



Ηλεκτρομαγνητισμός (205)

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διδάσκοντες Μαθήματος:

Αναπλ. Καθ. Κωνσταντίνος Πετρίδης (cpetridis@hmu.gr)

Επικ. Καθ. Γεώργιος Κακαβελάκης (kakavelakis@hmu.gr)

3. Το ηλεκτρικό δυναμικό

Εισαγωγή

- Διατηρητικές ή συντηρητικές δυνάμεις λέγονται οι δυνάμεις που το έργο τους κατά μήκος κλειστής διαδρομής είναι μηδέν. Κλειστή διαδρομή είναι η διαδρομή όπου το σώμα καταλήγει στο σημείο από όπου ξεκίνησε.
- Μια τέτοια δύναμη είναι και η δυναμική ενέργεια και η δύναμη Coulomb
- Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι η έννοια της ενέργειας είναι πολύ σημαντική στον ηλεκτρισμό
- Μπορούμε να περιγράψουμε τα ηλεκτροστατικά φαινόμενα με τη χρήση της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας
- Έτσι θα ορίσουμε το βαθμωτό μέγεθος που ονομάζεται ηλεκτρικό δυναμικό
- Αυτό θα μας διευκολύνει πολύ στους υπολογισμούς μας, αφού είναι πολύ πιο εύκολο να υπολογίζουμε βαθμωτά μεγέθη (όπως το δυναμικό που είναι συνάρτηση της θέσης μόνο) σε σχέση με διανυσματικά μεγέθη (όπως είναι το ηλ. πεδίο)
- Ένα παράδειγμα της χρησιμότητας της διαφοράς δυναμικού είναι η τάση που μετράμε με ένα πολύμετρο. Αυτή δεν είναι κάτι άλλο παρά η διαφορά του ηλεκτρικού δυναμικού μεταξύ δυο σημείων

3.1 Διαφορά δυναμικού και ηλεκτρικό δυναμικό

- Μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση που είναι η δυναμική ενέργεια της δύναμης Coulomb
- Όταν θέσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο q_0 μέσα σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο $\mathbf{E}$, το φορτίο υφίσταται ηλεκτρική δύναμη $q_0\mathbf{E}$
- Η ηλεκτρική δύναμη $q_0\mathbf{E}$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρου δυνάμεων που ασκεί το κάθε φορτίο που παράγει ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο δοκιμαστικό φορτίο
- Αφού κάθε μια από αυτές τις δυνάμεις Coulomb είναι διατηρητική, τότε και η συνισταμένη τους $q_0\mathbf{E}$ είναι διατηρητική δύναμη
- Το έργο που παράγει η δύναμη $q_0\mathbf{E}$ ισούται με το αρνητικό του έργου που πρέπει να παράγαγει μια εξωτερική δύναμη
- Το έργο που παράγει η ηλεκτροστατική δύναμη $q_0\mathbf{E}$ όταν το δοκιμαστικό φορτίο q_0 μετακινηθεί κατά την απειροστή μετατόπιση $d\mathbf{s}$ είναι: $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$
- Όμως γνωρίζουμε εξ ορισμού ότι το έργο που παράγει μια διατηρητική δύναμη ισούται με το αρνητικό της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας dU . Άρα $dU = -q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$
- Αν το δοκιμαστικό φορτίο μετακινηθεί κατά πεπερασμένο διάστημα ανάμεσα στα σημεία A και B, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι: $dU = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$
- Το ολοκλήρωμα πρέπει να υπολογιστεί στην διαδρομή που κινείται το δοκιμαστικό φορτίο από το σημείο A στο B

3.1 Διαφορά δυναμικού και ηλεκτρικό δυναμικό

- Ορίζουμε ότι η διαφορά δυναμικού (ή τάση) $V_B - V_A$ ανάμεσα στα σημεία A και B ισούται με το πηλίκο της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας δια του δοκιμαστικού φορτίου q_0

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

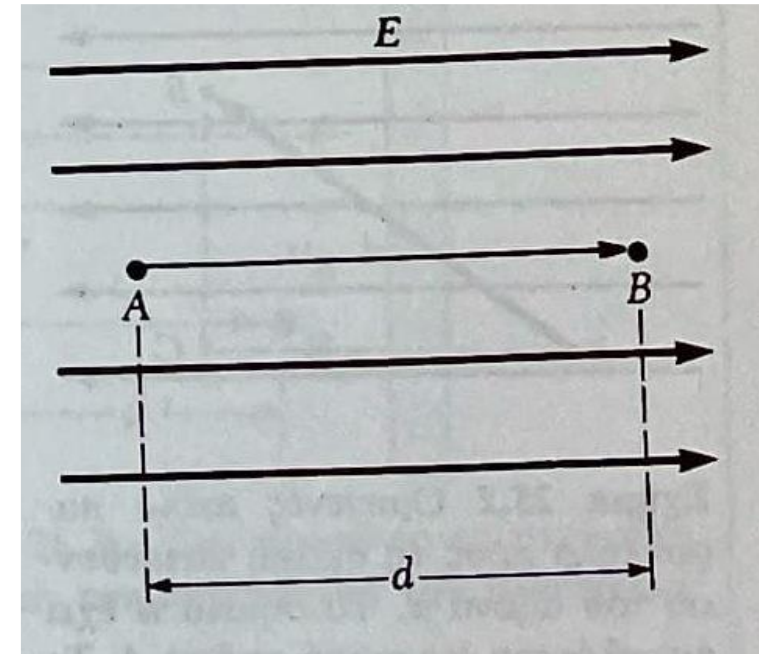
- Σημείωση: Αφού η δυναμική ενέργεια είναι μέγεθος βαθμωτό, έτσι και η διαφορά δυναμικού είναι βαθμωτό μέγεθος ($\Delta U = q_0 \Delta V$)
- Η διαφορά δυναμικού $V_B - V_A$ ισούται με το έργο ανά μονάδα φορτίου που παράγει ή καταναλώνει μια εξωτερική δύναμη για να μετακινήσει ένα δοκιμαστικό φορτίο από το σημείο A στο B χωρίς να μεταβάλει την κινητική του ενέργεια
- Για διευκόλυνση μας μπορούμε να ορίσουμε ένα σημείο όπου η συνάρτηση του ηλεκτρικού δυναμικού είναι μηδέν.
- Συνήθως επιλέγουμε το δυναμικό να είναι μηδέν στο άπειρο, δηλαδή ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μηδέν σε ένα σημείο που βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από τα φορτία που παράγουν το ηλεκτρικό φορτίο
- Άρα μπορούμε να πούμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό σε κάποιο τυχαίο σημείο ισούται με το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται κατά τη μεταφορά ενός θετικού δοκιμαστικού φορτίου από το άπειρο στο σημείο αυτό
- Έτσι αν θεωρήσουμε ότι το σημείο A βρίσκεται στο άπειρο ώστε $V_A = 0$, τότε το ηλεκτρικό δυναμικό σε οποιοδήποτε σημείο P είναι: $V_P = - \int_{\infty}^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ (το V_P είναι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στο σημείο P και ένα σημείο που βρίσκεται στο ∞)

3.1 Διαφορά δυναμικού και ηλεκτρικό δυναμικό

- Αφού η διαφορά δυναμικού είναι το μέτρο της ενέργεια ανά μονάδα φορτίου τότε οι μονάδες της είναι J/C και το πηλίκο αυτό το ονομάζουμε Volt (V)
- Άρα για να μετακινήσουμε ένα ηλεκτρικό φορτίο 1C μέσα σε μια διαφορά δυναμικού 1V, πρέπει να καταναλώσουμε έργο 1J
- Από τον υπολογισμό της διαφοράς δυναμικού από το προηγούμενο ολοκλήρωμα, καταλαβαίνουμε ότι μπορεί να εκφραστεί και σε μονάδες ηλεκτρικού πεδίου επί απόσταση. Άρα το ηλεκτρικού πεδίο αντίστοιχα έχει μονάδες V/m
- Συχνά χρησιμοποιούμε τη μονάδα ηλεκτρονιοβόλτ (eV), που συμβολίζει την ενέργεια που ένα ηλεκτρόνιο κερδίζει όταν κινηθεί μέσα σε διαφορά δυναμικού 1V
- Γνωρίζουμε ότι το φορτίου του ηλεκτρονίου είναι 1.6×10^{-19} C. Αφού $1V = J/C$, η σχέση που μετατρέπει το eV σε Joule είναι: $1eV = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$
- Πχ ένα ηλεκτρόνιο έχει κινητική ενέργεια $1.1 \times 10^{-15} \text{ J} = 7.1 \times 10^3 \text{ eV}$. Για να αποκτήσει το ηλεκτρόνιο αυτή την κινητική ενέργεια από ηρεμία, πρέπει να επιταχυνθεί με διαφορά δυναμικού $7.1 \times 10^3 \text{ V} = 7.1 \text{ kV}$

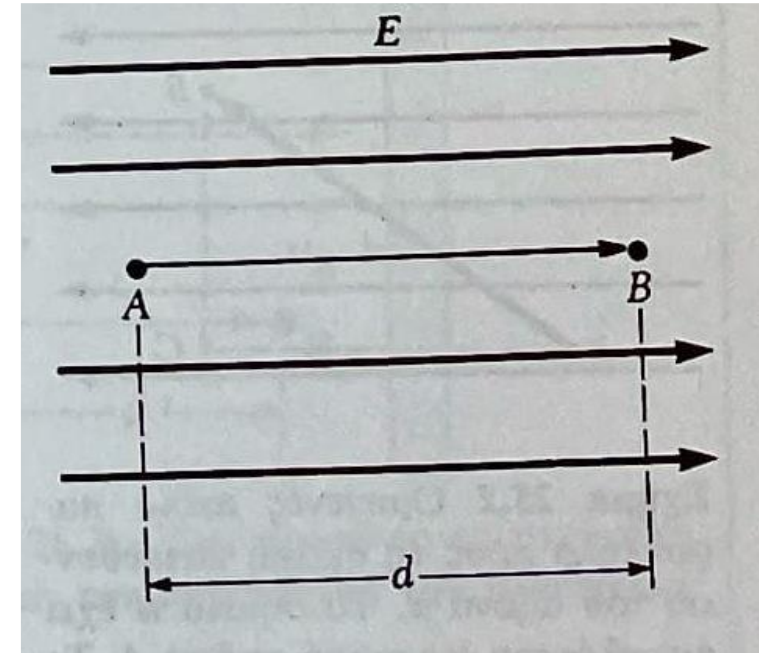
3.2 Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλ. πεδίο

- Ας υποθέσουμε ότι το δοκιμαστικό φορτίο q_0 κινείται από το A στο B
- Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι: $\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$
- Όταν το δοκιμαστικό φορτίο q_0 είναι **θετικό** το ΔU είναι αρνητικό.
- Άρα όταν ένα θετικό φορτίο κινείται παράλληλα προ την κατεύθυνση του ηλ. πεδίου, τότε χάνει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια
- Αν ένα ηλεκτρικό φορτίο βρίσκεται ακίνητο μέσα σε ηλ. πεδίο και αφεθεί ελεύθερο, θα υποστεί ηλεκτρική δύναμη $q_0 E$ προ την κατεύθυνση του E
- Άρα το φορτίο θα επιταχυνθεί προς την κατεύθυνση του E αυξάνοντας την κινητική του ενέργεια.
- Καθώς κερδίζει κινητική ενέργεια, χάνει ίση ποσότητα δυναμικής ενέργειας



3.2 Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλ. πεδίο

- Όταν το δοκιμαστικό φορτίο q_0 είναι **αρνητικό** το ΔU είναι θετικό.
- Σε αυτή την περίπτωση το αρνητικό φορτίο κερδίζει δυναμική ενέργεια όταν κινείται παράλληλα με την κατεύθυνση του ηλ. πεδίου
- Αν το αρνητικό φορτίο βρίσκεται σε ηρεμία και αφεθεί ελεύθερο μέσα στο ηλ. πεδίο $\mathbf{E}$, τότε θα επιταχυνθεί αντίθετα από την κατεύθυνση του $\mathbf{E}$



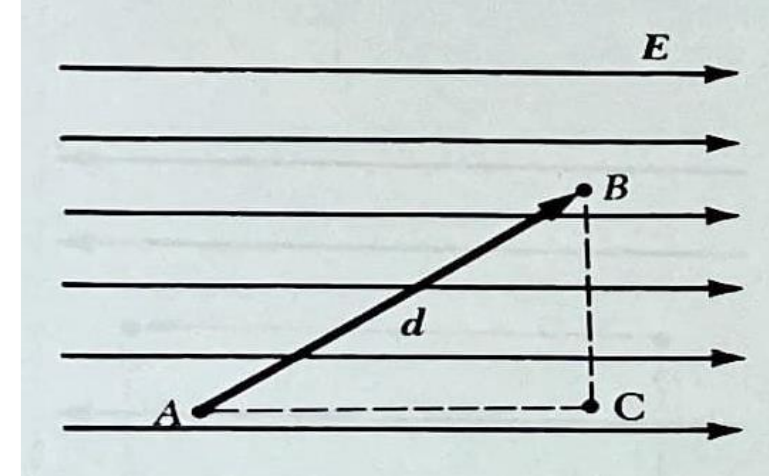
3.2 Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλ. πεδίο

- Ας δούμε τώρα τη γενική περίπτωση κατά την οποία τα σημεία A και B δεν ισαπέχουν από τον άξονα x, αλλά το ηλ. πεδίο είναι παράλληλο προς τον θετικό άξονα x.

- Το d είναι η ακτίνα μεταξύ των σημείων A και B
- Άρα η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B είναι:

$$\Delta V = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E} \cdot \int_A^B d\mathbf{s} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$$

- Άρα η δυναμική ενέργεια του φορτίου είναι: $\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$
- Αυτό το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι όλα τα σημεία τα οποία βρίσκονται σε οποιοδήποτε επίπεδο που είναι κάθετο στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, έχουν το ίδιο δυναμικό
- Άρα $V_B - V_A$ ισούται με $V_C - V_A$, έτσι $V_B = V_C$
- Αν έχουμε μια επιφάνεια της οποίας όλα τα σημεία έχουν ίδιο δυναμικό τότε η επιφάνεια αυτή ονομάζεται ισοδυναμική.
- Σημείωση: Αφού $\Delta U = q_0 \Delta V$, δεν καταβάλλουμε έργο για να μετακινήσουμε ένα φορτίο πάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια
- Όλες οι ισοδυναμικές επιφάνειες ενός ομογενούς ηλ. πεδίου είναι επίπεδα που είναι κάθετα στο πεδίο

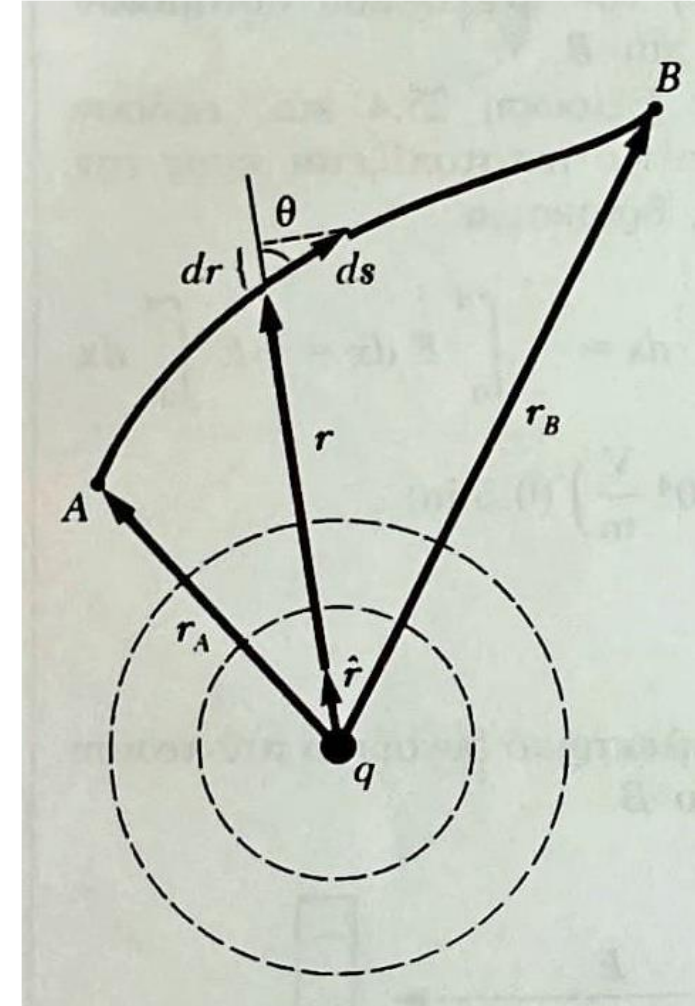


3.3 Το ηλ. δυναμικό και η δυναμική ενέργεια που δημιουργούνται από σημειακά φορτία

- Έστω θετικό σημειακό φορτίο q που παράγει ηλ. πεδίο του οποίου οι γραμμές απομακρύνονται από το φορτίο κατά την ακτινική διεύθυνση
- Για να υπολογίσουμε το ηλ. δυναμικό που δημιουργείται από το φορτίο σε απόσταση r , χρησιμοποιούμε τον τύπο:

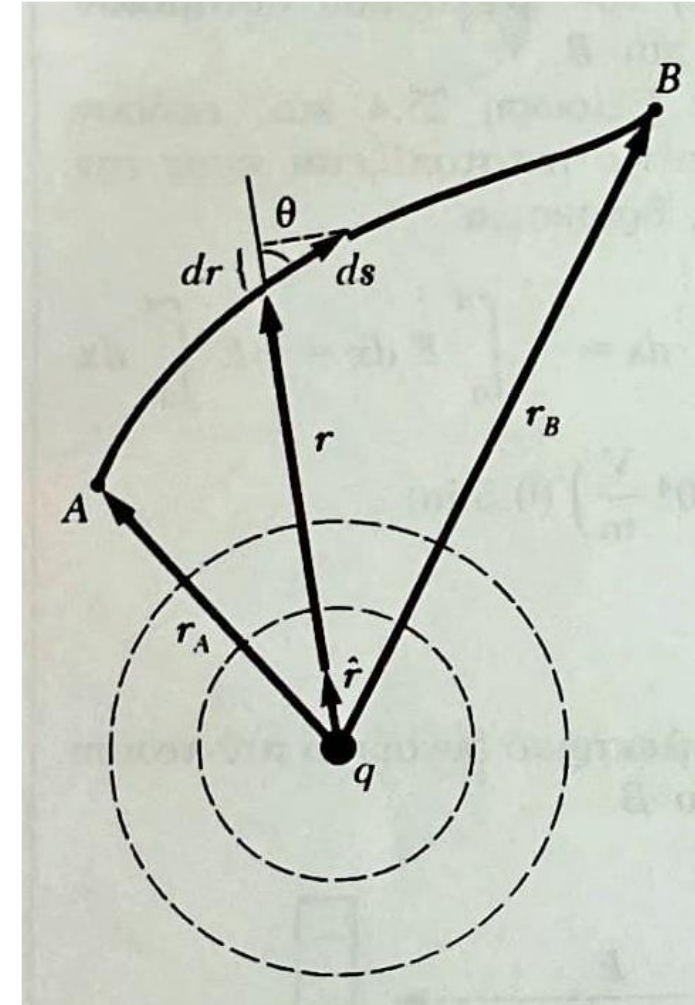
$$V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

- Γνωρίζουμε ότι το ηλ. πεδίο που δημιουργείται από σημειακό φορτίο είναι: $\mathbf{E} = k \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, όπου $\hat{\mathbf{r}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που κατευθύνεται από το φορτίο προς το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού
- Μπορούμε να ξαναγράψουμε το $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ ως $k \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}$
- Το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = ds \cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία ανάμεσα στο $\hat{\mathbf{r}}$ και στο $d\mathbf{s}$
- Επίσης το $ds \cos\theta$ είναι η προβολή του ds πάνω στο $\mathbf{r}$, έτσι $ds \cos\theta = dr$
- Δηλαδή οποιαδήποτε μετατόπιση ds μεταβάλλει κατά dr το μέτρο του $\mathbf{r}$
- Έτσι από τα παραπάνω βρίσκουμε ότι: $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = k \frac{q}{r^2} dr$



3.3 Το ηλ. δυναμικό και η δυναμική ενέργεια που δημιουργούνται από σημειακά φορτία

- Έτσι από τα παραπάνω βρίσκουμε ότι: $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = k \frac{q}{r^2} dr$
- Άρα $V_B - V_A = - \int E_r dr = -kq \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{kq}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} = kq \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$
- Άρα βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα $-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθήθηκε για τη μετάβαση από το A στο B
- Έτσι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων A και B εξαρτάται μόνο από τις ακτινικές συντεταγμένες r_A και r_B
- Επιλέγουμε το δυναμικό να είναι μηδέν στο άπειρο (που έχει λογική αφού $V \sim 1/r_A$, τότε όταν $r_A \rightarrow \infty$, $V \rightarrow 0$)
- Έχοντας επιλέξει κατά τον τρόπο αυτό το μηδέν του δυναμικού μας, γράφουμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο σε απόσταση r είναι: $V = k \frac{q}{r}$
- Έτσι συμπεράνουμε ότι το V είναι σταθερό πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνα r
- Επομένως οι ισοδυναμικές επιφάνειες (όπου $V = \text{σταθερό}$) ενός απομονωμένου σημειακού φορτίου είναι όλες ομόκεντρες σφαίρες που έχουν κέντρο το φορτίο
- **Σημείωση:** Οι γραμμές του ηλ. πεδίου είναι κάθετες με τις ισοδυναμικές επιφάνειες

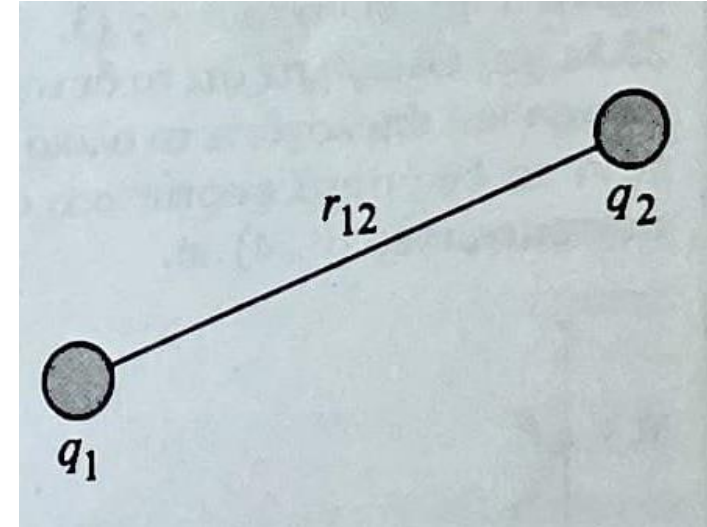


3.3 Το ηλ. δυναμικό και η δυναμική ενέργεια που δημιουργούνται από σημειακά φορτία

- Για να βρούμε το δυναμικό περισσότερων του ενός φορτίων εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας
- Άρα για να βρούμε το ολικό δυναμικό στο σημείο P που οφείλεται σε διάφορα φορτία προσθέτουμε τα δυναμικά τα οποία δημιουργούνται από το καθέ φορτίο ξεχωριστά
- Άρα αυτό εκφράζεται ως εξής: $V = k \sum_i \frac{q_i}{r_i}$, όπου πάλι κατ' επιλογή μας το δυναμικό είναι μηδέν στο άπειρο και r_i είναι η απόσταση που έχει το φορτίο q_i από το σημείο P
- **Σημειώση:** Οι όροι του παραπάνω αθροίσματος είναι βαθμωτά μεγέθη (και όχι διανυσματικά), άρα είναι ένα απλό άθροισμα μονόμετρων μεγεθών. Πολύ σημαντικό καθώς εδώ φαίνεται και η ευκολία της χρήσης του δυναμικού, σε σύγκριση με τη χρήση του ηλ. πεδίου που είναι διανυσματικό μέγεθος.

3.3 Το ηλ. δυναμικό και η δυναμική ενέργεια που δημιουργούνται από σημειακά φορτία

- Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε τη δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης ενός συστήματος φορτισμένων σωματιδίων
- Αν V_1 είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται στο σημείο P από το φορτίο q_1 , τότε το έργο που απαιτείται για να φέρουμε από το άπειρο στο σημείο P ένα φορτίο q_2 ισούται με $q_2 V_1$.
- Εξ ορισμού το έργο αυτό ισούται με τη δυναμική ενέργεια U του συστήματος δυο σωμάτων που έχουν μεταξύ τους απόσταση r_{12}
- Άρα η δυναμική ενέργεια είναι: $U = q_2 V_1 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$
- Να σημειωθεί ότι όταν τα φορτία είναι ομόνυμα, η U είναι θετική, και αφού τα φορτία απωθούνται, πρέπει να προσφέρουμε έργο στο σύστημα (γι' αυτό το έργο είναι θετικό) ώστε το ένα φορτίο να πλησιάσει το άλλο. Γι' αυτό η δυναμική ενέργεια είναι θετική
- Αντίστροφα, αν τα φορτία είναι ετερόνυμα, τότε αυτά έλκονται και η U είναι αρνητική. Δηλαδή απαιτείται αρνητικό έργο (άρα το σύστημα παράγει έργο) για να πλησιάσουν τα ετερόνυμα φορτία



3.3 Το ηλ. δυναμικό και η δυναμική ενέργεια που δημιουργούνται από σημειακά φορτία

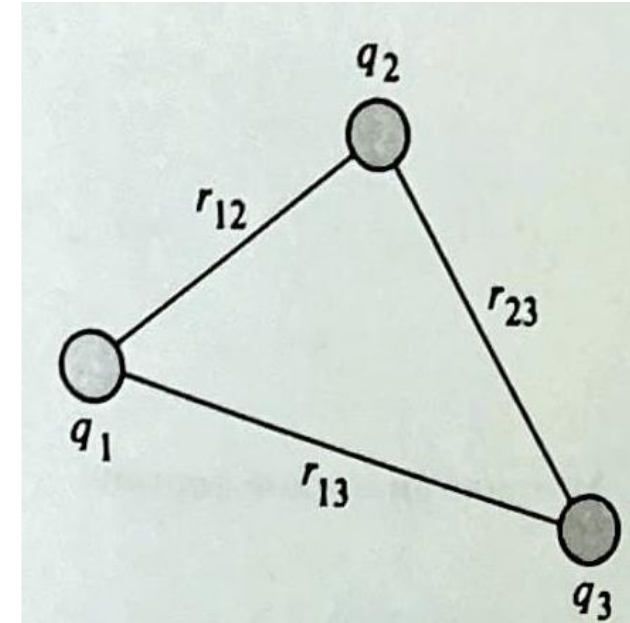
- Αν το σύστημα αποτελείται από περισσότερα των δύο φορτισμένων σωματιδίων, μπορούμε να βρούμε την ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος υπολογίζοντας την U για κάθε ζεύγος φορτισμένων σωματιδίων και αθροίζοντας τους όρους που είναι μονόμετρα μεγέθη

- Πχ για το σχήμα στα δεξιά, η ολική δυναμική ενέργεια των τριων φορτίων είναι:

$$U = k \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right]$$

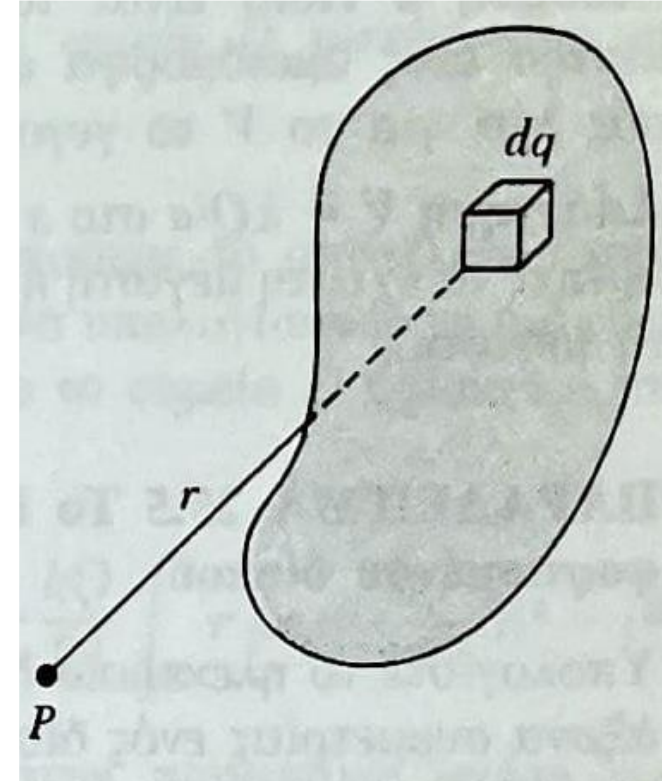
Η φυσική σημασία της παραπάνω σχέσης είναι η εξής:

- Ας θεωρήσουμε ότι το φορτίο q_1 είναι ακίνητο στη θέση που δείχνει το σχήμα και τα φορτία q_2 και q_3 βρίσκονται στο άπειρο.
- Το έργο που απαιτείται για να έρθει το φορτίο q_2 από το άπειρο στη θέση που δείχνει το σχήμα (σε απόσταση r_{12} από το q_1) είναι $k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$ (ο πρώτος όρος)
- Ανάλογα ο δεύτερο όρος της εξίσωσης περιγράφει το έργο που απαιτείται για να έρθει το φορτίο q_3 από το άπειρο υπερνικώντας το πεδίο του q_1
- Αντίστοιχα και ο τρίτος όρος της εξίσωσης περιγράφει το έργο που απαιτείται για να έρθει το φορτίο q_3 από το άπειρο υπερνικώντας το πεδίο του q_2
- Φυσικά το αποτέλεσμα είναι τελείως ανέξαρτητο από τη σειρά που γίνονται οι παραπάνω διαδικασίες



3.4 Το ηλ. δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου

- Όπως και στην περίπτωση του ηλ. πεδίου, μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου
- Θα πάρουμε ένα απειροστά μικρό στοιχείο φορτίου dq από την κατανομή φορτίου και θα υπολογίσουμε πρώτα το δυναμικό dV που δημιουργείται από το dq σε ένα σημείο P : $dV = k \frac{dq}{r}$, όπου r είναι η απόσταση που έχει το P από το dq
- Για να βρούμε το ολικό δυναμικό στο σημείο P , θα ολοκληρώσουμε την παραπάνω εξίσωση ώστε να συμπεριλάβουμε όλα τα στοιχεία της κατανομής ηλ. φορτίου
- **Σημείωση:** Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι κάθε στοιχείο έχει διαφορετική απόσταση r από το σημείο P .
- Άρα έχουμε: $V = k \int \frac{dq}{r}$, και η σχέση αυτή ισχύει με την προϋπόθεση ότι το δυναμικό όταν το σημείο P είναι στο άπειρο είναι μηδέν

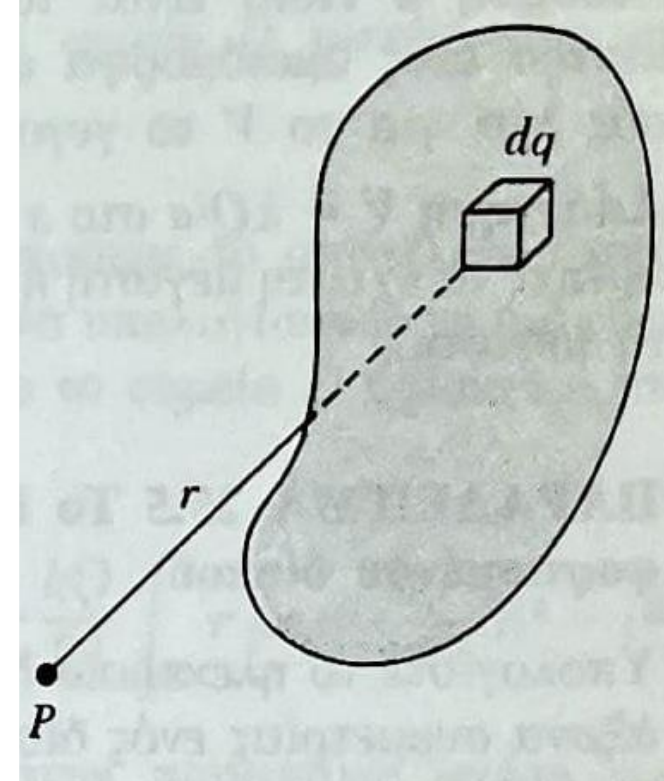


3.4 Το ηλ. δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου

- Μια δεύτερη μέθοδος υπολογισμού του δυναμικού το οποίο δημιουργείται από μια συνεχή κατανομή φορτίου είναι μέσω της εξίσωσης:

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

- Η μέθοδος αυτή μας διευκολύνει όταν ήδη γνωρίζουμε το ηλ. πεδίο (πχ από το νόμο του Gauss)
- Αν η κατανομή φορτίου είναι συμμετρική υπολογίζουμε πρώτα το $\mathbf{E}$ σε όλα τα σημεία της κατανομής χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss
- Έπειτα θέτουμε την τιμή αυτή του $\mathbf{E}$ στην παραπάνω εξίσωση και υπολογίζουμε έτσι τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε σημεία.
- Επιλέγουμε μετά ένα βολικό σημείο αναφοράς, όπου μηδενίζουμε το δυναμικό

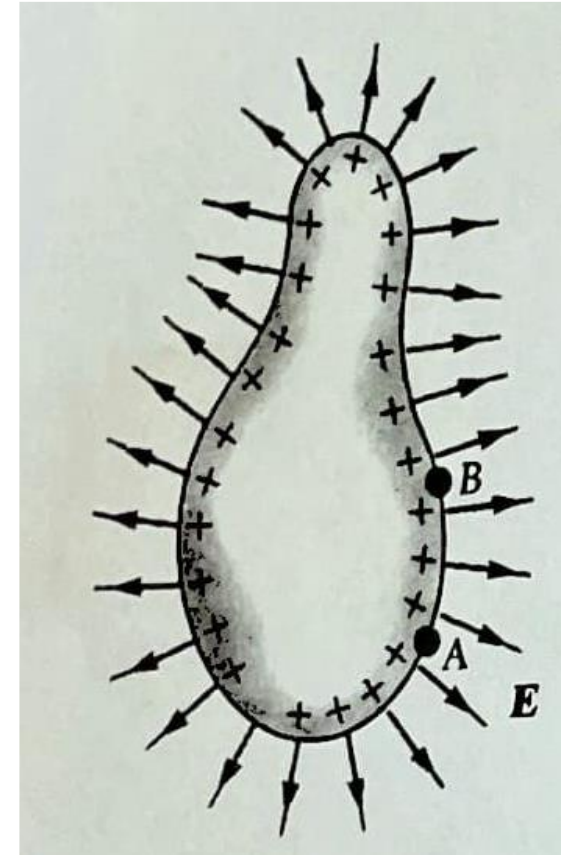


3.5 Εξαγωγή του $\mathbf{E}$ από το ηλεκτρικό δυναμικό

- Το πεδίο $\mathbf{E}$ και το δυναμικό V συνδέονται μέσω της εξίσωσης: $V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q_0} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$
- Και οι δύο αυτές ποσότητες καθορίζονται κατά περίπτωση από την κατανομή φορτίου
- Υπάρχει τρόπος να υπολογίσουμε το ηλ. πεδίο όταν είναι γνωστό το ηλεκτρικό δυναμικό σε μια περιοχή του χώρου
- Από την παρακάτω εξήσωση μπορούμε να γράψουμε ότι η διαφορά δυναμικού dV ανάμεσα σε δύο σημεία που απέχουν ds είναι: $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$
- Αν το ηλ. πεδίο έχει μια μόνο συνιστώσα πχ την E_x , τότε $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_x dx$
- Άρα $dV = -E_x dx \Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx}$
- Άρα το ηλ. πεδίο ισούται με την αρνητική παράγωγο του δυναμικού ως προς κάποια συντεταγμένη
- Αν η κατανομή του ηλ. φορτίου έχει σφαιρική συμμετρία, τότε το ηλ. πεδίο είναι ακτινικό, διότι η κατανομή φορτίου εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο
- Σε αυτή την περίπτωση $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r dr$, άρα $dV = -E_r dr \Rightarrow E_r = -\frac{dV}{dr}$

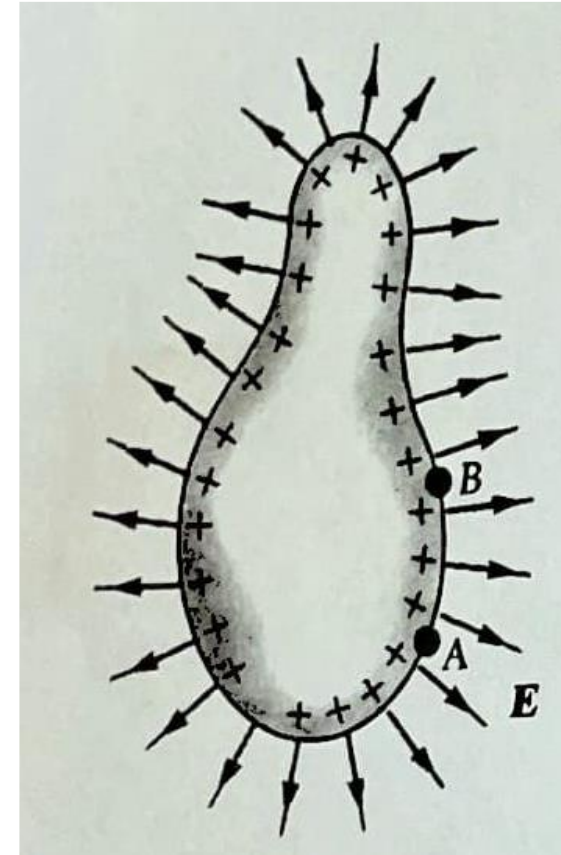
3.6 Το ηλ. δυναμικό ενός φορτισμένου αγωγού

- Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε:
 - 1) Ένας φορτισμένος συμπαγής αγωγός που ισορροπεί ηλεκτροστατικά, έχει όλο το φορτίο του στην εξωτερική του επιφάνεια
 - 2) Το ηλ. πεδίο στο εσωτερικό ενός αγωγού που ισορροπεί ηλεκτροστατικά είναι μηδέν
- Τώρα θα αποδείξουμε ότι όλα τα σημεία της επιφάνειας ενός αγωγού που βρίσκεται σε ηλεκτροστατική ισορροπία έχουν το ίδιο δυναμικό
- Έστω ότι τα σημεία A και B βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού
- Το $\mathbf{E}$ είναι κάθετο σε οποιαδήποτε μετατόπιση $d\mathbf{s}$ καθώς κινούμαστε από το A στο B ακολουθώντας μια οποιαδήποτε τυχαία διαδρομή στην επιφάνεια του αγωγού
- Άρα $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$, άρα η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στα σημεία A και B είναι μηδέν ($V_A = V_B$)
- Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για οποιαδήποτε δύο σημεία που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του αγωγού



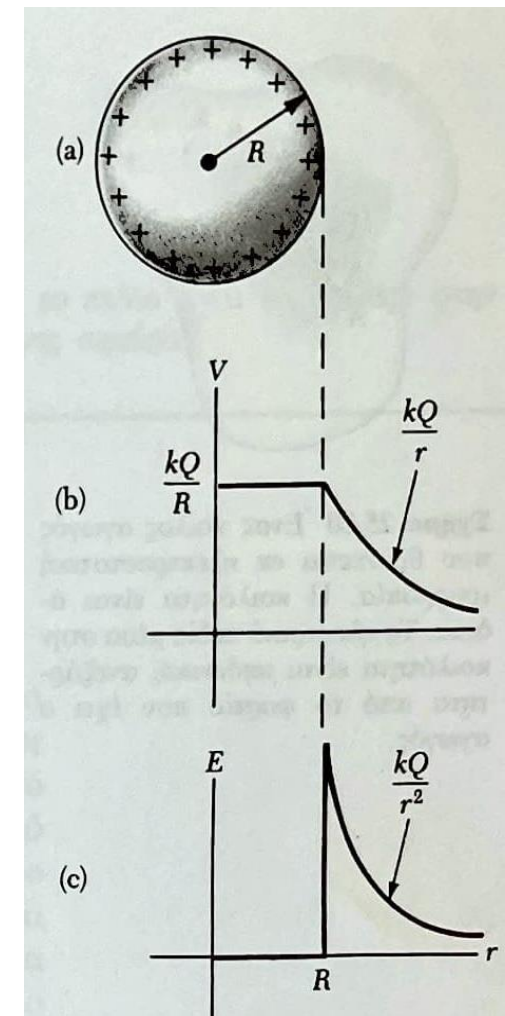
3.6 Το ηλ. δυναμικό ενός φορτισμένου αγωγού

- Συνεπώς η επιφάνεια ενός ηλεκτροστατικά ισορροπούντος αγωγού είναι ισοδυναμική επιφάνεια. Αφού το πεδίο είναι μηδενικό μέσα στον αγωγό, συμπεραίνουμε ότι το δυναμικό είναι σταθερό παντού μέσα στο εσωτερικό ενός αγωγού και έχει την ίδια τιμή που έχει στην επιφάνεια του αγωγού
- Άρα δε χρειάζεται να καταναλώσουμε έργο για να μετακινήσεις ένα δοκιμαστικό φορτίο από το εσωτερικό ενός αγωγού προς την επιφάνεια του.
- **Σημείωση:** το δυναμικό δεν είναι μηδενικό μέσα στον αγωγό, παρ' όλο που το ηλ. πεδίο είναι μηδενικό



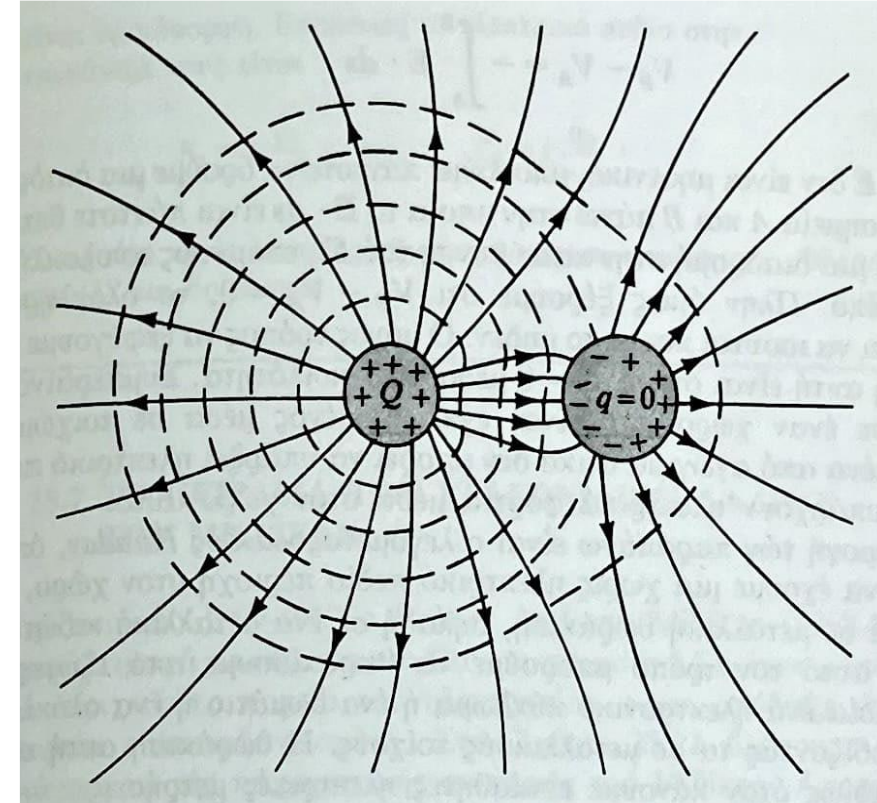
3.6 Το ηλ. δυναμικό ενός φορτισμένου αγωγού

- Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι μια συμπαγής μεταλλική σφαίρα ακτίνας R είναι φορτισμένη με θετικό φορτίο Q όπως φαίνεται στο σχήμα
- Το ηλ. πεδίο έξω από τη σφαίρα είναι $k \frac{Q}{r^2}$ και κατευθύνεται ακτινικά προς τα έξω
- Το δυναμικό στο εσωτερικό και στην επιφάνεια του αγωγού είναι $k \frac{Q}{R}$, ως προς το άπειρο
- Ενώ το δυναμικό έξω από τη σφαίρα $k \frac{Q}{r}$
- Παρατηρήστε τη διαφορά στα διαγράμματα E και V συναρτήσει της απόστασης από τη μεταλλική σφαίρα
- Όταν θέτουμε ένα ηλεκτρικό φορτίο σε ένα σφαιρικό αγωγό, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή.
- Όταν όμως ο αγωγός έχει τυχαίο σχήμα, η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του δεν είναι σταθερή: είναι μεγάλη εκεί που η επιφάνεια έχει μικρή και κυρτή ακτίνα καμπυλότητας (ακίδες) και μικρή εκεί που η ακτίνα καμπυλότητας είναι μεγάλη και κοίλη
- Επίσης το ηλ. πεδίο κοντά στην εξωτερική επιφάνεια ενός αγωγού είναι ανάλογο με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ , άρα το ηλ. πεδίο είναι μεγάλο στα σημεία που έχουν μικρή ακτίνα καμπυλότητας



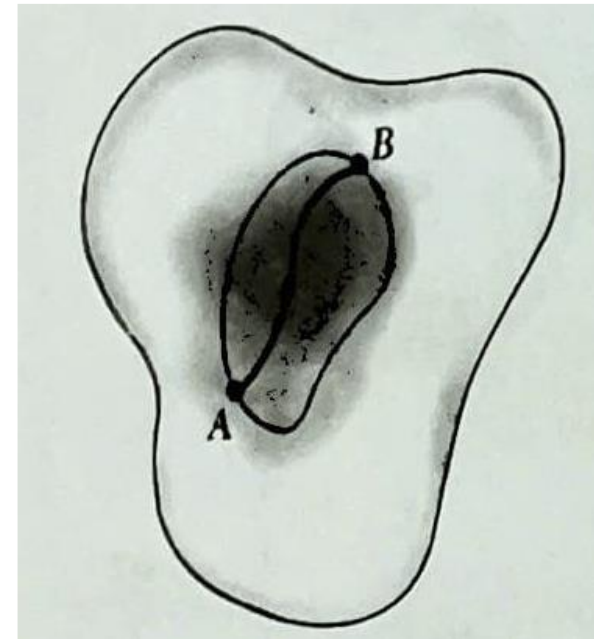
3.6 Το ηλ. δυναμικό ενός φορτισμένου αγωγού

- Βλέπουμε τις γραμμές ηλ. πεδίου που περιβάλλουν δυο σφαιρικούς αγωγούς, ο ένας από αυτούς έχει καθαρό θετικό φορτίο Q και ο άλλος μηδενικό φορτίο.
- Κανένας από του δύο αγωγούς δεν έχει σταθερή επιφανειακή κατανομή φορτίου
- Η μεγάλη σφαίρα έχει μηδενικό καθαρό φορτίο αλλά η μικρή σφαίρα επάγει αρνητικά επάγει αρνητικά φορτία προς την πλευρά της μεγάλης σφαίρας και θετικά φορτία στην αντίθετη
- Οι κλειστές παραμορφωμένες καμπύλες περιγράφουν μερικές από τις ισοδυναμικές επιφάνειες
- Παρατηρούμε ότι οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετες προς τις αγωγίμες επιφάνειες και προς τις ισοδυναμικές επιφάνειες



3.6 Το ηλ. δυναμικό ενός φορτισμένου αγωγού με κοιλότητα

- Αγωγός τυχαίου σχήματος με εσωτερική κοιλότητα (κούφιος)
- Άρα δεν υπάρχουν φορτία στο εσωτερικό της κοιλότητας
- Όπως είπαμε προηγουμένως, όλα τα σημεία ενός αγωγού έχουν το ίδιο δυναμικό
- Άρα και τα σημεία που βρίσκονται στην επιφάνεια της κοιλότητας έχουν ίδιο δυναμικό
- Ας θεωρήσουμε ότι έστω ότι υπάρχει $\mathbf{E}$ στο εσωτερικό της κοιλότητας (υπόθεση)
- Υπολογίζουμε τη διαφορά δυναμικού από τη σχέση: $V_B - V_A = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$
- Αν το $\mathbf{E}$ δεν είναι μηδενικό τότε $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ σε κάποια σημεία θα είναι θετικός αριθμός.
- Εμείς όμως ξέρουμε ότι σε οποιοδήποτε σημείο του αγωγού $V_B - V_A = 0$
- Άρα έχουμε μια αντίφαση, συνεπώς το $\mathbf{E}$ πρέπει να είναι μηδέν μέσα στην κοιλότητα
- Άρα σε ένα χώρο που είναι εγκλωβισμένος μέσα σε τοιχώματα κατασκευασμένα από αγωγίμο υλικό δεν μπορεί να υπάρξει ηλ. πεδίο εφόσον δεν υπάρχουν φορτία μέσα του
- Μια γνωστή εφαρμογή του παραπάνω είναι ο λεγόμενος κλωβός Faraday, όπου αν θέλουμε να έχουμε μια περιοχή χωρίς ηλ. πεδίο, την εγκλωβίζουμε σε μεταλλική θωράκιση (πχ. μεταλλικό κυβώτιο)
- Έτσι μπορούμε να θωρακίσουμε από εξωτερικά ηλ. πεδία ένα κύκλωμα, δωμάτιο, κλπ



Συνοψίζοντας τι είδαμε στο Κεφάλαιο 3

- ✓ Διαφορά δυναμικού και ηλεκτρικό δυναμικό
- ✓ Διαφορά δυναμικού σε ομογενές ηλ. Πεδίο
- ✓ Το ηλ. δυναμικό και η δυναμική ενέργεια που δημιουργούνται από σημειακά φορτία
- ✓ Το ηλ. δυναμικό συνεχούς κατανομής φορτίου
- ✓ Εξαγωγή του E από το ηλεκτρικό δυναμικό
- ✓ Το ηλ. δυναμικό ενός φορτισμένου αγωγού
- ✓ Το ηλ. πεδίο ενός φορτισμένου αγωγού με εσωτερική κοιλότητα

Ερωτήσεις;