



Ηλεκτρομαγνητισμός (205)

Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Διδάσκοντες Μαθήματος:

Αναπλ. Καθ. Κωνσταντίνος Πετρίδης (cpetridis@hmu.gr)

Επικ. Καθ. Γεώργιος Κακαβελάκης (kakavelakis@hmu.gr)

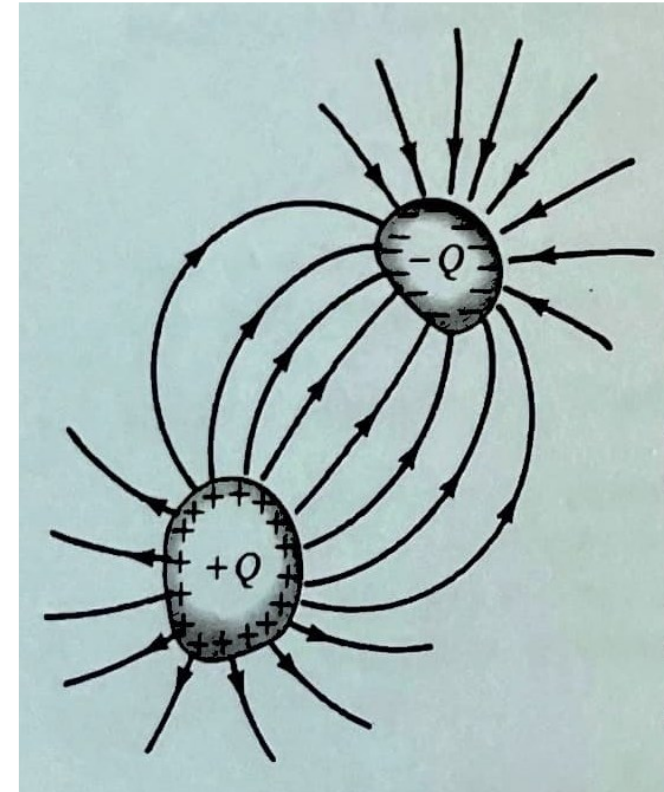
4. Χωρητικότητα και διηλεκτρικά

Εισαγωγή

- Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των πυκνωτών, συσκευές που χρησιμοποιούνται σε ηλεκτρικά κυκλώματα για αποθήκευση ηλεκτρικού φορτίου
- Ένας πυκνωτής αποτελείται κυρίως από δύο αγωγούς που διαχωρίζονται από ένα μονωτή (διηλεκτρικό)
- Θα δούμε ότι η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται από τη γεωμετρία του και από τις ιδιότητες του μονωτικού υλικού που χωρίζει τους δύο αγωγούς

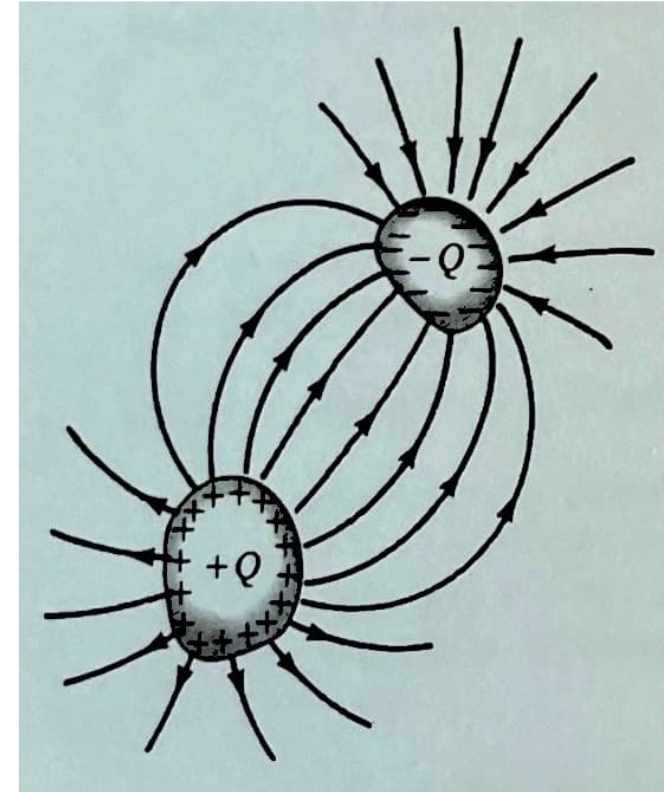
4.1 Ορισμός της χωρητικότητας

- Έστω ότι δύο αγωγοί έχουν μια διαφορά δυναμικού V μεταξύ τους και ίσα αλλά αντίθετα φορτία
- Μια τέτοια κατασκευή μπορεί να γίνει αν ενώσουμε δυο αφόρτιστους αγωγούς με τους πόλους μιας μπαταρίας
- Αυτός ο συνδυασμός δύο αγωγών ονομάζεται πυκνωτής
- Ως χωρητικότητα C ενός πυκνωτή ορίζουμε το πηλίκο της απόλυτης τιμής του φορτίου ενός από τους δύο αγωγούς δια την απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού μεταξύ των δύο αγωγών
- Άρα $C \equiv Q/V$
- Εξ ορισμού η χωρητικότητα είναι πάντα θετικός αριθμός
- Παρατήρηση: εφόσον η διαφορά δυναμικού αυξάνεται όσο αυξάνει το φορτίο των δύο αγωγών, ο λόγος Q/V παραμένει σταθερός για ένα δεδομένο πυκνωτή
- Οι δύο αγωγοί του πυκνωτή συχνά ονομάζονται οπλισμοί
- Η διαφορά δυναμικού ($V_1 - V_2$) μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή ονομάζεται τάση ($V = V_1 - V_2$) του πυκνωτή
- Φορτίο του πυκνωτή ονομάζουμε την απόλυτη τιμή του φορτίου ενός από τους δύο οπλισμούς του



4.1 Ορισμός της χωρητικότητας

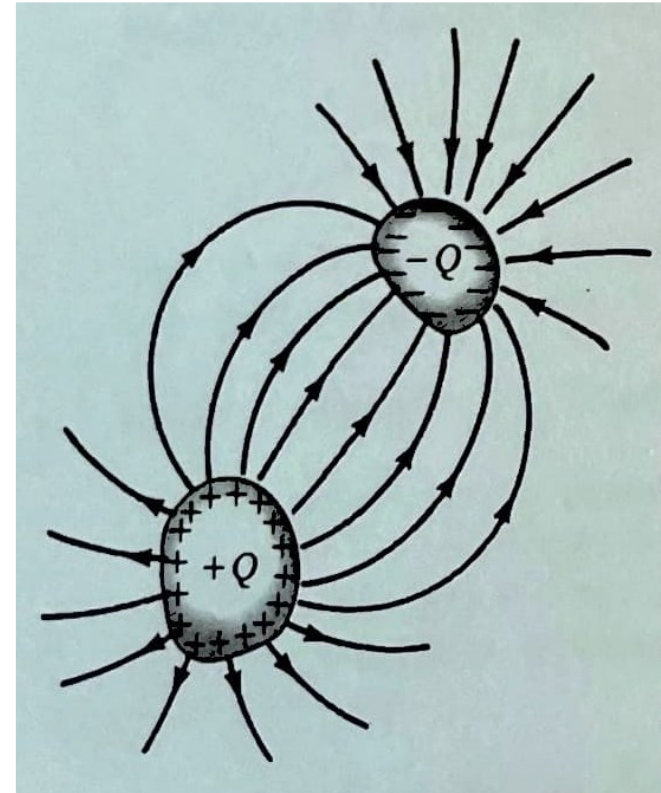
- Άρα η χωρητικότητα του πυκνωτή περιγράφει την ικανότητα του να αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο και ηλεκτρική δυναμική ενέργεια
- Στο SI οι μονάδες της χωρητικότητας του πυκνωτή είναι Coulomb ανά Volt (C/V)
- Προς τιμή του Michael Faraday, η μονάδα της χωρητικότητας στο SI ονομάζεται farad (F)
- $[Χωρητικότητα] = 1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$
- Η Χωρητικότητα ενός farad είναι πολύ μεγάλο μέγεθος. Τυπικά ηλεκτρονικά και ηλεκτρικά όργανα έχουν πυκνωτές της τάξεων των μF ή pF



4.1 Ορισμός της χωρητικότητας

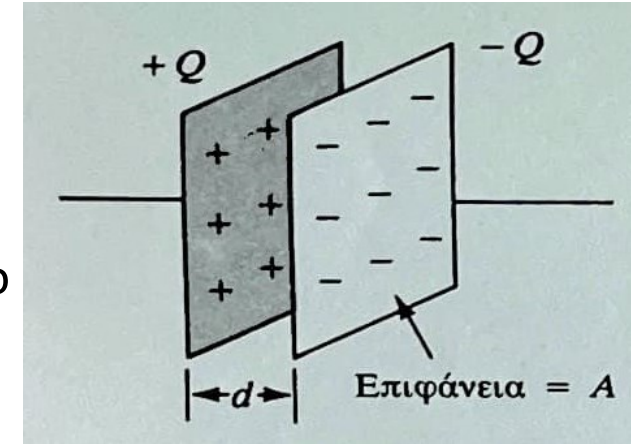
- Η χωρητικότητα του πυκνωτή εξαρτάται από το γεωμετρικό του σχήμα
- Για να το διαπιστώσουμε, έστω ότι έχουμε ένα σφαιρικό αγωγό ακτίνας R και φορτίου Q και θέλουμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα του σε σχέση με μια άλλη σφαίρα με ομόκεντρη άπειρη ακτίνα
- Αν θεωρήσουμε ότι το δυναμικό είναι μηδέν στο άπειρο τότε το δυναμικό της σφαίρας ακτίνας R είναι kQ/R .
- Έτσι η χωρητικότητα είναι: $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{k\frac{Q}{R}} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R$
- Άρα η χωρητικότητα μιας σφαίρας είναι ανάλογη με την ακτίνας της και ανεξάρτητη από το φορτίο ή το δυναμικό της
- Πχ μια μεταλλική σφαίρα ακτίνας 0.15m έχει χωρητικότητα:

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}) \left(\frac{C^2}{Nm^2} \right) (0.15m) = 17pF$$



4.2 Υπολογισμός της χωρητικότητας

- Μπορούμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα οποιασδήποτε διάταξης πυκνωτή
- Υποθέτουμε ότι ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή υπάρχει κενό ως διηλεκτρικό
- **Ο επίπεδος πυκνωτής (παράλληλων πλακών)**
- Η διάταξη αυτή αποτελείται από δύο παράλληλες αγωγίμες πλάκες ίσης επιφάνειας A , που βρίσκονται σε απόσταση d μεταξύ τους (που λέγεται πάχος του πυκνωτή)
- Η μια πλάκα έχει φορτίο $+Q$ και η άλλη $-Q$, άρα κάθε πλάκα έχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma = Q/A$
- Αν η απόσταση που χωρίζει τις δύο πλάκες είναι πολύ μικρότερη από το μήκος και το πλάτος τους, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πεδίο ανάμεσα τους είναι ομογενές και μηδενικό οπουδήποτε αλλού
- Από Gauss, το ηλ. πεδίο ανάμεσα στις πλάκες είναι: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$
- Από το προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η τάση ανάμεσα στις δύο φορτισμένες πλάκες είναι: $V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A}$
- Αντικαθιστούμε την τάση στην εξίσωση του πυκνωτή: $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon_0 A}} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$
- Άρα η χωρητικότητα ενός επίπεδου πυκνωτή είναι ανάλογη με την επιφάνεια των οπλισμών και αντιστρόφως ανάλογη με την απόσταση που τους χωρίζει

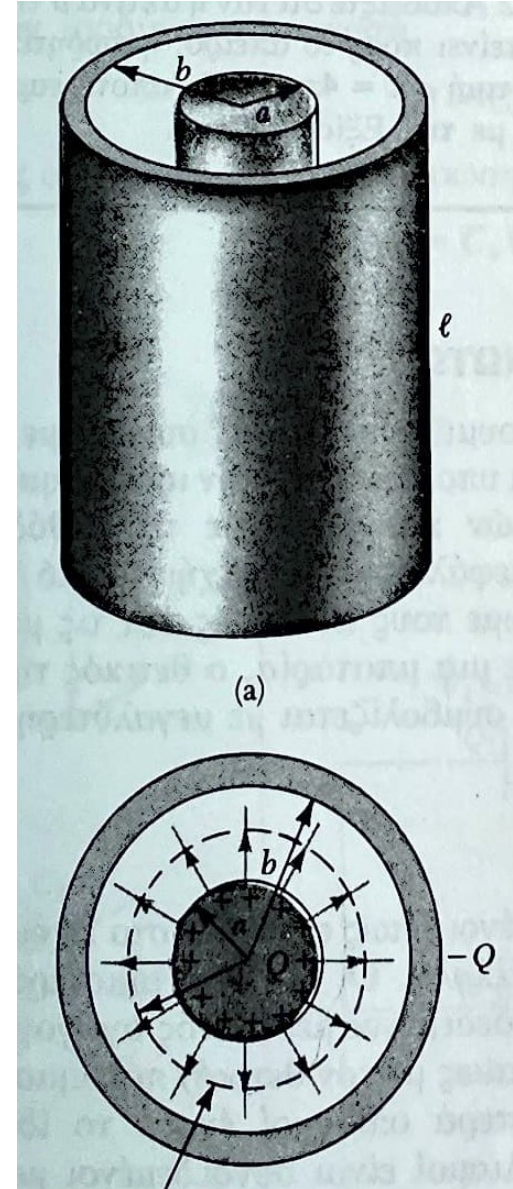


4.2 Υπολογισμός της χωρητικότητας

- Άρα από το ορισμό της χωρητικότητας ($C=Q/V$) καταλαβαίνουμε ότι όσο αυξάνεται η χωρητικότητα ενός πυκνωτή, τόσο μεγαλύτερο φορτίο μπορούμε να αποθηκεύσουμε σε ένα πυκνωτή με σταθερή τάση ανάμεσα στους οπλισμούς του
- Όσο μεγαλύτερη είναι η επιφάνεια των οπλισμών ενός πυκνωτή, τόσο μεγαλύτερο είναι το φορτίο που μπορούμε να αποθηκεύσουμε
- Επίσης για να μένει σταθερή η τάση, καθώς μειώνεται η απόσταση ανάμεσα στους οπλισμούς, πρέπει να αυξάνεται το φορτίο

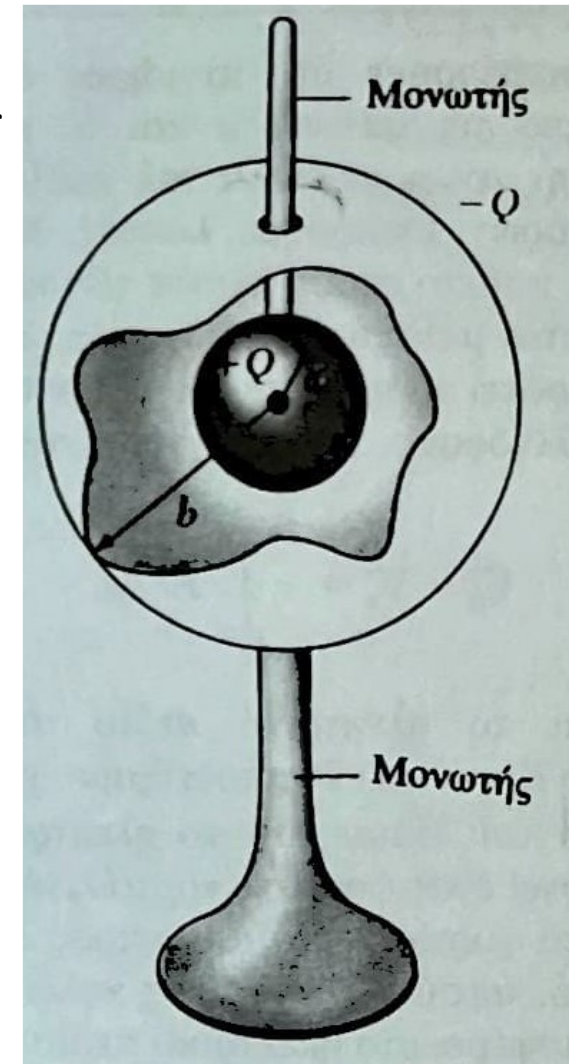
4.2 Υπολογισμός της χωρητικότητας

- Ο κυλινδρικός πυκνωτής
- Κυλινδρικός αγωγός ακτίνας a φορτισμένος με φορτίο $+Q$ είναι διατεταγμένος ομοαξονικά με ένα κυλινδρικό φλοιό ακτίνας b με φορτίο $-Q$
- Από Gauss το $\mathbf{E}$ ανάμεσα στους δύο κυλινδρικούς αγωγούς ($a < r < b$) είναι $2k\lambda/r$
- Άρα $V_b - V_a = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_a^b E_r dr = - 2k\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} = - 2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- Θέτουμε λοιπόν το παραπάνω αποτέλεσμα στον τύπο της χωρητικότητας:
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_a - V_b} = \frac{Q}{2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{Q}{\frac{2kQ}{l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{l}{2k \ln\left(\frac{b}{a}\right)},$$
 όπου $\lambda = Q/l$ και χρησιμοποιούμε τη διαφορά δυναμικού $V = V_a - V_b$ που είναι θετική (ο εσωτερικό κύλινδρος έχει υψηλότερο δυναμικό)
- Άρα η χωρητικότητα είναι ανάλογη με το μήκος των δυο κυλινδρικών αγωγών και εξαρτάται από τις ακτίνες των δύο κυλινδρικών αγωγών



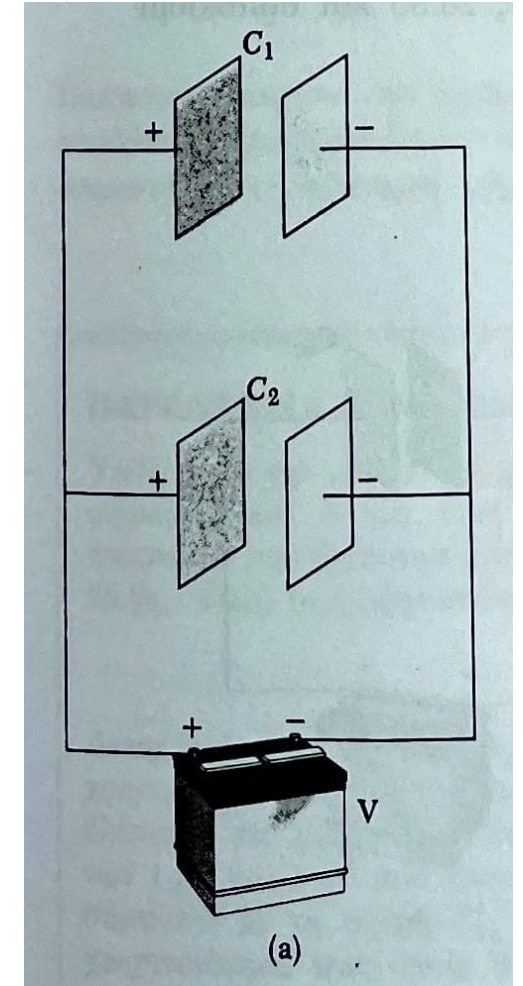
4.2 Υπολογισμός της χωρητικότητας

- Ο σφαιρικός πυκνωτής
- Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από ένα αγωγίμο σφαιρικό φλοιό ακτίνας b με φορτίο $-Q$ και ομόκεντρο με μια μικρότερη αγωγίμη σφαίρα ακτίνας a και φορτίου $+Q$
- Το ηλ. Πεδίο έξω από σφαιρική κατανομή φορτίου έχει ακτινική διεύθυνση και ισούται με kQ/r^2 (ισχύει και για $a < r < b$) και το πεδίο είναι μηδενικό οπουδήποτε αλλού
- Γνωρίζουμε από το νόμο του Gauss ότι μόνο η εσωτερική σφαίρα συνεισφέρει στη δημιουργία του πεδίου
- Έτσι η διαφορά δυναμικού $V_b - V_a = - \int_a^b E_r dr = -kQ \int_a^b \frac{dr}{r^2} = kQ \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$
- Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού είναι: $V = V_a - V_b = kQ \frac{b-a}{ab}$
- Άρα η χωρητικότητα είναι $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ \frac{b-a}{ab}} = \frac{ab}{k(b-a)}$



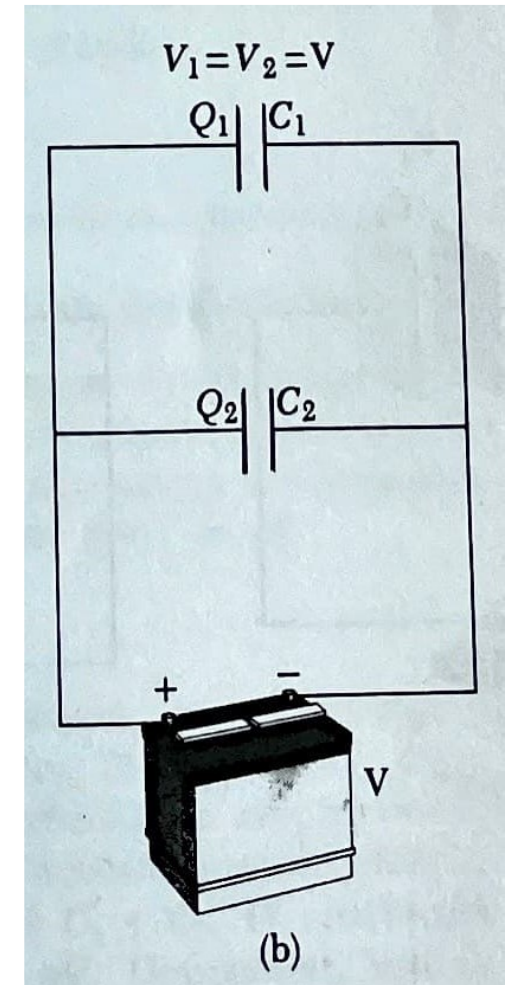
4.3 Συνδεσμολογία πυκνωτών

- Όταν κατασκευάζουμε κυκλώματα, συνδέουμε τους πυκνωτές με διάφορους τρόπους
- **Παράλληλη συνδεσμολογία**
- Αν οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι όπως στο σχήμα τότε λέμε ότι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα
- Οι αριστεροί οπλισμοί των πυκνωτών είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους και με τον θετικό πόλο μιας μπαταρίας και έχουν το ίδιο δυναμικό
- Οι δεξιοί οπλισμοί είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους και με το αρνητικό πόλο μιας μπαταρίας
- Όταν συνδεθούν οι πυκνωτές με τη μπαταρία, ηλεκτρόνια μετακινούνται μέσω της μπαταρίας από τους αριστερούς στους δεξιούς οπλισμούς
- Έτσι οι αριστεροί οπλισμοί έχουν θετικό φορτίο, ενώ οι δεξιοί αρνητικό
- Η μπαταρία παρέχει την ενέργεια που απαιτείται για να γίνει αυτή η μεταφορά
- Η μεταφορά των ηλεκτρονίων σταματά όταν μηδενιστεί η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς των πυκνωτών
- Όταν σταματήσει η μεταφορά φορτίου, οι πυκνωτές έχουν το μέγιστο φορτίο που μπορεί να τους παρέχει η μπαταρία
- Αν Q_1 και Q_2 το φορτίο για κάθε πυκνωτή, τότε το ολικό φορτίο Q είναι: $Q=Q_1+Q_2$



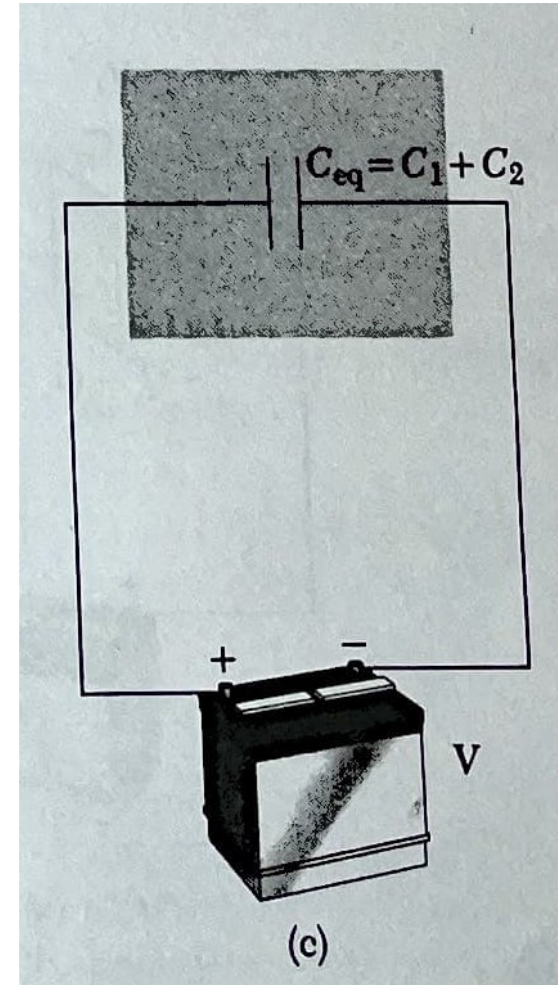
4.3 Συνδεσμολογία πυκνωτών

- Παράλληλη συνδεσμολογία
- Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αντικαταστήσουμε τους δύο πυκνωτές με ένα ισοδύναμο πυκνωτή που έχει χωρητικότητα C_{eq}
- Αυτό σημαίνει ότι αυτός επιφέρει το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα στο κύκλωμα με το αποτέλεσμα που έχουν οι δύο αρχικοί πυκνωτές
- Άρα το νέος πυκνωτής πρέπει να αποθηκεύει φορτίο Q
- Στην παράλληλη συνδεσμολογία, οι δύο πυκνωτές έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού (ή τάση) ανάμεσα στους οπλισμούς τους και αυτή είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού των πόλων της μπαταρίας V .



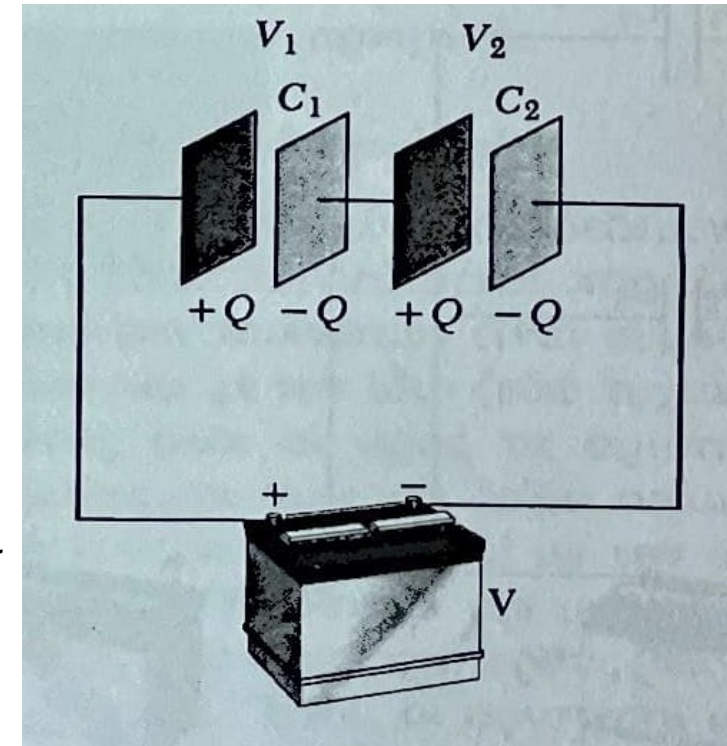
4.3 Συνδεσμολογία πυκνωτών

- Παράλληλη συνδεσμολογία
- Άρα βλέπουμε ότι η διαφορά δυναμικού των οπλισμών του ισοδύναμου πυκνωτή είναι V .
- Έχουμε λοιπόν $Q_1 = C_1 V$ και $Q_2 = C_2 V$
- Άρα για τον ισοδύναμο πυκνωτή $Q = C_{eq} V = C_1 V + C_2 V$
- Άρα $C_{eq} = C_1 + C_2$ (για παράλληλη συνδεσμολογία)
- Αυτό ισχύει και για τρεις ή περισσότερους πυκνωτές παράλληλα συνδεδεμένους και ο ισοδύναμος πυκνωτής έχει χωρητικότητα: $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$
- Βλέπουμε λοιπόν ότι στην παράλληλη συνδεσμολογία η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι μεγαλύτερη από τη χωρητικότητα κάθε επιμέρους πυκνωτή



4.3 Συνδεσμολογία πυκνωτών

- **Συνδεσμολογία εν σειρά**
- Οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι εν σειρά όπως φαίνεται στο σχήμα
- Όταν δύο ή περισσότεροι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι εν σειρά, όλοι οι οπλισμοί τους πρέπει να έχουν το ίδιο σε απόλυτη τιμή φορτίο
- Έστω ότι έχουμε αρχικά πυκνωτές χωρίς φορτίο. Μόλις συνδέσουμε τη μπαταρία, ηλεκτρόνια φεύγουν από τον αριστερό οπλισμό του πυκνωτή C_1 και δια μέσου της μπαταρίας μεταβαίνουν στο δεξιό οπλισμό του πυκνωτή C_2
- Καθώς στο δεξιό οπλισμό του C_2 συσσωρεύεται αρνητικό φορτίο, ισόποσο αρνητικό φορτίο απωθείται από τον αριστερό οπλισμό του C_2 και μεταβαίνει στο δεξιό οπλισμό του C_1 , από τον αριστερό οπλισμό του οποίου έχει ήδη φύγει ίση ποσότητα αρνητικού φορτίου
- Αποτέλεσμα αυτής της μεταφοράς ηλεκτρονίων είναι ότι οι δεξιοί οπλισμοί των πυκνωτών κερδίζουν φορτίο $-Q$, ενώ οι αριστεροί μένουν με φορτίο $+Q$
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα ισοδύναμο πυκνωτή, που επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα με τους εν σειρά συνδεδεμένους πυκνωτές
- Όταν ο ισοδύναμος πυκνωτής φορτιστεί, πρέπει να έχει φορτίο $-Q$ στο δεξιό οπλισμό του και $+Q$ στον αριστερό οπλισμό του.



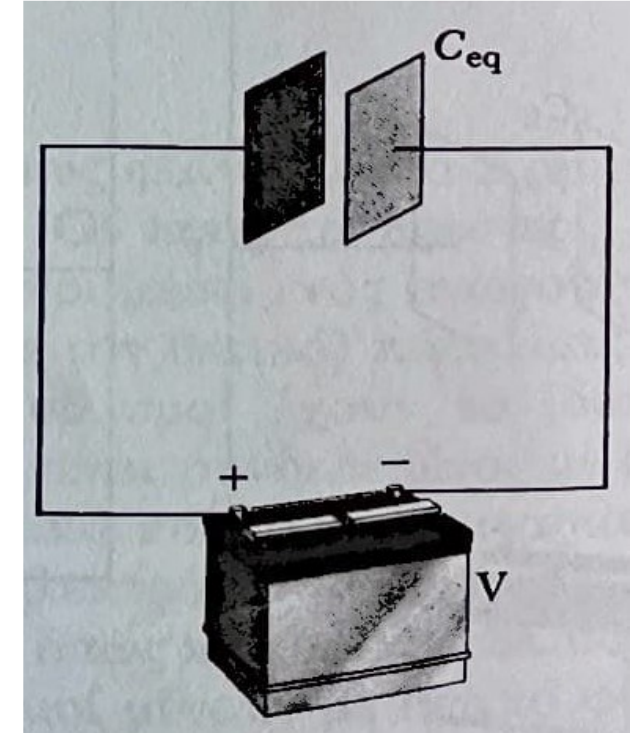
4.3 Συνδεσμολογία πυκνωτών

• Συνδεσμολογία εν σειρά

- Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της χωρητικότητας στο κύκλωμα του σχήματος και βρίσκουμε ότι: $V=Q/C_{eq}$, όπου V η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους πόλους της μπαταρίας
- Από το προηγούμενο σχήμα φαίνεται ότι $V=V_1+V_2$, όπου V_1 είναι η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή C_1 και αντίστοιχα V_2 του C_2
- Γενικά ισχύει ότι το άθροισμα της διαφοράς δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς των επιμέρους πυκνωτών που έχουν συνδεθεί εν σειρά ισούται με τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στον αριστερό οπλισμό του πρώτου πυκνωτή και τον δεξιό του τελευταίου
- Αφού $Q=CV$ ισχύει για κάθε πυκνωτή, μπορούμε να γράψουμε για τη διαφορά δυναμικού ανάμεσα στους οπλισμούς του καθενός ξεχωριστά ότι:

$$V_1=Q/C_1 \text{ και } V_2=Q/C_2$$

- Παίρνοντας τον τύπο $V=Q/C_{eq}=Q/C_1 + Q/C_2 \Rightarrow 1/C_{eq}=1/C_1 + 1/C_2$ (εν σειρά)
- Το ίδιο ισχύει και για τρεις ή περισσότερους πυκνωτές εν σειρά
- Βλέπουμε λοιπόν ότι για εν σειρά συνδεδεμένους πυκνωτές, η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι πάντα μικρότερη από τη χωρητικότητα οποιουδήποτε πυκνωτή της σειράς



4.4 Ενέργεια αποθηκευμένη σε ένα φορτισμένο πυκνωτή

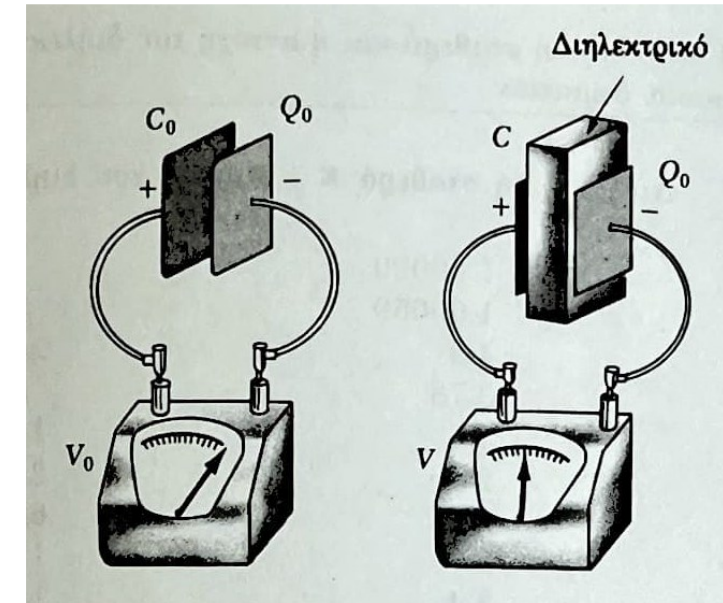
- Οι πυκνωτές παίζουν το ρόλο αποθήκης της ενέργειας σε ηλεκτρ. κυκλώματα
- Έστω ότι έχουμε πυκνωτή που αρχικά δεν είναι φορτισμένος, άρα η τάση των οπλισμών του είναι μηδενική
- Μετά τον συνδέουμε με μπαταρία και αποκτά μέγιστο φορτίο Q
- Η τελική τάση ανάμεσα στους οπλισμούς είναι $V=Q/C$
- Αφού η αρχική τάση ήταν μηδέν, άρα η μέση τάση κατά τη διάρκεια της φόρτισης είναι $V/2=Q/2C$
- Το έργο που καταναλώνεται για να φορτιστεί ο πυκνωτής είναι $W=QV/2=Q^2/2C$
- Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το έργο αυτό γίνεται δυναμική ενέργεια U , η οποία αποθηκεύεται στον πυκνωτή
- Χρησιμοποιώντας τη σχέση $Q=CV$, μπορούμε να εκφράσουμε την ηλεκτροστατική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ένα πυκνωτή: $U=Q^2/2C= \frac{1}{2} QV= \frac{1}{2} CV^2$
- Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για οποιοδήποτε πυκνωτή ανεξαρτήτως σχήματος
- Η αποθηκευμένη ενέργεια αυξάνεται όσο αυξάνονται C και V
- Φυσικά υπάρχει όριο στη μέγιστη ενέργεια που μπορούμε να αποθηκεύσουμε σε ένα πυκνωτή
- Αυτό διότι αν αυξηθεί πάρα πολύ η τάση, θα γίνει ηλεκτρική εκκένωση ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή
- Έτσι οι πυκνωτές έχουν σημειωμένη τη μέγιστη επιτρεπόμενη τάση λειτουργίας

4.4 Ενέργεια αποθηκευμένη σε ένα φορτισμένο πυκνωτή

- Η αποθηκευμένη ενέργεια σε ένα πυκνωτή αποθηκεύεται στο ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στους οπλισμούς του, καθώς φορτίζεται ο πυκνωτής
- Γνωρίζουμε ότι αν ο επίπεδο πυκνωτής αποτελείται από δυο οπλισμούς που έχουν απόσταση d , η τάση ανάμεσα στους οπλισμούς συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο που υπάρχει ανάμεσα τους με τη σχέση $V=Ed$
- Γνωρίζουμε επίσης ότι η χωρητικότητα είναι $C=\epsilon_0 A/d$
- Άρα γίνεται: $U=1/2 \epsilon_0 A/d (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 Ad E^2$
- Ο χώρος ανάμεσα στους οπλισμούς έχει όγκο Ad που είναι ίσος με το χώρο που καταλαμβάνει το ηλ. πεδίο
- Έτσι η πυκνότητα ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) είναι $u=U/Ad$, άρα $u=1/2\epsilon_0 E^2$

4.5 Πυκνωτές με διηλεκτρικά

- Όταν τοποθετήσουμε ένα κομμάτι διηλεκτρικού ανάμεσα στους οπλισμούς ενός πυκνωτή, τότε αυξάνει η χωρητικότητα του πυκνωτή
- Αν το διηλεκτρικό καταλάβει όλο το χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς, τότε η χωρητικότητα αυξάνει κατά ένα συντελεστή κ (μειώνεται η διαφορά δυναμικού για δεδομένο φορτίο).
- Ο συντελεστής είναι η διηλεκτρική σταθερά και είναι καθαρός αριθμός (σχετική διηλεκτρική σταθερά)
- Η διηλεκτρική σταθερά του μέσου είναι το $\epsilon = \kappa \epsilon_0$
- Η χωρητικότητα του πυκνωτή με το διηλεκτρικό γίνεται $C = \kappa C_0$, όπου C_0 η χωρητικότητα του πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό
- Για επίπεδο πυκνωτή $C = \kappa \epsilon_0 A/d$



Υλικό	Διηλεκτρική σταθερά κ
Κενό	1.00000
Αέρας	1.00059
Βακελίτης	4.9
Χαλαζίας	3.78
Γυαλί πυρέξ	5.6
Πολυστερήνη	2.56
Τεφάλ	2.1
Συνθετικό λάστιχο	6.7
Νάυλον	3.4
Χαρτί	3.7
Τιτανιούχο σπρόντιο	233
Νερό	80
Έλαιο σιλικόνης	2.5

Συνοψίζοντας τι είδαμε στο Κεφάλαιο 4

- ✓ Ορισμός της χωρητικότητας
- ✓ Υπολογισμός της χωρητικότητας
- ✓ Συνδεσμολογία πυκνωτών
- ✓ Ενέργεια αποθηκευμένη σε ένα φορτισμένο πυκνωτή
- ✓ Πυκνωτές με διηλεκτρικά

Ερωτήσεις;