



Ηλεκτρομαγνητισμός (205)

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διδάσκοντες Μαθήματος:

Αναπλ. Καθ. Κωνσταντίνος Πετρίδης (cpetridis@hmu.gr)

Επικ. Καθ. Γεώργιος Κακαβελάκης (kakavelakis@hmu.gr)

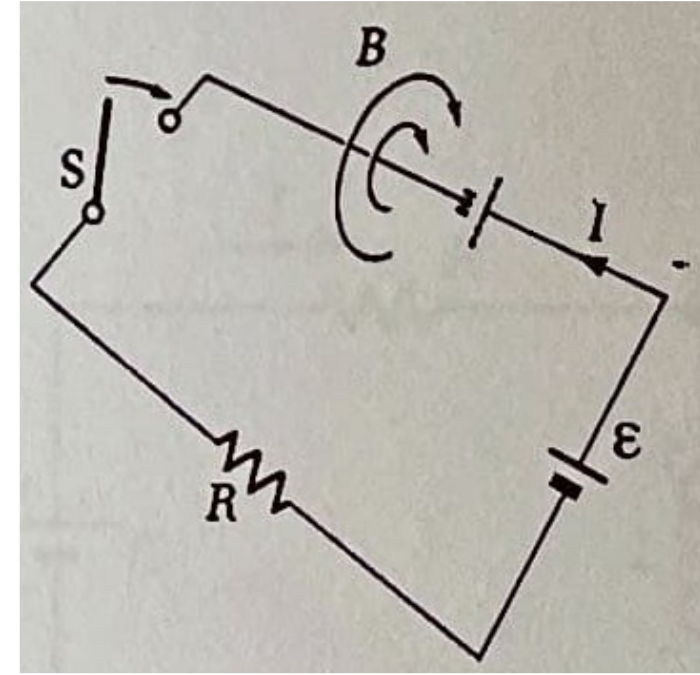
10. Επαγωγή και πηνία

10.1 Εισαγωγή

- Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε τις πρακτικές εφαρμογές του φαινομένου της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής

10.2 Αυτεπαγωγή

- Έστω ότι έχουμε ένα κύκλωμα που αποτελείται από ένα διακόπτη, μια αντίσταση και μια πηγή ΗΕΔ
- Όταν κλείσουμε το διακόπτη, το ρεύμα δεν αποκτά αμέσως τη μέγιστη τιμή του ε/R
- Αυτό συμβαίνει λόγω του νόμου του Faraday: καθώς αυξάνεται το ρεύμα, αυξάνεται ταυτόχρονα και η μαγνητική ροή που διαπερνά το κύκλωμα λόγω του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται από το ρεύμα.
- Η αυξανόμενη αυτή ροή προκαλεί μια ΗΕΔ στο κύκλωμα, η οποία εναντιώνεται στην αύξηση της μαγνητικής ροής
- Από Lenz γνωρίζουμε ότι το επαγόμενο ρεύμα αντιτίθεται στο ρεύμα αγωγιμότητας και έτσι μειώνεται το καθαρό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα
- Για το λόγο αυτό το κύκλωμα δεν αποκτά αμέσως το μέγιστο ρεύμα
- Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αυτεπαγωγή, διότι το ίδιο το κύκλωμα προκαλεί τη μεταβολή της ροής

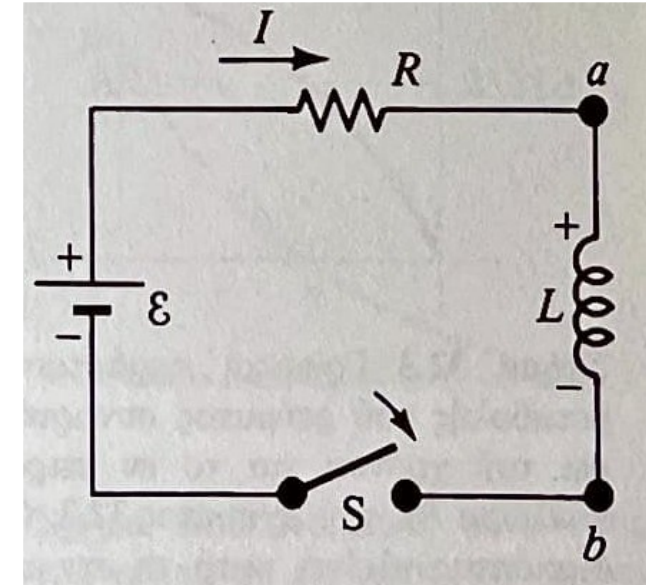


10.2 Αυτεπαγωγή

- Σύμφωνα με το νόμο του Faraday, η επαγόμενη ΗΕΔ ισούται με τον αρνητικό ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής
- Η μαγνητική ροή είναι ανάλογη με το μαγνητικό πεδίο, που με τη σειρά του είναι ανάλογο με το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα
- Άρα η εξ αυτεπαγωγής ΗΕΔ είναι πάντοτε ανάλογη με την ως προς το χρόνο ρυθμό μεταβολή του ρεύματος
- Στην περίπτωση που έχουμε πηνίο με N σπείρες, πολύ πυκνές και σταθερής επιφάνειας (όπως πχ ένα ιδανικό σωληνοειδές πηνίο) βρίσκουμε ότι: $\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$, όπου L είναι η σταθερά αναλογίας που ονομάζεται συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου
- Ο συντελεστής αυτεπαγωγής πηνίου L από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τις διάφορες ιδιότητες του πηνίου
- Ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός πηνίου με N σπείρες είναι: $L = N \frac{\Phi_m}{I}$, υποθέσαμε ότι όλες οι σπείρες διαρρέονται από την ίδια μαγνητική ροή
- Ο συντελεστής αυτεπαγωγής μπορεί να γραφτεί και ως: $L = -\frac{\varepsilon}{\frac{dI}{dt}}$, όπου θεωρείται ο ορισμός του συντελεστή αυτεπαγωγής ενός πηνίου ανεξάρτητα από τα χαρακτηριστικά του
- Όπως η αντίσταση είναι μέτρο της εναντίωσης για το ρεύμα, έτσι και ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι μέτρο εναντίωσης για τη μεταβολή του ρεύματος
- Μονάδα μέτρησης του συντελεστή αυτεπαγωγής είναι: $1H = 1 Vs/A$

10.3 Κύκλωμα RL

- Όταν ένα κύκλωμα περιλαμβάνει ένα σπειρώματα, τότε έχει αυτεπαγωγή η οποία εμποδίζει το ρεύμα να αυξηθεί ή να μειωθεί ακαριαία
- Ένα στοιχείο κυκλώματος που έχει μεγάλο συντελεστή αυτεπαγωγής λέγεται πηνίο
- Υποθέτουμε πάντα ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του υπόλοιπου κυκλώματος είναι πολύ μικρότερος σε σχέση με το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου
- Δείτε το κύκλωμα στα δεξιά το οποίο έχει μια μπαταρία, μια αντίσταση, ένα πηνίο και ένα διακόπτη
- Προς το παρόν θα αγνοήσουμε την εσωτερική αντίσταση της μπαταρίας
- Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t=0$ κλείνει ο διακόπτης
- Τότε το ρεύμα θα αρχίσει να αυξάνεται και το πηνίο θα αναπτύξει μια ΗΕΔ (συνχνά λέγεται αντί-ΗΕΔ) η οποία εναντιώνεται στην αύξηση
- Με άλλα λόγια το πηνίο δρα ως μπαταρία η οποία έχει πολικότητα αντίθετη από την πολικότητα της μπαταρίας του κυκλώματος
- Η αντί-ΗΕΔ του πηνίου ισούται με: $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$
- Επειδή όμως το ρεύμα αυξάνεται η $\frac{dI}{dt}$ είναι θετική, άρα η ε_L είναι αρνητική
- Καθώς κινούμαστε στο βρόγχο και μεταβαίνουμε στο πηνίο από το α στο b, υπάρχει πτώση δυναμικού
- Για το λόγο αυτό το δυναμικό του σημείου α είναι υψηλότερο από το δυναμικό του σημείου b

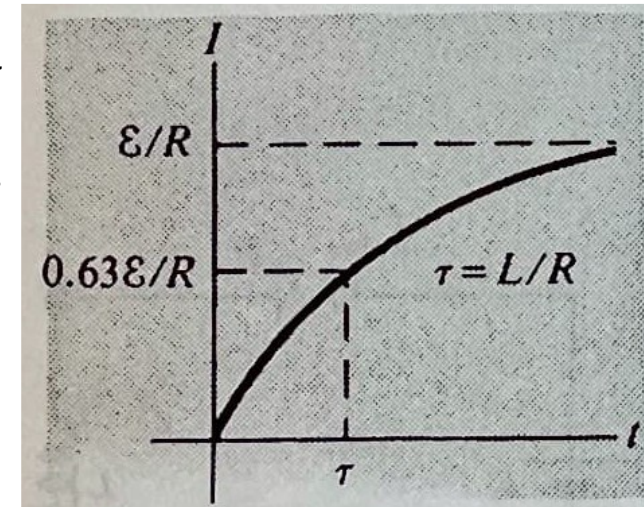
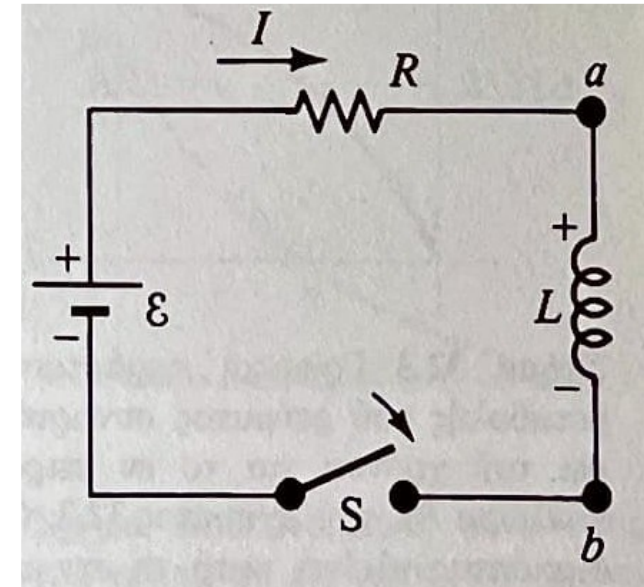


10.3 Κύκλωμα RL

- Έχοντας υπόψιν τα προηγούμενα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του Kirchhoff στο βρόγχο του κυκλώματος και βρίσκουμε ότι: $\varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$, όπου IR η πτώση τάσης στην αντίσταση
- Αντικαθιστούμε στην εξίσωση $\frac{\varepsilon}{R} - I = x$, άρα $dx = -dI$
- Άρα η παραπάνω εξίσωση γίνεται: $x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} dt$
- Ολοκληρώνουμε και τις δύο μεριές της εξίσωσης και βρίσκουμε: $\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\frac{R}{L} t \Rightarrow x = x_0 e^{\left(-\frac{Rt}{L}\right)}$
- Όταν $t=0$, $I=0$ και $x_0 = \varepsilon/R$
- Έτσι αντικαθιστώντας στην εξίσωση τα παραπάνω έχουμε: $\frac{\varepsilon}{R} - I = \frac{\varepsilon}{R} e^{\left(-\frac{Rt}{L}\right)} \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{\left(-\frac{Rt}{L}\right)})$
- Άρα η λύση της αρχικής εξίσωσης μας δίνει το ρεύμα συναρτήσει του χρόνου:

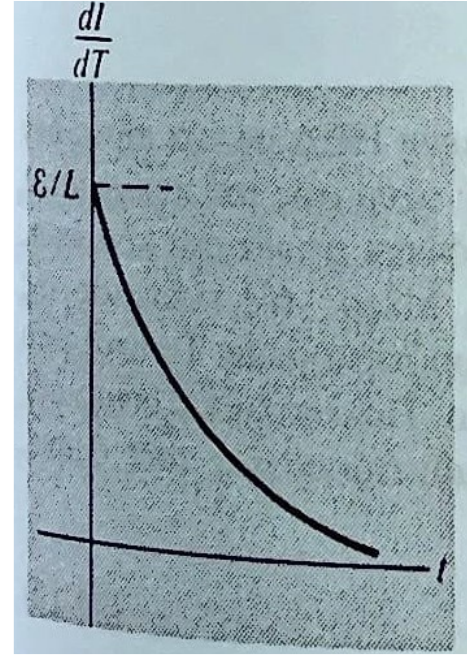
$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{\left(-\frac{Rt}{L}\right)}) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)})$, όπου τ λέγεται η σταθερά χρόνου του κυκλώματος RL: $\tau = L/R$, και είναι ο χρόνος που κάνει το ρεύμα ωσότου φτάσει στο $1 - e^{-1} = 0.63$ της τελικής τιμής του ε/R

- Στη γραφική παράσταση δεξιά βλέπουμε την εξάρτηση του ρεύματος ως προς το χρόνο, όπου για $t=0 \rightarrow I=0$ και για $t \rightarrow \infty \rightarrow I = \varepsilon/R$



10.3 Κύκλωμα RL

- Για να βρούμε το ρυθμό αύξησης του ρεύματος θα παραγωγίσουμε την εξίσωση $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{(-\frac{t}{\tau})})$ ως προς το χρόνο: $\frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} \left(-\frac{1}{\tau}\right) (-e^{(-\frac{t}{\tau})}) \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon R}{R L} e^{(-\frac{t}{\tau})} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\varepsilon}{L} e^{(-\frac{t}{\tau})}$
- Από την παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι ο ρυθμός αύξησης έχει τη μέγιστη τιμή του για $t=0$ και μετά μειώνεται εκθετικά τείνοντας προς το μηδέν για $t \rightarrow \infty$
- Την αντι-ΗΕΔ μπορούμε να την βρούμε από τον τύπο $\varepsilon_L = -L(dI/dt)$, και εφόσον η κλίση είναι θετική τότε η ε_L είναι αρνητική. Δηλαδή η επαγόμενη ΗΕΔ σε ένα πηνίο δεν επιτρέπει στην μπαταρία να δώσει το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα ακαριαία
- Το ακριβώς αντίστροφο συμβαίνει όταν η κλίση είναι αρνητική, δηλαδή όταν μειώνεται το ρεύμα στο κύκλωμα



10.4 Ενέργεια μαγνητικού πεδίου

- Όπως είδαμε προηγουμένως, για να δώσει η μπαταρία ρεύμα στο κύκλωμα, πρέπει να παράγει έργο ενάντια στο πηνίο
- Μέρος της ενέργειας αυτής καταναλώνεται στην αντίσταση ως θερμότητα joule
- Το υπόλοιπο μέρος της ενέργειας αποθηκεύεται στο πηνίο
- Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης $\varepsilon - IR - L \frac{dI}{dt} = 0$ με I και έχουμε: $I\varepsilon = I^2R + LI \frac{dI}{dt}$
- Βλέπουμε ότι η ενέργεια που παρέχει με ρυθμό $I\varepsilon$ η μπαταρία στο κύκλωμα, ισούται με το άθροισμα της ενέργειας που καταναλώνεται στην αντίσταση με ρυθμό I^2R , συν την ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο με ρυθμό $LI \frac{dI}{dt}$
- Άρα η παραπάνω εξίσωση αποτελεί έκφραση του νόμου διατήρησης της ενέργειας
- Συμβολίζουμε με U_m την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη κάποια στιγμή στο πηνίο, άρα ο ρυθμός αποθήκευσης της ενέργειας στο πηνίο βρίσκεται ως εξής: $\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$
- Για να βρούμε την ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο πηνίο, γράφουμε την προηγούμενη σχέση ως εξής: $dU_m = LI dI$
- Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε: $\int_0^{U_m} dU_m = \int_0^I LI dI \Rightarrow U_m = \frac{1}{2} LI^2$
- Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου όταν το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι I . Η ενέργεια αυτή πολλές φορές ονομάζεται και ενέργεια μαγνητικού πεδίου

10.4 Ενέργεια μαγνητικού πεδίου

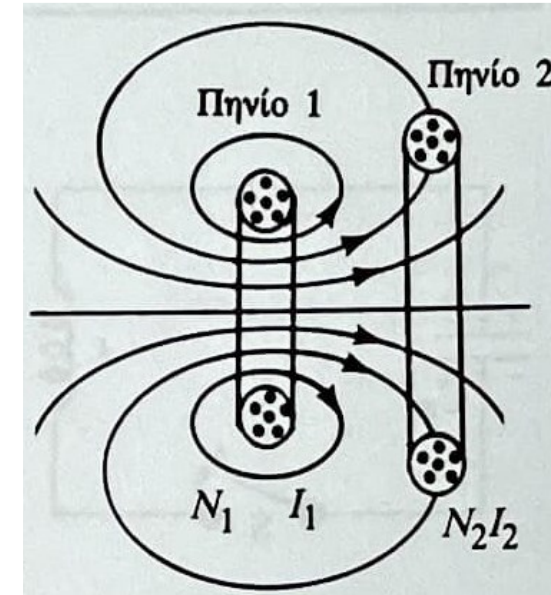
- Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την ενέργεια ανά μονάδα όγκου, δηλαδή την πυκνότητα ενέργειας που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο
- Έστω ότι έχουμε ένα σωληνοειδές του οποίου το συντελεστή αυτεπαγωγής βρίσκουμε από την εξίσωση $L = \mu_0 n^2 Al$ και έχει μαγνητικό πεδίο που ισούται με $B = \mu_0 n I$
- Άρα από τον τύπο της ενέργειας έχουμε: $U_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 Al \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2n} (Al)$
- Όμως ο όγκος του σωληνοειδούς ισούται με Al , συνεπώς η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο ανά μονάδα όγκου ισούται με: $u_m = \frac{U_m}{Al} = \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Η εξίσωση αυτή είναι γενική και ισχύει για οποιαδήποτε περιοχή του χώρου όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο

10.5 Αμοιβαία επαγωγή

- Πολλές φορές, ένα κύκλωμα διαρρέεται από χρονικά μεταβαλλόμενη μαγνητική ροή λόγω μεταβαλλόμενων ρευμάτων σε γειτονικά κυκλώματα
- Έτσι επάγεται ΗΕΔ, που οφείλεται στην αλληλεπίδραση δύο κυκλωμάτων, η οποία ονομάζεται **αμοιβαία επαγωγή**
- Θεωρήστε ότι έχουμε δυο πηνία με πυκνές σπείρες (δείτε το σχήμα)
- Το πηνίο 1 με N_1 σπείρες που διαρρέεται από ρεύμα I_1 , δημιουργεί μαγνητικό πεδίο και κάποιες από τις γραμμές του διαπερνούν το πηνίο 2.
- Το πηνίο 2 αποτελείται από N_2 σπείρες
- Συμβολίζουμε με Φ_{21} τη ροή του μαγνητικού πεδίου του πηνίου 1 η οποία διαπερνά το πηνίο 2
- Επίσης ορίζουμε ως συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής M_{21} του πηνίου 2 ως προς το πηνίο 1 ως εξής:

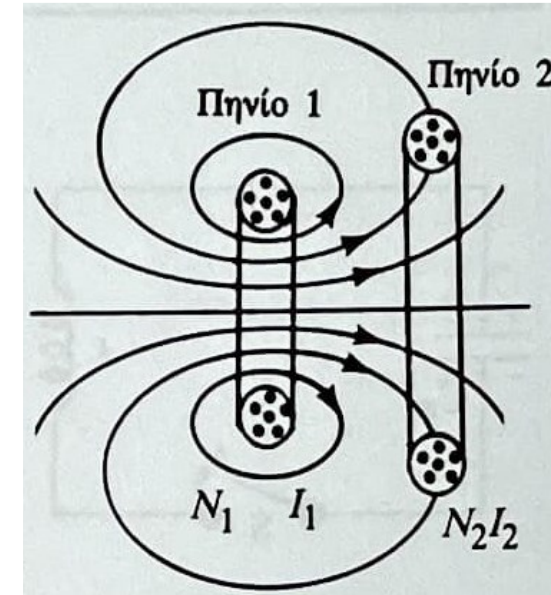
$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1}$$

- Άρα η Φ_{21} είναι: $\Phi_{21} = \frac{M_{21}}{N_2} I_1$
- Βλέπουμε ότι η αμοιβαία επαγωγή εξαρτάται από τη γεωμετρία του κάθε πηνίου και από τη σχετική θέση και προσανατολισμό τους.
- Πχ. Αν απομακρύνουμε τα δύο πηνία, θα μειωθεί η αμοιβαία επαγωγή γιατί θα μειωθεί η ροή που διαπερνά τα πηνία



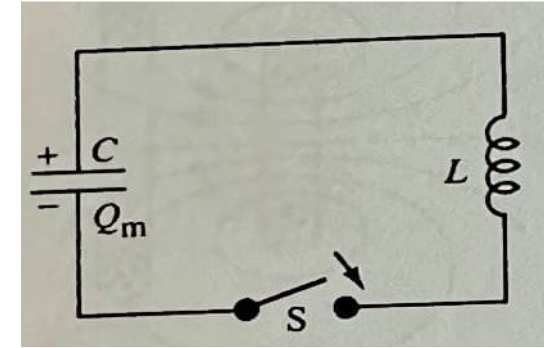
10.5 Αμοιβαία επαγωγή

- Αν το ρεύμα I_1 μεταβάλλεται με το χρόνο, χρησιμοποιούμε το νόμο Faraday και την προηγούμενη εξίσωση για τη ροή μαγνητικού πεδίου, και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε την ΗΕΔ που επάγεται στο πηνίο 2 από το πηνίο 1: $\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$
- Αντίστοιχα αν μεταβάλλεται το I_2 με το χρόνο, τότε η ΗΕΔ στο πηνίο 1 από το πηνίο 2 είναι: $\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$
- Το παραπάνω αποτέλεσμα θυμίζει την εξ αυτεπαγωγής ΗΕΔ ($\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$)
- Από τη σύγκριση των ε_1 και ε_2 βλέπουμε ότι η εξ αμοιβαίας επαγωγής ΗΕΔ στο ένα πηνίο είναι πάντα ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής που διαρρέει το άλλο πηνίο
- Δηλαδή αν η μεταβολή των δύο ρευμάτων είναι ίδια ($dI_1/dt = dI_2/dt$), τότε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ γιατί ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής μεταξύ δύο πηνίων είναι πάντα ίσος ($M_{21} = M_{12} = M$)
- Άρα μπορούμε να ξαναγράψουμε τις παραπάνω εξισώσεις ως εξής: $\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$ και $\varepsilon_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$
- Μονάδα μέτρησης της αμοιβαίας επαγωγής είναι το Henry (H)



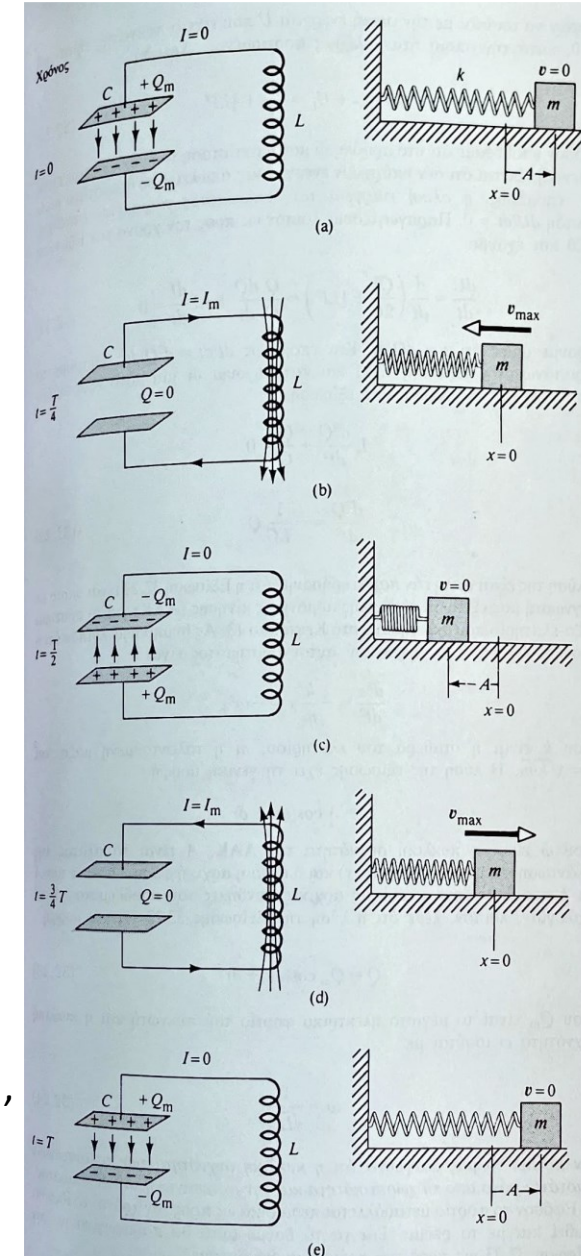
10.6 Ταλαντώσεις σε κύκλωμα LC

- Όταν συνδέσουμε ένα φορτισμένο πυκνωτή με ένα πηνίο (χωρίς την παρουσία αντίστασης) και κλείσουμε το κύκλωμα, θα παρατηρήσουμε ότι το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή θα ταλαντωθούν
- Εφόσον δεν υπάρχει αντίσταση, τότε δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες Joule, άρα οι ταλαντώσεις θα συνεχίζονται επ' άπειρον
- Αρχικά υποθέτουμε ότι ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος με φορτίο Q_m , άρα έχει η ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του είναι: $U = Q^2 / 2C$
- Τη στιγμή αυτή ($t=0$) το ρεύμα είναι μηδενικό και δεν υπάρχει αποθηκευμένη ενέργεια στο πηνίο
- Καθώς όμως αρχίζει να εκφορτίζεται ο πυκνωτής, μειώνεται η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του
- Ταυτόχρονα αρχίζει να δημιουργείται ρεύμα και ενέργεια αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου
- Άρα υπάρχει μεταφορά ενέργειας από το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου
- Όταν ο πυκνωτής εκφορτιστεί πλήρως, δεν υπάρχει ενέργεια αποθηκευμένη μέσα του
- Τη στιγμή εκείνη το ρεύμα έχει τη μέγιστη τιμή του και όλη η ενέργεια είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου
- Αυτή η διαδικασία γίνεται και ανάποδα κατά τη φόρτιση του πυκνωτή, έτσι η μεταφορά ενέργεια γίνεται τώρα προς το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή
- Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχίζεται απ' άπειρον, άρα βλέπουμε ότι δημιουργείται μια ταλάντωση ρεύματος και ηλεκτρικού φορτίου.



10.6 Ταλαντώσεις σε κύκλωμα LC

- Στο σχήμα φαίνεται η αναπαράσταση της μεταφοράς ενέργειας και το μηχανικό ανάλογο των απλών αρμονικών ταλαντώσεων αυτών
- Η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλ. πεδίο του πυκνωτή ($Q_m^2/2C$) αντιστοιχεί με την δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ελατήριο ($k/2x^2$)
- Η ενέργεια που μεταφέρεται και αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου ($LI_m^2/2$) αντιστοιχεί με την κινητική ενέργεια της ταλαντούμενης μάζας ($mv^2/2$)
- Σε μια στιγμή t μετά από το κλείσιμο του διακόπτη, το φορτίο του πυκνωτή είναι Q και το ρεύμα I , άρα υπάρχει ενέργεια αποθηκευμένη και στον πυκνωτή και στο πηνίο έτσι ώστε το άθροισμα τους να ισούται με την ολική ενέργεια U που έχει ο πυκνωτής τη στιγμή $t=0$ κατά την οποία ήταν πλήρως φορτισμένος
- Άρα $U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$
- Εφόσον υποθέσαμε ότι η αντίσταση είναι μηδενική, δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας, άρα η ολική ενέργεια του κυκλώματος παραμένει σταθερή, άρα $dU/dt = 0$
- Παραγωγίζουμε τον τύπο της ολικής ενέργειας και έχουμε: $\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 \right) = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow$
- Όμως ξέρουμε ότι $\frac{dQ}{dt} = I$, άρα το $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$
- Θέτουμε αυτά στην παραπάνω εξίσωση και έχουμε: $\frac{Q}{C} I + LI \frac{d^2Q}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} Q$
- Αυτή η εξίσωση μας θυμίζει την εξίσωση απλής αρμονικής κίνησης μάζας-ελατηρίου ($\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2x$), όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Η λύση της εξίσωσης είναι: $x = A \cos(\omega t + \delta)$, όπου A το πλάτος ταλάντωσης, ω η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης και δ η αρχική φάση



10.6 Ταλαντώσεις σε κύκλωμα LC

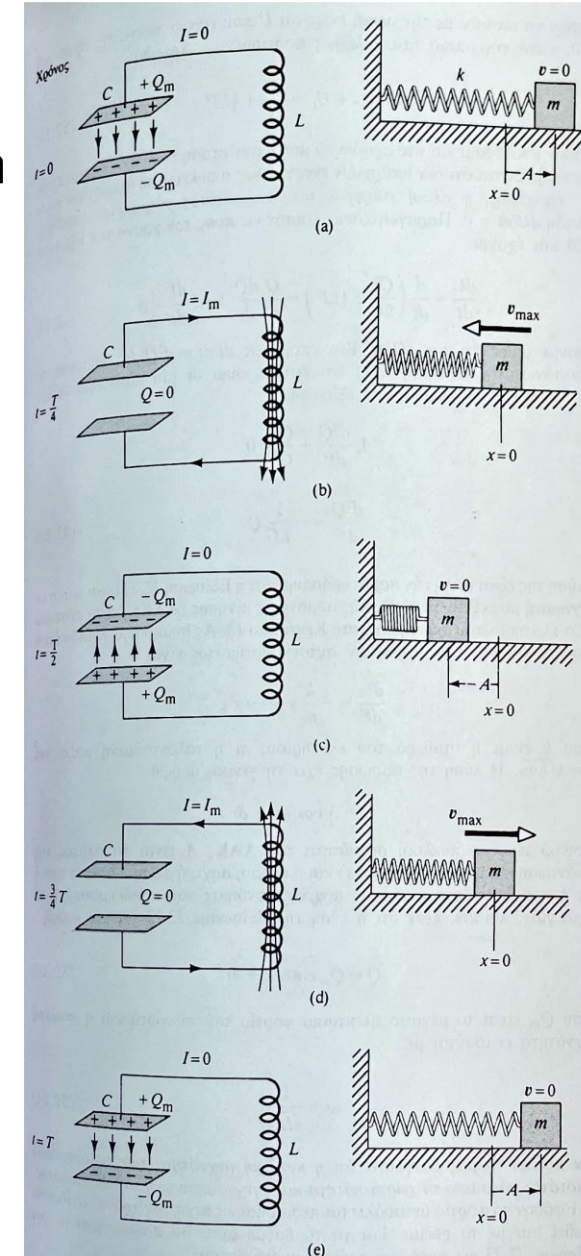
- Άρα κατ' αναλογία, η λύση της εξίσωσης για το φορτίο του πυκνωτή είναι: $Q = Q_m \cos(\omega t + \delta)$, όπου Q_m είναι το μέγιστο ηλεκτρικό φορτίο του πυκνωτή και ω η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης που είναι:

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, άρα συμπεραίνουμε ότι η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων εξαρτάται μόνο από την αυτεπαγωγή και τη χωρητικότητα του κυκλώματος

- Αφού το φορτίο μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο το ίδιο συμβαίνει και με το ρεύμα

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin(\omega t + \delta)$$

- Για να προσδιορίσουμε την τιμή της αρχικής φάσης δ , πρέπει να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος
- Όταν μελετάμε την αποφόρτιση του πυκνωτή, $t=0$, $I=0$ και $Q=Q_m$
- Τα θέτουμε στην παραπάνω εξίσωση και βρίσκουμε: $0 = -\omega Q_m \sin(\delta)$
- Για να κάνει το δεξί μέλος μηδέν, πρέπει να είναι $\delta=0$
- Αυτό είναι αναμενόμενο αφού για $t=0$ το $Q=Q_m$
- Άρα για $\delta=0$ οι εξισώσεις γίνονται: $Q = Q_m \cos(\omega t)$ και $I = -\omega Q_m \sin(\omega t) = -I_m \sin(\omega t)$, όπου $I_m = \omega Q_m$ είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα

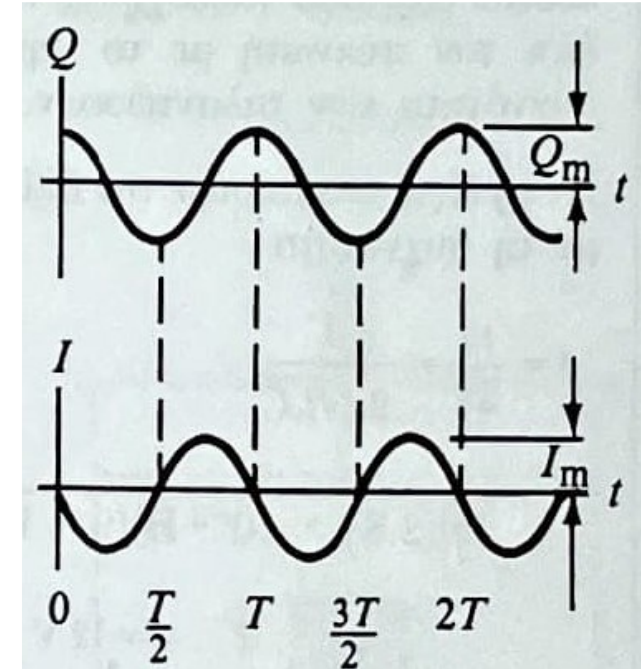


10.6 Ταλαντώσεις σε κύκλωμα LC

- Στο σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των Q και I ως προς το χρόνο και παρατηρούμε ότι το φορτίο ταλαντώνεται μεταξύ Q_m και $-Q_m$, και το ρεύμα μεταξύ I_m και $-I_m$ με διαφορά φάσης 90° (όταν το φορτίο είναι μέγιστο ή ελάχιστο, τότε το ρεύμα είναι μηδενικό και το αντίστροφο)
- Τώρα που υπολογίσαμε τις εξισώσεις για την ταλάντωση των Q και I ως προς το χρόνο, μπορούμε να δούμε ξανά την εξίσωση της ενέργειας του κυκλώματος LC:

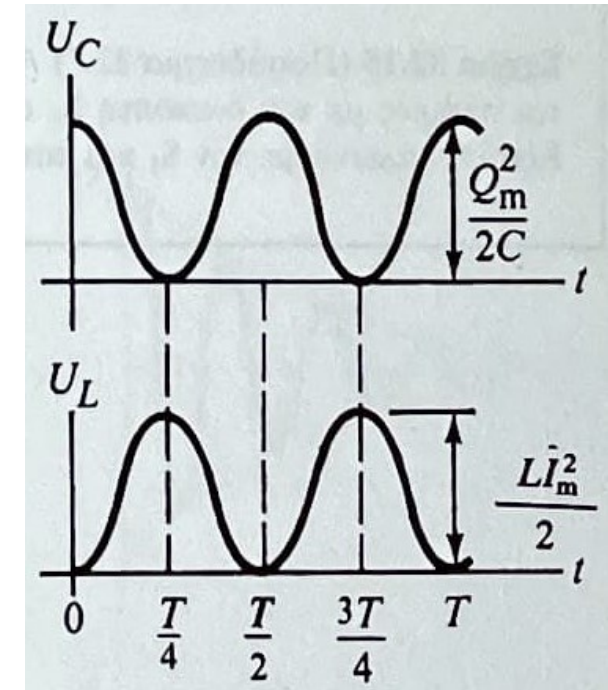
$$U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2 = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t$$

- Άρα παρατηρούμε ότι η ολική ενέργεια του κυκλώματος LC, ταλαντώνεται συνεχώς ανάμεσα στην ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή και στην ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου
- Όταν η ενέργεια του πυκνωτή είναι μέγιστη ($\frac{Q_m^2}{2C}$), τότε η αποθηκευμένη ενέργεια στο πηνίο είναι μηδενική
- Όταν η ενέργεια στο πηνίο είναι μέγιστη ($\frac{LI_m^2}{2}$), τότε η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή είναι μηδενική



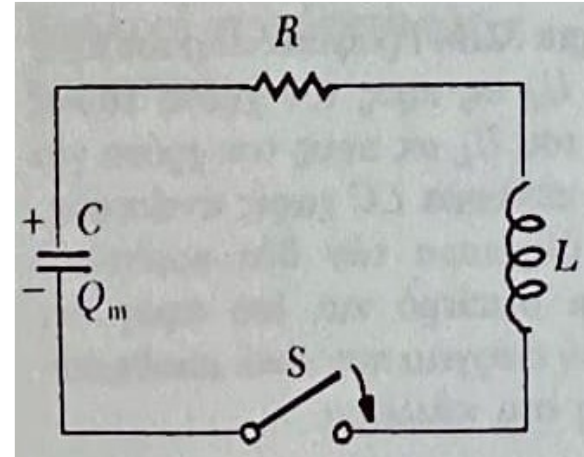
10.6 Ταλαντώσεις σε κύκλωμα LC

- Στο σχήμα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των U_C και U_L . Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των U_C και U_L είναι σταθερό και ίσο με την αρχική ενέργεια του φορτισμένου πυκνωτή $\frac{Q_m^2}{2C}$
- Αφού η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή ($I=0$) ισούται με τη μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια στο πηνίο ($Q=0$), τότε έχουμε: $\frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$
- Άρα η εξίσωση της ολικής ενέργειας γίνεται: $U=U_C+U_L = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t \Rightarrow$
$$U = \frac{Q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t + \frac{Q_m^2}{2C} \sin^2 \omega t \Rightarrow U = \frac{Q_m^2}{2C} (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \Rightarrow U = \frac{Q_m^2}{2C}, \text{ αφού } \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$
- Δεν πρέπει λοιπόν να ξεχνάμε ότι η ολική ενέργεια U του κυκλώματος παραμένει σταθερή μόνο όταν μπορούμε να αγνοήσουμε τις ενεργειακές απώλειες.
- Φυσικά στην πραγματικότητα δεν είναι δυνατόν να μην υπάρχουν απώλειες σε ένα σύστημα (δεν υπάρχουν τέλεια συστήματα στη φύση) και έτσι υπάρχουν απώλειες Joule
- Στην ιδανική (θεωρητική) αυτή περίπτωση του κυκλώματος LC που αγνοήσαμε όλες τις απώλειες, είδαμε ότι οι ταλαντώσεις του κυκλώματος θα συνεχίζονται επ' άπειρον.



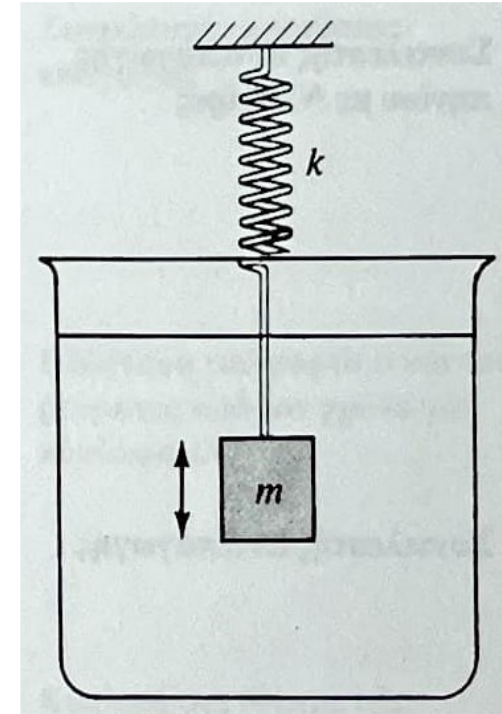
10.7 Το κύκλωμα RLC

- Το ρεαλιστικό κύκλωμα για την περίπτωση που συνδέουμε ένα πυκνωτή με ένα πηνίο εν σειρά, συμπεριλαμβάνει και μια αντίσταση συνδεδεμένη εν σειρά
- Υποθέτουμε πάλι ότι πριν κλείσουμε το διακόπτη, έχουμε ένα πλήρως φορτισμένο πυκνωτή με φορτίο Q_m
- Όταν κλείσει ο διακόπτης και περάσει ρεύμα στο κύκλωμα, η ολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο κύκλωμα βρίσκεται και πάλι από την εξίσωση $U = U_C + U_L = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2}LI^2$
- Άρα πάλι η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή είναι $\frac{Q^2}{2C}$ και η αποθηκευμένη ενέργεια στο πηνίο είναι $\frac{1}{2}LI^2$
- Η ολική ενέργεια όμως δεν είναι πια σταθερή, όπως ήταν στο κύκλωμα LC, λόγω θερμικών απωλειών joule στην αντίσταση R
- Έτσι ο ρυθμός με τον οποίο χάνεται ενέργεια δια μέσου της αντίστασης είναι I^2R (αφού η πτώση τάσης είναι $-IR$)
- Άρα το $\frac{dU}{dt} = -I^2R$, όπου το αρνητικό πρόσημο δείχνει τη μείωση της U
- Θέτουμε την παραπάνω σχέση στη σχέση της ολικής ενέργειας και έχουμε: $\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = -I^2R$
- Ξέρουμε ότι $\frac{dQ}{dt} = I$, άρα το $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$ και έτσι έχουμε: $\frac{Q}{C}I + LI \frac{d^2Q}{dt^2} = -I^2R \Rightarrow \frac{Q}{C} + L \frac{d^2Q}{dt^2} + I R = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$



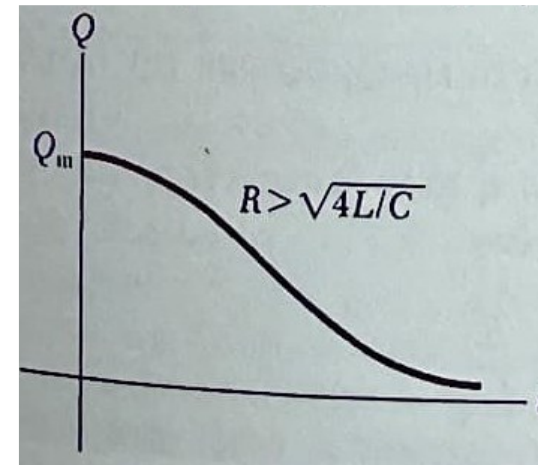
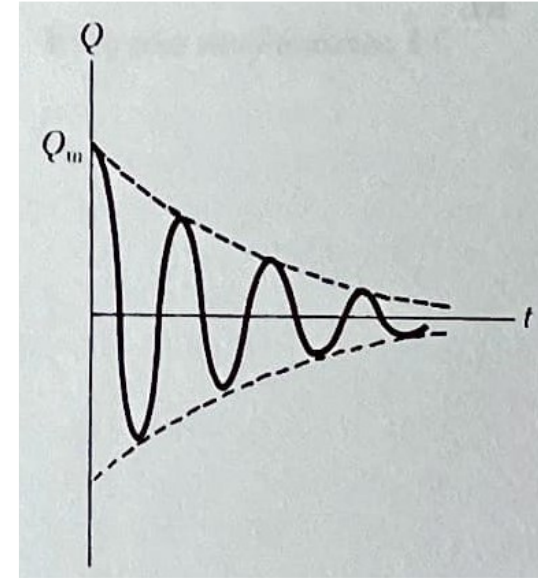
10.7 Το κύκλωμα RLC

- Βλέπουμε ότι η εξίσωση του κυκλώματος RLC $\left(L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \right)$, θυμίζει την εξίσωση του αποσβεννύμενου ταλαντωτή (πχ ταλάντωση μέσα σε ιξώδες υγρό)
- Η εξίσωση αυτού του συστήματος είναι: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$, όπου το Q αντιστοιχεί με το x, το L με το m, το R με τον συντελεστή απόσβεσης b και το C με το $1/k$ (k είναι ή σταθερά του ελατηρίου)



10.7 Το κύκλωμα RLC

- Η αναλυτική λύση της εξίσωσης του κυκλώματος RLC είναι αρκετά περίπλοκη και χωρίζεται σε τρεις περιπτώσεις:
 - 1) Όταν $R=0$, η εξίσωση ανάγεται σε αυτή του κυκλώματος LC, όπου το φορτίο και το ρεύμα ταλαντώνονται επ' άπειρο
 - 2) Στην περίπτωση όπου η R είναι σχετικά μικρή.
 - Τότε η λύση της εξίσωσης είναι: $Q = Q_m e^{-Rt/2L} \cos \omega_d t$, όπου $\omega_d = \left(\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \right)^{1/2}$
 - Το φορτίο ταλαντώνεται με αποσβεννύμενη ταλάντωση με μικρή απόσβεση
 - Όταν το $R \ll \sqrt{\frac{4L}{C}}$, η κυκλική συχνότητα ω_d του αποσβεννύμενου ταλαντωτή προσεγγίζει την τιμή $\sqrt{\frac{1}{LC}}$, δηλαδή την κυκλική συχνότητα του απλού αρμονικού ταλαντωτή
 - Αφού $I = dQ/dt$, σημαίνει ότι και το ρεύμα ταλαντώνεται με φθίνουσα ταλάντωση με μικρή απόσβεση
 - Στο σχήμα βλέπουμε τη μεταβολή του φορτίου ενός αποσβεννύμενου ταλαντωτή ως προς το χρόνο
 - Η τιμή του μέγιστου πλάτους του Q φθίνει σε κάθε ταλάντωση
 - 3) Όταν το R έχει μεγάλη τιμή, τότε η ταλάντωση αποσβένει πολύ πιο γρήγορα
 - Όταν το R είναι μεγαλύτερο από την ονομαζόμενη κρίσιμη τιμή της αντίστασης R_c , τότε δεν γίνεται καθόλου ταλάντωση
 - Η τιμή της κρίσιμης αντίστασης $R_c = \sqrt{\frac{4L}{C}}$.
 - Όταν $R=R_c$, τότε λέμε ότι το κύκλωμα παρουσιάζει κρίσιμη απόσβεση
 - Όταν $R>R_c$, τότε το σύστημα παρουσιάζει μεγάλη απόσβεση



Συνοψίζοντας τι είδαμε στο Κεφάλαιο 10

- ✓ Αυτεπαγωγή
- ✓ Κύκλωμα RL
- ✓ Ενέργεια μαγνητικού πεδίου
- ✓ Αμοιβαία επαγωγή
- ✓ Ταλαντώσεις σε κύκλωμα LC
- ✓ Το κύκλωμα RLC

Ερωτήσεις;