγματα υποθέτουμε ότι έχουμε κενό και δεχόμαστε την προσεγγιστική τιμή του ϵ_0 εκτός αν δηλώνεται σαφώς κάτι διαφορετικό.

Ο νόμος του Coulomb μπορεί να εκφραστεί επίσης χρησιμοποιώντας την σταθερά του Coulomb k

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \quad (2.3)$$

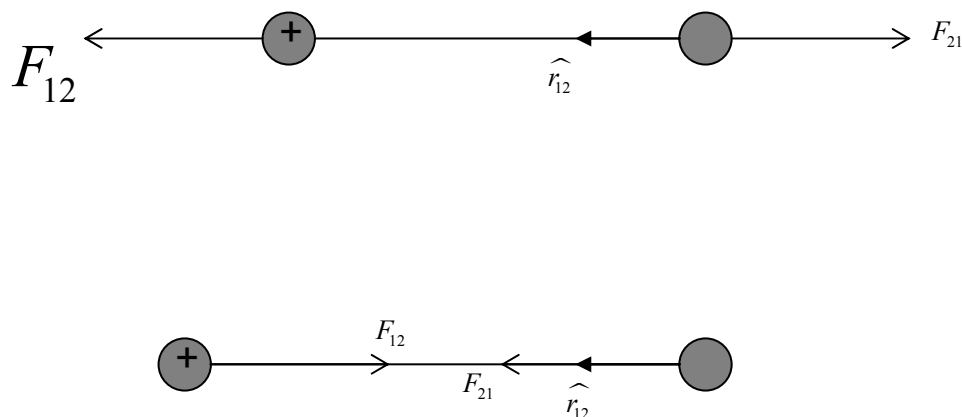
Στον παρακάτω πίνακα περιέχονται τα φορτία και οι μάζες του ηλεκτρονίου, του πρωτονίου και η μάζα του νετρονίου.

Σωματίδιο	Φορτίο (C)	Μάζα (Kg)
Ηλεκτρόνιο (e)	$-1.6021917 \times 10^{-19}$	9.1095×10^{-31}
Πρωτόνιο (p)	$1.6021917 \times 10^{-19}$	1.67261×10^{-27}
Νετρόνιο (n)	0	1.67492×10^{-27}

Όταν χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb δεν πρέπει να λησμονούμε ποτέ ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος. Να σημειωθεί επίσης ότι ο νόμος του Coulomb ισχύει ακριβώς μόνο για σημειακά φορτία.

Εάν συμβολίσουμε με $\hat{r}_{12}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το φορτίο q_2 στο στοιχειώδες φορτίο q_1 τότε συμβολίζοντας με F_{12} την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το φορτίο q_2 στο q_1 , μπορούμε να γράψουμε την διανυσματική σχέση

$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.2: Δύναμη Coulomb

Από 2^ο νόμο του Νεύτωνα η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται από το q_1 στο q_2 είναι ίση σε μέτρο με την δύναμη που ασκεί το φορτίο q_2 στο q_1 αλλά αντίθετη σε κατεύθυνση, δηλαδή $F_{12} = -F_{21}$.

Βλέπουμε ότι η σχέση που εκφράζει η δύναμη του Coulomb είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης που χωρίζει τα 2 φορτία. Επίσης η δύναμη του Coulomb είναι ανάλογη με το γινόμενο των φορτίων. Ασκήεται κατά μήκος της ευθείας που ενώνει το Q με το q δηλαδή είναι μια κεντρική δύναμη. Είναι απωστική, όπως είπαμε και προηγουμένως, ανάμεσα σε ομόσημα φορτία και απωστική ανάμεσα σε ετερόσημα φορτία.

Επίσης η δύναμη Coulomb εξαρτάται και από το μέσο στο οποίο είναι τοποθετημένο τα φορτία αφού μεταβάλλεται η τιμή της σταθεράς $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Γενικά οι δυνάμεις Coulomb είναι αρκετές τάξεις μεγέθους ισχυρότερες από τις δυνάμεις της παγκόσμιας έλξης (βαρυτικές).

2.1.4 Το Ηλεκτρικό Πεδίο

Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου E (ή αλλιώς το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου) σε ένα τυχαίο σημείο του χώρου είναι εξ ορισμού ίσο προς το

πηλίκο της δύναμης που ασκείται πάνω σε ένα δοκιμαστικό θετικό φορτίο q_o , που βρίσκεται στο σημείο αυτό, δια του φορτίου αυτού, q_o .

$$E \equiv \frac{F}{q_o} \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας την δύναμη F από την σχέση (2.4) από την (2.5) παίρνουμε

$$E = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (2.6)$$

οπού Q είναι το φορτίο πηγή του ηλεκτρικού πεδίου E .

Να σημειωθεί ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E περιγράφει το εξωτερικό προς το q_o πεδίο, δηλαδή δεν περιγράφει το πεδίο που παράγει το ίδιο το q_o . Από την σχέση (2.5) είναι εύκολο να εξαγάγουμε τις μονάδες μέτρησης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, που είναι το Nt/Cb .

Η διεύθυνση του E είναι η ίδια με αυτήν της δύναμης F . Το ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου ανεξάρτητα εάν τοποθετήσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο στο σημείο αυτό. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια ‘πραγματική’ φυσική οντότητα που γεμίζει τον χώρο γύρω από το ηλεκτρικό φορτίο.

Έστω τώρα ότι έχουμε πολλά σημειακά φορτία και θέλουμε να βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα σημείο του χώρου P (δες παρακάτω σχήμα). Στο παρακάτω σχήμα έχουμε πολλά σημειακά φορτία $q_1, q_2, \dots, q_N$ σε αποστάσεις $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ από το δοκιμαστικό φορτίο Q που υπάρχει στο σημείο P . Η ολική δύναμη που ασκείται στο Q θα είναι το **διανυσματικό άθροισμα** των δυνάμεων που ασκούν τα $q_1, q_2, \dots, q_N$ στο Q . Δηλαδή

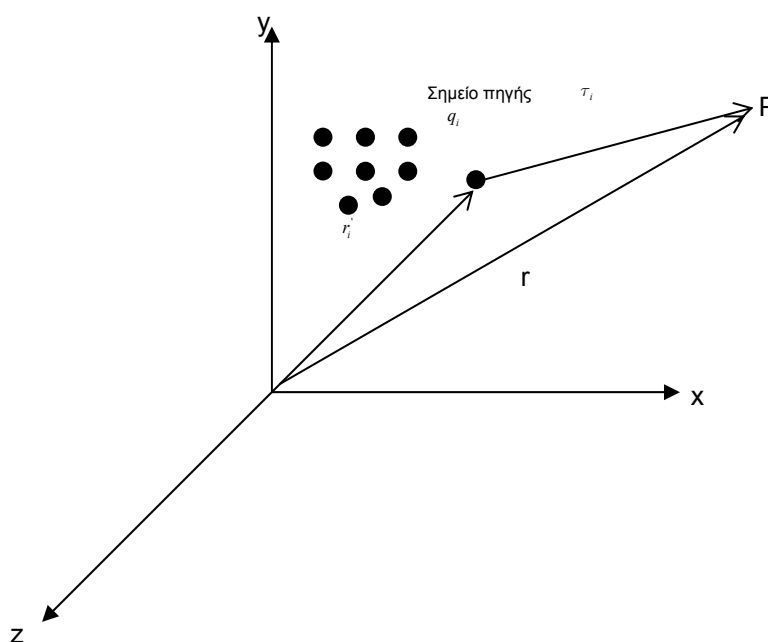
$$F = F_1 + F_2 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q_1 Q}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2 Q}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \dots \right) \quad (2.7)$$

Από σχέσεις (2.5), (2.7) μπορούμε να βγάλουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (2.8)$$

όπου το E είναι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν τα φορτία $q_1, q_2, \dots, q_N$ στο σημείο P και είναι ίσο με το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργεί το κάθε στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο στο σημείο P

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (2.9)$$

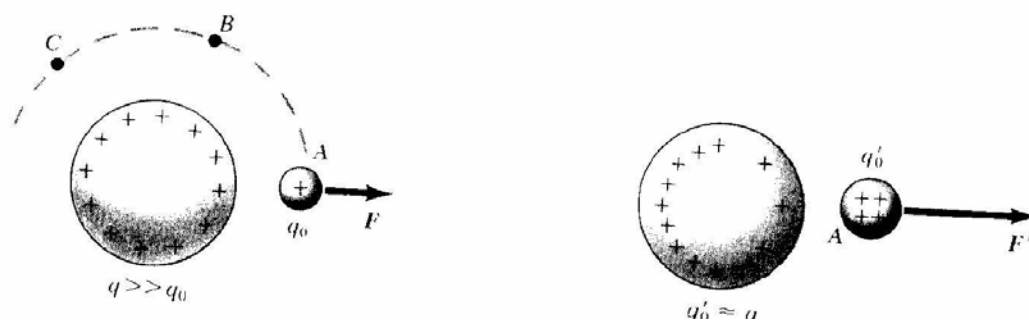


Σχήμα 2.3

Από την σχέση (2.9) βλέπουμε ότι το ολικό ηλεκτρικό πεδίο **εξαρτάται** από την θέση του σημείου P , και το σύστημα των φορτίων q_i και επίσης **δεν εξαρτάται** από το δοκιμαστικό φορτίο Q . Όπως είδαμε και παραπάνω η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ένα **διανυσματικό μέγεθος** και υπολογίζεται με τον τρόπο με τον οποίο είναι διανεμημένα τα φορτία πηγές.

Πρέπει να τονιστεί σε αυτό το σημείο ότι όταν εφαρμόζουμε την εξίσωση (2.5) και κατ' επέκταση την εξίσωση (2.9) θα πρέπει το δοκιμαστικό φορτίο q_0 να είναι επαρκώς μικρό έτσι ώστε να μην επηρεάζει την κατανομή φορτίου που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν το δοκιμαστικό φορτίο έχει μεγάλη τιμή έτσι ώστε να επηρεάζει την κατανομή φορτίου τότε η δύναμη που ασκείται στο δοκιμαστικό φορτίο, άρα και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, σε ίσα

απέχοντα σημεία από την κατανομή δεν είναι η ίδια, όπως προβλέπει ο νόμος του Coulomb άλλα και η σχέση (2.9).

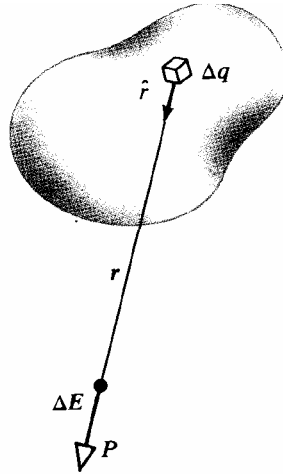


Σχήμα 2.4 (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, δεξ παραπάνω σχήμα, στην πρώτη περίπτωση μπορούμε να εφαρμόσουμε την σχέση (2.5), (2.9) άλλα στην δεύτερη περίπτωση δεν μπορούμε μια και λόγω της ανακατανομής του φορτίου της πηγής του Η.Π. από το μεγάλο δοκιμαστικό φορτίο για το ίδιο σημείο A και για την ίδια κατανομή φορτίου ισχύει $\frac{F_A}{q_o} \neq \frac{F'_A}{q'_o}$.

Συχνά χρειάζεται να μελετήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείτε από συνεχή κατανομή φορτίου. Συνεχή κατανομή φορτίου λέμε ότι έχουμε όταν τα φορτία πηγές βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο συγκριτικά με την απόσταση προς το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο. Το πυκνό αυτό σύστημα ηλεκτρικών φορτίων είναι ισοδύναμο με μια συνεχή κατανομή φορτίων με το ίδιο συνολικό φορτίο κατανεμημένο στην ίδια περιοχή του χώρου ή μιας επιφάνειας.

Η μεθοδολογία που ακολουθούμε για να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου από συνεχή κατανομή φορτίου είναι η ακόλουθη και εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.5: Δημιουργία Ηλεκτροστατικού πεδίου από στοιχειώδες φορτίο (Serway ‘
Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Τις εικονίζεται στο παραπάνω σχήμα χωρίζουμε την κατανομή μου σε πολλά απειροστά κομματάκια και αντιμετωπίζουμε το καθένα από αυτά σαν ένα διακριτό σημειακό φορτίο Δq . Κατόπιν χρησιμοποιούμε τον νόμο του Coulomb, σχέση (2.7), για να υπολογίσουμε το πεδίο που δημιουργεί στο σημείο P το καθένα από τα φορτία Δq . Τέλος βρίσκουμε το συνολικό πεδίο αθροίζοντας, ολοκληρώνοντας, διανυσματικά τα επιμέρους πεδία.

Στο μάθημα αυτό θα ασχοληθούμε με ομογενής κατανομές φορτίου. Το φορτίο είναι ομογενές κατανεμημένο πάνω σε μια ράβδο ή πάνω σε ένα δακτύλιο ή πάνω σε μια σφαίρα για παράδειγμα. Έτσι εισάγονται οι έννοιες τις γραμμικής, επιφανειακής και χωρικής πυκνότητας φορτίου. Οι ορισμοί των εννοιών αυτών είναι

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{l}$$

$$\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{Q}{A} \quad (2.10)$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{Q}{V}$$

Στην (2.10) ορίζονται η γραμμική, η επιφανειακή και η χωρική πυκνότητα τις συνεχούς κατανομής αντίστοιχα. Οι μονάδες μέτρησης των λ , σ και ρ είναι

αντίστοιχα $Cb/m, Cb/m^2, Cb/m^3$. Το ολικό λοιπόν φορτίο πάνω σε μια συνεχή κατανομή φορτίου δίνεται από τις σχέσεις

$$\sum_{i=1}^n q_i \sim \int_{\text{γραμμή}} \lambda dl \sim \int_{\text{επιφάνεια}} \sigma dA \sim \int_{\text{όγκος}} \rho dV \quad (2.11)$$

Έτσι για παράδειγμα το ηλεκτρικό πεδίο μιας γραμμικής πυκνότητας, επιφανειακής και χωρικής πυκνότητας φορτίου σε συνδυασμό των (2.9), (2.11) γράφονται ως

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\text{γραμμή}} \frac{\hat{\tau}}{\tau^2} \lambda dl$$

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\text{επιφάνεια}} \frac{\hat{\tau}}{\tau^2} \sigma dA \quad (2.12)$$

$$E(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int_{\text{όγκος}} \frac{\hat{\tau}}{\tau^2} \rho dV$$

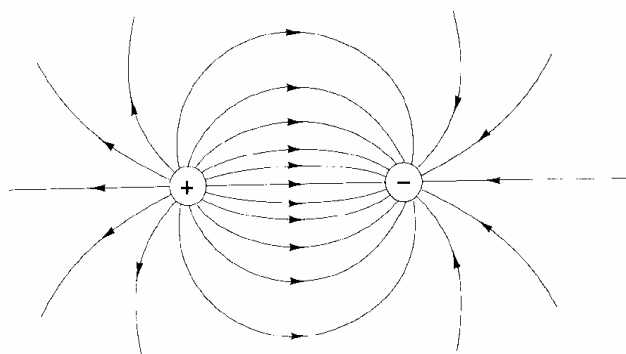
2.1.5 Γραμμές Ηλεκτρικού Πεδίου

Έστω ένα σημειακό φορτίο q . Το σημειακό αυτό φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο. Για να αποκτήσετε μια αίσθηση αυτού του πεδίου σχεδιάζω τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου και με αυτές περιγράφουμε το ηλεκτρικό πεδίο ακολουθώντας τις παρακάτω κανόνες

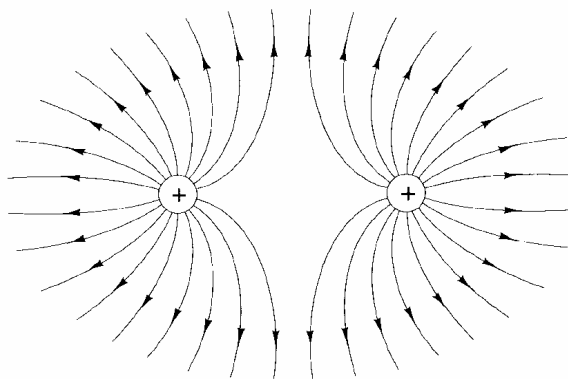
- Η διεύθυνση του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου E εφάπτεται με τις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο.
- Ο αριθμός των γραμμών του πεδίου που διέρχονται μέσα από μια μοναδιαία επιφάνεια κάθετη σε αυτές είναι ανάλογος τις το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή αυτή. Έτσι όπου οι δυναμικές γραμμές είναι πυκνές σε αυτή την περιοχή το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρό και όταν είναι αραιές είναι ασθενές.
- Οι δυναμικές γραμμές εκκινούν από τα θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά ή στο άπειρο όταν υπάρχει πλεονάζον φορτίο.

- Ο αριθμός των γραμμών που απομακρύνονται από ένα θετικό φορτίο ή καταλήγουν σε ένα αρνητικό φορτίο είναι ανάλογος τις το μέτρο του φορτίου (π.χ. εάν από ένα φορτίο q εκκινούν 4 δυναμικές γραμμές τότε σε ένα αρνητικό φορτίο $-2q$ θα καταλήγουν 8 δυναμικές γραμμές).
- Οι δυναμικές γραμμές δεν διασταυρώνονται ποτέ (στο σημείο τομής, το ίδιο πεδίο θα αποκτούσε αμέσως 2 διαφορετικές κατευθύνσεις!!!)

Σκεπτόμενοι τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούμε να σχεδιάσουμε τις δυναμικές γραμμές για οποιονδήποτε απλό σχηματισμό σημειακών φορτίων.



Ίσα και αντίθετα φορτία



Ίσα φορτία

Σχήμα 2.6: Δυναμικές γραμμές ετερόνυμων και ομώνυμων φορτίων (Griffiths, «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

2.1.6 Ο νόμος του Gauss

Ο νόμος του Gauss μας βοηθά να υπολογίσουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μιας συνεχής κατανομής φορτίου η οποία παρουσιάζει συμμετρία. Αυτό γιατί

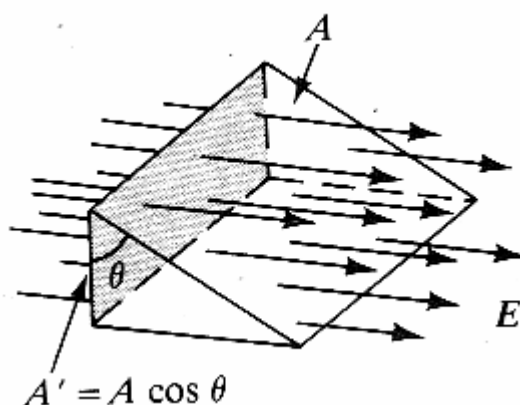
σε ορισμένες περιπτώσεις τα ολοκληρώματα των σχέσεων (2.12) μπορεί να καταστούν πολύ πολύπλοκά. Για να κατανοήσουμε όμως καλύτερα τον νόμο του Gauss θα πρέπει να εξηγήσουμε τι εκφράζει το φυσικό μέγεθος της ηλεκτρικής ροής.

Η ηλεκτρική ροή ή ροή του ηλεκτρικού πεδίου Φ είναι ένα βαθμωτό φυσικό μέγεθος που περιγράφει τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που την διαπερνούν μια επιφάνεια.

Όταν η επιφάνεια περικλείει ηλεκτρικό φορτίο τότε ο αριθμός των γραμμών που την διαπερνούν είναι ανάλογος προς το εγκλωβισμένο φορτίο.

Από παράγραφο που περιγράψαμε τι εκφράζουν οι δυναμικές γραμμές γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν μια επιφάνεια είναι ανάλογος με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια.

Έστω η παρακάτω επιφάνεια η οποία βρίσκεται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$.



Σχήμα 2.7: Ηλεκτρική Ροή μέσα από επιφάνεια εμβαδού A (Serway ‘
Ηλεκτρομαγνητισμός’)

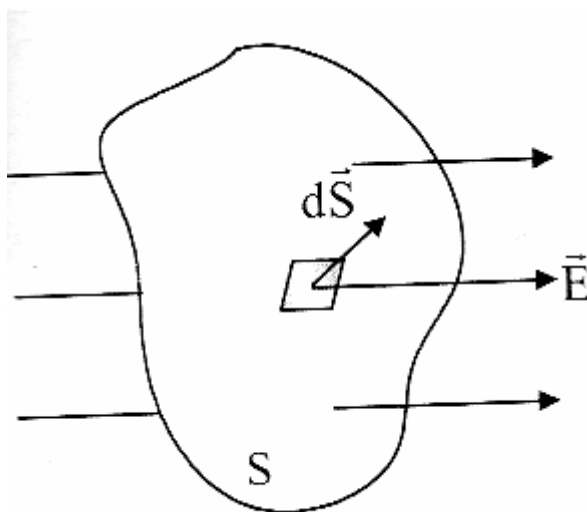
Η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την παραπάνω επιφάνεια δίνεται από την σχέση

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = |E||A|\cos\theta \quad (2.13)$$

Από την παραπάνω τιμή προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της ροής, EA , που διαπερνά μια σταθερή επιφάνεια είναι μέγιστο στην περίπτωση που η επιφάνεια είναι κάθετη στην διεύθυνση της έντασης του πεδίου (ή ισοδύναμα, όταν η κάθετος στην επιφάνεια είναι παράλληλη προς το πεδίο, δηλαδή $\theta = 0^\circ$). Η ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια

επιφάνεια είναι μηδέν όταν η επιφάνεια αυτή είναι παράλληλη προς το ηλεκτρικό πεδίο. Μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ροής στο S.I. είναι το $1 \text{ Nm}^2 / \text{Cb}$.

Στη γενική περίπτωση κατά την οποία μια επιφάνεια δεν έχει απλό συμμετρικό σχήμα, το ηλεκτρικό πεδίο δεν τέμνει την επιφάνεια κατά την ίδια γωνιά παντού. Έτσι ο ορισμός που δώσαμε προηγουμένως ισχύει γενικά μονάχα για μικρά στοιχεία της επιφάνειας. Η γενική αυτή περίπτωση απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Σε αυτή την περίπτωση για να υπολογίσουμε την ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μέσα από την επιφάνεια χωρίζουμε την επιφάνεια σε στοιχειώδεις επιφάνειες dS όπου θεωρώ ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση.



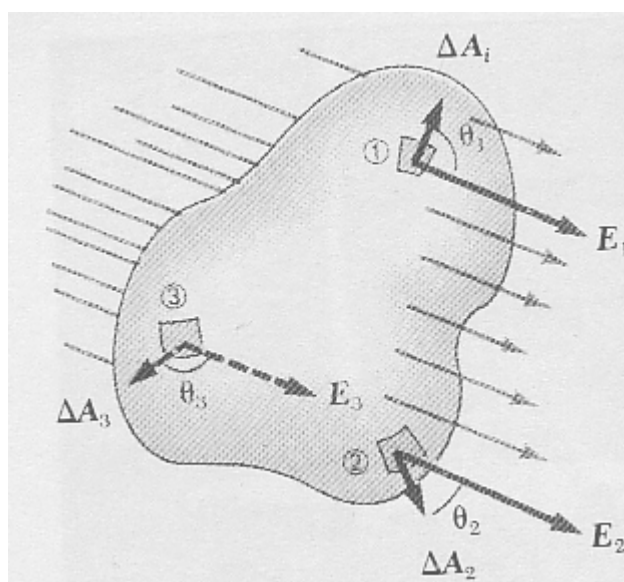
Σχήμα 2.8 (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Εάν τώρα αθροίσουμε όλες τις στοιχειώδεις ηλεκτρικές ροές μέσα από τις στοιχειώδεις επιφάνειες dS υπολογίζουμε την ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια S . Η ολική ροή που διαπερνά την επιφάνεια S δίνεται λοιπόν από την σχέση

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S E \cos \theta dS \quad (2.14)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ροή μέσα από μια επιφάνεια δεν εξαρτάται μονάχα από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου αλλά και από την επιφάνεια η οποία διαπερνάτε από τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.

Συνήθως μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια. Μια τέτοια επιφάνεια είναι η επιφάνεια που χωρίζει τον χώρο σε δύο περιοχές, μια εσωτερική και μια εξωτερική έτσι ώστε να μην είναι δυνατή η μετάβαση από την εσωτερική στην εξωτερική περιοχή χωρίς να διαπεράσουμε την επιφάνεια.



Σχήμα 2.9: Ηλεκτρική Ροή μέσα από κλειστή επιφάνεια (Serway ‘
Ηλεκτρομαγνητισμός’)

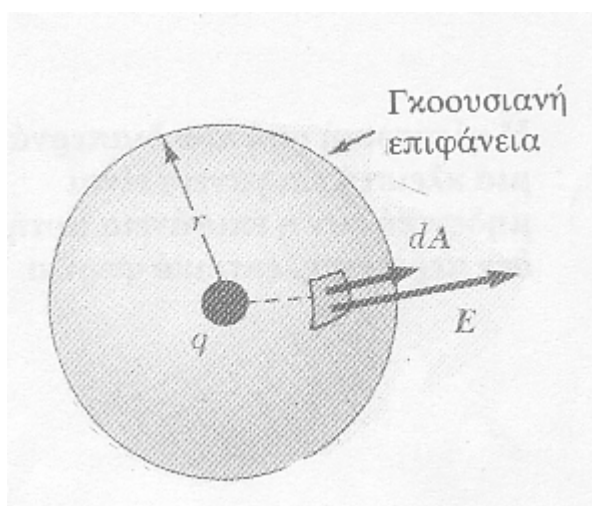
Παρατηρούμε ότι τα κάθετα διανύσματα ΔA_i έχουν διαφορετικές κατευθύνσεις, και όλα κατευθύνονται προς τα έξω, δηλαδή απομακρύνονται από την επιφάνεια. Στα στοιχεία 1&2 που εικονίζονται στο παραπάνω σχήμα το πεδίο κατευθύνεται προς τα έξω και επομένως η γωνία θ που σχηματίζει με τις αντίστοιχες καθέτους των μικρών στοιχείων επιφάνειας είναι $\theta < 90^\circ$, επομένως η ροή που τις διαπερνά είναι θετική, άλλα στοιχεία επιφάνειας όπως το 3 το πεδίο κατευθύνεται προς την επιφάνεια επομένως η γωνία θ με το κάθετο στην στοιχειώδη επιφάνεια διάνυσμα ΔA_i είναι $\theta > 90^\circ$ και επομένως η ροή είναι αρνητική. Η ολική ροή λοιπόν που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη με τον ολικό αριθμό των δυναμικών γραμμών που την διαπερνούν. Ορίζουμε ως ολικό αριθμό των δυναμικών γραμμών που διαπερνούν μια επιφάνεια τη διαφορά του αριθμού των γραμμών που εξέρχονται από την επιφάνεια μείον τον αριθμό των δυναμικών γραμμών που εισέρχονται σε αυτήν. Η ροή είναι θετική εάν από την επιφάνεια εξέρχονται περισσότερες γραμμές από όσες εισέρχονται. Σε αντίθετη περίπτωση η ροή είναι αρνητική. Γράφουμε λοιπόν ότι η

ολική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια Φ_e δίνεται από το παρακάτω επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\oint E \cdot da = \oint E_n da \quad (2.15)$$

Οπού E_n είναι η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι κάθετη στην επιφάνεια.

Όπως είδαμε παραπάνω η ροή του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή η ηλεκτρική ροή Φ , $\vec{E}$ μέσα από μια επιφάνεια είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών που την διαπερνούν. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σημειακό φορτίο q το οποίο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και μέσα σε μια σφαίρα ακτίνας r .



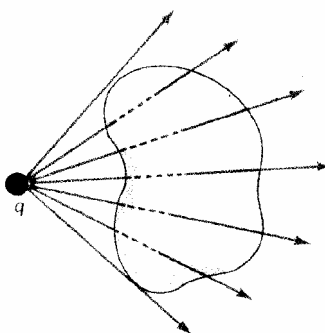
Σχήμα 2.10: Νόμος του Gauss (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Η ηλεκτρική ροή μέσα από την κλειστή επιφάνεια, η οποία ονομάζεται γκαουσιανή επιφάνεια, δίνεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα το οποίο προς χάριν συμμετρίας άλλα και ευκολίας έχει υπολογιστεί σε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\oint E \cdot da = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r^2} \hat{r} \right) (r^2 \sin\theta d\theta d\phi) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

Από την σχέση (2.16) παρατηρούμε ότι η ακτίνα της σφαίρας απλοποιείται, διότι ενώ η επιφάνεια της σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό r^2 το πεδίο μειώνεται με ρυθμό $1/r^2$, οπότε το γινόμενο τους παραμένει σταθερό. Στην πραγματικότητα η γκαουσιανή

επιφάνεια δεν χρειαζόταν να είναι σφαιρική μπορούσε να είχε οποιοδήποτε σχήμα. Στην πραγματικότητα η καθαρή ροή που ρέει δια μέσου μιας κλειστής επιφάνειας είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της επιφάνειας (εφόσον η τελευταία περιέχει φορτίο). Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι η ροή ενός πεδίου μέσα από οποιαδήποτε επιφάνεια που περικλείει το φορτίο είναι ίση με $\frac{q}{\epsilon_0}$. Επίσης απόρροια όλων των παραπάνω είναι ότι ένα έχουμε ηλεκτρικό φορτίο έξω από την κλειστή επιφάνεια, και η τελευταία δεν εγκλείει κανένα φορτίο, τότε η ολική ροή που ρέει μέσα από την επιφάνεια είναι μηδέν (δες παρακάτω σχήμα). Αυτό γιατί όσες δυναμικές γραμμές εισέρχονται τόσες εξέρχονται άρα η ολική ροή είναι μηδέν.



Σχήμα 2.11 (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Επομένως η ολική ροή που διαρρέει μια κλειστή επιφάνεια που δεν περιέχει φορτίο είναι μηδέν.

Υποθέστε τώρα ότι αντί για ένα σημειακό φορτίο στην αρχή των αξόνων είχαμε N σημειακά φορτία. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας το συνολικό πεδίο είναι το διανυσματικό άθροισμα όλων των ξεχωριστών πεδίων, δες εξίσωση (2.9). Η ροή λοιπόν μέσα από οποιαδήποτε επιφάνεια που περιβάλλει τα φορτία αυτά είναι ίση με

$$\oint E \cdot da = \sum_{i=1}^N \left(\oint E_i \cdot da \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\epsilon_0} q_i \right) \quad (2.17)$$

Συνάγεται λοιπόν για μια κλειστή επιφάνεια έχουμε

$$\oint_{\text{επιφάνεια}} E \cdot da = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{εγκ}} \quad (2.18)$$

Όπου $Q_{\text{εγκ}}$ είναι το ολικό έγκλειστο στην επιφάνεια φορτίο. Αυτός είναι ο **νόμος του Gauss** που με λόγια μας πληροφορεί ότι

Ο νόμος του Gauss ορίζει ότι η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια κλειστή γκαουσιανή επιφάνεια ισούται με το πηλίκο του ολικού φορτίου που περιέχει η επιφάνεια διαιρούμενου δια του ϵ_0 .

Προσοχή να θυμάστε ότι στην σχέση (2.18) το E είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν φορτία μέσα και έξω από την κλειστή επιφάνεια ενώ το $Q_{\text{εγκ}}$ είναι το φορτίο που περιέχεται από την κλειστή επιφάνεια και μόνο.

Η κλειστή επιφάνεια πάνω στην οποία εφαρμόζεται ο νόμος του Gauss ονομάζεται **Γκαουσιανή επιφάνεια**. Η τελευταία είναι μια φανταστική επιφάνεια το σχήμα της οποίας υποδεικνύει το γεωμετρικό σχήμα της κατανομής φορτίου. Δηλαδή σφαιρικές κατανομές φορτίων υποδεικνύουν την χρήση σφαιρικής επιφάνειας, οι κυλινδρικές την κυλινδρική επιφάνεια κ.ο.κ. Κατά την εφαρμογή του νόμου του Gauss η ένταση $\vec{E}$ είναι σταθερού μέτρου και παράλληλη στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα αυτής dS με συνέπεια ο υπολογισμός της ηλεκτρικής ροής να ανάγεται σε μια απλή διαδικασία. Ο νόμος του Gauss ως έχει, είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση, μπορούμε όμως εύκολα να την μετατρέψουμε σε διαφορική κάνοντας χρήση του θεωρήματος της απόκλισης πεδίου που είδαμε στο 1^ο κεφάλαιο αυτών των σημειώσεων. Έτσι έχουμε

$$\oint_{\text{επιφάνεια}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\text{όγκος}} (\nabla \cdot \vec{E}) dV \quad (2.19)$$

Από εξίσωση (2.18), μπορούμε να γράψουμε το $Q_{\text{εγκ}}$ ως

$$Q_{\text{εγκ}} = \int \rho dV \quad (2.20)$$

Από εξισώσεις (2.18), (2.20) στην (2.19) έχουμε

$$\int_{\text{όγκος}} (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \int_{\text{όγκος}} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \rho \right) dV \quad (2.21)$$

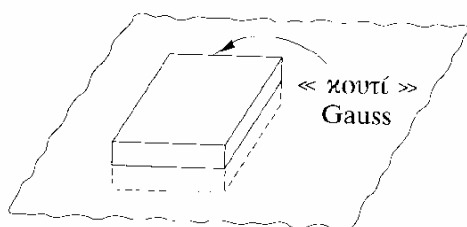
Από (2.21) λοιπόν προκύπτει η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss που είναι η ακόλουθη

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.22)$$

Η διαφορική εκδοχή είναι πιο νοικοκυρεμένη αλλά η ολοκληρωτική μορφή (2.18) εφαρμόζεται πολύ πιο φυσιολογικά όταν έχω συμμετρικές κατανομές φορτίου.

Ο νόμος του Gauss είναι πάντα αληθής αλλά δεν είναι πάντα χρήσιμος. Η συμμετρία παίζει ρόλο αποφασιστικό στην εφαρμογή του νόμου του Gauss. Υπάρχουν τριών ειδών συμμετρίες Αυτές είναι

1. Σφαιρική συμμετρία: Πάρτε για Γκαουσιανή επιφάνεια μια ομόκεντρη σφαίρα
2. Κυλινδρική συμμετρία: Πάρτε για Γκαουσιανή επιφάνεια έναν ομοαξονικό κύλινδρο.
3. Επίπεδη συμμετρία: Χρησιμοποιείστε ένα Γκαουσιανό κουτί που διαπερνά συμμετρικά από πάνω κι από κάτω την επιφάνεια (δες σχήμα)



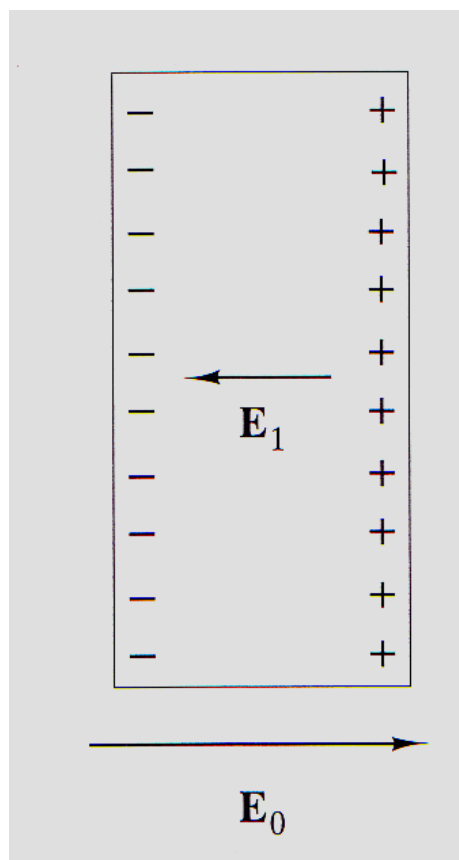
Σχήμα 2.12: Ηλεκτρική Ροή μέσα από επίπεδο αγωγό (Griffith, «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

2.1.7 Αγωγοί που βρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία

Σε έναν αγωγό περιέχουν φορτία τα οποία μπορούν να κινηθούν ελεύθερα μέσα σε αυτόν. Αν τώρα δεν υπάρχει κίνηση των φορέων αυτών προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση τότε λέμε ότι ο αγωγός ισορροπεί ηλεκτροστατικά.

Ένας αγωγός που ισορροπεί ηλεκτροστατικά χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω ιδιότητες

- Παντού στο εσωτερικό του το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν. Εάν υπήρχε οποιοδήποτε πεδίο, τα ελεύθερα φορτία του θα κινούνταν και δεν θα είχαμε πλέον να κάνουμε με ηλεκτροστατική. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την ιδιότητα αυτή του αγωγού αν τον τοποθετήσουμε μέσα σε ένα εξωτερικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή το εξωτερικό πεδίο θα μεταφέρει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού προς τα δεξιά ενώ τα θετικά τώρα άτομα, έλλειμμα ηλεκτρονίων, θα μεταφερθούν προς τα αριστερά όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.13: Ηλεκτροστατικό πεδίο μέσα σε αγωγό που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία (Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Η κίνηση των φορτίων θα σταματήσει όταν το εσωτερικό πεδίο θα εξισορροπηθεί από το εξωτερικό πεδίο. Στο σημείο αυτό η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στον αγωγό είναι ίση με μηδέν. Η όλη διαδικασία είναι ακαριαία της τάξεως των 10^{-16} sec.

- Όλο το πλεόνασμα του ηλεκτρικού φορτίου του αγωγού βρίσκεται στην επιφάνεια του αγωγού. Αυτό προκύπτει από τον νόμο του Gauss:

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$ και αφού από προηγούμενη παρατήρηση $E_{\text{εξ}} = 0$ τότε στο εσωτερικό του αγωγού το $\rho = 0 \text{ Cb} / \text{m}^3$. Επομένως τα φορτία θα πάνε στην επιφάνεια του αγωγού.

- Όπως θα δούμε και παρακάτω που θα ορίσουμε το δυναμικό σε ένα ηλεκτροστατικά ισορροπούνται αγωγό είναι παντού το ίδιο.
- Το πεδίο λίγο έξω από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού και έχει μέτρο ίσο προς σ / ϵ_0 . Οπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην περιοχή αυτή. Εάν υπήρχε και εφαπτομενική συνιστώσα τότε τα ηλεκτρόνια επιφανείας θα επιταχύνονταν από αυτή και έτσι ο αγωγός δεν θα ήταν σε ηλεκτροστατική ισορροπία. Το αποτέλεσμα αυτό βγαίνει χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss.
- Εάν ο αγωγός έχει ακανόνιστο σχήμα, το φορτίο τείνει να συσσωρεύεται στα μέρη όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι η μικρότερη.

2.1.8 Ο στροβιλισμός του E

Έστω ένα σημειακό φορτίο q το οποίο δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης E , όπως είναι ήδη γνωστό, ίσης με

$$E = k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (2.23)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον στροβιλισμό του παραπάνω πεδίου. Από κεφάλαιο ένα των σημειώσεων αυτών γνωρίζουμε ότι ο στροβιλισμός ενός πεδίου μπορεί να υπολογιστεί μέσα από το θεώρημα του Stokes και εκφράζεται από την σχέση

$$\int_{\text{επιφάνεια}} (\nabla \times \mathbf{E}) d\mathbf{A} = \oint_{\text{συννοριακή γραμμή}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.24)$$

Ας ξεκινήσουμε αρχικά να υπολογίσουμε το επιγαμψύλιο ολοκλήρωμα αυτού του πεδίου από ένα σημείο a σε ένα σημείο b ,

$$\int_a^b E \cdot dl \quad (2.25)$$

Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες το διαφορικό dl στο παραπάνω ολοκλήρωμα εκφράζεται ως $dl = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi}$, άρα η ολοκληρωτέα ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα (2.25) μπορεί να γραφεί ως

$$E \cdot dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \quad (2.26)$$

Επομένως από επιγαμπίλιο ολοκλήρωμα υπολογίζω ότι

$$\int_a^b E \cdot dl = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_a} - \frac{q}{r_b} \right) \quad (2.27)$$

Οπού r_a είναι η απόσταση του σημείου a από την αρχή των αξόνων και r_b είναι ομοίως η απόσταση του σημείου b από την αρχή των αξόνων. Παρατηρούμε από το αποτέλεσμα ότι το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που μπορούμε να ακολουθήσουμε και εξαρτάται αποκλειστικά από το τελικό και αρχικό σημείο. Πιο συγκεκριμένα το αποτέλεσμα του παραπάνω ολοκληρώματος εξαρτάται από το πόσο μακριά βρίσκονται τα σημεία a & b από την αρχή των αξόνων. Αυτό συμβαίνει γιατί η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου εξαρτάται από την ακτινική του συνιστώσα μόνο και έτσι οποιεσδήποτε συνεισφορές από συνιστώσες κατά την διεύθυνση των $\hat{\theta}$ & $\hat{\phi}$ δεν επηρεάζει την τιμή του ολοκληρώματος μια και τέτοια μετατόπιση προς αυτές τις διευθύνσεις εξαλείφονται από το εσωτερικό γινόμενο $E \cdot dl$. Το ολοκλήρωμα μιας κλειστής διαδρομής είναι προφανώς από παραπάνω αποτέλεσμα ($r_a = r_b$) ίσο με μηδέν ή

$$\oint E \cdot dl = 0 \quad (2.28)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes και με βάση το αποτέλεσμα (2.28) προκύπτει ότι

$$\nabla \times E = 0 \quad (2.29)$$

Η παραπάνω σχέση αποδείχθηκε για ένα σημειακό φορτίο ισχύει όμως για οποιαδήποτε στατική κατανομή φορτίου.

2.2 Το ηλεκτρικό δυναμικό

Από την σχέση (2.29) βλέπουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι μια οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση άλλα μια συνάρτηση της οποίας ο στροβιλισμός είναι πάντα μηδέν.

Από το κεφάλαιο ένα είδαμε ισχύει ότι ένα διάνυσμα του οποίου ο στροβιλισμός είναι μηδέν, ισούται με την απόκλιση κάποιου βαθμωτού μεγέθους.

Το κλειστό ολοκλήρωμα της (2.28) είναι μηδέν προκύπτει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της E (2.27) εξαρτάται μονάχα από τις θέσεις ως προς την αρχή των αξόνων από τις θέσεις των a και b και είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή. Για τον λόγο αυτό μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση έτσι ώστε

$$V(P) = - \int_o^P E \cdot dl \quad (2.30)$$

Όπου (o) είναι ένα σταθερό σημείο για το οποίο έχουμε εκ των προτέρων συμφωνήσει. Το V εξαρτάται μόνο από το σημείο P . Το V ονομάζεται **ηλεκτρικό δυναμικό**. Μπορεί να γραφεί η διαφορά δυναμικού ως εξής

$$V(b) - V(a) = - \int_o^b E \cdot dl + \int_o^a E \cdot dl = - \int_o^b E \cdot dl - \int_a^o E \cdot dl = - \int_a^b E \cdot dl \quad (2.31)$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα των κλίσεων και την (2.31) παίρνουμε

$$V(b) - V(a) = \int_a^b (\nabla V) dl \quad (2.32)$$

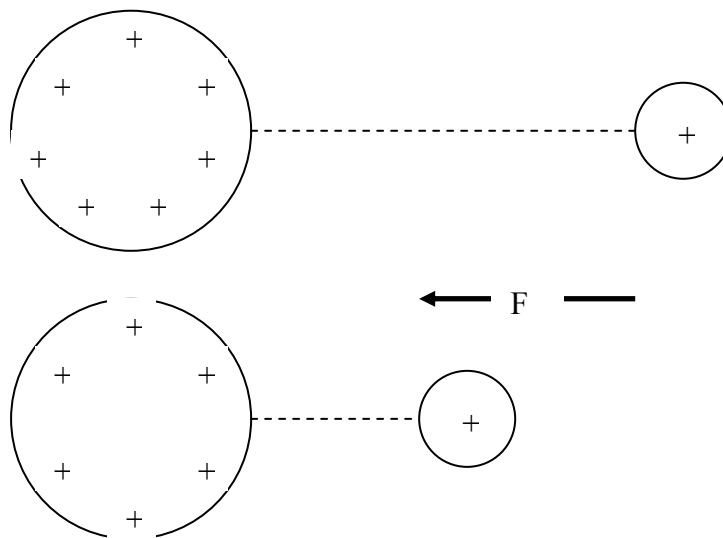
Συγκρίνοντας (2.31), (2.32) έχουμε

$$E = -\nabla V \quad (2.33)$$

Η σχέση (2.33) είναι από τις πιο σημαντικές σχέσεις της ηλεκτροστατικής και μας πληροφορεί ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι η κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού.

Μπορούμε να περιγράψουμε τα ηλεκτροστατικά φαινόμενα, αντί να χρησιμοποιούμε το διανυσματικό μέγεθος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, με το βαθμωτό μέγεθος του ηλεκτρικού δυναμικού. Η τεχνική αυτή μας διευκολύνει μια και η τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού εξαρτάται μονάχα από την θέση και μόνο.

Γνωρίζουμε από μηχανική ότι ένα σώμα έχει δυναμική ενέργεια λόγω θέσης. Αντίστοιχα ένα φορτισμένο σωματίδιο έχει δυναμική ενέργεια λόγω θέσης μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Για να μετακινήσουμε ένα φορτισμένο σωματίδιο αντίθετα προς την φορά ηλεκτρικού πεδίου ενός φορτισμένου σώματος θα πρέπει να δαπανήσουμε έργο. Το έργο αυτό μεταβάλει την δυναμική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου. Είναι θετικό στην περίπτωση που αυξάνει την δυναμική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου και αρνητικό αν την ελαττώνει. Έστω το παρακάτω σύστημα 2 φορτισμένων σφαιρών. Για να σπρώξετε την μικρή σφαίρα προς την μεγάλη θα πρέπει να δαπανήσετε έργο, ώστε να υπερνικήσετε την ηλεκτρική άπωση.



Σχήμα 2.14

Το έργο που εκτελείται για να μετακινηθεί το σωματίδιο στην νέα του θέση αυξάνει την ενέργεια του. Η ενέργεια που έχει το σωματίδιο λόγω θέσης του ονομάζεται **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια**. Αν τώρα το σωματίδιο αφεθεί ελεύθερο θα απομακρυνθεί από επιταχυνόμενο από την σφαίρα, και η ηλεκτρική δυναμική του ενέργεια θα μετατραπεί σε κινητική. Αν τώρα στην θέση της μικρής σφαίρας είχαμε ένα σωματίδιο με διπλάσιο ή τριπλάσιο φορτίο θα έπρεπε να δαπανήσουμε διπλάσιο ή τριπλάσιο έργο. Αντίστοιχα το σωματίδιο θα αποκτούσε διπλάσια ή τριπλάσια δυναμική ενέργεια. Είναι λοιπόν βολικότερο στην ηλεκτροστατική να ασχολούμαστε με την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ανά μονάδα φορτίου. Ένα σωματίδιο με διπλάσιο φορτίο από ένα άλλο φορτίο θα έχει αντίστοιχα διπλάσια δυναμική ενέργεια στο ίδιο σημείο του ηλεκτρικού πεδίου. Η έννοια της δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα φορτίου ονομάζεται **το ηλεκτρικό δυναμικό**.

Είδαμε ότι η διαφορά δυναμικού ορίζεται από την σχέση (2.32). Ένας ισοδύναμος ορισμός της διαφοράς δυναμικού που σχετίζεται και με τα παραπάνω είναι ο ακόλουθος

Ορίζουμε ότι η διαφορά δυναμικού (ή τάση) $V_b - V_a$ ανάμεσα στα σημεία a και b ισούται με το πηλίκο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας δια του δοκιμαστικού φορτίου q_o , σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_o} = - \int_a^b E \cdot dl \quad (2.34)$$

Με αφορμή την σχέση (2.34) θα πρέπει να τονίσουμε ότι δεν πρέπει να συγχέουμε την διαφορά δυναμικού με την δυναμική ενέργεια που είναι 2 τελείως διαφορετικοί φυσικοί όροι και θα έπρεπε να έχουν διαφορετικές ονομασίες.

Λόγω τώρα του ότι η διαφορά δυναμικού είναι ανάλογη της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του φορτίου και η τελευταία είναι μονόμετρο μέγεθος, πρέπει και η διαφορά δυναμικού να είναι επίσης μονόμετρο μέγεθος. Μονάδα μέτρησης του της διαφοράς δυναμικού είναι το Volt στο S.I. Στην Ατομική και Πυρηνική Φυσική χρησιμοποιούμε την μονάδα eV ηλεκτρονιοβόλτ. Το eV ισούται εξ ορισμού με την ενέργεια την οποία ένα ηλεκτρόνιο (ή ένα πρωτόνιο) κερδίζει όταν κινηθεί μέσα από διαφορά δυναμικού ενός Volt. Γνωρίζουμε όμως ότι η απόλυτη τιμή του φορτίου e

είναι ίση με 1.6×10^{-19} C. Αφού λοιπόν $1V = 1J/C$ η σχέση που μετατρέπει το eV σε joule είναι η παρακάτω

$$1eV = 1.6 \times 10^{-19} C \cdot V = 1.6 \times 10^{-19} J \quad (2.35)$$

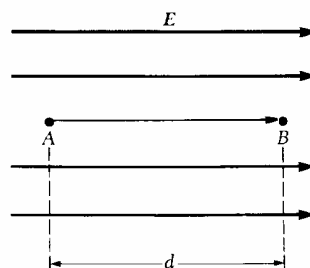
Από την (2.34) παρατηρούμε ότι ισχύει το παρακάτω

Η διαφορά δυναμικού $V_b - V_a$ ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου που παράγει ή καταναλίσκει μια εξωτερική δύναμη για να μετακινήσει ένα δοκιμαστικό φορτίο από το σημείο a στο σημείο b χωρίς να μεταβάλει την κινητική του ενέργεια.

Σημασία έχουν μονάχα οι διαφορές του δυναμικού. Για αυτό το λόγο πολλές φορές μπορούμε να ορίσουμε ένα σημείο στο οποίο η συνάρτηση του δυναμικού είναι μηδέν, δεξ εξίσωση (2.30) (σημείο ο). Συνήθως αυτό το σημείο το επιλέγουμε στο άπειρο. Έτσι μετά την επιλογή του σημείου σταθερού δυναμικού στο άπειρο, μπορούμε να δηλώσουμε ότι το δυναμικό σε ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου που παράγεται ή καταναλίσκεται κατά την μεταφορά ενός θετικού δοκιμαστικού φορτίου από το άπειρο στο σημείο αυτό. Μετά από αυτό η εξίσωση (2.34) μπορεί να γραφεί ως για το δυναμικό σημείου

$$V_P = - \int_{\infty}^P E \cdot ds \quad (2.36)$$

Ας μελετήσουμε τώρα την διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 σημεία A και B που βρίσκονται μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο και απέχουν απόσταση d (δεξ παρακάτω σχήμα).



Σχήμα 2.15: Έργο που καταναλώνεται κατά την μετάβαση από το A στο B (Griffiths

«Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

Σύμφωνα με τα παραπάνω το έργο που θα δαπανηθεί για την μετάβαση από το σημείο A στο B είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που θα ακολουθήσουμε. Αυτό γιατί το ηλεκτρικό πεδίο είναι διατηρητικό. Αν υπολογίσουμε τώρα την διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A & B χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.31) έχουμε

$$V_B - V_A = - \int_A^B E ds \quad (2.37)$$

Λόγω του ότι το πεδίο είναι ομογενές το E έχει σταθερό μέτρο και κατεύθυνση με αποτέλεσμα να μπορεί να βγει έξω από το ολοκλήρωμα. Έτσι

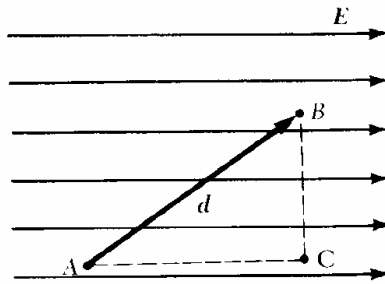
$$\Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed \quad (2.38)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι το αποτέλεσμα του ότι το σημείο B είναι σε χαμηλότερο δυναμικό από το A δηλαδή $V_B < V_A$. Από την σχέση (2.38) και την (2.34) μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας

$$\Delta U = q_o \Delta V = -q_o Ed \quad (2.39)$$

Βλέπουμε ότι όταν το q_o είναι θετικό το ΔU είναι αρνητικό. Με άλλα λόγια όταν ένα **θετικό** φορτίο κινείται παράλληλα προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου χάνει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. Αυτό προκύπτει σκεπτόμενοι ότι εάν ένα θετικό φορτίο αφεθεί ελεύθερο μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο σε αυτό θα ασκηθεί μια δύναμη $q_o E$ με αποτέλεσμα να το επιταχύνει προς την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Εφόσον θα αυξηθεί η κινητική του ενέργεια θα μειωθεί η δυναμική του. Για το αρνητικό φορτίο ισχύουν τα αντίστροφα.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου τα σημεία ανάμεσα στα οποία θα υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού δεν ισαπέχουν από τον άξονα x όπως στην προηγούμενη περίπτωση άλλα το ηλεκτρικό πεδίο εξακολουθεί να είναι παράλληλο με τον άξονα x.



Σχήμα 2.16: Κατανάλωση έργου κατά την μετακίνηση ηλεκτρικού φορτίου από το A στο B (Griffiths, « Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

Για τον υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού και σε αυτή την περίπτωση θα πάρουμε την εξίσωση (2.34) και έχουμε

$$\Delta V = - \int_A^B E \cdot ds = -E \cdot \int_A^B ds = -E \cdot d \quad (2.40)$$

Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι ίση με

$$\Delta U = q_o \Delta V = -q_o E \cdot d \quad (2.41)$$

Από την (2.41) βλέπουμε ότι όλα τα σημεία που βρίσκονται σε επίπεδα κάθετα στο ηλεκτρικό πεδίο έχουν το ίδιο δυναμικό. Οι επιφάνειες πάνω στις οποίες το δυναμικό είναι το ίδιο παντού ονομάζονται **ισοδυναμικές επιφάνειες**. Όπως εύκολα μπορεί να εξαχθεί το έργο που καταναλώνουμε για να μετακινήσουμε ένα φορτίο πάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια είναι μηδέν.

Η σχέση (2.27) μας δίνει την διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 σημεία a και b που απέχουν από το σημειακό φορτίο πηγής r_a και r_b αντίστοιχα. Αν πάρουμε το σημείο r_b να είναι στο άπειρο γνωρίζουμε από σύμβαση που παίρνουμε ότι το δυναμικό σε αυτό το σημείο είναι μηδέν. Η σχέση που προκύπτει είναι το δυναμικό σημειακού φορτίου και εκφράζεται από την παρακάτω σχέση

$$V = k \frac{q}{r} \quad (2.42)$$

Από την σχέση (2.42) βλέπουμε ότι οι ισοδυναμικές επιφάνειες ενός σημειακού φορτίου είναι ομόκεντρες σφαίρες που έχουν στο κέντρο το σημειακό φορτίο.

Η αρχή της επαλληλίας στην ηλεκτροδυναμική αναφέρεται στην δύναμη που ασκείται σε ένα δοκιμαστικό φορτίο Q . Μας πληροφορεί ότι η συνολική δύναμη στο Q είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που οφείλονται σε κάθε ένα από τα φορτία πηγές

$$F = F_1 + F_2 + \dots \quad (2.43)$$

Διαιρώντας την σχέση (2.43) με το δοκιμαστικό φορτίο Q υπολογίζουμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο που βρίσκεται το Q . Άρα

$$E = E_1 + E_2 + \dots \quad (2.44)$$

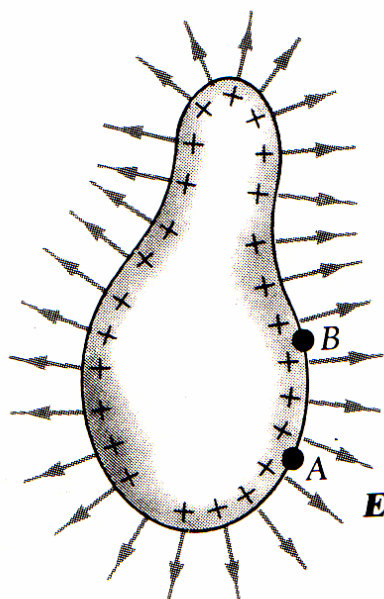
Ολοκληρώνοντας την (2.44) από το κοινό σημείο μέχρι το σημείο P συμπεραίνουμε ότι το δυναμικό είναι το άθροισμα των δυναμικών που οφείλεται σε όλα τα επί μέρους φορτία πηγές. Έτσι

$$V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (2.45)$$

2.3 Το Δυναμικό Φορτισμένου Αγωγού

Είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο ότι το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ηλεκτροστατικά ισορροπούντος αγωγού είναι ίσο με μηδέν. Το ηλεκτρικό του πεδίο είναι κάθετο στην εξωτερική του επιφάνεια όπου είναι συγκεντρωμένο και όλο του το φορτίο.

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι η επιφάνεια ενός ηλεκτροστατικά ισορροπούντος αγωγού αποτελεί μια ισοδυναμική επιφάνεια δηλαδή το δυναμικό είναι παντού το ίδιο πάνω στην επιφάνεια αυτή.

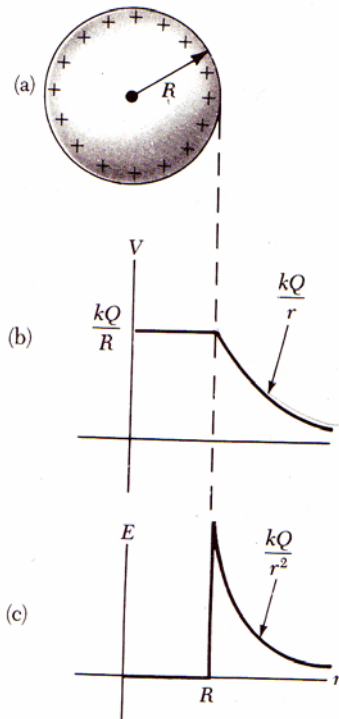


Σχήμα 2.17: Δυναμικό από Φορτισμένο Αγωγό (Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Πάνω στην επιφάνεια του παραπάνω σχήματος το γινόμενο $E \cdot dS$, όπου dS είναι η μετατόπιση π.χ. από το σημείο B στο A, είναι μηδέν μια και το E είναι συνεχώς κάθετο στην επιφάνεια του ηλεκτροστατικά ισορροπούντος αγωγού. Από (2.40) βλέπουμε ότι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 σημεία εξαρτάται από το γινόμενο $E \cdot dS$ άρα η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 σημεία του αγωγού είναι ίση με μηδέν. Επομένως εξάγεται το παρακάτω συμπέρασμα

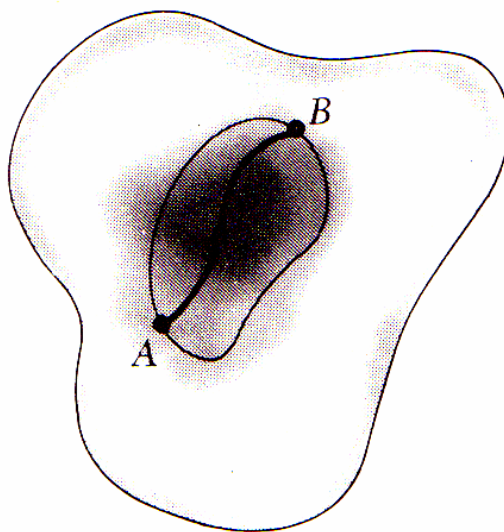
*Η επιφάνεια ενός ηλεκτρικά ισορροπούντος αγωγού είναι **ισοδυναμική επιφάνεια**. Αφού το πεδίο είναι μηδενικό μέσα στον αγωγό συμπαιρνουμε ότι το δυναμικό είναι σταθερό παντού μέσα στο εσωτερικό ενός αγωγού και έχει την ίδια τιμή με την τιμή ου έχει στην επιφάνεια του αγωγού.*

Από τα παραπάνω συμπαιρνουμε επίσης ότι για να μετακινήσουμε ένα φορτίο από το εσωτερικό του αγωγού στην επιφάνεια του δεν χρειάζεται να καταναλώσουμε έργο. Έτσι για ένα σφαιρικό αγωγό ισχύουν οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις για το ηλεκτρικό του πεδίο αλλά και για το δυναμικό του μέσα και έξω από τον αγωγό.



Σχήμα 2.18: Δυναμικό και Ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από φορτισμένο αγωγό (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Έστω ένας αγωγός που ισορροπεί ηλεκτροστατικά και έχει μια κοιλότητα στο εσωτερικό του, η οποία δεν περιέχει ηλεκτρικά φορτία. Θα αποδείξουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κοιλότητα είναι μηδέν.



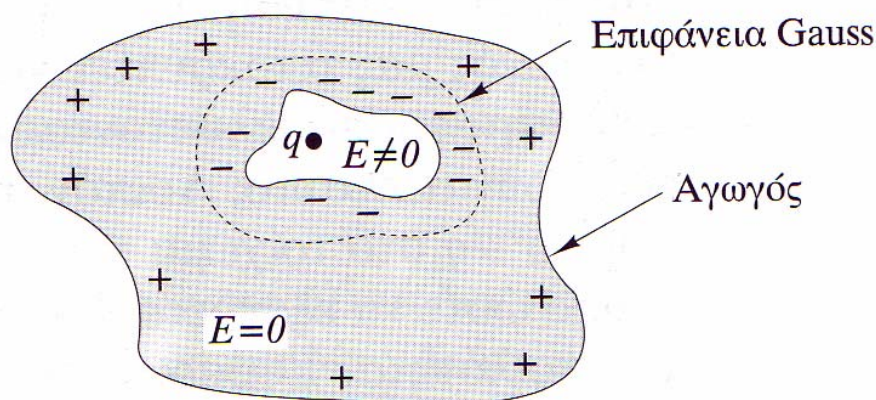
Σχήμα 2.19: Θωράκιση από Ηλεκτρικό Πεδίο (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Επειδή ο αγωγός ισορροπεί ηλεκτροστατικά η επιφάνεια του είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια επομένως $V_A = V_B$. Εάν τώρα υπήρχε ηλεκτρικό πεδίο μέσα στην κοιλότητα τότε από (2.40) θα είχαμε

$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = 0 \quad \text{Nt/Cb} \quad (2.46)$$

Επομένως σε ένα χώρο που είναι εγκλωβισμένος μέσα σε τοιχώματα κατασκευασμένα από αγωγίμο υλικό δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο εφόσον δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία σε αυτόν. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο είστε σχετικά ασφαλείς μέσα σε ένα αυτοκίνητο με μεταλλικό αμάξωμα κατά την διάρκεια μιας καταιγίδας. Η ίδια αρχή εφαρμόζεται κατά την τοποθέτηση ευαίσθητων οργάνων μέσα σε ένα γειωμένο κλωβό του Faraday προκειμένου να θωρακιστούν από ηλεκτρικά πεδία που υπάρχουν τριγύρω.

Αν τώρα υπάρχει κάποια κοιλότητα στο εσωτερικό του αγωγού στην οποία υπάρχει φορτίο τότε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού δεν είναι μηδέν. Το πεδίο όμως στο εσωτερικό του αγωγού είναι μονωμένο από τον έξω κόσμο λόγω του αγωγού που τον περιβάλλει.



Σχήμα 2.20 (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Το πεδίο που υπάρχει στην κοιλότητα του αγωγού δεν εμφανίζεται στο εσωτερικό του αγωγού μια και το φορτίο της κοιλότητας εξουδετερώνεται από το φορτίο που επάγεται στο εσωτερικό του αγωγού. Της τα εξωτερικά πεδία δεν μπορούν να

διεισδύσουν στον αγωγό λόγω των φορτίων που επάγονται στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού.

2.4 Σχόλια στο Δυναμικό

Η εξίσωση (2.33) της πληροφορεί ότι εάν γνωρίζουμε το δυναμικό σε ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση του Η.Π. σε αυτό το σημείο. Μπορούμε δηλαδή από ένα βαθμωτό μέγεθος, της είναι το δυναμικό, να υπολογίσω ένα διανυσματικό μέγεθος, της είναι η ένταση του Η.Π.. Πώς είναι της δυνατόν μια συνάρτηση να περιέχει της πληροφορίες που περιέχουν τρεις συναρτήσεις; Αυτό μπορεί να γίνει διότι το ηλεκτρικό πεδίο (Η.Π.) είναι ένα ξεχωριστό πεδίο μιας και είναι αστρόβιλο (δες εξίσωση (2.29)). Μέσω της σχέσης (2.29) συνδέονται οι συντεταγμένες του διανύσματος της έντασης του Η.Π. μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial E_y}{\partial x}\end{aligned}\quad (2.47)$$

Της σχέσεις (2.47), δηλαδή ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι ένα ατρόβιλο πεδίο, εκμεταλλεύεται πλήρως η εισαγωγή του δυναμικού ανάγοντας ένα διανυσματικό πρόβλημα σε βαθμωτό, όπου δεν χρειάζεται να μπλεχτούμε σε συνιστώσες ή διανυσματική πρόσθεση.

Στην σχέση (2.30) υπάρχει μια ασάφεια στον ορισμό του δυναμικού αφού η επιλογή του σημείου Ο έγινε αυθαίρετα.

Μια αλλαγή στο σημείο αναφοράς ισοδυναμεί με μια προσθήκη σταθεράς Κ στην σχέση (2.30). Επομένως η (2.30) μπορεί να γραφεί για ένα άλλο σημείο αναφοράς Ο' ως :

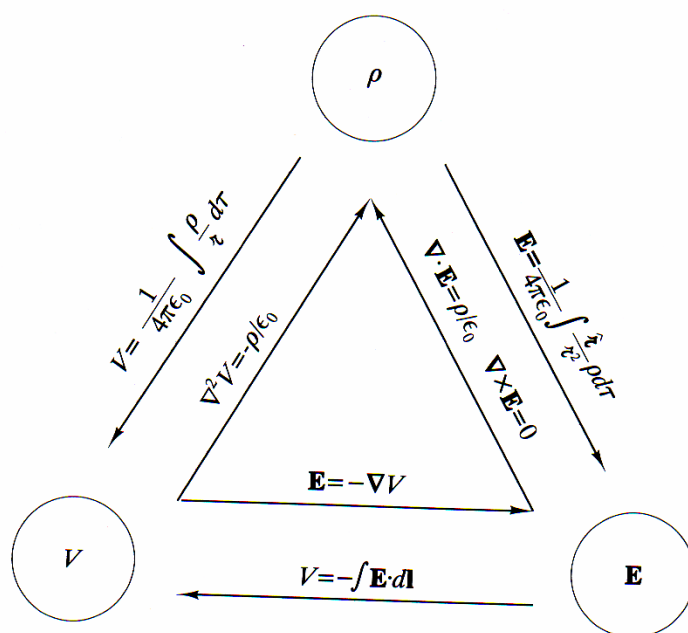
$$V'(P) = -\int_{O'}^P E \cdot dl = -\int_{O'}^O E \cdot dl - \int_O^P E \cdot dl = K + V(P) \quad (2.48)$$

Από την σχέση (2.48) βλέπουμε ότι η επιλογή του σημείου αναφοράς δεν παίζει κανένα ρόλο στον ορισμό της διαφοράς δυναμικού μια και οι σταθερές K θα εκλείψουν. Της ο υπολογισμός της έντασης του Η.Π. δεν επηρεάζεται από την επιλογή του σημείου αναφοράς λόγω ότι η σταθερά που προκύπτει από αλλαγή του σημείου αναφοράς απαλείφεται μέσω της παραγώγισης που προκύπτει για τον υπολογισμό της έντασης του Η.Π.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι μονάχα η διαφορά δυναμικού έχει φυσική σημασία μια και η τιμή της δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς O . Προφανώς λοιπόν το δυναμικό δεν έχει καμία φυσική σημασία μια και η τιμή του μπορεί να ρυθμιστεί από την επιλογή του σημείου O .

2.5 Ηλεκτροστατικές Συνοριακές Συνθήκες

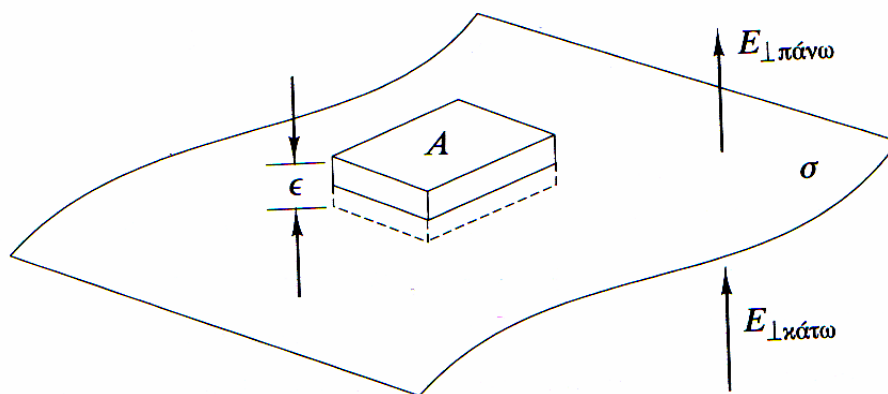
Οι τρεις θεμελιώδεις ποσότητες στην Ηλεκτροστατική είναι το δυναμικό V , η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E και η χωρική πυκνότητα του φορτίου της κατανομής της. Από το παρακάτω σχήμα μπορεί κάποιος να δει ότι γνωρίζοντας αυτές της ποσότητες μπορεί να υπολογίσει τα πάντα κάνοντας χρήση του νόμου του Gauss όπου υπάρχει συμμετρία στο πρόβλημα ή της σχέσης (2.33),



Σχήμα 2.21: Βασικές σχέσεις και ποσότητες της Ηλεκτροστατικής (Griffiths, «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

Στο παραπάνω σχήμα περιέχονται και όλες οι αναγκαίες σχέσεις που συνδέουν τις βασικές ποσότητες της ηλεκτροστατικής.

Θα δείξουμε στην συνέχεια ότι το ηλεκτρικό πεδίο παρουσιάζει μια ασυνέχεια όταν συναντά μια επιφάνεια που πάνω της υπάρχει μια επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss για να υπολογίσουμε την ασυνέχεια αυτή. Στο παρακάτω σχήμα εικονίζεται ένα πολύ λεπτό Γκαουσιανό κουτί που ξεπροβάλλει ελάχιστα από πάνω και κάτω από το σύνορο.



Σχήμα 2.22: Συνοριακές συνθήκες για την κάθετη συνιστώσα έντασης ηλεκτρικού πεδίου (Griffiths, « Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική »)

Από νόμο του Gauss για την κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου έχουμε

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad (2.49)$$

Εάν τώρα το πάχος ϵ του Γκαουσιανού κουτιού τείνει στο μηδέν η (2.49) θα πάρει την μορφή

$$E_{\perp \text{πάνω}} - E_{\perp \text{κάτω}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.50)$$

Όπου $E_{\perp \text{πάνω}}$ είναι η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου αμέσως μετά την επιφάνεια ενώ $E_{\perp \text{κάτω}}$ είναι η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πριν την

επιφάνεια. Από την (2.50) προκύπτει ότι η κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι ασυνεχής σε οποιοδήποτε σύνορο κατά ένα ποσό σ/ϵ_o . Εύκολα καταλαβαίνουμε ότι η σχέση (2.50) μηδενίζεται όταν δεν υπάρχει φορτίο στο σύνορο.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι συνεχής στο σύνορο, δηλαδή ισχύει

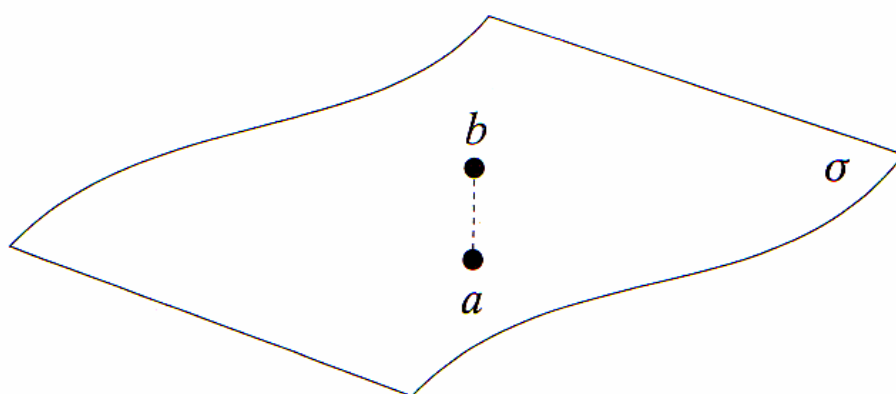
$$E_{\parallel \text{πάνω}} = E_{\parallel \text{κάτω}} \quad (2.51)$$

Επομένως για το ηλεκτρικό πεδίο οι συνοριακές συνθήκες εκφράζονται από την παρακάτω σχέση

$$E_{\text{πάνω}} - E_{\text{κάτω}} = \frac{\sigma}{\epsilon_o} \hat{n} \quad (2.52)$$

Το δυναμικό είναι συνεχές πάνω σε μια τέτοια επιφάνεια. Από το παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι εάν το a πλησιάσει το b πάνω στο σύνορο και από σχέση (2.40) έχουμε ότι

$$V_{\text{πάνω}} = V_{\text{κάτω}} \quad (2.53)$$



Σχήμα 2.23: Συνοριακές συνθήκες για παράλληλες συνιστώσες ηλεκτροστατικού πεδίου (Griffiths, «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

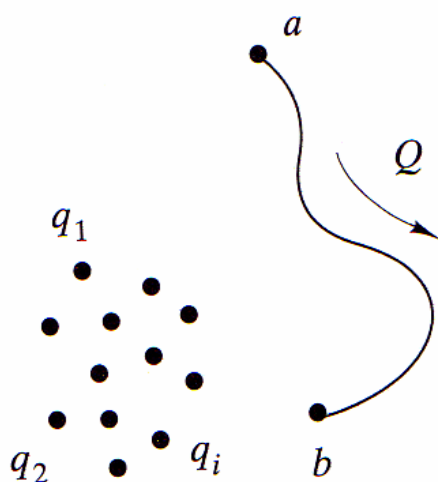
Αλλα από (2.33), (2.52) βλέπουμε ότι η κλίση της V παρουσιάζει μια ασυνέχεια που εκφράζεται από την παρακάτω σχέση

$$\frac{\partial V_{\text{πάνω}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{κάτω}}}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.54)$$

Όπου $\frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{n}$. Οι συνοριακές συνθήκες (2.50), (2.51), (2.53), (2.54) ισχύουν για οποιαδήποτε επιφάνεια είτε έχει φορτίο είτε όχι.

2.6 Έργο και ενέργεια στην ηλεκτροστατική.

Έστω η παρακάτω κατανομή ηλεκτρικών φορτίων $q_1, q_2, \dots, q_N$. Τα φορτία αυτά δημιουργούν ένα ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο που τα περιβάλλει. Εάν τώρα θέλουμε ένα φορτίο Q να κινηθεί από ένα σημείο A σε ένα άλλο σημείο B μέσα στο ηλεκτρικό αυτό πεδίο κατά την διάρκεια της κίνησης του θα ασκείται σε αυτό ηλεκτροστατική δύναμη από το πεδίο ίση με $F = E \cdot Q$.



Σχήμα 2.24 (Griffiths, «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική»)

Για να διατηρήσουμε το φορτίο Q πάνω στην τροχιά του θα πρέπει και εμείς να ασκήσουμε σε αυτό δύναμη ίση με $-Q \cdot E$. Άρα το έργο που πρέπει να δαπανήσουμε είναι ίσο με

$$W = \int_a^b F \cdot dl = -Q \int_a^b E \cdot dl = Q[V(b) - V(a)] \quad (2.55)$$

Συνήθως κάνουμε την σύμβαση και επιλέγουμε το σημείο a στο άπειρο και έτσι η εξίσωση (2.55) γράφεται ως

$$W = QV(P) \quad (2.56)$$

Τώρα το έργο που απαιτείται να μεταφέρουμε ένα σύνολο από σημειακά φορτία από το άπειρο σε ένα σημείο P υπολογίζεται κάνοντας χρήση της (2.56). Στην σχέση αυτή το $V(P)$ είναι το δυναμικό που δημιουργεί η πηγή του πεδίου και Q είναι το φορτίο που μεταφέραμε από το άπειρο στο σημείο P . Κατά την μεταφορά του πρώτου φορτίου δεν θα καταναλώσουμε καθόλου έργο, μια και δεν υπάρχει άλλο φορτίο στην περιοχή του P και άρα $V(P) = 0$ volt. Για την μεταφορά του 2^{ου} φορτίου θα καταναλώσουμε έργο για να ξεπεράσουμε την αντίσταση του φορτίου q_1 . Το έργο που θα καταναλώσουμε είναι ίσο με

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q_1}{r_{12}} \right) q_2 \quad (2.57)$$

Όπου r_{12} είναι η απόσταση μεταξύ του q_1 και q_2 . Για να μεταφέρουμε τώρα το 3^ο φορτίο θα πρέπει να ξεπεράσουμε τα πεδία των q_1 & q_2 . Άρα το έργο που θα καταναλώσουμε είναι ίσο με

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} q_3 \left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \quad (2.58)$$

Επομένως για την μεταφορά του N th φορτίου θα πρέπει να σπαταλήσουμε έργο ίσο με

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(P_i) \quad (2.59)$$

Η σχέση (2.59) αναπαριστά την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στην διάταξη. Την ενέργεια αυτή θα την πάρουμε πίσω αν διαλύσουμε το σύστημα.

Για μια χωρική κατανομή φορτίου πυκνότητας ρ η εξίσωση (2.59) μπορεί να γραφεί ως

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau \quad (2.60)$$

Παρόμοιες εκφράσεις ισχύουν και για τις επιφανειακές, $\int \sigma V da$, και τις γραμμικές $\int \lambda V dl$, κατανομές. Η σχέση (2.60) μετά από μαθηματικές πράξεις μπορεί να μας οδηγήσει στην παρακάτω έκφραση για την ενέργεια που αποθηκεύεται σε μια συνεχή κατανομή φορτίου και είναι η παρακάτω:

$$W = \frac{\epsilon_o}{2} \int_{\substack{\text{όλος} \\ \text{ο} \\ \text{χώρος}}} E^2 d\tau \quad (2.61)$$

Όπου E είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η κατανομή. Η σχέση (2.61) δεν υπακούει στην αρχή της επαλληλίας. Υπενθυμίζω ότι η την αρχή της επαλληλίας την χρησιμοποιήσαμε για να υπολογίσουμε την τάση και το ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομών. Επιστρέφοντας στην (2.61) και προσπαθώντας να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας έχουμε

$$\begin{aligned} W_{total} &= \frac{\epsilon_o}{2} \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_o}{2} \int (E_1 + E_2)^2 d\tau \\ &= \frac{\epsilon_o}{2} \int (E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 \cdot E_2) d\tau = W_1 + W_2 + \epsilon_o \int E_1 \cdot E_2 d\tau \end{aligned} \quad (2.62)$$

Από (2.62) βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατόν να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας.

2.7 Εξίσωση Poisson και εξίσωση Laplace

Το ηλεκτρικό πεδίο είδαμε συνδέεται με το δυναμικό με την σχέση (2.33). Το ερώτημα που προκύπτει είναι πως θα εκφράσουμε τις θεμελιώδεις εξισώσεις για το ηλεκτρικό πεδίο E , νόμο Gauss και στροβιλισμό του ηλεκτρικού πεδίου, χρησιμοποιώντας το δυναμικό.

Ο νόμος του Gauss και πιο συγκεκριμένα η διαφορική μορφή του νόμου του Gauss μπορεί να γραφεί ως συναρτήσει του δυναμικού ως εξής

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.63)$$

Η σχέση (2.63) ονομάζεται εξίσωση Poisson. Σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν φορτία δηλαδή $\rho = 0$ η εξίσωση (2.63) γράφεται ως εξής

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.64)$$

Η εξίσωση (2.64) είναι γνωστή ως εξίσωση Laplace.

Ο στροβιλισμός του Η.Π. συναρτήσει του δυναμικού μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\nabla \times E = \nabla \times (-\nabla V) \quad (2.65)$$

Η (2.65) όντως επιβεβαιώνει τον νόμο του αστρόβιλου ηλεκτρικού πεδίου μια και ο στροβιλισμός της κλίσης είναι πάντα μηδέν.

Το συμπέρασμα που βγαίνει είναι ότι για να υπολογίσουμε το δυναμικό χρειαζόμαστε μια μόνο διαφορική εξίσωση αυτή του Poisson αλλά για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο χρειαζόμαστε 2 αυτές του Gauss και την $\nabla \times E = 0$.

2.8 Χωρητικότητα και διηλεκτρικά

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις ιδιότητες των πυκνωτών. Οι πυκνωτές αποτελούνται από 2 αντίθετα, άλλα ίσα, φορτισμένους αγωγούς οποιουδήποτε σχήματος και από ένα μονωτή ο οποίος τοποθετείται ανάμεσα στους 2

αγωγούς. Το μονωτικό αυτό υλικό το ονομάζουμε διηλεκτρικό και οι ηλεκτρικές του ιδιότητες μπορούν να εξηγηθούν βάσει των ατομικών ιδιοτήτων του υλικού.

Οι πυκνωτές σήμερα χρησιμοποιούνται σε

- Στα κυκλώματα συντονισμού των ραδιοφώνων
- Ως φίλτρα σε τροφοδοτικά κυκλώματα
- Στον περιορισμό των σπινθήρων στα συστήματα εκκίνησης των κινητήρων των αυτοκινήτων
- Για αποθήκευση ενέργειας στα διάφορα ηλεκτρικά κυκλώματα

Η χωρητικότητα του πυκνωτή εξαρτάται από την γεωμετρία του και από το διηλεκτρικό που υπάρχει ανάμεσα στις 2 πλάκες του (αγωγοί).

Η χωρητικότητα ενός πυκνωτή ορίζεται ως εξής

Ορίζουμε ότι η χωρητικότητα ενός πυκνωτή C ενός πυκνωτή είναι ίση με το πηλίκο της απόλυτης τιμής του φορτίου ενός από τους 2 αγωγούς του δια της απόλυτης τιμής της διαφοράς δυναμικού των 2 αγωγών. Δηλαδή

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.66)$$

Οι 2 αγωγοί που αποτελούν τον πυκνωτή ονομάζονται οπλισμοί του. Οι οπλισμοί είναι φορτισμένοι με ίσο αλλά αντίθετο φορτίο. Μονάδα μέτρησης της χωρητικότητας ενός πυκνωτή είναι το Farad, F, ($1F = 1 \text{ Cb/Volt}$). Στο εμπόριο συναντούμε πυκνωτές που έχουν χωρητικότητες της τάξεως των μF & pF .

Από ορισμό χωρητικότητας καταλαβαίνουμε ότι είναι πάντα ένας θετικός αριθμός και εφόσον η διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε 2 πυκνωτές αυξάνει ανάλογα με το φορτίο τους καταλαβαίνουμε ότι η χωρητικότητα παραμένει σταθερή.

2.8.1 Υπολογισμός της χωρητικότητας

Είπαμε προηγουμένως ότι η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται από φορτίο του οπλισμού και από την γεωμετρία του. Π.χ. η χωρητικότητα ενός μονωμένου σφαιρικού αγωγού ακτίνας R και φορτίου Q είναι ίση με

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{k \frac{Q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (2.67)$$

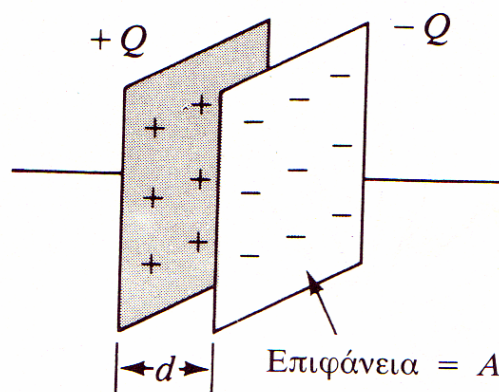
Για την εξαγωγή της (2.67) υποθέστε ότι ο 2^{ος} οπλισμός είναι ομόκεντρη σφαίρα με φορτίο $-Q$ και άπειρης ακτίνας. Θυμηθείτε ότι το δυναμικό στο άπειρο είναι μηδέν.

Για τον υπολογισμό της χωρητικότητας ενός πυκνωτή ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία

1. Υποθέτουμε ότι το φορτίο των ολισμών είναι Q και υπολογίζουμε την διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή.
2. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.66) υπολογίζουμε την χωρητικότητά του.

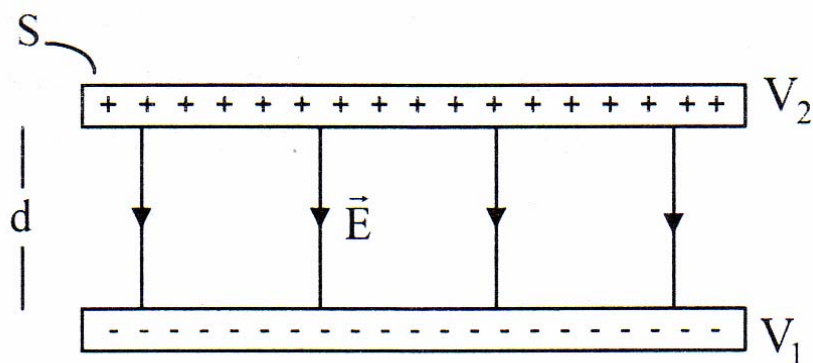
Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την χωρητικότητα ενός πυκνωτή που αποτελείται από (α) 2 παράλληλες πλάκες, (β) 2 ομοαξονικούς κυλίνδρους και (γ) 2 ομόκεντρες φορτισμένες σφαίρες.

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά ένα επίπεδο πυκνωτή που αποτελείται από 2 παράλληλες φορτισμένες πλάκες.



Σχήμα 2.25: Επίπεδος Πυκνωτής (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Οι 2 οπλισμοί έχουν επιφάνεια A και απέχουν μεταξύ τους απόσταση d . Η μία πλάκα έχει φορτίο Q και η άλλη φορτίο $-Q$. Μια άλλη εικόνα από πάνω από τους οπλισμούς του πυκνωτή είναι η παρακάτω



Σχήμα 2.26: Ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς πυκνωτή (Serway ‘
Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή είναι ομογενές. Η τιμή του είναι ίση με $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (δες παρατήρηση 3 στην παράγραφο που μιλάει για ένα ηλεκτρικά ισορροπούνταν αγωγό), όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Κάθε πλάκα έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ίση με $\sigma = \frac{Q}{A}$. Λόγω έλξης τα φορτία των 2 αγωγών θα είναι ομοιογενώς τοποθετημένα στο εσωτερικό των οπλισμών. Για αυτό το λόγο θα είναι μηδέν το ηλεκτρικό πεδίο παντού εκτός από την περιοχή ανάμεσα στους αγωγούς. Ισχύει

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \quad (2.68)$$

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή βρίσκεται χρησιμοποιώντας την σχέση (2.33). Αν θεωρήσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο έχει κατεύθυνση πάνω στον άξονα x θα έχουμε

$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_d^0 dx \Rightarrow \Delta V = V_2 - V_1 = \frac{Qd}{A\epsilon_0} \quad (2.69)$$

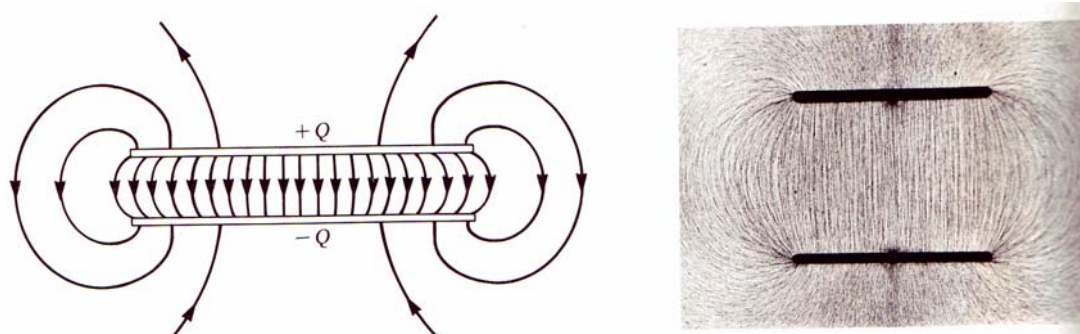
Επομένως η χωρητικότητα C του πυκνωτή χρησιμοποιώντας τις (2.66), (2.69) ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ίση με

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Qd}{A\epsilon_0}} \Rightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.70)$$

Παρατηρούμε από (2.70) ότι η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή εξαρτάται από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά και από το υλικό που παρεμβάλλεται μεταξύ των οπλισμών του (στην περίπτωση μας το κενό). Επίσης είναι αντιστρόφως ανάλογη προς την μεταξύ των πλακών απόσταση.

Από τις (2.70), (2.66) προκύπτει όσο μεγαλύτερη είναι η επιφάνεια των οπλισμών ενός πυκνωτή τόσο μεγαλύτερο είναι το φορτίο που μπορούμε να αποθηκεύουμε και να παραμένει σταθερή η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. Και για να παραμείνει σταθερή η τάση, καθώς μειώνεται η απόσταση ανάμεσα στους 2 οπλισμούς πρέπει να αυξάνεται το φορτίο.

Η παρακάτω εικόνα δείχνει πως το ηλεκτρικό πεδίο στα άκρα του πυκνωτή δεν είναι ομογενές ενώ είναι ομογενές στο χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή.

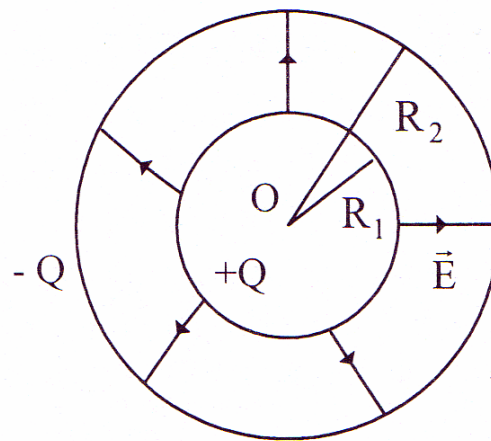


Σχήμα 2.27: Δυναμικές γραμμές μέσα και έξω από οπλισμούς πυκνωτή (Serway ‘
Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Ένας κυλινδρικός πυκνωτής αποτελείται από 2 ομοαξονικούς κυλινδρικούς αγωγούς μήκους l και ακτινών R_1 & R_2 , φορτισμένους με φορτία $\pm Q$. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή μπορεί να υπολογιστεί

χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss. Επιλέγουμε κυλινδρική επιφάνεια ομοαξονική με τους κυλινδρικούς οπλισμούς του πυκνωτή και με ακτίνα $R_1 < r < R_2$ και μήκους l . Από νόμο του Gauss έχουμε

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{encl}}{\epsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} \quad (2.71)$$



Σχήμα 2.28: Κυλινδρικός Πυκνωτής (Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή δίνεται από την σχέση

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_{R_2}^{R_1} E dr \Rightarrow V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} dr \quad (2.72)$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \int_{R_2}^{R_1} \frac{1}{r} dr \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.72) και την (2.66) υπολογίζουμε την χωρητικότητα ενός κυλινδρικού αγωγού που είναι ίση με

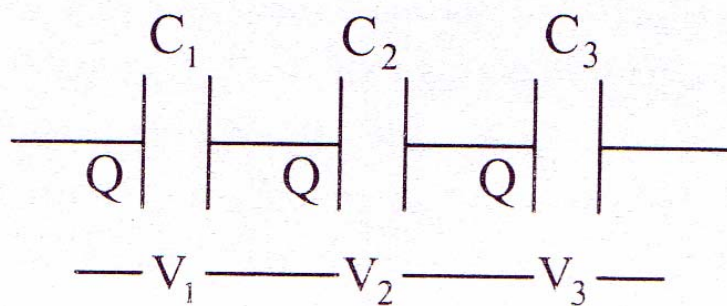
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \quad (2.73)$$

Τα συμπεράσματα από την (2.73) είναι τα ίδια με αυτά που εξαγχθησαν από την (2.70). Μια εφαρμογή της (2.73) είναι το ομοαξονικό καλώδιο που χρησιμοποιείται για θωράκιση του ηλεκτρικού σήματος εναντίον των επιδράσεων εξωτερικών παρασίτων.

Ο υπολογισμός της χωρητικότητας σφαιρικού πυκνωτή δίνεται σαν άσκηση προς λύση στο σπίτι.

2.8.2 Συνδεσμολογία Πυκνωτών

Πυκνωτές συνδεμένοι **σε σειρά** παρουσιάζουν το ίδιο φορτίο στους οπλισμούς τους και διαφορετική διαφορά δυναμικού σε αυτούς.

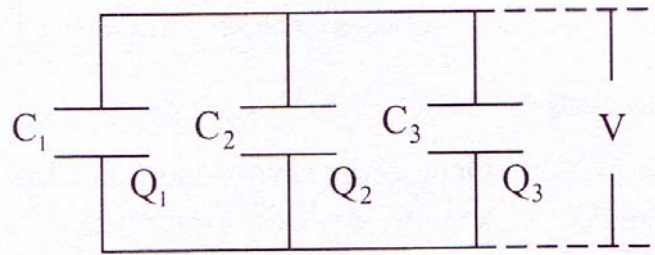


Σχήμα 2.29: Πυκνωτές σε σειρά (Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η αντίστροφη της ολικής χωρητικότητας ισούται με το άθροισμα των επιμέρους των αντιστρόφων της χωρητικότητας των πυκνωτών που συνδέονται σε σειρά, δηλαδή

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \quad (2.74)$$

Πυκνωτές συνδεμένοι παράλληλα παρουσιάζουν την ίδια διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών τους και διαφορετικό φορτίο σε αυτούς.



Σχήμα 2.30: Παράλληλη σύνδεση πυκνωτών (Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Από την ιδιότητα αυτή προκύπτει ότι η ισοδύναμη χωρητικότητα C_{eq} του συνδυασμού παράλληλης σύνδεσης ισούται με το άθροισμα των επί μέρους χωρητικότητων. Δηλαδή:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots \quad (2.75)$$

2.8.3 Ενέργεια αποθηκευμένη σε έναν φορτισμένο πυκνωτή

Κάθε φορτισμένος πυκνωτής έχει αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια ίση με το έργο που απαιτείται για την φόρτιση του πυκνωτή. Η ενέργεια αυτή αποδίδεται αν επιτραπεί στο πυκνωτή να εκφορτιστεί.

Ας υποθέσουμε ότι συνδέουμε τους οπλισμούς ενός αρχικά αφόρτιστου πυκνωτή με τους πόλους μιας μπαταρίας. Ο πυκνωτής κάποια χρονική στιγμή t θα έχει αποκτήσει φορτίο q . Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με $V = \frac{q}{C}$. Το στοιχειώδες έργο που απαιτείται για την μεταφορά επιπλέον φορτίου dq στον πυκνωτή είναι σύμφωνα με την (2.34) είναι ίσο με

$$dW = Vdq = \frac{q}{C} dq \quad (2.76)$$

Η ολική αποθηκευμένη ενέργεια μέσα σε ένα πυκνωτή ισούται με το ολικό έργο που καταναλώσαμε για την φόρτιση του πυκνωτή με φορτίο Q . Έτσι η αποθηκευμένη δυναμική ενέργεια U στον πυκνωτή είναι ίση με

$$U = W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.77)$$

Η σχέση (2.77) ισχύει για οποιοδήποτε πυκνωτή ανεξάρτητα από το σχήμα του. Η αποθηκευμένη ενέργεια αυξάνει όσο αυξάνει η χωρητικότητα C και η διαφορά δυναμικού V στα άκρα του πυκνωτή. Στην πράξη βέβαια η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί στα άκρα ενός πυκνωτή περιορίζεται από την τάση που μπορούμε να εφαρμόσουμε στα άκρα του. Και τούτο διότι εάν η τάση V αυξηθεί αρκετά θα γίνει ηλεκτρική εκκένωση ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή. Εάν τώρα έχουμε ένα επίπεδο πυκνωτή η αποθηκευμένη σε αυτόν ενέργεια από εξισώσεις (2.70), (2.77) είναι ίση με

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A d) E^2 \Rightarrow u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.78)$$

Όπου u είναι η πυκνότητα ενέργειας αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. Η (2.78) ισχύει γενικότερα μια και η πυκνότητα ενέργειας ενός ηλεκτροστατικού πεδίου είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο αυτό.

2.8.4 Πυκνωτές με διηλεκτρικά

Τα διηλεκτρικά, τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω, δεν είναι αγωγοί του ηλεκτρισμού. Παραδείγματα διηλεκτρικών υλικών είναι το γυαλί, το καουτσούκ. Όταν το διηλεκτρικό τοποθετηθεί ανάμεσα στους οπλισμούς, και καταλάβει όλο το χώρο, ενός πυκνωτή αυξάνει την χωρητικότητά του κατά ένα συντελεστή κ . Ο συντελεστής αυτός ονομάζεται **σχετική διηλεκτρική σταθερά** και είναι καθαρός αριθμός. Η σχετική διηλεκτρική σταθερά συνδέει την διηλεκτρική σταθερά του μέσου ϵ με την διηλεκτρική σταθερά του κενού ϵ_0 ($\kappa = \epsilon / \epsilon_0$). Μετά την τοποθέτηση διηλεκτρικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή ισχύει ότι

$$C = \kappa C_0 \quad (2.79)$$

Όπου C_0 είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή εν απουσία του διηλεκτρικού. Στην περίπτωση επίπεδου πυκνωτή έχουμε ότι

$$C = \epsilon_0 \kappa \frac{A}{d} \quad (2.80)$$

Από την σχέση (2.80) βλέπουμε ότι μειώνοντας την απόσταση μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή αυξάνουμε την χωρητικότητά του. Η μικρότερη δυνατή απόσταση μεταξύ των οπλισμών είναι αυτή στην οποία οι ηλεκτρικές εκκενώσεις θα αρχίσουν να διαπερνούν το διηλεκτρικό που υπάρχει ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή. Η μέγιστη δυνατή διαφορά δυναμικού που μπορεί να υπάρξει ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή για μια δεδομένη απόσταση d καθορίζεται από την αντοχή του διηλεκτρικού. Εάν το εξωτερικό πεδίο ξεπεράσει την αντοχή του διηλεκτρικού υλικού τότε καταστρέφονται οι μονωτικές ιδιότητες του υλικού και το υλικό άγει ηλεκτρικό φορτίο. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει την σχετική διηλεκτρική σταθερά διαφόρων διηλεκτρικών υλικών και την αντοχή τους σε εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία.

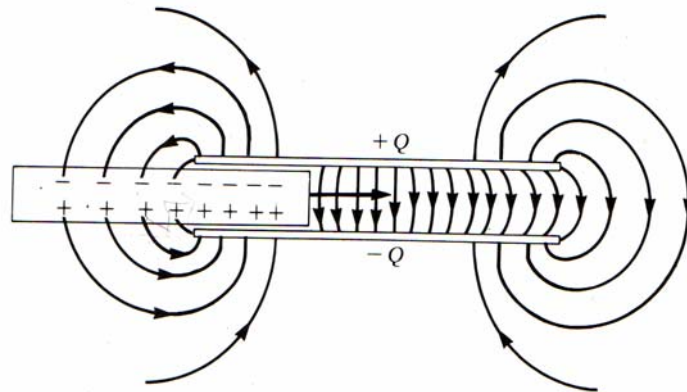
Κενό	1.00000	—
Αέρας	1.00059	3×10^6
Βακελίτης	4.9	24×10^6
Χαλαζίας	3.78	8×10^6
Γυαλί πυρέξ	5.6	14×10^6
Πολυστερόνη	2.56	24×10^6
Τεφάλ	2.1	60×10^6
Συνθετικό λάστιχο	6.7	12×10^6
Νάυλον	3.4	14×10^6
Χαρτί	3.7	16×10^6
Τιτανιούχο στρόντιο	233	8×10^6
Νερό	80	—
Έλαιο σιλικόνης	2.5	15×10^6

Ανακεφαλαιώνοντας τα πλεονεκτήματα χρήσης διηλεκτρικού ανάμεσα στους οπλισμούς πυκνωτή είναι τα παρακάτω

1. Το διηλεκτρικό αυξάνει την χωρητικότητα του πυκνωτή
2. Το διηλεκτρικό αυξάνει την μέγιστη τάση λειτουργίας ενός πυκνωτή

3. Μπορούμε να το χρησιμοποιούμε για μηχανική ενίσχυση του χώρου ανάμεσα στους αγωγικούς οπλισμούς του πυκνωτή.

Η αποθηκευμένη ενέργεια ενός πυκνωτή μειώνεται με την τοποθέτηση διηλεκτρικού ανάμεσα στους οπλισμούς του. Αυτό γιατί ο πυκνωτής καταναλώνει έργο πάνω στο διηλεκτρικό. Τα φορτία του πυκνωτή έλκουν το διηλεκτρικό μέσα στον πυκνωτή. Η έλξη οφείλεται στο ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο στα άκρα των οπλισμών του πυκνωτή. Η οριζόντια, δεξ παρακάτω σχήμα, του ανομοιογενούς ηλεκτρικού πεδίου στα άκρα των πλακών δρα πάνω στα φορτία του διηλεκτρικού. Το αποτέλεσμα είναι η συνισταμένη δύναμη να είναι οριζόντια και κατευθύνεται προς το εσωτερικό του πυκνωτή.



Σχήμα 2.31: Έργο που καταναλώνεται από την εισχώρηση διηλεκτρικού μέσα σε ένα πυκνωτή (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

2.9 Πόλωση

2.9.1 Διηλεκτρικά

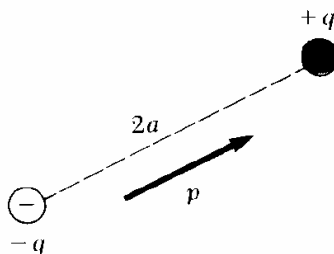
Σε ένα διηλεκτρικό τα ηλεκτρόνια παραμένουν προσκολλημένα στα άτομα τους και μπορούν να κινηθούν ελάχιστα στο εσωτερικό του μορίου. Τέτοιες μικροσκοπικές μετατοπίσεις που μπορούν να προκληθούν από ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο είναι ασήμαντες αν εξετασθούν μεμονωμένα. Συναθροιζόμενες όμως μπορούν να εξηγήσουν τα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς των διηλεκτρικών.

Ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να προκαλέσει μια ασήμαντη ανακατανομή του φορτίου ενός διηλεκτρικού επιμηκύνοντας ή περιστρέφοντας το.

2.9.2 Επαγόμενα Δίπολα

Εάν και θα περίμενε κανείς όταν ένα ηλεκτρικά ουδέτερο άτομο όταν τοποθετηθεί μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο να μην συμβεί τίποτα αυτό δεν είναι σωστό. Αυτό που θα συμβεί είναι ότι ο θετικά φορτισμένος πυρήνας του ατόμου θα μετατοπισθεί προς την διεύθυνση του πεδίου ενώ ο το αρνητικά φορτισμένο ηλεκτρονιακό νέφος θα μετατοπισθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση. Εάν μάλιστα το πεδίο είναι ισχυρό τότε ηλεκτρόνια θα αποσπαστούν από το άτομο ιονίζοντας το. Αν το πεδίο δεν είναι τόσο ισχυρό ο πυρήνας του ατόμου δεν βρίσκεται στο κέντρο του ηλεκτρονιακού νέφους άλλα η ηλεκτροστατική έλξη πυρήνα – ηλεκτρονιακού νέφους κρατά το άτομο ενιαίο. Οι 2 αυτές αντιμαχόμενες δυνάμεις, από την μια το E που προσπαθεί να διαχωρίσει το άτομο και από την άλλη η ηλεκτροστατική έλξη μεταξύ πυρήνα και ηλεκτρονιακού νέφους φτάνουν σε μια ισορροπία, αφήνοντας το άτομο **πολωμένο**.

Το άτομο σε αυτή την περίπτωση θα πάρει την μορφή διπόλου. Ένα δίπολο εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.32: Διπολική ροπή (Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Ορίζουμε ότι η διπολική ροπή p του δίπολου είναι το διανυσματικό μέγεθος p του οποίου το μέτρο είναι ίσο με $2aq$, δηλαδή

$$p \equiv 2aq \quad (2.81)$$

Το άτομο αποκτά μια διπολική ροπή που έχει την ίδια κατεύθυνση με το E και εάν το πεδίο δεν είναι πολύ ισχυρό η επαγόμενη διπολική ροπή είναι ανάλογη με την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου,

$$p = aE \quad (2.82)$$

Η σταθερά αναλογίας ονομάζεται **ατομική πολωσιμότητα** και είναι χαρακτηριστική κάθε ατόμου. Ο παρακάτω πίνακας περιέχει τις ατομικές πολωσιμότητες διαφόρων ατόμων

Στοιχείο	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}a$ (σε 10^{-30} m^3)	0.66	0.21	12	9.3	1.5	0.4	27	1.6	34

Στα μόρια η κατάσταση δεν είναι τόσο απλή. Αυτό γιατί τα μόρια πολώνονται ευκολότερα σε κάποιες διευθύνσεις παρά σε κάποιες άλλες. Π.χ. η πολωσιμότητα του μορίου του CO_2 είναι $4.5 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \text{ m/ N}$ όταν το πεδίο εφαρμόζεται κατά μήκος του άξονα του μορίου, άλλα μόνο $2 \times 10^{-40} \text{ C}^2 \text{ m/ N}$ όταν το πεδίο είναι κάθετο στον άξονα του μορίου. Αν τώρα το πεδίο σχηματίζει κάποια γωνία με τον άξονα του μορίου τότε θα πρέπει να αναλύσουμε το πεδίο στις 2 συνιστώσες του και να τις πολλαπλασιάσουμε με τις αντίστοιχες πολωσιμότητες τους, δηλαδή

$$p = a_{\perp} E_{\perp} + a_{\parallel} E_{\parallel} \quad (2.83)$$

Οι εξισώσεις (2.82), (2.83) ισχύουν με αυτή την μορφή τους για συμμετρικά μόρια. Τα ασύμμετρα μόρια δεν θα μας απασχολήσουν σε αυτό το μάθημα.

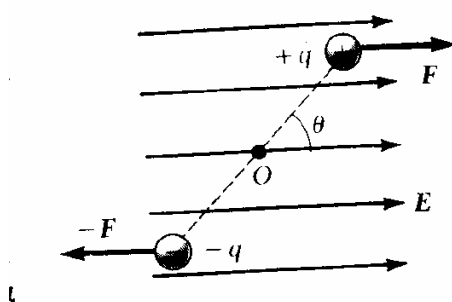
2.9.3 Ευθυγράμμιση πολικών μορίων

Τι θα συμβεί ένα τοποθετήσουμε ένα δίπολο, επαγόμενο ή πολικό μόριο (μόνιμη πολικότητα), μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο;

Ας εξετάσουμε την περίπτωση όπου η διπολική ροπή του μορίου σχηματίζει μια γωνία θ με την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου. Επειδή το πεδίο είναι ομογενές η δύναμη στο θετικό φορτίο, $F_+ = qE$, εξουδετερώνεται από αυτή που ασκείται στο αρνητικό φορτίο, $F_- = -qE$. Εμφανίζεται ωστόσο μια ροπή στρέψης

του μορίου η οποία τείνει να ευθυγραμμίσει το μόριο με το ηλεκτρικό πεδίο. Η F_+ προκαλεί μια περιστροφή κατά την φορά των δεικτών του ρολογιού ενώ η F_- προκαλεί μια περιστροφή κατά την αντίθετη φορά. Η ολική ροπή ως προς το σημείο περιστροφής O είναι ίση με

$$\tau = (r_- \times F_-) + (r_+ \times F_+) = 2aq \times E = p \times E \quad (2.84)$$



Σχήμα 2.33: Στρέψη ηλεκτρικού δίπολου μέσα σε ηλεκτροστατικό πεδίο (Serway ‘ Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Η ροπή στην κυκλική κίνηση είναι το αντίστοιχο της δύναμης στην μη κυκλική κίνηση. Μια δύναμη F όταν μετακινεί κατά dS ένα σώμα παράγει έργο $F dS$. Αναλόγως όταν η ροπή στρέφει ένα σώμα κατά γωνία $d\theta$ παράγει έργο ίσο με $\tau \cdot d\theta$. Έτσι στην περίπτωση της ροπής στρέψης η ενέργεια που αποθηκεύεται ως δυναμική στο δίπολο μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως

$$U - U_o = \int_{\theta_o}^{\theta} \tau d\theta = \int_{\theta_o}^{\theta} pE \sin \theta d\theta = pE \int_{\theta_o}^{\theta} \sin \theta d\theta \Rightarrow \quad (2.85)$$

$$U - U_o = pE(\cos \theta_o - \cos \theta)$$

Όπου U είναι η τελική δυναμική ενέργεια του δίπολου στο σημείο που ο άξονας του δίπολου δημιουργεί γωνία θ με τις γραμμές του πεδίου, U_o είναι η αρχική δυναμική ενέργεια στο σημείο που ο άξονας του δίπολου δημιουργεί γωνία θ_o με τις γραμμές του πεδίου. Εάν τώρα επιλέξω η γωνία $\theta_o = 90^\circ$ τότε από (2.85) έχουμε

$$U = -pE \cos \theta = -p \cdot E \quad (2.86)$$

2.9.4 Πόλωση

Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι εάν τοποθετήσουμε ένα κομμάτι διηλεκτρικού μέσα σε ένα εξωτερικό πεδίο τότε: (α) Εάν το υλικό αποτελείται από ουδέτερα άτομα (ή μη πολικά μόρια) σε αυτά θα δημιουργηθεί από το πεδίο μια διπολική ροπή παράλληλη με το πεδίο ή (β) αν το υλικό αποτελείται από πολικά μόρια σε κάθε ένα από αυτά θα εφαρμοσθεί μια διπολική ροπή στρέψης που θα στρέψει το μόριο προς την κατεύθυνση του πεδίου.

Και οι 2 αυτοί μηχανισμοί έχουν το ίδιο αποτέλεσμα την δημιουργία δηλαδή δίπολων παράλληλα προς το πεδίο. Συνεπώς το διηλεκτρικό **πολώνεται**. Την πόλωση του διηλεκτρικού την μετράμε με το φυσικό μέγεθος της πόλωσης που ορίζεται ως

$$P \equiv \text{διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου}$$

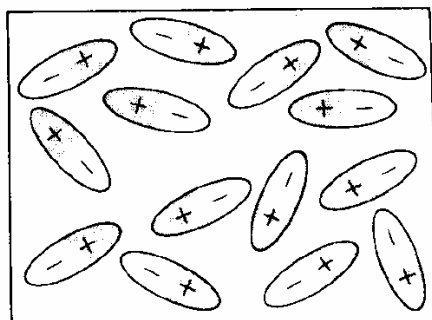
2.9.5 Ατομική περιγραφή των διηλεκτρικών

Παρουσία διηλεκτρικού η χωρητικότητα ενός πυκνωτή μεγαλώνει. Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του μειώνεται όπως επίσης και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα στους οπλισμούς του. Έτσι ισχύει

$$E = \frac{E_0}{\kappa} \quad (2.87)$$

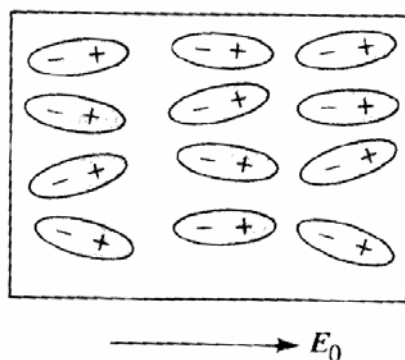
Η εξήγηση της (2.87) όπως και της (2.80) κρύβεται πίσω από την ατομική περιγραφή των διηλεκτρικών.

Απουσία εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου τα πολικά μόρια ενός διηλεκτρικού έχουν τυχαίες διευθύνσεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.34: Κατευθυντικότητα ατόμων διηλεκτρικού απουσία ηλεκτρικού πεδίου
(Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Εάν τώρα εφαρμόσουμε ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο θα εφαρμοστεί μια ροπή στρέψης στα πολικά μόρια και θα τα ευθυγραμμίσει σχεδόν με το ηλεκτρικό πεδίο. Η ευθυγράμμιση είναι σχεδόν τέλεια διότι την διαδικασία της ευθυγράμμισης την αντιστρατεύονται οι τυχαίες θερμικές κινήσεις των μορίων: οι συνεχείς συγκρούσεις μεταξύ τους καταστρέφουν προς στιγμήν τοπικά την ευθυγράμμιση. Για αυτό το λόγο η ευθυγράμμιση δεν είναι σχεδόν ποτέ τέλεια όταν η θερμοκρασία είναι υψηλή, και εξαφανίζεται σχεδόν αμέσως όταν το πεδίο εξαφανιστεί. Η ευθυγράμμιση των πολικών μορίων ενός υλικού εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα με την εφαρμογή εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου



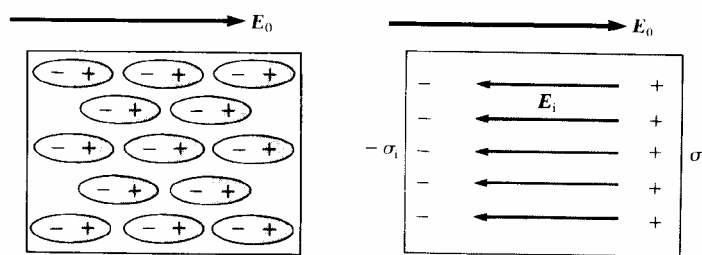
Σχήμα 2.35: Κατεύθυνση ατόμων διηλεκτρικού παρουσία ηλεκτρικού πεδίου (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι η ευθυγράμμιση προσεγγίζει την τέλεια όσο πιο μεγάλη είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

Παρατηρούμε βέβαια ότι τα προσανατολισμένα πολικά μόρια του διηλεκτρικού δημιουργούν ένα εσωτερικό πεδίο που εναντιώνεται του εξωτερικού πεδίου, προκαλώντας έτσι μείωση του εξωτερικού πεδίου.

Στην περίπτωση που το διηλεκτρικό αποτελείται από άτομα ή μη πολικά μόρια η εφαρμογή εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου στα άκρα του υλικού θα προκαλέσει την εμφάνιση διπολικής ροπής στα άκρα τους και την ευθυγράμμιση τους με τις γραμμές του πεδίου. Και πάλι δημιουργείται ένα εσωτερικό πεδίο που μειώνει την ένταση του εξωτερικού πεδίου.

Έστω ένα κομμάτι διηλεκτρικού που βρίσκεται μέσα σε ένα ηλεκτρικό πεδίο. Η παρακάτω εικόνα περιγράφει τις διαδικασίες που θα συμβούν στο εσωτερικό του διηλεκτρικού

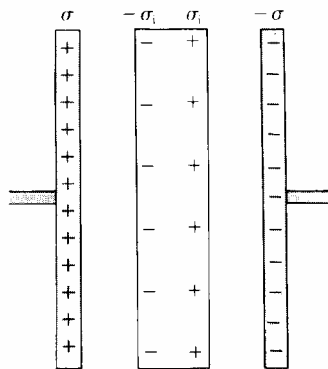


Σχήμα 2.36: Επίδραση εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου στην ένταση του εξωτερικού πεδίου μέσα στο διηλεκτρικό (Serway 'Ηλεκτρομαγνητισμός')

Η πόλωση του διηλεκτρικού δημιουργεί μια επιφανειακή πυκνότητα φορτίων $-\sigma_i$ στα δεξιά της επιφάνειας του διηλεκτρικού και μια επιφανειακή πυκνότητα φορτίων $+\sigma_i$ στα αριστερά της επιφάνειας του διηλεκτρικού. Το εσωτερικό φορτίο που δημιουργείται E_i εναντιώνεται στο εξωτερικό πεδίο E_0 και έτσι το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό είναι ίσο με

$$E = E_0 - E_i \quad (2.88)$$

Στην περίπτωση ενός επίπεδου πυκνωτή και σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε



Σχήμα 2.37: Επίδραση διηλεκτρικού υλικού μέσα στους οπλισμούς πυκνωτή,
(Serway ‘Ηλεκτρομαγνητισμός’)

Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ηλεκτροστατικά ισορροπώντος αγωγού δίνεται από την σχέση $E = \frac{\sigma}{\epsilon_o}$ επομένως από παραπάνω σχήμα και εξίσωση (2.88), έχουμε ότι

$$\frac{\sigma}{\kappa \epsilon_o} = \frac{\sigma}{\epsilon_o} - \frac{\sigma_i}{\epsilon_o} \Rightarrow \sigma_i = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) \sigma \quad (2.89)$$

Πάντα $\kappa > 1$ άρα η επιφανειακή πυκνότητα των οπλισμών του πυκνωτή είναι μεγαλύτερη από την επαγόμενη στην επιφάνεια του διηλεκτρικού. Εάν τώρα το διηλεκτρικό αντικαταστεί από αγωγό τότε στο εσωτερικό του έχουμε $E = 0$, $\kappa = 1$ και $\sigma_i = \sigma$.

2.10 Επαναληπτικές Ερωτήσεις

1. Γιατί είναι απαραίτητο να χρησιμοποιούμε πάρα πολύ μικρό δοκιμαστικό φορτίο ($q \rightarrow 0$) όταν ορίζουμε ηλεκτρικά πεδία;
2. Πότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε προσεγγιστικά μια κατανομή φορτίου με ένα σημειακό φορτίο;
3. Γιατί οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου δεν τέμνονται;
4. Φορτίο $4q$ έχει απόσταση r από ένα άλλο φορτίο $-q$. Συγκρίνετε τον αριθμό των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου οι οποίες αναδύονται από το φορτίο $4q$ και καταλήγουν στο φορτίο $-q$.
5. Θεωρήστε ότι 2 ίσα σημειακά φορτία απέχουν μεταξύ τους κατά μια απόσταση d . Σε ποιο σημείο ένα τρίτο δοκιμαστικό φορτίο θα υφίσταται μηδενική συνισταμένη δύναμη;
6. Εξηγήστε την διαφορά ανάμεσα σε γραμμική, επιφανειακή και χωρική πυκνότητα φορτίου. Δώστε παραδείγματα χρήσεως της καθεμίας.
7. Αποδείξτε τις ιδιότητες που χαρακτηρίζουν έναν αγωγό που ισορροπεί ηλεκτροστατικά.
8. Εάν η ολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια γκαουσιανή επιφάνεια είναι μηδενική, σχολιάστε ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό (α) Δεν υπάρχουν φορτία μέσα στην επιφάνεια (β) Το ολικό καθαρό φορτίο είναι μηδέν, (γ) Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό παντού πάνω στην επιφάνεια και (δ) ο αριθμός των δυναμικών γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που εξέρχονται είναι ο ίδιος με αυτό που εισέρχονται.
9. Μπορείτε να συμπεράνετε ότι δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία σε μια περιοχή του χώρου όπου το ηλεκτρικό φορτίο είναι μηδενικό; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
10. Μια σφαιρική γκαουσιανή επιφάνεια εγκλωβίζει ένα σημειακό φορτίο q . Περιγράψτε τι θα συμβεί στην ροή που διαπερνά την επιφάνεια εάν (α) τριπλασιαστεί το φορτίο, (β) διπλασιαστεί ο όγκος της σφαίρας, (γ) μεταβληθεί το σχήμα της γκαουσιανής και (δ) μετακινήσουμε το φορτίο σε ένα άλλο σημείο μέσα στην γκαουσιανή επιφάνεια.

11. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον νόμο του Gauss για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα γνωστό ολικό ηλεκτρικό φορτίο άγνωστης όμως κατανομής; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
12. Εξηγήστε γιατί η ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια η οποία εγκλωβίζει ένα γνωστό ηλεκτρικό φορτίο είναι ανεξάρτητη από το μέγεθος ή από το σχήμα της επιφάνειας.
13. Πόση ενέργεια αποδίδεται σε κάθε Coulomb φορτίου που διέρχεται μέσα από μια μπαταρία;
14. Εξηγήστε σε τι διαφέρουν το ηλεκτρικό δυναμικό και η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια;
15. Ένα αρνητικό φορτίο κινείται κατά την κατεύθυνση ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου. Αυξάνεται ή μειώνεται η δυναμική του ενέργεια; Αυξάνεται ή μειώνεται το δυναμικό;
16. Εξηγήστε γιατί οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου είναι πάντοτε κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες;
17. Εξηγήστε γιατί όταν υπάρχει ηλεκτροστατική ισορροπία όλα τα σημεία του αγωγού βρίσκονται στο ίδιο δυναμικό.
18. Υποθέστε ότι το δυναμικό είναι μηδέν σε ένα σημείο είναι μηδενικό. Μπορείτε να συμπεράνετε ότι δεν υπάρχουν φορτία στην περιοχή αυτή;
19. Το δυναμικό σε μια περιοχή είναι σταθερό. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στην περιοχή αυτή;
20. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό μέσα σε μια κοίλη σφαίρα και ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα. Μήπως αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό μέσα στην σφαίρα είναι μηδενικό; Θεμελιώστε την απάντησή σας.
21. Πώς μπορούμε να θωρακίσουμε ένα όργανο από ανεπιθύμητα ηλεκτρικά πεδία; Πως εξηγείται την αποτελεσματικότητα της πρότασης σας;
22. Γιατί είναι ασφαλές να βρισκόμαστε μέσα σε αυτοκίνητο μεταλλικής κατασκευής όταν έχει θύελλα από κεραυνούς;
23. Τι συμβαίνει στο φορτίο ενός πυκνωτή όταν διπλασιαστεί η τάση ανάμεσα στους οπλισμούς του.
24. Σε ένα οι πυκνωτές είναι παράλληλα συνδεδεμένοι ενώ σε ένα άλλο όμοιο ζεύγος είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Και τα 2 ζεύγη φορτίζονται από την ίδια μπαταρία. Ποιο από τα 2 ζεύγη έχει περισσότερη αποθηκευμένη ενέργεια και επομένως είναι πιο επικίνδυνο.

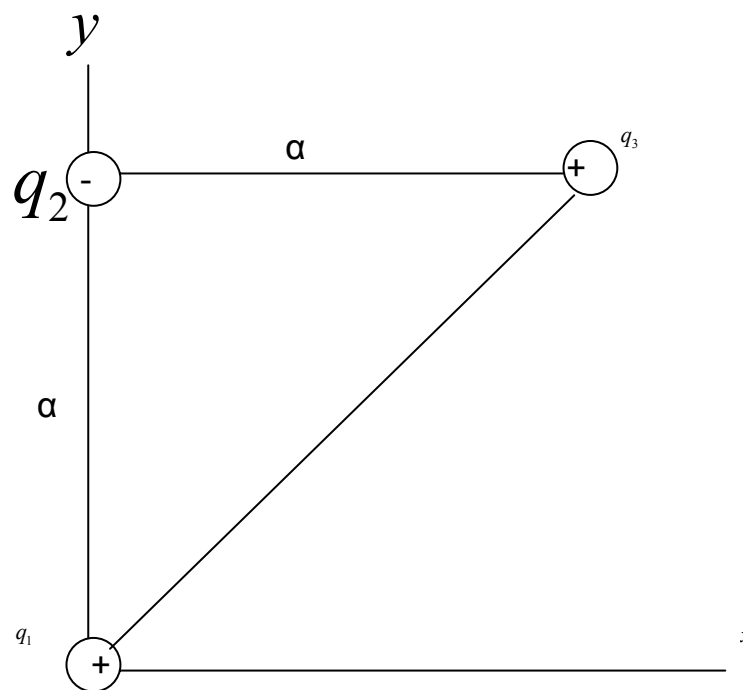
25. Πως θα αυξήσετε την μέγιστη επιτρεπτή τάση ενός επίπεδου πυκνωτή χωρίς να μεταβάλλετε την μεταξύ των οπλισμών του απόσταση.

26.

2.11 Ασκήσεις

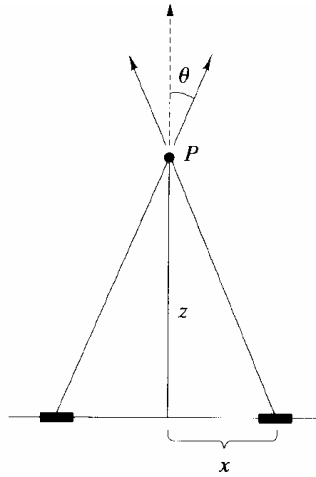
- 1 Θεωρείστε ότι τρία σημειακά φορτία κείνται στις κορυφές του τριγώνου, όπως φαίνεται στο σχήμα Ασκ.1. Τα φορτία $q_1 = q_3 = 5\mu\text{C}$, $q_2 = -2\mu\text{C}$ και $a = 0.1\text{m}$.

Βρείτε την συνισταμένη δύναμη στο q_3 . (Απ. $F_3 = (-1.1\hat{i} + 7.9\hat{j})\text{N}$)



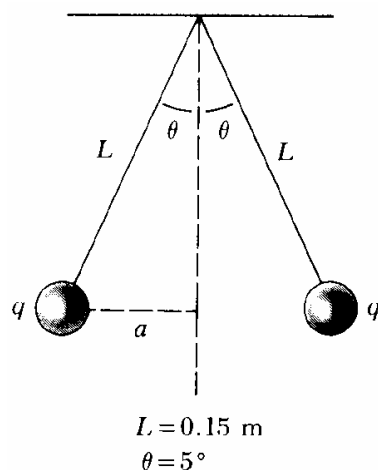
Ασκ1

2. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση z πάνω από το μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος μήκους $2L$, που φέρει ένα ομοιόμορφο γραμμικό φορτίο λ .



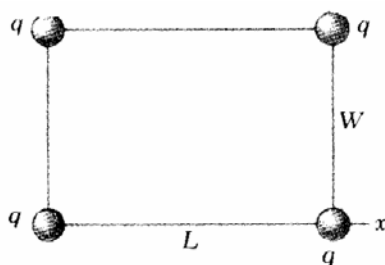
Ασκ.2

3. Τρία φορτία κείνται πάνω στον άξονα x, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το θετικό φορτίο $q_1 = 15\mu C$ κείται στην θέση 2m, το επίσης θετικό φορτίο $q_2 = 6\mu C$ κείται πάνω στην αρχή των συντεταγμένων. Που πρέπει να τοποθετηθεί ένα αρνητικό φορτίο, το q_3 , στον άξονα x ώστε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται επάνω του να είναι μηδενική; (Απ. $X=0.775$ m)
4. Έστω 2 θετικά σημειακά φορτία q_1 και q_2 τα οποία απέχουν απόσταση r μεταξύ τους. Υπολογίστε το έργο κατά την μετακίνηση του φορτίου q_2 μέχρι το μέσο της απόστασης του r με το φορτίο q_1 . (Απ. $W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$).
5. Δύο μικρές σφαίρες, η καθεμία μάζας 3×10^{-2} Kg, είναι ηλεκτρικά φορτισμένες και ισορροπούν καθώς είναι αναρτημένες από νήματα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το μήκος του κάθε νήματος είναι 0.15 m και η γωνία που σχηματίζει με την κατακόρυφο είναι $\theta = 5^\circ$. Υπολογίστε το φορτίο υποθέτοντας ότι είναι το ίδιο και στην μια και στην άλλη σφαίρα. (Απ. $q = 4.4 \times 10^{-8}$ C)



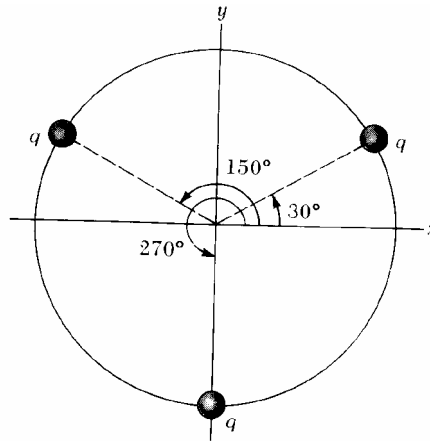
Ασκ.4

6. Τέσσερα όμοια σημειακά φορτία ($q = 10\mu\text{C}$) είναι τοποθετημένα στις κορυφές ενός ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι $L = 60\text{cm}$ και $W = 15\text{cm}$. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης ηλεκτροστατικής δύναμης που ασκείται από τα τρία άλλα φορτία στο φορτίο το οποίο βρίσκεται στην κάτω αριστερή κορυφή του ορθογωνίου. (Απ. $40.9 \text{ Nt @ } 263^\circ$).



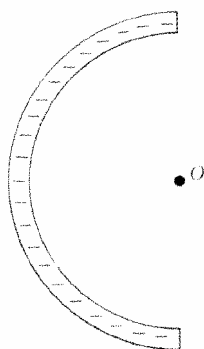
Ασκ.5

7. Τρία ομόσημα φορτία ($q = -5\mu\text{C}$) βρίσκονται στην περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας 2m και σχηματίζουν γωνίες 30° , 150° και 270° αντίστοιχα με τον θετικό άξονα x. Ποιο είναι το συνισταμένο ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο του κύκλου; (Απ. 0)



Ασκ.6

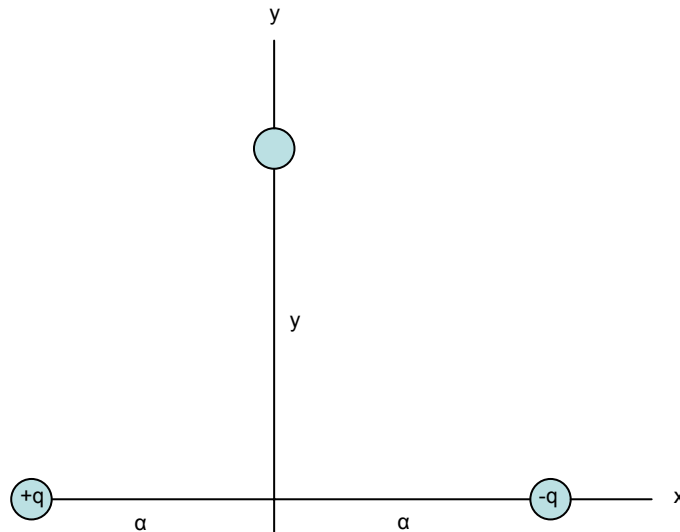
8. Μια σφαίρα ακτίνας 4 cm έχει καθαρό φορτίο $+39\mu\text{C}$. (α) Αν το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανομημένο σε ολόκληρο τον όγκο της σφαίρας ποια είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου; (β) Αν αυτό το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στην επιφάνεια της σφαίρας, ποια είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου; (**Απ.** 0.145 C/m^3 , $1.94 \times 10^{-3} \text{ C/m}^2$)
9. Μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος από μονωτικό υλικό μήκους 14 cm κάμπτεται σε σχήμα ημικυκλίου, όπως εικονίζεται στο παρακάτω σχήμα. Αν η ράβδος έχει ολικό φορτίο $-7.5\mu\text{C}$ βρείτε το μέτρο, την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο O, που είναι στο κέντρο του ημικυκλίου.



Ασκ. 8

10. Ορίζουμε ότι ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από 2 ίσα αλλά αντίθετα φορτία $\pm q$ που έχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο E που δημιουργείται από τα φορτία του διπόλου στο

σημείο P, το οποίο κείται πάνω στον άξονα y. Το P απέχει y απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων. Υποθέστε ότι $y \gg a$. (Απ. $E = k \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$)



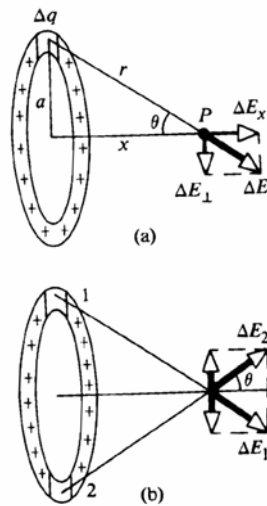
Ασκ.9

11. Μια ράβδος μήκους l είναι ομοιόμορφα φορτισμένη θετικά και έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ και συνολικό φορτίο Q . Υπολογίστε (α) το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P, που βρίσκεται πάνω στην προέκταση της ράβδου, σε απόσταση d από το ένα άκρο της (β) βρίσκεται σε απόσταση b πάνω από το ένα άκρο της ράβδου και (γ) Βρίσκεται σε απόσταση c πάνω από το μέσο της ράβδου. (Απ.

$$E = \frac{kQ}{d(l+d)}, \quad E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{L^2 + b^2}} \right), \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QL}{c\sqrt{L^2/4 + c^2}},$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{1}{\sqrt{L^2 + b^2}}$$

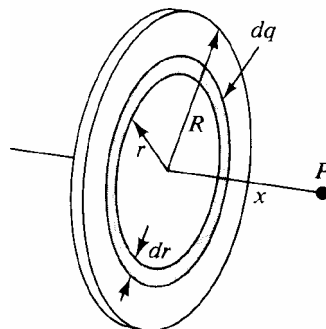
12. Ένας δακτύλιος ακτίνας a έχει ομοιόμορφη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου συνολικής τιμής Q . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P. Το P βρίσκεται πάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας του δακτυλίου, σε απόσταση x από το κέντρο του. (Απ. $\vec{E} = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} Q \hat{i}$)



Ασκ.11

13. Ένας δίσκος ακτίνας R είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον κάθετο άξονα του δίσκου σε

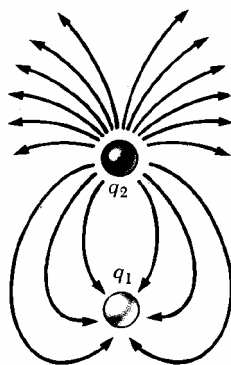
απόσταση x από το κέντρο του. (Απ. $E = 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\right)$)



Ασκ.12

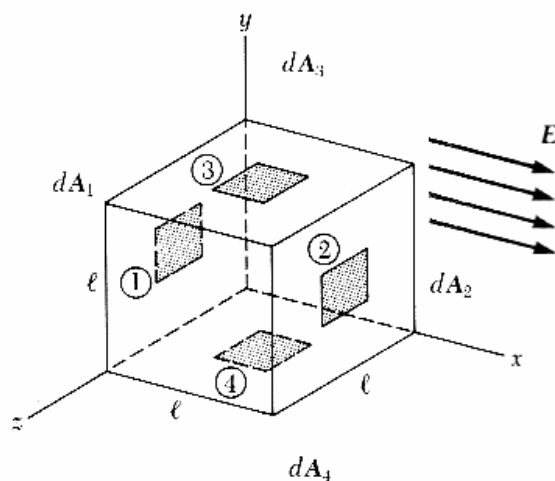
14. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από 2 σημειακά φορτία τα οποία έχουν μικρή απόσταση μεταξύ τους.

(α) Προσδιορίστε τον λόγο q_1/q_2 (β) Ποια είναι τα πρόσημα των q_1 και q_2



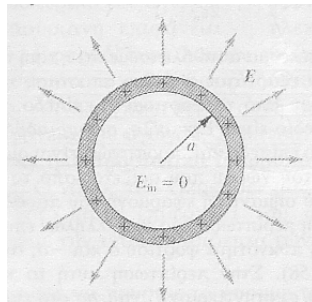
Ασκ.14

15. Ένας δίσκος ακτίνας R προσανατολίζεται έτσι ώστε το μοναδιαίο του κάθετο διάνυσμα να σχηματίζει γωνία 60° ως προς ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης μέτρου E . Υπολογίστε (α) Πόση είναι η ολική ηλεκτρική ροή δια μέσου του δίσκου, (β) Πόση είναι η ολική ροή αν στραφεί έτσι ώστε το επίπεδο του να είναι παράλληλο προς την ένταση $\vec{E}$; (γ) Πόση είναι η ολική ροή αν η κάθετη σε αυτόν είναι παράλληλη προς την ένταση $\vec{E}$;
16. Ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο E κατευθύνεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x . Υπολογίστε την καθαρή ηλεκτρική ροή που διαπερνά τον κύβο, ακμής l που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα.



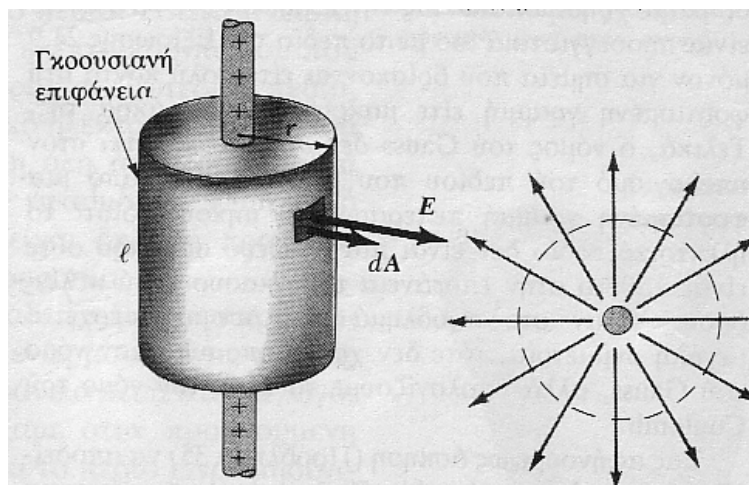
Ασκ.16

17. Με αφετηρία τον νόμο του Gauss υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ένα απομονωμένο σημειακό φορτίο q . Κατόπιν αποδείξτε πως προκύπτει ο νόμος του Coulomb από το αποτέλεσμα αυτό.
18. Έχουμε μια σφαίρα κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό. Η σφαίρα είναι φορτισμένη με ολικό φορτίο Q κατανεμημένο ομοιόμορφα σε όλο τον όγκο της με πυκνότητα φορτίου ρ σταθερή. (α) Υπολογίστε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάποιο σημείο που κείται έξω από την σφαίρα, δηλαδή $r > a$ και (β) Βρείτε την ένταση του πεδίου σε σημεία μέσα στην σφαίρα ($r < a$)
19. Ένα λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας a έχει ολικό φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια του. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημεία που βρίσκονται μέσα και έξω από την σφαίρα



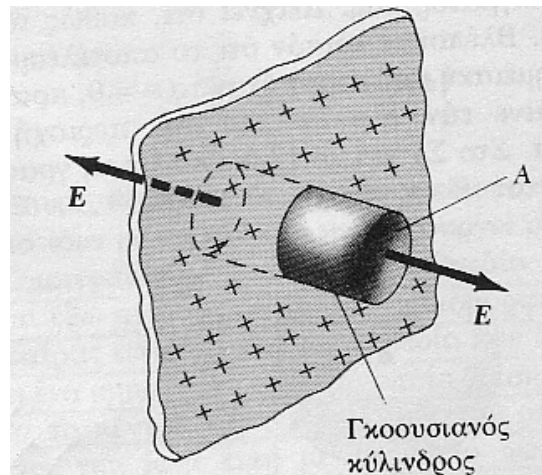
Ασκ. 19

20. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από μια ομοιόμορφη φορτισμένη θετικά γραμμή απείρου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου $\lambda =$ σταθερή.



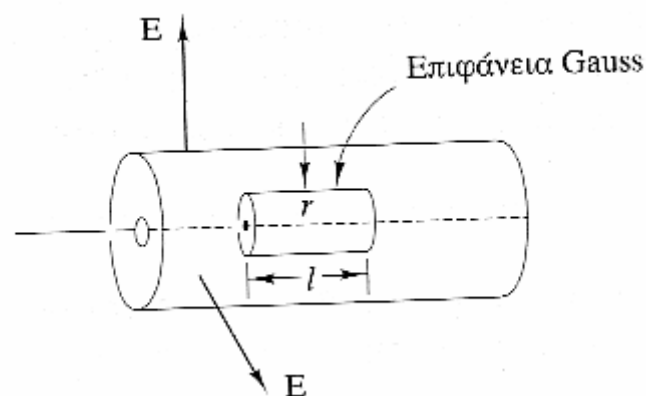
Ασκ.20

21. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα φορτισμένο επίπεδο απομονωτικό υλικό απείρων διαστάσεων το οποίο έχει επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου σ .



Ασκ.21

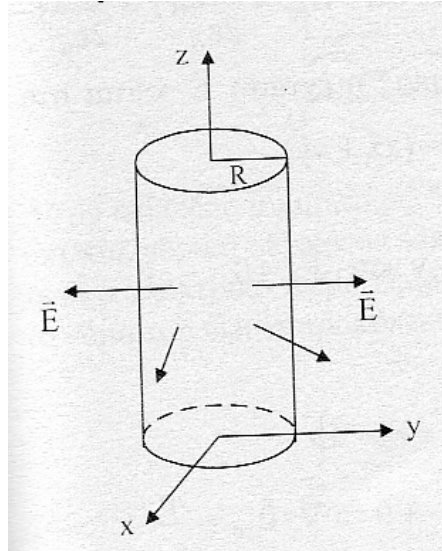
22. Ένας κύλινδρος με άπειρο μήκος φέρει στο εσωτερικό μια πυκνότητα φορτίου που είναι ανάλογη της απόστασης από τον άξονα $\rho = kr$, για κάποιο σταθερό k . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό αυτού του κυλίνδρου.



Ασκ.22

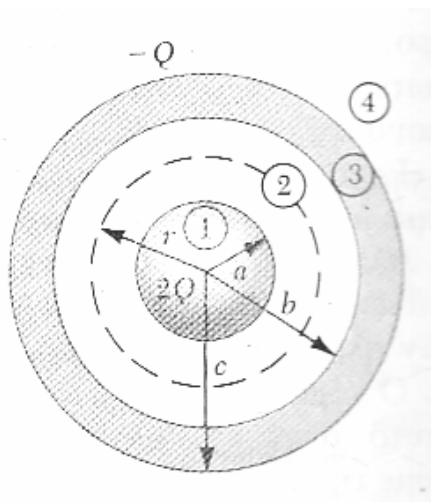
23. Κύλινδρος ακτίνας R και απείρου μήκους είναι ομοιόμορφα θετικά φορτισμένος με χωρική πυκνότητα φορτίου ρ . Ο άξονας του κυλίνδρου ταυτίζεται με τον άξονα z . Να υπολογιστούν (α) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου. (β) οι συνιστώσες E_x , E_y και E_z της έντασης του πεδίου στο εσωτερικό

του κυλίνδρου. (γ) Να επαληθευτεί ότι η απόκλιση του πεδίου στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$.



Ασκ.23

24. Μια συμπαγής αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a είναι φορτισμένη με καθαρό φορτίο $2Q$. Ένα αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας b και εξωτερικής c είναι ομόκεντρο με την σφαίρα και είναι φορτισμένο με καθαρό φορτίο $-Q$. Χρησιμοποιείτε τον νόμο του Gauss για να προσδιορίσετε στο παρακάτω σχήμα το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές 1, 2, 3, 4, και την κατανομή ηλεκτρικού φορτίου στο σφαιρικό κέλυφος.



Ασκ.24

25. Θετικό φορτίο q είναι κατανεμημένο σε σφαίρα ακτίνας R με πυκνότητα

$$\rho = k(r \leq R/2)$$

$$\rho = kr(R/2 < r \leq R)$$

$$\rho = 0(r > R)$$

όπου k είναι μια σταθερά.

(α) Να προσδιοριστεί η σταθερά k συναρτήσει των q και R .

(β) Πώς μοιράζεται το φορτίο στις 2 περιοχές διαφορετικής πυκνότητας;

(γ) Να υπολογιστεί η ένταση του Η.Π. συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο της σφαιρικής αυτής κατανομής φορτίου.

26. Μεταξύ 2 ομοαξονικών κυλινδρικών επιφανειών απείρου μήκους και ακτινών a και b , υπάρχει φορτισμένος χώρος με πυκνότητα φορτίου

$$\rho(r) = 0(r < a)$$

$$\rho(r) = 3kr(a \leq r \leq b)$$

$$\rho(r) = 0(r > b)$$

Να υπολογιστεί η ένταση του Η/Π σε κάθε σημείο του χώρου.

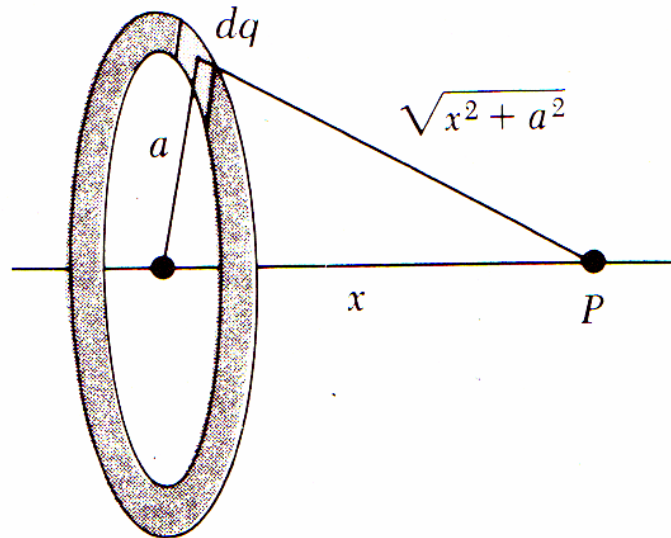
27. Ένας σφαιρικός φλοιός εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής ακτίνας b είναι φορτισμένος με χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho(r) = k/r$ (για $a < r < b$), όπου r είναι η απόσταση από το κέντρο και k είναι η σταθερά. Στο κέντρο του φλοιού υπάρχει σημειακό φορτίο Q . Να υπολογιστεί η ένταση του Η/Π σε κάθε σημείο του χώρου.

28. Το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποια περιοχή του χώρου δίνεται από την συνάρτηση $V(x, y) = k(x^2 - y^2)$, όπου k είναι μια σταθερά.

(α) Βρείτε την ένταση της ηλεκτρικού πεδίου E σε τυχαίο σημείο του χώρου

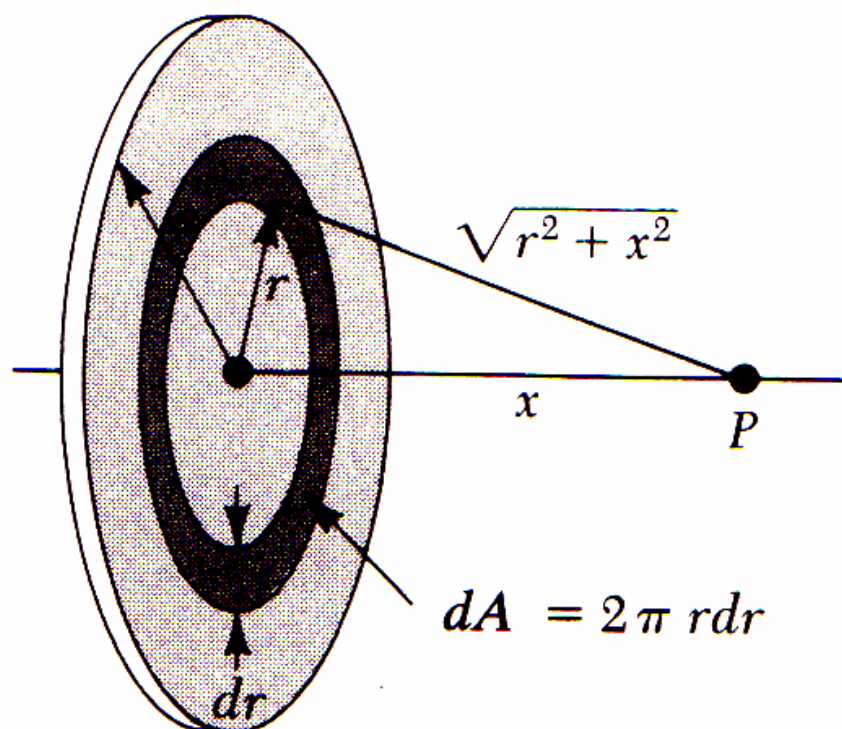
(β) Βρείτε την χωρική πυκνότητα φορτίου ρ σε τυχαία θέση.

29. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο P που κείται πάνω στον άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου ακτίνας a και ολικού φορτίου Q . Ο δακτύλιος κείται πάνω σε ένα επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα x .



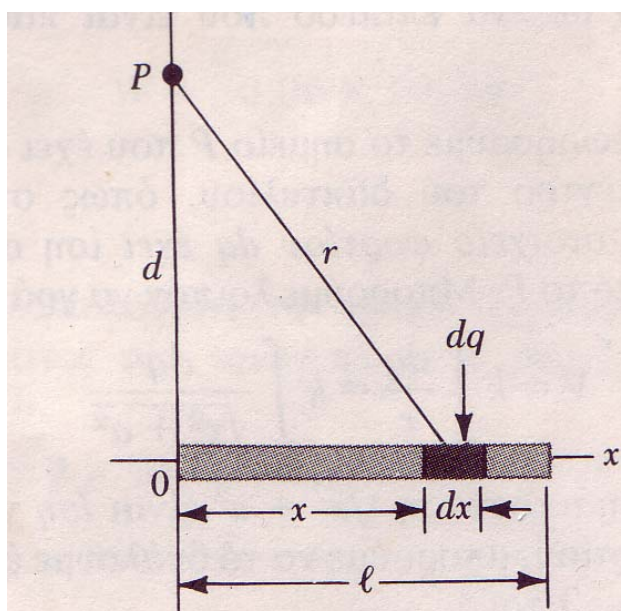
Ασκ. 29

30. Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στο κάθετο άξονα συμμετρίας ενός δίσκου ακτίνας a , ομοιόμορφα φορτισμένου με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ .



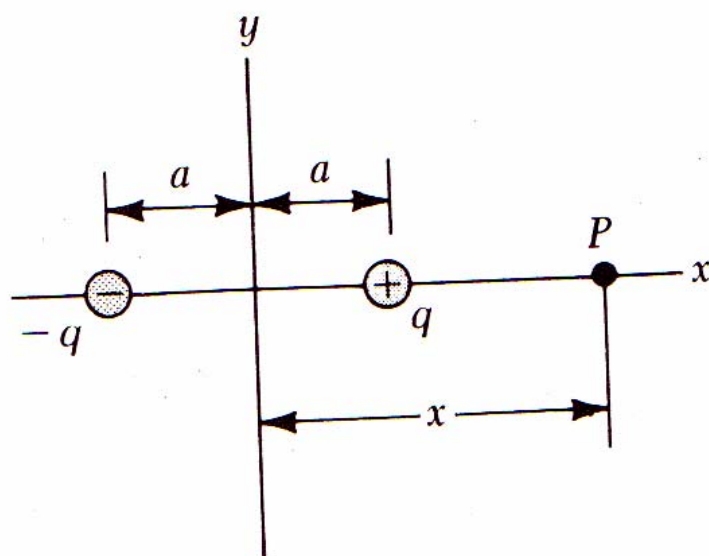
Ασκ.30

31. Μια ράβδος μήκους l πάνω στον άξονα x και είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με συνολικό φορτίο Q . Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο P πάνω στον άξονα y και σε απόσταση d από την αρχή των συντεταγμένων.



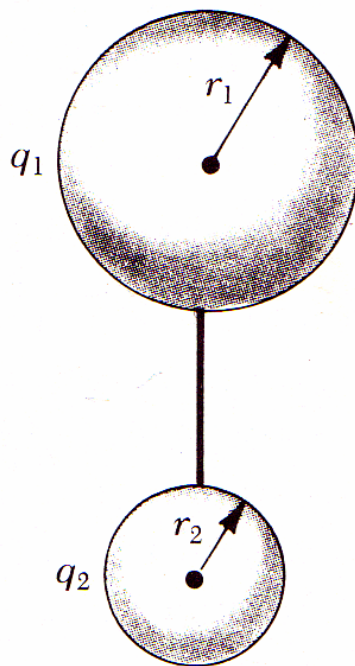
Ασκ. 31

32. Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R κατασκευασμένη από μονωτικό υλικό, είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με ολικό φορτίο Q (α) Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό για ένα σημείο που κείται έξω από την σφαίρα $r > R$. Θεωρήστε ότι το δυναμικό είναι μηδενικό όταν $r \rightarrow \infty$. (b) Βρείτε το δυναμικό σε ένα σημείο μέσα στην φορτισμένη σφαίρα όταν δηλαδή $r < R$.
33. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου ξεκινώντας από το δυναμικό του.
34. Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από ίσα άλλα αντίθετα φορτία που έχουν μεταξύ τους απόσταση $2a$. Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο P πάνω στον άξονα x το οποίο κείται σε απόσταση x από το μέσο του διπόλου.



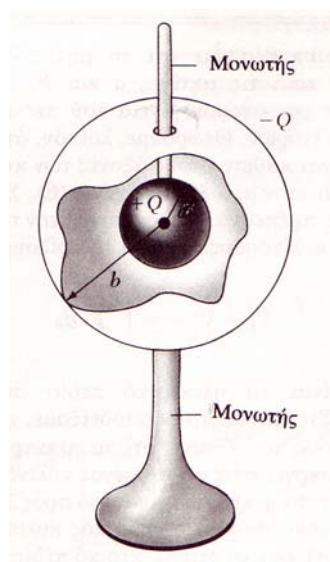
Ασκ. 34

35. 2 σφαιρικοί αγωγοί, ακτινών r_1 και r_2 αντίστοιχα, έχουν μεταξύ τους απόσταση πολύ μεγαλύτερη από την ακτίνα τους. Είναι δε συνδεδεμένοι με ένα μεταλλικό αγωγίμο σύρμα. Βρείτε τον λόγο των H/Π στις επιφάνειες των 2 σφαιρών όταν υπάρχει ηλεκτροστατική ισορροπία και τα φορτία στις σφαίρες είναι q_1 και q_2 , αντίστοιχα.



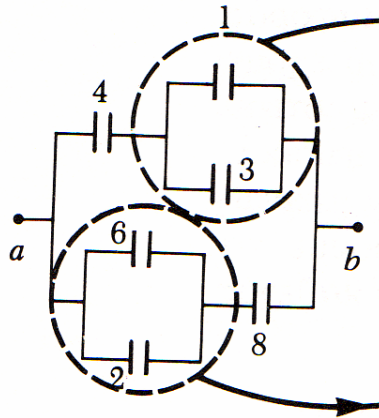
Ασκ. 35

36. Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από έναν αγωγικό σφαιρικό φλοιό ακτίνας b φορτισμένο με φορτίο $-Q$ και ομόκεντρο με μια μικρότερη αγωγική σφαίρα ακτίνας a και φορτίου Q . Βρείτε την χωρητικότητα του.



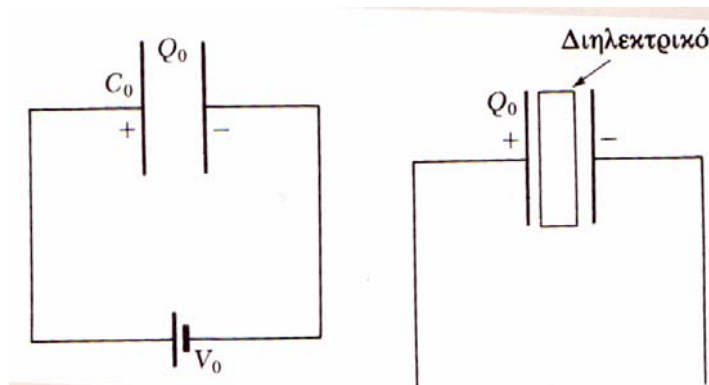
Ασκ. 36

37. Υπολογίστε την ισοδύναμη χωρητικότητα ανάμεσα σε σημεία a και b για τους διαφόρους συνδυασμούς πυκνωτών που βλέπουμε στα κυκλώματα του παρακάτω σχήματος. Όλες οι χωρητικότητες είναι σε μF .



Ασκ. 37

38. Ένας επίπεδος πυκνωτής έχει διαστάσεις $2\text{ cm} \times 3\text{ cm}$. Οι οπλισμοί χωρίζονται από χαρτί πάχους 1 mm . (α) Υπολογίστε την χωρητικότητα του και (β) Ποιο είναι το μέγιστο φορτίο που μπορούμε να θέσουμε στον πυκνωτή αυτό.
39. Χρησιμοποιώντας μπαταρία φορτίζουμε έναν επίπεδο πυκνωτή με φορτίο Q_0 όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Αποσυνδέουμε κατόπιν την μπαταρία και εισάγουμε ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή διηλεκτρικό σταθεράς κ , όπως φαίνεται επίσης στο παρακάτω σχήμα. Βρείτε την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί πριν και μετά από την εισαγωγή του πυκνωτή.



Ασκ.39

40. Βρείτε την ενέργεια ενός ομοιόμορφα φορτισμένου κελύφους, με ολικό φορτίο q και ακτίνα R .
- 41.