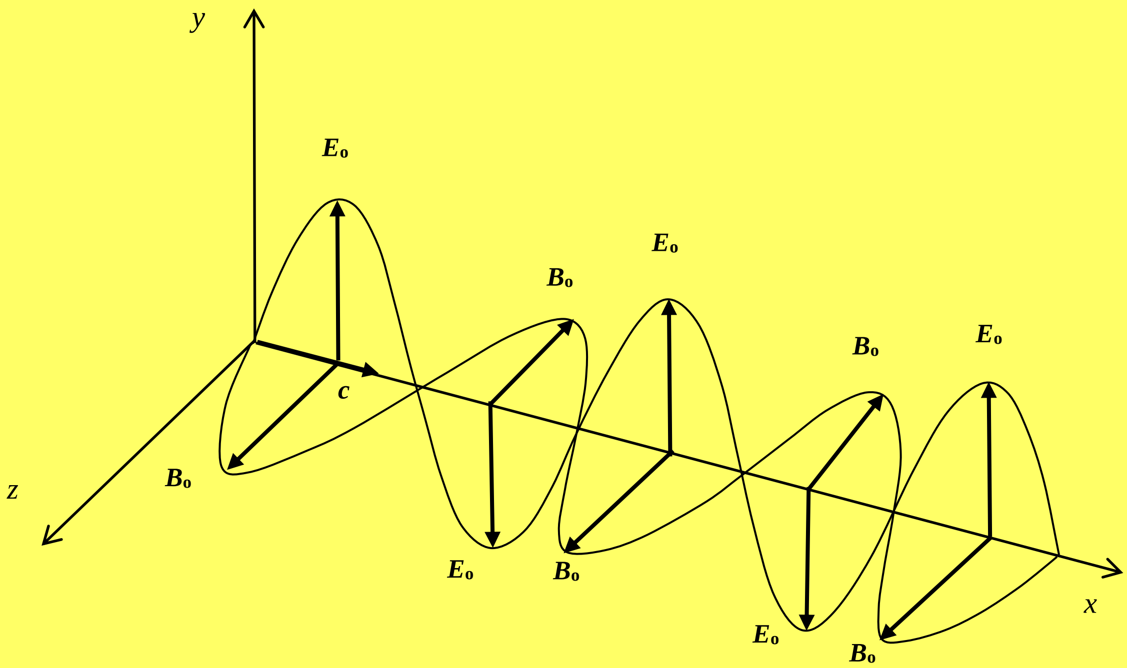
ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Σ. ΒΛΑΧΟΣ

Επίκουρος Καθηγητής
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Βασικά Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητισμού

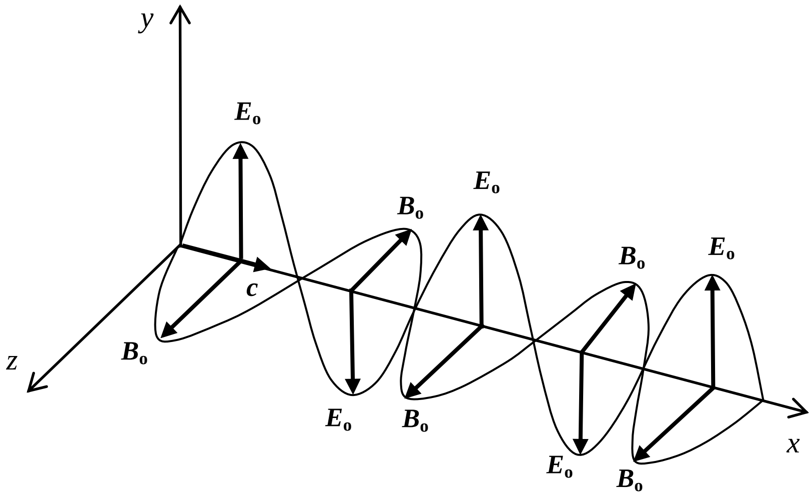


Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr
HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
Ευρωπαϊκή Ένωση
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ 2007-2013

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ Σ. ΒΛΑΧΟΣ

Επίκουρος Καθηγητής
Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Βασικά Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητισμού



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr
HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Βασικά Στοιχεία Ηλεκτρομαγνητισμού

Συγγραφή

Δημήτριος Σ. Βλάχος

Κριτικός αναγνώστης

Ματθαίος Καμαράτος

Συντελεστές έκδοσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Θεοδώρα Ντάκουλα

ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Δημήτριος Βλάχος

ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ: Δημήτριος Βλάχος

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN: 978-960-603-448-0

Εικόνα εξωφύλλου: Διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό (Δ. Βλάχος)

Στην Μαριάννα

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια 9

Πρόλογος 10

Εισαγωγή 12

Κεφάλαιο 1 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ 14

1.1 Το ηλεκτρικό φορτίο και οι ιδιότητές του 14

1.2 Ηλεκτρική φόρτιση σωμάτων - Αγωγοί, ημιαγωγοί και μονωτές 16

1.3 Ο νόμος του Coulomb 18

1.4 Ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ μη σημειακών φορτίων 21

1.5 Πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου 22

Ερωτήσεις 26

Προβλήματα 27

Βιβλιογραφία/Αναφορές 28

Κεφάλαιο 2 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ 30

2.1 Ενταση ηλεκτρικού πεδίου 30

2.2 Ηλεκτρικό πεδίο συνόλου σημειακών φορτίων 32

2.3 Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου 34

2.4 Κίνηση ηλεκτρικού φορτίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο 39

2.4 1 Ο παλμογράφος 40

Ερωτήσεις 43

Προβλήματα 43

Βιβλιογραφία/Αναφορές 45

Κεφάλαιο 3 Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS 46

3.1 Εισαγωγή 46

3.2 Ηλεκτρική ροή 46

3.3 Ο νόμος του Gauss 48

3.4 Συμμετρία φορτίου 50

3.5 Φορτισμένος αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία 54

Ερωτήσεις 59

Προβλήματα 60

Βιβλιογραφία/Αναφορές 62

Κεφάλαιο 4 ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ 64

4.1 Έργο ηλεκτρικού πεδίου και ηλεκτρική δυναμική ενέργεια 64

4.1.1 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια συνόλου σημειακών ηλεκτρικών φορτίων 66

4.2 Το ηλεκτρικό δυναμικό 68

4.2.1 Το ηλεκτρικό δυναμικό συνόλου σημειακών ηλεκτρικών φορτίων 71

4.2.2 Το δυναμικό και η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια συνεχούς κατανομής φορτίου 73
4.3 Ισοδυναμική επιφάνεια αγωγού 76
4.4 Βαθμίδα ηλεκτρικού δυναμικού 77
4.5 Ηλεκτρικό δίπολο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο 78
4.5.1 Αλληλεπιδράσεις ηλεκτρικών διπολικών ροπών 80
Ερωτήσεις 82
Προβλήματα 83
Βιβλιογραφία/Αναφορές 85

Κεφάλαιο 5 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ 87
5.1 Χωρητικότητα και πυκνωτής 87
5.1.1 Επίπεδος πυκνωτής 88
5.1.2 Σφαιρικός πυκνωτής 89
5.1.3 Κυλινδρικός πυκνωτής 90
5.2 Συνδεσμολογία πυκνωτών 91
5.3 Ενέργεια πυκνωτή 94
5.4 Διηλεκτρικά υλικά πυκνωτών 95
Ερωτήσεις 100
Προβλήματα 101
Βιβλιογραφία/Αναφορές 102

Κεφάλαιο 6 ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ 104
6.1 Ηλεκτρικό ρευμα και αντίσταση 104
6.2 Μοντέλο αγωγιμότητας ελευθέρων ηλεκτρονίων 109
6.3 Αντίσταση και θερμοκρασία 110
6.4 Υπεραγωγιμότητα 112
6.5 Ρεύματα στους έμβιους οργανισμούς 112
Ερωτήσεις 113
Προβλήματα 114
Βιβλιογραφία/Αναφορές 115

Κεφάλαιο 7 ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ 117
7.1 Βασικές έννοιες των ηλεκτρικών κυκλωμάτων 117
7.2 Ηλεκτρική ισχύς κυκλώματος 119
7.3 Σύνδεση αντιστάσεων σε κύκλωμα 119
7.3.1 Αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά 120
7.3.2 Αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα 120
7.4 Σύνδεση πηγών ΗΕΔ σε κύκλωμα 123
7.5 Κανόνες του Kirchhoff 124
7.6 Μέτρηση αντιστάσεων 126
7.6.1. Μέτρηση αντίστασης με ωμόμετρο 126

7.6.2. Μέτρηση αντίστασης με τον νόμο του Ohm 127
7.6.3. Μέτρηση αντίστασης με γέφυρα Wheatstone 127
7.7 Κύκλωμα αντιστάτη-πυκνωτή *RC* 128
7.7.1 Φόρτιση πυκνωτή 128
7.7.2 Εκφόρτιση πυκνωτή 129
Ερωτήσεις 132
Προβλήματα 134
Βιβλιογραφία/Αναφορές 135
Κεφάλαιο 8 ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ 137
8.1 Εισαγωγικά 137
8.2 Μαγνητικό πεδίο 138
8.3 Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό 139
8.4 Μαγνητική ροή 140
8.5 Κίνηση φορτισμένων σωματίων σε μαγνητικό πεδίο 141
8.6 Κίνηση φορτισμένων σωματίων σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο 142
8.7 Εφαρμογές της κίνησης φορτισμένων σωματίων σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο 143
8.7.1 Επιλογέας ταχυτήτων- πείραμα Thomson 143
8.7.2 Φασματογράφος μάζας 144
8.7.3 Φαινόμενο Hall 146
8.8 Ροπή σε ρευματοφόρο βρόχο και μαγνητική διπολική ροπή 148
8.9 Μαγνητική δυναμική ενέργεια 149
Ερωτήσεις 151
Προβλήματα 152
Βιβλιογραφία/Αναφορές 154
Κεφάλαιο 9 ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ 156
9.1 Εισαγωγικά 156
9.2 Μαγνητικό πεδίο κινούμενου ηλεκτρικού φορτίου 156
9.3 Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού – Νόμος των Biot και Savart 157
9.3.1 Μαγνητικό πεδίο ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού 159
9.3.2 Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού 159
9.4 Μαγνητική δύναμη μεταξύ παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών 163
9.5 Ο νόμος του Ampere 166
9.6 Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς (πηνίου) 169
9.7 Οι βρόχοι και τα πηνία ως μαγνήτες 170
9.8 Αλληλεπίδραση μαγνητών 171
9.9 Μαγνητικά υλικά 172
Ερωτήσεις 174
Προβλήματα 175

Βιβλιογραφία/Αναφορές......177

Κεφάλαιο 10 ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ......178

10.1 Εισαγωγικά......178

10.2 Ο νόμος του Faraday......179

10.3 Επαγωγική ΗΕΔ σε ευθύγραμμο αγωγό που κινείται σε μαγνητικό πεδίο......182

10.4 Ο κανόνας του Lenz......183

10.5 Επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο......185

10.6 Γεννήτρια εναλλασσομένου ηλεκτρικού ρεύματος......188

Ερωτήσεις......190

Προβλήματα......191

Βιβλιογραφία/Αναφορές......193

Κεφάλαιο 11 ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ......194

11.1 Επαγωγέας......194

11.2 Αυτεπαγωγή......194

11.3 Αμοιβαία επαγωγή......196

11.4 Ενέργεια μαγνητικού πεδίου......198

11.5 Ηλεκτρικό κύκλωμα επαγωγέα-αντιστάτη (κύκλωμα *RL*)......200

11.6 Ηλεκτρικό κύκλωμα επαγωγέα-πυκνωτή (κύκλωμα *LC*) – Ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση......203

11.7 Ηλεκτρικό κύκλωμα αντιστάτη-επαγωγέα-πυκνωτή (κύκλωμα *RLC*) – Φθίνουσα ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση......207

Ερωτήσεις......210

Προβλήματα......211

Βιβλιογραφία/Αναφορές......213

Κεφάλαιο 12 ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ......214

12.1 Εισαγωγικά......214

12.2 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με αντιστάτη......215

12.3 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με πυκνωτή......217

12.4 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με επαγωγέα......219

12.5 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με αντιστάτη, επαγωγέα και πυκνωτή, σε σύνδεση εν σειρά (AC κύκλωμα *RLC*)......221

12.5.1 Συντονισμός σε σειριακό κύκλωμα *RLC*......225

12.6 Μετασχηματιστές και μεταφορά ηλεκτρικής ισχύος......227

Ερωτήσεις......230

Προβλήματα......231

Βιβλιογραφία/Αναφορές......232

Κεφάλαιο 13 ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ......234

13.1 Ηλεκτρομαγνητική θεωρία και εξισώσεις του Maxwell......234

13.2 Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα......237

13.2.1 Δημιουργία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων 237
13.2.2 Εξαγωγή της ταχύτητας των ΗΜ κυμάτων από τις εξισώσεις του Maxwell 240
13.2.3 Εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων 242
13.3 Πόλωση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων 243
13.4 Ενέργεια ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων 245
13.5 Ιδιότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων 247
13.6 Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα 248
Ερωτήσεις 250
Προβλήματα 251
Βιβλιογραφία/Αναφορές 252

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα 1 Θεμελειώδεις φυσικές σταθερές 253
Παράρτημα 2 Στοιχεία διανυσματικού λογισμού 255
Παράρτημα 3 Στοιχεία τριγωνομετρίας 258
Παράρτημα 4 Στοιχεία διαφορικού λογισμού 259
Παράρτημα 5 Στοιχεία ολοκληρωτικού λογισμού 262
Παράρτημα 6 Χρήσιμες μαθηματικές σχέσεις και ιδιότητες 264

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ 266

Πίνακας συντομεύσεων-ακρωνύμια

ΔΣΜ	Διεθνές Σύστημα Μονάδων
ΗΜ	Ηλεκτρομαγνητισμός
ΗΕΔ	Ηλεκτρεγερτική δύναμη
AC	Εναλλασσόμενο ρεύμα (Alternative Current)
DC	Συνεχές ρεύμα (Direct Current)
LCD	Οθόνη υγρών κρυστάλλων (Liquid Crystal Display)
LED	Οθόνη φωτοδιόδων (Light Emission Display)
IR	Υπέρυθρο (Infrared)
UV	Υπεριώδες (Ultravioled)
βλ.	βλέπε
δηλ.	δηλαδή
εξ.	εξίσωση
σχ.	σχήμα
π.χ.	παραδείγματος χάριν
κ.ά.	και άλλα
κλπ	και λοιπά

Πρόλογος

Το παρόν σύγγραμμα είναι προϊόν, το οποίο ξεκίνησε υπό τη μορφή συγγραφής σημειώσεων, για τις ανάγκες διδασκαλίας του μαθήματος του Ηλεκτρομαγνητισμού (ΗΜ), αρχικά στο τμήμα της Χημείας και στη συνέχεια στο τμήμα των Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων. Συνολικά διδάσκω ΗΜ στα εν λόγω τμήματα τα τελευταία περίπου δέκα χρόνια. Στη διάρκεια αυτού του διαστήματος, μελετώντας διάφορα βιβλία ΗΜ, διαπίστωσα ότι περιέχουν όγκο ύλης, ο οποίος είναι αδύνατον να διδαχθεί στα πλαίσια ενός εξαμηνιαίου μαθήματος. Είναι τέτοιο το εύρος της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας και των εφαρμογών της, ώστε ο φοιτητής δύναται να λάβει μόλις μια ιδέα από το περιεχόμενό της. Ως εκ τούτου, ο αρχικός μου στόχος ήταν η συγγραφή ενός χρησίμου και σχετικά συντόμου εγχειριδίου ΗΜ, το οποίο να περιείχε κυρίως τα βασικά στοιχεία του μαθήματος, τα οποία πρέπει να διδαχθεί ένας προπτυχιακός φοιτητής σε διάστημα ενός εξαμήνου (περίπου 13 εβδομάδες διδασκαλίας). Εντούτοις, διδάσκοντας το μάθημα, συμπέρανα ότι οι πραγματικά απαραίτητες γνώσεις στον ΗΜ για έναν φοιτητή, εξαρτώνται από το τμήμα στο οποίο σπουδάζει. Για παράδειγμα, ενώ η έννοια της ηλεκτρικής διπολικής ροπής ενός μορίου είναι απαραίτητη για έναν φοιτητή τμήματος Χημείας, δεν συμβαίνει το ίδιο για έναν φοιτητή τμήματος Πληροφορικής. Αντιθέτως η μετάδοση πληροφορίας με την διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος διαμέσου της ύλης, είναι γνώση άκρως απαραίτητη για τον δεύτερο, αλλά όχι το ίδιο για τον πρώτο. Έτσι, για ένα χρονικό διάστημα που συνέπεσε να διδάσκω ταυτοχρόνως και στα δύο παραπάνω τμήματα, είδα τις σημειώσεις μου να αυξάνονται «ανησυχητικά» σε όγκο. Όμως γράφοντας σημειώσεις φυσικής, και ανήκοντας στο τμήμα της Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, μού ήρθαν στη σκέψη οι μελλοντικοί συνάδελφοί μου. Αν οι χημικοί, οι μηχανικοί, και λοιποί φοιτητές των σχολών θετικών επιστημών, πρέπει να γνωρίζουν κάποιες περιοχές του ΗΜ, οι φυσικοί πρέπει να τις γνωρίζουν …όλες! Τότε αναρωτήθηκα πώς θα μπορούσε το εγχειρίδιό μου, όντας σύντομο και περιεκτικό, να χρησιμεύσει και στους φοιτητές της Φυσικής. Το αρχικό μου συναίσθημα ήταν η απογοήτευση, μιας και συμπέρανα ότι δεν είναι εύκολο να συμπεριλάβει κάποιος όλο το εύρος των βασικών γνώσεων του ΗΜ, σ' ένα μικρού μεγέθους σύγγραμμα. Από την άλλη πλευρά, η συγγραφή ενός πλήρους σε θεματολογία βιβλίο ΗΜ δεν θα ήταν πρωτοτυπία, μιας και ήδη υπάρχουν στην διεθνή (και όχι μόνο) βιβλιογραφία, εξαιρετικά συγγράμματα τόσο λεπτομερή, ακριβή και καλαίσθητα, τα οποία δύσκολα μπορούν να ξεπερασθούν. Έτσι, ξαναγύρισα στην αρχική μου ιδέα, το σύγγραμμά μου να είναι σύντομο, περιεκτικό, αλλά και όσο το δυνατόν πλήρες για κάθε είδους προπτυχιακό φοιτητή, σε οποιοδήποτε τμήμα των Θετικών Επιστημών. Να μην εξειδικεύεται υπερβολικώς, να μην περιγράφει κάθε φαινόμενο με εκτεταμένες λεπτομέρειες, όμως ταυτοχρόνως να μην παραλείπει καμία από τις βασικές έννοιες και φαινόμενα του ΗΜ. Σ' αυτήν την πρόθεσή μου οφείλεται και ο τίτλος του συγγράμματος «Βασικά στοιχεία Ηλεκτρομαγνητισμού». Εντούτοις, παρά τη θέλησή μου να ολοκληρώσω τη συγγραφή ενός τέτοιου είδους βιβλίου, δεν είχα θέσει στον εαυτό μου κανένα χρονικό περιθώριο γι' αυτήν. Τότε, στις αρχές του 2014, πραγματοποιήθηκε η ανοιχτή πρόσκληση για την συγγραφή ακαδημαϊκών ηλεκτρονικών συγγραμμάτων και βοηθημάτων από το Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, στα πλαίσια της δράσης «ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΑ ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ ΚΑΙ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ». Η δράση αυτή συγχρηματοδοτείται από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο (Ε.Κ.Τ.), και από Εθνικούς Πόρους μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση». Τελικά, η εν λόγω πρόσκληση, υπήρξε ο καταλύτης για να δρομολογήσω την συγγραφή του παρόντος ηλεκτρονικού βιβλίου.

Έτσι λοιπόν, το παρόν σύγγραμμα έχει ως κύριο στόχο την παρουσίαση των βασικών αρχών της κλασσικής θεωρίας του ΗΜ, με έναν σχετικά απλό και σύντομο τρόπο, χωρίς να πλατειάζει, αλλά αντιθέτως, να εστιάζει την προσοχή του αναγνώστη στα βασικά και ουσιώδη σημεία της θεωρίας και των εφαρμογών αυτής. Ο χαρακτήρας γραφής του βιβλίου, έγκειται κυρίως στην αφετηρία από τις βασικές έννοιες και ποσότητες του ΗΜ, οι οποίες αποτελούν την βάση, ώστε μέσω μαθηματικών πράξεων, να καταλήγουμε και να περιγράφουμε τις πιο σύνθετες ποσότητες και φαινόμενα του ΗΜ. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην λεπτομερειακή παρουσίαση όλων σχεδόν των μαθηματικών πράξεων, γεγονός που ίσως να αποτελεί μια καινοτομία του παρόντος συγγράμματος. Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφερθεί ότι το μαθηματικό υπόβαθρο του βιβλίου, αφορά βασικές γνώσεις διανυσματικού, διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Προς βοήθεια του αναγνώστη, στο τέλος του συγγράμματος, υπάρχουν παραρτήματα με τα βασικά στοιχεία των απαιτουμένων μαθηματικών γνώσεων. Κάθε κεφάλαιο του βιβλίου αναφέρεται σε μια περιοχή του ΗΜ, αναπτύσσοντας την θεωρία της αλλά και τις βασικές εφαρμογές της. Ένας ικανοποιητικός αριθμός παραδειγμάτων υποβοηθούν στην κατανόηση των εννοιών.

Για την δομή του συγγράμματος μπορούμε να αναφέρουμε ότι αποτελείται από μια σειρά κεφαλαίων, στα οποία αναπτύσσεται η φυσική του ΗΜ. Στην αρχή κάθε κεφαλαίου αναφέρεται συνοπτικά η ύλη που θα παρουσιασθεί, καθώς και οι αναγκαίες προαπαιτούμενες γνώσεις. Οι κύριες έννοιες της φυσικής, στην πρώτη τους αναφορά στο κείμενο, αναφέρονται με έντονη γραφή (bolt) για να επιδείξουν στον αναγνώστη την μεγάλη τους σημασία. Επίσης με bolt αναγράφονται και τα σύμβολα των διανυσματικών ποσοτήτων. Τα σύμβολα των φυσικών ποσοτήτων είναι γραμμένα με πλάγια γραφή (italic). Στο σύγγραμμα χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο μονάδες μέτρησης στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων, (ΔΣΜ). Επιπροσθέτως, στο τέλος κάθε κεφαλαίου υπάρχει ένας αντιπροσωπευτικός αριθμός ερωτήσεων και προβλημάτων (όχι πολύ μεγάλος), ο οποίος αποσκοπεί στην αξιολόγηση των αποκτηθέντων γνώσεων του αναγνώστη. Τα περισσότερα συγγράμματα φυσικής, παραθέτουν έναν τόσο μεγάλο αριθμό ερωτήσεων και προβλημάτων σε κάθε κεφάλαιο, που ο φοιτητής πραγματικά πελαγοδρομεί στην προσπάθειά του, ποιά να επιλύσει και ποιά όχι. Συνήθως ο χρόνος του δεν είναι αρκετός ούτε για τα μισά από αυτά. Γι’ αυτόν τον λόγο, για κάθε κεφάλαιο επέλεξα μόνο καμιά δεκαριά αντιπροσωπευτικά προβλήματα προς επίλυση, δίνοντας ταυτόχρονα για κάποια από αυτά και τις απαντήσεις τους. Παροτρύνω τον αναγνώστη να ασχοληθεί με τις ερωτήσεις και τα προβλήματα κάθε κεφαλαίου, προτού προχωρήσει στο επόμενο. Άλλωστε, όπως ανέφερε κάποτε ο διάσημος Αμερικανός φυσικός και κάτοχος βραβείου Νομπέλ Φυσικής R.P. Feynman (Φέινμαν), «χωρίς πρακτική εξάσκηση δεν αποκτάται γνώση». Επίσης στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρουσιάζεται η βιβλιογραφία στην οποία στηρίχθηκε η συγγραφή του, με την κάθε αναφορά να αντιστοιχείται εντός του κειμένου.

Εν συντομία, ως προς την θεματολογία του βιβλίου, μπορούμε να ειπούμε ότι αρχικά παρουσιάζεται η θεμελιώδης φυσική ποσότητα του ηλεκτρικού φορτίου, τα είδη του, οι ιδιότητές του, και οι συνέπειες που επιφέρει στον τριγύρω χώρο με την δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου και δυναμικού. Μελετώνται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των φορτίων, μέσω των ηλεκτρικών δυνάμεων Coulomb (Κουλόμπ), και ορίζεται η ηλεκτρική δυναμική τους ενέργεια. Επίσης παρουσιάζεται ο υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου μη σημειακών συμμετρικών φορτίων με την έννοια της ηλεκτρικής ροής και την εφαρμογή του νόμου του Gauss (Γκάους). Εν συνεχεία παρουσιάζονται οι έννοιες της χωρητικότητας, του ηλεκτρικού ρεύματος και της ηλεκτρικής ωμικής αντίστασης, ενώ γίνεται μία σύντομη αναφορά στα διηλεκτρικά υλικά και τις ιδιότητές τους. Στα πλαίσια περιγραφής του συνεχούς ρεύματος γίνεται παρουσίαση και ανάλυση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων με αντιστάσεις και πυκνωτές, με την χρήση των κανόνων του Kirchhoff (Κίρχοφ). Ακολούθως αρχίζει η ύλη του μαγνητισμού, όπου αρχικώς περιγράφεται το μαγνητικό πεδίο, οι πηγές του και οι ιδιότητές του. Έμφαση δίνεται στην δημιουργία μαγνητικού πεδίου από ηλεκτρικό ρεύμα και στον υπολογισμό του μέσω των νόμων των Biot-Savart (Μπιότ-Σαβάρτ) και Ampere (Αμπέρ). Γίνεται επίσης περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων μέσω της δύναμης Lorentz (Λόρεντζ), ενώ αναφέρονται και κάποιες τεχνολογικές εφαρμογές της. Επιπλέον εξηγούνται εν συντομία οι αλληλεπιδράσεις μαγνητών, βάσει της αλληλεπίδρασης των μαγνητικών διπολικών ροπών τους και της έννοιας της μαγνητικής δυναμικής ενέργειας, ενώ αναφέρονται οι κατηγορίες των υλικών, αναλόγως της συμπεριφοράς τους στην παρουσία μαγνητικού πεδίου. Στη συνέχεια μελετάται το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής σε όλες του τις εκφάνσεις, (αυτεπαγωγή και αμοιβαία επαγωγή), με τον νόμο του Faraday (Φαραντέι). Επιπροσθέτως, αναδεικνύεται η συμβολή της μαγνητικής επαγωγής στη δημιουργία των εναλλασσομένων ρευμάτων. Αναλύονται λεπτομερώς διαφόρων ειδών κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος, μεταξύ των οποίων οι ηλεκτρομαγνητικοί ταλαντωτές και οι μετασχηματιστές. Το βιβλίο τελειώνει με την παρουσίαση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, των ιδιοτήτων τους, και την μεταφορά ενέργειας που αυτά πραγματοποιούν.

Κλείνοντας τον πρόλογο θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμώς τον αναπληρωτή καθηγητή του Τμήματος της Φυσικής του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων, κ. Ματθαίο Καμαράτο, για την πολύτιμη βοήθειά του ως κριτικός αναγνώστης του συγγράμματος. Οι διορθώσεις και οι υποδείξεις του ήταν ανεκτίμητες για την ολοκλήρωση τούτου του έργου. Επίσης ευχαριστώ την φιλόλογο Θεοδώρα Ντάκουλα για την γλωσσική επιμέλεια του κειμένου. Η γραφιστική επιμέλεια καθώς και όλα τα σχήματα έγιναν από τον συγγραφέα. Οι εικόνες των διαφόρων επιστημόνων, ελήφθησαν σχεδόν εξ’ ολοκλήρου, από τους ιστοτόπους Wikipedia, Wikimedia και Βικιπέντια, και είναι καθεμία τους κοινό κτήμα, χωρίς πνευματικά δικαιώματα. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω αρκετούς φοιτητές μου, οι οποίοι κατά την διάρκεια της διδασκαλίας με τις ερωτήσεις τους αλλά και τις επισημάνσεις τους, με βοήθησαν να κατανοήσω καλύτερα τον Ηλεκτρομαγνητισμό.

Οκτώβριος 2015,
Ιωάννινα

Εισαγωγή

Ο Ηλεκτρομαγνητισμός είναι μία από τις κύριες θεωρίες της επιστήμης της Φυσικής, η οποία περιγράφει και μελετά τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα που παρατηρούνται στην Φύση. Τέτοιου είδους φαινόμενα παρατηρούσε ο άνθρωπος από την εποχή της αρχαιότητας. Για παράδειγμα, τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα ήταν γνωστά στους αρχαίους Έλληνες από τον 7^{o} αιώνα π.Χ. Η πρώτη βεβαιωμένη παρατήρηση ηλεκτρικού φαινομένου ήταν του Θαλή του Μιλήσιου, σύμφωνα με την οποία, όταν ένα κομμάτι κεχριμπάρι, (ἤλεκτρον στην αρχαία ελληνική γλώσσα), τριβόνταν σε ξηρό ύφασμα, μπορούσε να έλκει μικρά κομμάτια αχύρου. Από την λέξη ήλεκτρον, προέρχεται και η ετυμολογία του ηλεκτρονίου, και κατ' επέκταση του ηλεκτρισμού. Την ίδια περίπου εποχή, στην περιοχή της Μαγνησίας στην Μικρά Ασία, παρατηρούνται τα πρώτα μαγνητικά φαινόμενα [1]. Συγκεκριμένα, παρατηρείται για πρώτη φορά, ότι ένα ορυκτό μετάλλευμα της περιοχής, γνωστό αργότερα ως μαγνητίτης (φυσικός μαγνήτης - Fe_2O_4), μπορεί να έλκει μικρά κομμάτια σιδήρου. Από το ορυκτό του μαγνητίτη καθιερώθηκε ο όρος μαγνητισμός και μαγνητικά φαινόμενα. Από τότε, οι κλάδοι του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού αναπτύχθηκαν ξεχωριστά κατά την πορεία των αιώνων, κυρίως με μια παρατηρητική και περιγραφική μελέτη των φαινομένων. Έτσι η μαγνητική πυξίδα ήταν για αιώνες το εργαλείο γεωγραφικού προσανατολισμού των ανθρώπων και κυρίως των θαλασσοπόρων, και συνέβαλε ώστε το 1600, ο W. Gilbert (Γκίλμπερτ) να διατυπώσει την ιδέα, ότι η Γη είναι ένας τεράστιος φυσικός μαγνήτης. Αργότερα, το 1750, ο J. Michell (Μίτσελ) χρησιμοποίησε έναν στροφικό ζυγό για να μελετήσει τις μαγνητικές δυνάμεις, και να αποδείξει ότι η μαγνητική δύναμη μεταξύ δυο μαγνητών είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης που τους χωρίζει. Λίγο αργότερα, το 1785, ο Ch. Coulomb (Κουλόμπ) κατέληγε σ' ένα παρόμοιο συμπέρασμα για τις δυνάμεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων, τα είδη των οποίων είχε ήδη προσδιορίσει ο Βενιαμίν Φραγκλίνος. Το έτος 1820, υπήρξε ορόσημο για τον Ηλεκτρομαγνητισμό, μιας και ο H. Oersted (Έρστεντ) διαπίστωσε πειραματικά την διασύνδεση του ηλεκτρισμού με τον μαγνητισμό, με την παρατήρηση ότι το ηλεκτρικό ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο. Την άρρηκτη σχέση ηλεκτρισμού-μαγνητισμού την επιβεβαίωσαν την δεκαετία του 1830, (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο), και οι M. Faraday (Φαραντέι) και J. Henry (Χένρυ), οι οποίοι αμφότεροι παρατήρησαν την δημιουργία επαγωγικού ηλεκτρικού ρεύματος από χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Ειδικά ο Faraday, ως ένας εξαιρετικός πειραματιστής, εισήγαγε την έννοια του πεδίου στην Φυσική, η οποία έχει θεμελιώδη ρόλο, όχι μόνο στον ΗΜ, αλλά και σε άλλες θεωρίες. Η ολοκληρωτική όμως συνένωση του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού σε μία πραγματικά ενοποιημένη επιστημονική θεωρία, αυτήν του Ηλεκτρομαγνητισμού, έγινε από έναν λαμπρό φυσικό τον J. Maxwell (Μάξουελ). Το 1865, ο Maxwell κατέληξε σε τέσσερις εξισώσεις, οι οποίες σήμερα φέρουν το όνομά του, και βάσει αυτών μπορούν να περιγραφθούν όλα τα κλασσικά ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Στην πραγματικότητα, ο Maxwell έδωσε τον μαθηματικό φορμαλισμό στην συσσωρευμένη δουλειά όλων των πρωτεργατών του ηλεκτρισμού και μαγνητισμού, όπως οι Faraday, Gauss (Γκάους), Ampere (Αμπέρ) κ.ά., ώστε ο ΗΜ να γίνει η πλήρης επιστημονική θεωρία που γνωρίζουμε σήμερα. Δικαίως ο Maxwell θεωρείται ο «πατέρας» του ΗΜ, κάτι αντίστοιχο με τον Νεύτωνα στην Μηχανική, τον Carnot (Καρνότ) στην Θερμοδυναμική, και τον Einstein (Αϊνστάιν) στην Σχετικότητα. Επίσης, η θεωρία του Maxwell προέβλεψε την ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, τα οποία κινούνται στο κενό με ταχύτητα ίση μ' αυτή του φωτός, δηλ. περίπου 300,000 km/s. Πράγματι λίγο αργότερα, το 1887, ο H. Hertz (Χέρτζ) παρήγαγε για πρώτη φορά στο εργαστήριό του ηλεκτρομαγνητικά κύματα, μετρώντας την ταχύτητά τους ίση με αυτή του φωτός, όπως ακριβώς προέβλεπε η θεωρία του Maxwell. Την τεράστια σημασία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δεν μπορούσε να την καταλάβει ούτε ο ίδιος ο εφευρέτης τους, μιας και λέγεται ότι δήλωσε: «Δεν νομίζω ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που ανακάλυψα θα έχουν καμία πρακτική εφαρμογή». Όμως η ανακάλυψη του Hertz, και κατόπινη ανακάλυψη της ασύρματης τηλεγραφίας και της τελειοποίησή της από τον G. Marconi (Μαρκόνι), οδήγησαν τον ΗΜ να γίνει ο θεμέλιος λίθος ενός βασικοτάτου τεχνολογικού τομέα του σύγχρονου πολιτισμού μας, τις τηλεπικοινωνίες. Πράγματι, μια πληθώρα τεχνολογικών επιτευγμάτων, όπως το τηλέφωνο, το ραδιόφωνο, η τηλεόραση, το ραντάρ, οι δορυφορικές επικοινωνίες, οι υπολογιστές, οι επιταχυντές σωματίων, τα ηλεκτρονικά μικροσκόπια, τα ραδιοτηλεσκόπια, τα ιατρικά διαγνωστικά μηχανήματα κ.ά. , στηρίζουν την λειτουργία τους στον ΗΜ. Χωρίς αυτόν, η καθημερινή μας ζωή θα ήταν εντελώς διαφορετική, όπως περίπου ήταν τον 19^{o} αιώνα. Μία επίσης εξαιρετικής σημασίας συνεισφορά του Maxwell στα πλαίσια της θεωρίας του, ήταν η πρότασή του ότι το φως

[1] Υπάρχουν ενδείξεις σε αρχαία κινεζικά έγγραφα, ότι τα μαγνητικά φαινόμενα ήταν ήδη γνωστά στην Κίνα από την δεύτερη χιλιετία π.Χ.

είναι ένα είδος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, η οποία δημιουργείται από επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία. Στην θεωρία του ΗΜ συνέβαλαν και άλλοι επιστήμονες, όπως ο O. Heaviside (Χεβισάιντ), ο οποίος διατύπωσε τις εξισώσεις του Maxwell σε διανυσματική μορφή, μια πιο δημοφιλή και χρήσιμη μορφή των εξισώσεων, ιδίως στο πεδίο της Κβαντικής Φυσικής. Επίσης ο H. Lorentz (Λόρεντζ) συνέβαλε στην αποσαφήνιση της θεωρίας του Maxwell, αλλά και στην περιγραφή της κίνησης των φορτίων μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με την ομώνυμη δύναμη Lorentz.

Σήμερα η θεωρία του ΗΜ συνεχίζει να συμβάλει στην εξέλιξη της επιστήμης και του πολιτισμού μας, τόσο σε τεχνολογικό όσο και σε θεωρητικό επίπεδο. Νέες προηγμένες τεχνολογικά συσκευές και διατάξεις παράγονται προς χρήση σε διαφόρους τομείς της επιστήμης και της καθημερινότητας. Επίσης σχεδιάζονται και παράγονται νέα υλικά με καινοτόμες ηλεκτρικές και μαγνητικές ιδιότητες, τα οποία χρησιμοποιούνται στην μοντέρνα τεχνολογία. Σε θεωρητικό επίπεδο, προσπάθειες γίνονται για την ενοποίηση της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης με άλλες βασικές δυνάμεις της Φυσικής. Ήδη από το 1967 έχει επιτευχθεί η ενοποίηση της ηλεκτρομαγνητικής με την ασθενή αλληλεπίδραση από τους S. Glashow (Γκλάσοου), M. Salam (Σαλάμ), και S. Weinberg (Βάινμπεργκ), οι οποίοι και βραβεύτηκαν με το βραβείο Νομπέλ της Φυσικής το 1979. Οι προβλέψεις αυτής της ενοποίησης έχουν επαληθευθεί πειραματικώς στους σύγχρονους επιταχυντές σωματιδίων υψηλής ενέργειας. Οι σύγχρονοι φυσικοί συνεχίζουν την προσπάθεια ενοποίησης της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης με αυτές της βαρυτικής αλλά και της ισχυρής αλληλεπίδρασης (πυρηνική αλληλεπίδραση). Εάν θα επιτύχουν, όπως για παράδειγμα το έκαναν για την ενοποίηση του ηλεκτρισμού και μαγνητισμού, οι προγενέστεροι συνάδελφοί τους όπως οι Oersted, Faraday, Maxwell κ.ά., θα το δείξει το μέλλον. Τα πεδία έρευνας είναι σίγουρα ανοιχτά και εύφορα, προσμένοντας τον άνθρωπο να αδράξει την πρόκληση για την δημιουργία νέας γνώσης στο οικοδόμημα της επιστήμης.

Κεφάλαιο 1

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ

Σύνοψη

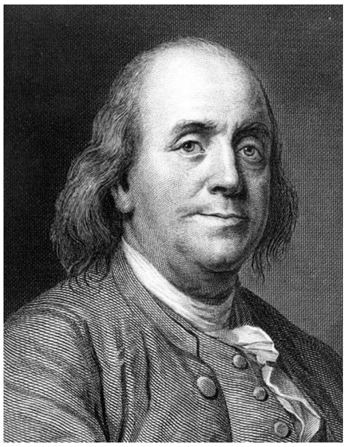
Στο εισαγωγικό τούτο κεφάλαιο γίνεται λεπτομερής αναφορά στην θεμελιώδη φυσική ποσότητα του ηλεκτρομαγνητισμού, το ηλεκτρικό φορτίο. Περιγράφονται τα είδη, καθώς και οι βασικές αρχές της διατήρησης και κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου. Στη συνέχεια αναφέρονται οι μέθοδοι ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων και η κατηγοριοποίησή τους, σε αγωγούς, μονωτές και ημιαγωγούς. Ακολουθεί μελέτη των αλληλεπιδράσεων μεταξύ σημειακών φορτίων, με τον ορισμό της ηλεκτρικής δύναμης μέσω του νόμου του Coulomb. Τέλος, μελετώνται οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις για κάποιες περιπτώσεις μακροσκοπικών ηλεκτρικών φορτίων.

Προαπαιτούμενη γνώση

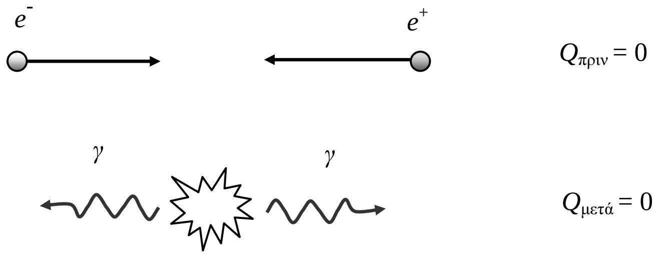
Διανυσματικός λογισμός. Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός.

1.1 Το ηλεκτρικό φορτίο και οι ιδιότητές του

Η αιτία για όλες τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις στην φύση είναι το **ηλεκτρικό φορτίο**. Είναι μια θεμελιώδης φυσική ποσότητα, η οποία στην ουσία δεν είναι δυνατόν να περιγραφθεί και που όμως αποτελεί τον θεμέλιο λίθο του Ηλεκτρομαγνητισμού. Κατά συνθήκη στη φύση υπάρχουν δυο διαφορετικά είδη φορτίων, το θετικό και το αρνητικό. Ο Αμερικανός Benjamin Franklin (1706–1790), ο πρώτος φυσικός του Νέου Κόσμου, όρισε για πρώτη φορά τις δύο διαφορετικές φύσεις του ηλεκτρικού φορτίου, ονομάζοντας τα δύο διαφορετικά είδη φορτίων που υπάρχουν στη Φύση, θετικό και αρνητικό αντιστοίχως. Τα θετικά φορτία ορίστηκαν ως τα ηλεκτρικά φορτία που αναπτύσσονται σε γυάλινη ράβδο όταν αυτή τριφτεί με ένα μεταξωτό ύφασμα. Αντιθέτως, ως αρνητικά φορτία ορίστηκαν τα ηλεκτρικά φορτία που αναπτύσσονται σε ράβδο εβονίτη [2], ή σε πλαστική ράβδο όταν αυτή τριφτεί με ένα κομμάτι γούνας. Βασική αρχή του ηλεκτρισμού που ισχύει πάντα, είναι ότι **τα ετερώνυμα φορτία έλκονται**, δηλαδή αναπτύσσεται μεταξύ τους μια ελκτική δύναμη που τείνει να φέρει το ένα πιο κοντά στο άλλο. Σε αντίθεση **τα ομώνυμα φορτία απωθούνται**, δηλαδή αναπτύσσεται μεταξύ τους μια απωστική δύναμη, η οποία τείνει να απομακρύνει το ένα από το άλλο. Μια άλλη θεμελιώδης αρχή του ηλεκτρισμού και γενικότερα της Φυσικής, είναι **η αρχή διατήρησης του φορτίου** σύμφωνα με την οποία το ηλεκτρικό φορτίο οποιουδήποτε απομονωμένου συστήματος είναι σταθερό. Δηλαδή το φορτίο μπορεί να μεταφέρεται από ένα σημείο ενός συστήματος σε ένα άλλο, ή από ένα σώμα σε ένα άλλο σώμα, όμως δεν καταστρέφεται ούτε δημιουργείται. Έχουμε σοβαρούς λόγους να πιστεύουμε ότι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο του σύμπαντος είναι μηδέν. Με άλλα λόγια, όσο θετικό φορτίο υπάρχει στη Φύση, τόσο είναι και το αρνητικό. Ένα θεαματικό παράδειγμα διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου είναι το φαινόμενο της **εξαΰλωσης**, το οποίο παρατηρείται στη φυσική των υψηλών ενεργειών και



Benjamin Franklin (1706–1790) (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BenFranklinDuplessis.jpg#/media/File:Franklin-Benjamin-LOC.jpg). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*



Σχήμα 1.1 *Το φαινόμενο της εξαΰλωσης κατά το οποίο το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται σταθερό (βλ. κείμενο).*

[2] Ελαστικό υλικό, μεγάλης σκληρότητας που παράγεται με θείωση του καουτσούκ (βουλκανισμός).

αναπαριστάται σχηματικά στο σχ. 1.1. Ένα ηλεκτρόνιο e^- (στοιχειώδες σωμάτιο με αρνητικό φορτίο) συγκρούεται με ένα ποζιτρόνιο e^+ ή αλλιώς αντιηλεκτρόνιο (ηλεκτρόνιο με θετικό φορτίο), το οποίο καλείται και αντισωμάτιο του ηλεκτρονίου, με συνέπεια τα δύο σωμάτια να αλληλοεξαφανίζονται και ταυτοχρόνως να προκύπτει ένα ζεύγος φωτονίων κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Το αλγεβρικό άθροισμα του ηλεκτρικού φορτίου πριν και μετά την εξαΰλωση παραμένει μηδέν, δηλ. το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται. Στη Φύση παρατηρείται και το αντίστροφο φαινόμενο, γνωστό ως **δίδυμη γένεση**, κατά το οποίο ένα φωτόνιο μετατρέπεται σε ζεύγος ηλεκτρόνιου και ποζιτρόνιου αντιθέτως κινούμενα μεταξύ τους (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Και σε αυτήν την περίπτωση το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται. Το ηλεκτρικό φορτίο ως φυσική ποσότητα , μετράται με μονάδα μέτρησης το Coulomb (1 C) στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (ΔΣΜ - σύστημα SI), προς τιμήν του Γάλλου φυσικού Charles Augustin Coulomb (1736-1806), του οποίου όπως θα δούμε στη συνέχεια η συνεισφορά του στον ηλεκτρισμό υπήρξε θεμελιώδης. Μια επίσης σημαντική ιδιότητα του ηλεκτρικού φορτίου είναι ότι είναι **κβαντισμένο**, δηλαδή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο ενός στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου ίσο με e=1.602177×10^{-19} C. Το φορτίο ονομάζεται στοιχειώδες, γιατί δεν έχει παρατηρηθεί στη φύση ελεύθερο φορτίο με μικρότερη τιμή.[3]

Στον φυσικό κόσμο που μας περιβάλλει, η ύλη αποτελείται από άτομα, τα οποία συγκροτούνται από σωμάτια, όπως το πρωτόνιο, το νετρόνιο και το ηλεκτρόνιο. Το πρωτόνιο φέρει θετικό φορτίο ίσο με το στοιχειώδες φορτίο, το ηλεκτρόνιο φέρει το αρνητικό στοιχειώδες φορτίο, ενώ το νετρόνιο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο. Για τον λόγο αυτό το νετρόνιο ονομάζεται συχνά και ουδετερόνιο. Τα βασικά χαρακτηριστικά των τριών παραπάνω ατομικών σωματίων φαίνονται στον πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1 *Στοιχεία ατομικών σωματίων.*

Σωμάτιο	**Σύμβολο**	**Φορτίο** (C)	**Μάζα** (kg)
Πρωτόνιο	p	1.602177×10^{-19}	1.67252×10^{-27}
Νετρόνιο	n	0	1.67482×10^{-27}
Ηλεκτρόνιο	e^-	-1.602177×10^{-19}	9.1091×10^{-31}

Παράδειγμα 1.1 Ατομικά σωμάτια στην ύλη

Ένα χρυσό δαχτυλίδι έχει μάζα 13.4 g. Το ατομικό βάρος του χρυσού είναι 197 και ο ατομικός του αριθμός είναι Z=79. α) Πόσα πρωτόνια περιέχει το δαχτυλίδι και ποιο είναι το συνολικό θετικό τους φορτίο; β) Πόσα ηλεκτρόνια περιέχει το δαχτυλίδι άν δεν είναι ηλεκτρικά φορτισμένο;

Λύση

α) Το γραμμοάτομο χρυσού είναι ποσότητα ύλης μάζας 197 gr, και περιέχει αριθμό ατόμων ίσο με τον αριθμό Avogadro, δηλαδή N_A=6.022×10^{23} άτομα χρυσού. Επομένως τα 13.4 g αντιστοιχούν σε ύλη 13.4/197 γραμμοατόμων και περιέχουν N_o άτομα όπου

$$N_o = \frac{13.4}{197} \times 6.022 \times 10^{23}\,\text{άτομα} \Rightarrow N_o = 0.41 \times 10^{23}\,\text{άτομα}$$

Επειδή όμως ο ατομικός αριθμός κάθε στοιχείου είναι ίσος με τον αριθμό των πρωτονίων του ατόμου του, κάθε άτομο χρυσού έχει 79 πρωτόνια, και επομένως ο συνολικός αριθμός πρωτονίων του δαχτυλιδιού είναι

$$N_p = 0.41 \times 10^{23}\,\text{άτομα} \times 79\,\text{πρωτόνια/άτομο} \Rightarrow N_p = 3.24 \times 10^{24}\,\text{πρωτόνια}$$

Εφόσον τώρα κάθε πρωτόνιο έχει θετικό φορτίο ίσο με 1.60×10^{-19} C, το ολικό φορτίο των πρωτονίων είναι

$$Q = 3.24 \times 10^{24} \times 1.60 \times 10^{-19}\,\text{C} \Rightarrow Q = 5.18 \times 10^{5}\,\text{C}$$

[3] Τα υποατομικά σωματίδια κουάρκς, έχουν φορτίο μικρότερο του e , όπως $\frac{e}{3}$ και $\frac{2e}{3}$, όμως δεν μπορούν να υπάρξουν ελεύθερα, αλλά σε συνδυασμό μεταξύ τους (τριάδες ή δυάδες). Έτσι τα σωματίδια που απαρτίζονται από κουάρκς έχουν πάντα ηλεκτρικό φορτίο ακέραιο πολλαπλάσιο του e.

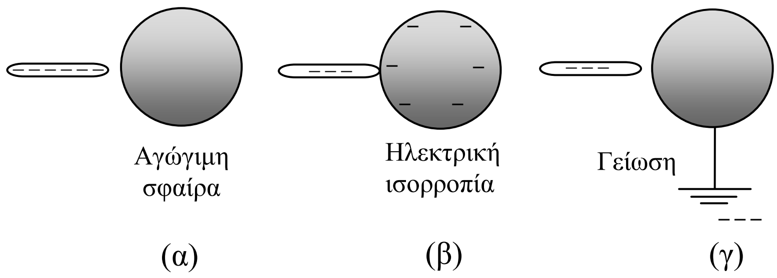
β) Για να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο το δαχτυλίδι θα πρέπει να περιέχει τον ίδιο αριθμό ηλεκτρονίων με αυτόν των πρωτονίων, μιας και τα σωμάτια αυτά έχουν αντίθετα φορτία. Άρα ο αριθμός των ηλεκτρονίων είναι $N_e = 3.24 \times 10^{24}$ ηλεκτρόνια .

1.2 Ηλεκτρική φόρτιση σωμάτων - Αγωγοί, ημιαγωγοί και μονωτές

Τα περισσότερα σώματα που μας περιβάλλουν είναι ηλεκτρικά ουδέτερα, δηλαδή δεν είναι ηλεκτρικά φορτισμένα. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι κάθε σώμα, όταν είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, περιέχει ίσο αριθμό θετικών και αρνητικών φορτίων. Εντούτοις τα σώματα είναι δυνατόν να φορτιστούν ηλεκτρικά όταν αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους. Τούτο συμβαίνει με την μεταφορά ηλεκτρικού φορτίου από το ένα σώμα στο άλλο. Τα σώματα δηλαδή, μπορούν να ανταλλάσουν ηλεκτρικά φορτία μεταξύ τους. Η ανταλλαγή φορτίων μεταξύ των σωμάτων διαταράσσει την ουδετερότητά τους, ώστε να καταλήγουν με πλεονάζον θετικό ή αρνητικό φορτίο. Εάν ένα σώμα το οποίο έχει περίσσεια θετικού ή αρνητικού φορτίου, είναι δηλαδή φορτισμένο, έλθει σε επαφή με ένα ουδέτερο σώμα, τότε μπορεί να συμβεί μεταφορά φορτίου από το φορτισμένο στο αφόρτιστο σώμα. Μετά από μικρό σχετικά χρονικό διάστημα τα δύο σώματα φθάνουν σε **ηλεκτρική ισορροπία**, μια κατάσταση στην οποία δεν συμβαίνει μετακίνηση ηλεκτρικών φορτίων μεταξύ τους. Σ' αυτό το σημείο πρέπει να τονίσουμε ότι τα πραγματικά ανταλλασσόμενα μεταξύ των σωμάτων ηλεκτρικά φορτία, είναι ηλεκτρόνια, μιας και αυτά τα σωμάτια μπορούν να μετακινούνται από τα επιφανειακά άτομα του ενός σώματος, στα άτομα του άλλου. Δηλαδή, όταν ένα σώμα φορτίζεται αρνητικά, κερδίζει ηλεκτρόνια. Αντιθέτως, όταν φορτίζεται θετικά, ελαττώνεται ο αριθμός των ηλεκτρονίων του. Επομένως η ηλεκτρική φόρτιση ενός σώματος, σημαίνει ότι υπάρχει πλεόνασμα ή έλλειμμα ηλεκτρονίων σ' αυτό.

Η ευκολία με την οποία μπορεί να μεταφερθεί το ηλεκτρικό φορτίο διαμέσου της ύλης ενός σώματος, είναι ο παράγοντας που κατηγοριοποιεί τα σώματα και γενικότερα τα υλικά σε κατηγορίες. Τα υλικά που επιτρέπουν εύκολα την μετακίνηση ηλεκτρικών φορτίων δηλαδή ηλεκτρονίων διαμέσου της ύλης τους ονομάζονται **αγωγοί**, και τούτη η ιδιότητά τους ονομάζεται **αγωγιμότητα**, η οποία θα εξετασθεί με λεπτομέρεια στο κεφάλαιο 6. Αντιθέτως τα υλικά που δεν επιτρέπουν μια τέτοια μετακίνηση ηλεκτρικού φορτίου, ονομάζονται **μονωτές** ή **διηλεκτρικά υλικά**, τα οποία έχουν σχεδόν μηδενική αγωγιμότητα. Μια τρίτη κατηγορία είναι τα υλικά που επιτρέπουν την μετακίνηση ηλεκτρικού φορτίου στο εσωτερικό τους υπό συνθήκες, και είναι γνωστά ως **ημιαγωγοί** (Kittel, 1979), (Alonso & Finn, 1992). Τα περισσότερα μέταλλα (χαλκός, αλουμίνιο, σίδηρος κ.α.) είναι αγωγοί ενώ τα περισσότερα αμέταλλα (θείο, φώσφορος, σελίνιο κ.α.) είναι μονωτές. Μονωτές επίσης είναι ο αέρας καθώς και υλικά, όπως το γυαλί, το ξύλο, το πλαστικό, το καουτσούκ κ.α. Η ιδιότητα ενός αγωγού και ειδικά των μετάλλων, να «επιτρέπει» την κίνηση ηλεκτρικών φορτίων στο εσωτερικό του, οφείλεται κυρίως στα **ελεύθερα ηλεκτρόνια**, τα οποία είναι τόσο χαλαρά προσδεμένα στα άτομά τους, ώστε στην ουσία να μπορούν να κινούνται ελεύθερα μέσα στο υλικό (Ashcroft & Mermin, 1976). Στους μονωτές δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία γι' αυτό και δεν άγουν ηλεκτρικά φορτία, δηλαδή η αγωγιμότητά τους είναι σχεδόν μηδενική. Παρόλα αυτά, οι μονωτές μπορούν να φορτιστούν ηλεκτρικά, δηλαδή να αποκτήσουν ηλεκτρικά φορτία. Τέλος οι ημιαγωγοί, υπό ορισμένες συνθήκες, διαθέτουν κάποια ελεύθερα ηλεκτρόνια, οπότε και παρατηρείται μικρή μεταφορά ηλεκτρικού φορτίου. Οι ημιαγωγοί είναι εξαιρετικά χρήσιμοι ως υλικά, σε κλάδους της σύγχρονης τεχνολογίας. Τα πιο γνωστά ημιαγωγικά υλικά είναι το πυρίτιο και το γερμάνιο, τα οποία χρησιμοποιούνται ευρέως στην κατασκευή ηλεκτρονικών διατάξεων.

Αναφέραμε προηγουμένως ότι μπορούμε να αναπτύξουμε ηλεκτρικά φορτία σε σώματα (ράβδους, σφαίρες κλπ), δηλαδή να τα φορτίσουμε ηλεκτρικά, τρίβοντάς τα με άλλα σώματα (ύφασμα, γούνα κλπ). Με την **μέθοδο της τριβής** λοιπόν, τα σώματα μπορούν να ανταλλάσουν ηλεκτρικά φορτία μεταξύ τους. Αυτού του είδους η ανταλλαγή διαταράσσει την ουδετερότητά τους, ώστε να καταλήγουν με πλεονάζον θετικό ή αρνητικό φορτίο. Ένας άλλος τρόπος φόρτισης σωμάτων είναι η **μέθοδος της επαφής**. Εάν ένα σώμα το οποίο έχει περίσσεια θετικού ή αρνητικού φορτίου, (είναι δηλ. φορτισμένο), έλθει σε επαφή με ένα ουδέτερο σώμα, τότε μπορεί να συμβεί μεταφορά φορτίου από το φορτισμένο στο αφόρτιστο σώμα, μέχρι τα δυο σώματα να αποκτήσουν το ίδιο φορτίο. Τα φορτία που αποκτούν τα σώματα δια τριβής ή επαφής, ονομάζονται **στατικός ηλεκτρισμός**. Μερικά θεαματικά φαινόμενα στατικού ηλεκτρισμού πραγματοποιούνται με την ηλεκτροστατική **γεννήτρια Van de Graaff** (Βαν Ντε Γκράαφ), η οποία είναι μια διάταξη, όπου μέσω μιας κινούμενης μονωτικής ταινίας και δια της τριβής, απομακρύνει ηλεκτρόνια από μια κενή μεταλλική σφαίρα προς την Γη, φορτίζοντάς την σφαίρα θετικά (Kraus, 1993), (Knight, 2010), (Young

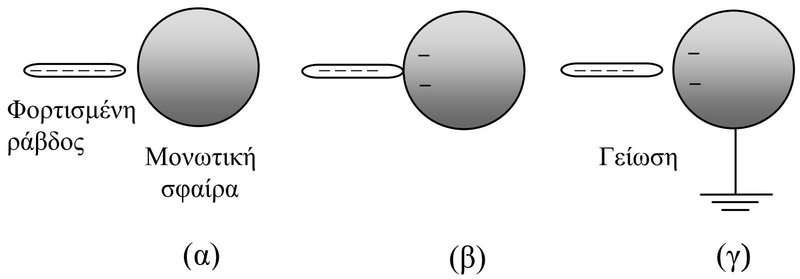


Σχήμα 1.2 *Φόρτιση μεταλλικής σφαίρας με επαφή. (α) Η αρνητικά φορτισμένη πλαστική ράβδος προσεγγίζει την ηλεκτρικά ουδέτερη μεταλλική σφαίρα. (β) Επαφή της ράβδου με την σφαίρα επιφέρει μεταφορά αρνητικών φορτίων σ' αυτή έως την επίτευξη ηλεκτρικής ισορροπίας. (γ) Με την γείωση η σφαίρα παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερη μιας και τα ηλεκτρικά φορτία έχουν μεταφερθεί στην Γη.*

& Freedman, 2010). Τα φορτία που μπορεί να αναπτύξει η γεννήτρια στην επιφάνεια της μεταλλικής σφαίρας είναι τεράστια, δημιουργώντας σπινθηρισμούς ή και εκκενώσεις φορτίου με το άμεσό της περιβάλλον.

Ας ιδούμε τώρα ένα παράδειγμα ηλεκτρικής φόρτισης ενός σώματος με την μέθοδο της επαφής. Όταν μια αρνητικά φορτισμένη πλαστική ράβδος προσεγγίσει μια ηλεκτρικά ουδέτερη αγώγιμη (μεταλλική) σφαίρα, όπως δείχνει το σχ. 1.2α, και τελικά έλθει σε επαφή με μαζί της, μέρος των αρνητικών φορτίων μεταφέρονται με διάχυση στην σφαίρα φορτίζοντάς την αρνητικά, ελαττώνοντας ταυτοχρόνως το αρνητικό φορτίο της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχ. 1.2β. Η διαδικασία της μεταφοράς φορτίων θα εξακολουθεί έως ότου τα δυο σώματα να έλθουν σε κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, δηλ. να μην παρατηρείται μετακίνηση φορτίων από το ένα σώμα στο άλλο. Εάν τώρα απομακρύνουμε την ράβδο και συνδέσουμε την σφαίρα με την Γη μέσω ενός μεταλλικού σύρματος, (γείωση σφαίρας), τότε θα παρατηρήσουμε ότι η αγώγιμη σφαίρα εκφορτίζεται μιας και όλα τα ηλεκτρικά φορτία (ηλεκτρόνια) θα μεταφερθούν στη Γη (σχ. 1.2γ). Τούτο συμβαίνει διότι το έδαφος λειτουργεί ως μια τεράστια καταβόθρα (δεξαμενή) ηλεκτρονίων. Έτσι εξηγείται το γεγονός ότι όταν κρατάμε στα χέρια μας έναν αγωγό και προσπαθούμε να τον φορτίσουμε, αυτός δεν φορτίζεται. Αυτό συμβαίνει διότι ο αγωγός εκφορτίζεται διαμέσου του σώματός μας, το οποίο είναι επίσης αγωγός και μεταφέρει φορτία προς την Γη.

Εάν επαναλάβουμε το παραπάνω πείραμα φόρτισης με μια μονωτική σφαίρα στην θέση της αγώγιμης, όπως δείχνει σχ. 1.3, θα παρατηρήσουμε ότι η σφαίρα αρχίζει να φορτίζεται με αργό ρυθμό, μιας και τα μονωτικά υλικά δεν επιτρέπουν την εύκολη διέλευση ηλεκτρικών φορτίων μέσα στην ύλη τους. Όταν απομακρύνουμε την ράβδο και γειώσουμε την σφαίρα, αυτή δεν θα εκφορτισθεί, αλλά θα παραμείνει φορτισμένη μιας και ως μονωτής δεν επιτρέπει την διαφυγή των φορτίων προς την Γη. [4]



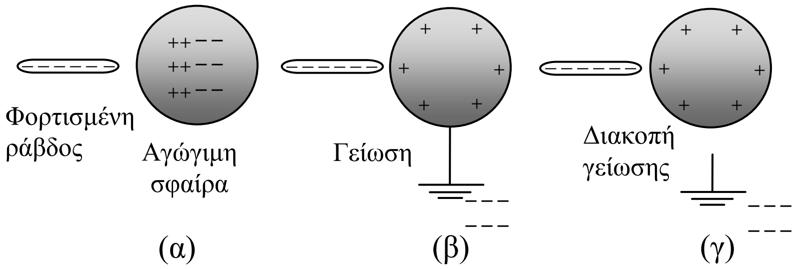
Σχήμα 1.3 *Φόρτιση μονωτικής σφαίρας με επαφή. (α) Η αρνητικά φορτισμένη πλαστική ράβδος προσεγγίζει την ηλεκτρικά ουδέτερη μονωτική σφαίρα. (β) Επαφή της ράβδου με την σφαίρα και μεταφορά αρνητικών φορτίων σ' αυτή. (γ) Με την γείωση της σφαίρας, η σφαίρα παραμένει αρνητικά φορτισμένη μιας και τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να μεταφερθούν στην Γη.*

Εκτός της μεθόδου της επαφής, μπορούμε να φορτίσουμε ένα σώμα και με την **μέθοδο της επαγωγής**, δηλ. χωρίς μηχανική επαφή των δύο σωμάτων (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Έτσι, εάν πλησιάσουμε μια αρνητικά φορτισμένη πλαστική ράβδο κοντά σε μια μεταλλική σφαίρα, η οποία είναι ηλεκτρικά μονωμένη από την Γη (δεν υπάρχει ηλεκτρική επαφή, δηλ. αγώγιμη σύνδεση μεταξύ σφαίρας και Γης), και την κρατήσουμε σε μικρή σταθερή απόσταση από αυτή, θα παρατηρήσουμε ότι η περιοχή της σφαίρας κοντά στην ράβδο θα έχει πλεόνασμα θετικού φορτίου λόγω ηλεκτρικής έλξης, όπως δείχνει το σχ. 1.4α. Αντιθέτως, το αντιδιαμετρικό μέρος της σφαίρας θα έχει πλεόνασμα αρνητικού φορτίου λόγω άπωσης. Δηλαδή, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού συσσωρεύονται στο δεξιό άκρο της μεταλλικής σφαίρας, αφήνοντας το αριστερό άκρο με περίσσεια θετικού φορτίου. Εάν τώρα γειώσουμε την σφαίρα, από το δεξιό άκρο ένα ποσοστό των ηλεκτρονίων θα κινηθούν προς τη Γη, όπως δείχνει το σχ. 1.4β. Διακόπτοντας στη συνέχεια την γείωση, η σφαίρα μένει με πλειονότητα θετικού φορτίου και απομακρύνοντας την πλαστική ράβδο, η κατανομή των θετικών φορτίων της σφαίρας γίνεται ομοιόμορφη (σχ. 1.4γ). Μ' αυτόν τον τρόπο

[4] Στην πραγματικότητα ο μονωτής πιθανώς να εκφορτισθεί τοπικά.

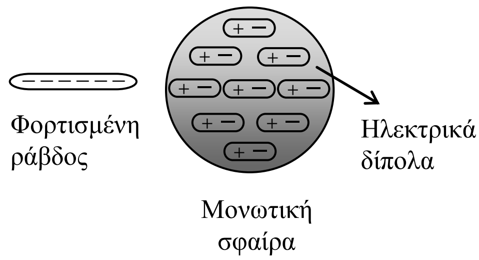
καταλήγουμε σε μια ομοιόμορφα ηλεκτρισμένη σφαίρα δια της επαγωγής, όπως απεικονίζεται συνολικά στο σχ. 1.4.

Όταν η σφαίρα είναι μονωτική, τότε η διαδικασία της επαγωγής δημιουργεί αλλαγές κυρίως στην κατανομή φορτίων του σώματος. Αυτές οι αλλαγές έχουν ως συνέπεια τον προσανατολισμό των φορτίων και την πόλωση των ατόμων ή των μορίων στην ύλη του μονωτή, μετατρέποντάς τα σε ηλεκτρικά δίπολα, όπως δείχνεται στο σχ. 1.5.



Σχήμα 1.4 *Φόρτιση αγώγιμης σφαίρας (μεταλλικής) με επαγωγή. (α) Η αρνητικά φορτισμένη πλαστική ράβδος προσεγγίζει την ηλεκτρικά ουδέτερη μεταλλική σφαίρα και συσσωρεύει θετικά φορτία από την μια πλευρά και αρνητικά από την άλλη. (β) Γείωση της σφαίρας με μεταλλικό σύρμα και μεταφορά των ηλεκτρονίων στη Γη. (γ) Διακοπή της γείωσης και η σφαίρα παραμένει θετικά φορτισμένη.*

Για την πόλωση των υλικών και για τα ηλεκτρικά δίπολα θα μιλήσουμε πιο διεξοδικά αργότερα. Ο μονωτής παρά την δημιουργία ηλεκτρικών διπόλων στο υλικό του παραμένει ηλεκτρικά ουδέτερος, διότι πρώτον, όσα θετικά φορτία έχει τόσα και αρνητικά, και δεύτερον , καμιά μεταφορά φορτίου από αυτόν ή προς αυτόν δεν συνέβηκε. Εντούτοις, εάν γειώσουμε τον μονωτή, μπορεί τοπικά να παρατηρηθεί περιορισμένη κίνηση ηλεκτρονίων προς την Γη, με αποτέλεσμα ο μονωτής να φορτιστεί τοπικά. Γενικά η φόρτιση των μονωτών με την μέθοδο της επαγωγής είναι περιορισμένης εμβέλειας.



Σχήμα 1.5 *Δημιουργία προσανατολισμένων ηλεκτρικών διπόλων σε μονωτική σφαίρα με την μέθοδο της επαγωγής.*

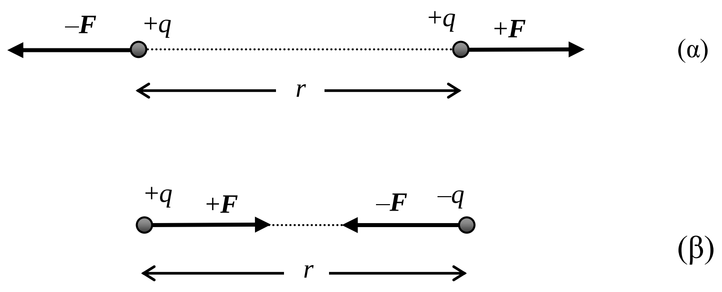
1.3 Ο νόμος του Coulomb

Η πρώτη οργανωμένη προσπάθεια να μελετηθούν ποσοτικά οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων, έγινε το 1785 από τον διάσημο Γάλλο φυσικό Charles Augustin Coulomb (1736-1806). Συγκεκριμένα ο Coulomb χρησιμοποιώντας έναν ζυγό στρέψης, περιέγραψε την δύναμη της άπωσης ή της έλξης που αναπτύσσεται μεταξύ δυο ακίνητων φορτίων τα οποία ονομάζονται **στατικά φορτία**. Έτσι λοιπόν διατύπωσε το νόμο της ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης, γνωστός (σήμερα) ως **νόμος του Coulomb**, ο οποίος αναφέρει ότι η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο ακινήτων σημειακών ηλεκτρικών φορτίων, έχει μέτρο ανάλογο του γινομένου των μέτρων των φορτίων και είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης που χωρίζει τα φορτία (Sears, 1951), (Grant & Phillips, 1975), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Giancoli, 2012). Η δύναμη αυτή ονομάζεται **ηλεκτρική δύναμη Coulomb**, και δίνεται από την σχέση

Charles Augustin Coulomb (1736-1806)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coulomb.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

$$\boldsymbol{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (1.1)$$

όπου K=8.9875×10^9 Nm^2/C^2 είναι η **σταθερά Coulomb** ή απλώς **ηλεκτρική σταθερά**, q_1 και q_2 είναι τα φορτία που αλληλεπιδρούν και r είναι η μεταξύ τους απόσταση. Όταν τα φορτία είναι ομώνυμα, η δύναμη έχει θετικό πρόσημο και τα δυο φορτία απωθούνται, ενώ όταν είναι ετερώνυμα, η δύναμη έχει αρνητικό πρόσημο που σημαίνει ότι τα φορτία έλκονται. Η δύναμη έχει διεύθυνση αυτή της ευθείας που ενώνει τα δύο φορτία. Η κατεύθυνση της δύναμης ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα της απόστασης $\hat{\boldsymbol{r}}$. Επίσης το κάθε φορτίο ασκεί μια αντίθετη δύναμη πάνω στο άλλο σύμφωνα με την αρχή δράσης-αντίδρασης. Το σχ. 1.6 δείχνει την αλληλεπίδραση Coulomb μεταξύ δυο φορτίων. Θα πρέπει σ’ αυτό το σημείο να τονισθεί ιδιαιτέρως ότι ο νόμος του Coulomb ισχύει για σημειακά φορτία, τα οποία βεβαίως δεν υπάρχουν στην πραγματικότητα. Έτσι λοιπόν μπορούμε να ειπούμε ότι ο νόμος του Coulomb ισχύει προσεγγιστικά και μόνο για μικρών διαστάσεων φορτία σε σχέση με την απόσταση r που τα χωρίζει.[5] Επίσης ο νόμος του Coulomb περιγράφει τις δυνάμεις μεταξύ των φορτίων με την εξ. 1.1 μόνο όταν τα φορτία είναι ακίνητα. Όπως θα ιδούμε αργότερα, η κίνηση των φορτίων δημιουργεί επιπλέον δυνάμεις στα γειτονικά τους φορτία και τα φαινόμενα γίνονται πιο περίπλοκα.



Σχήμα 1.6 *Δυνάμεις Coulomb μεταξύ ακινήτων (α) ομώνυμων, και (β) ετερώνυμων φορτίων, που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους. Και στις δυο περιπτώσεις στα φορτία ασκούνται αντίθετες δυνάμεις.*

Οι ηλεκτρικές δυνάμεις Coulomb μεταξύ ακίνητων, δηλαδή στατικών ηλεκτρικών φορτίων, ονομάζονται **ηλεκτροστατικές δυνάμεις**. Συχνά αντί της σταθεράς K χρησιμοποιούμε μια διαφορετική σταθερά γνωστή ως **διηλεκτρική σταθερά του κενού**, ε_o=8.8542×10^{-12} C^2/Nm^2. Η σχέση μεταξύ των δυο σταθερών είναι

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \qquad (1.2)$$

Όταν στον χώρο μεταξύ των φορτίων υπάρχει ύλη και όχι κενό, τότε η διηλεκτρική σταθερά του μέσου αλλάζει και επομένως αλλάζει και η δύναμη Coulomb μιας και επάγονται φορτία στην ύλη του μέσου. Γι' αυτόν τον λόγο σε κάθε περίπτωση είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την διηλεκτρική σταθερά του υλικού, διαμέσου του οποίου αλληλεπιδρούν τα ηλεκτρικά φορτία.

Για την δύναμη Coulomb ισχύει η **αρχή της υπέρθεσης** ή **της επαλληλίας**, δηλαδή η συνολική δύναμη $\boldsymbol{F}$ που ασκείται πάνω σ' ένα φορτίο από τα γειτονικά του φορτία, είναι το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους δυνάμεων $\boldsymbol{F}_\mathbf{i}$ που ασκούν πάνω σ' αυτό το κάθε φορτίο ξεχωριστά (Benumof, 1961), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012). Δηλαδή ισχύει

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_\mathbf{1} + \boldsymbol{F}_\mathbf{2} + ... + \boldsymbol{F}_\mathbf{n} \qquad (1.3)$$

Παράδειγμα 1.2 Ηλεκτροστατική δύναμη ζεύγους φορτίων

Κάθε μια από δυο πολύ μικρές σφαίρες φορτίζεται θετικά και το συνολικό τους φορτίο είναι 5×10^{-5} C. Αν κάθε σφαίρα απωθείται από την άλλη με δύναμη 1 N όταν η μεταξύ τους απόσταση είναι 2 m, ποιο είναι το φορτίο της κάθε σφαίρας; Δίδεται η σταθερά του Coulomb, K=9×10^{9}Nm^2/C^2.

Λύση

Το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο είναι

$$q_1 + q_2 = 5\times10^{-5}\,\mathrm{C} \qquad (1)$$

και η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ τους

$$F = K\frac{q_1q_2}{r^2} \Rightarrow q_1q_2 = \frac{Fr^2}{K} \Rightarrow q_1q_2 = \frac{1\mathrm{N}.(2\mathrm{m})^2}{9\times10^9\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2} \Rightarrow q_1q_2 = 0.44\times10^{-9}\,\mathrm{C}^2 \qquad (2)$$

Από τις εξισώσεις 1 και 2 μπορούμε να υπολογίσουμε τα φορτία q_1 και q_2. Η εξ. 1 δίνει

$$q_1 = 5\times10^{-5}\,\mathrm{C} - q_2 \qquad (3)$$

Η εξ. 3 στην 2 δίνει

$$\begin{aligned}&(5\times10^{-5}\,\mathrm{C} - q_2)q_2 = 0.44\times10^{-9}\,\mathrm{C}^2 \Rightarrow 5\times10^{-5}q_2 - q_2^2 = 0.44\times10^{-9} \Rightarrow\\ &-q_2^2 + 5\times10^{-5}q_2 - 0.44\times10^{-9} = 0 \Rightarrow q_2^2 - 5\times10^{-5}q_2 + 0.44\times10^{-9} = 0\end{aligned} \qquad (4)$$

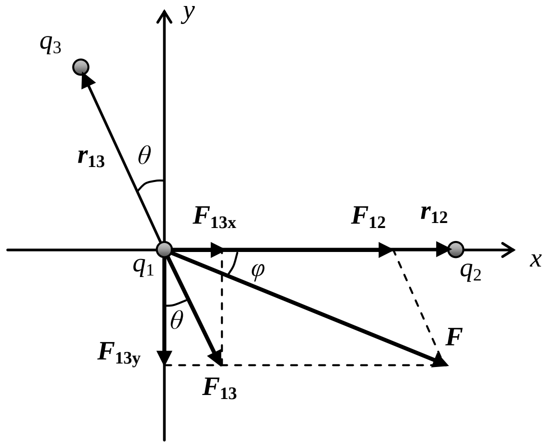
[5] Κατά εξαίρεση ο νόμος του Coulomb ισχύει και για ομοιόμορφα φορτισμένες σφαίρες.

Λύνοντας την εξ. 4 παίρνουμε $q_2 = 3.86\times10^{-5}\,\mathrm{C}$ ή $q_2 = 1.15\times10^{-5}\,\mathrm{C}$. Τελικά για $q_2 = 3.86\times10^{-5}\,\mathrm{C}$ από την εξ. 3 παίρνουμε

$$q_1 = 5\times10^{-5}\,\mathrm{C} - 3.86\times10^{-5}\,\mathrm{C} \Rightarrow q_1 = 1.15\times10^{-5}\,\mathrm{C}$$

Παράδειγμα 1.3 Ηλεκτροστατική δύναμη τριών φορτίων

Έστω τρία σημειακά φορτία στο επίπεδο *xy*, q_1=2×10^{-6} C, q_2= -5×10^{-6} C και q_3=3×10^{-6} C. Η διάταξη των φορτίων φαίνεται στο σχ. 1.7. Ποια είναι η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στο q_1, αν η γωνία θ=30^o και οι αποστάσεις μεταξύ των φορτίων είναι r_{12}=10 cm και r_{13}=15 cm;



Σχήμα 1.7 *Η συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη* ***F*** *που ασκούν δυο σημειακά φορτία q_2 και q_3 σε ένα τρίτο q_1.*

Λύση

Η συνολική ηλεκτρική δύναμη στο σημειακό φορτίο q_1 είναι το διανυσματικό άθροισμα των επιμέρους ηλεκτρικών δυνάμεων $\boldsymbol{F_{12}}$ και $\boldsymbol{F_{13}}$ που ασκούν πάνω στο q_1 τα φορτία q_2 και q_3 αντίστοιχα. Λόγω της αρχής της επαλληλίας, ισχύει

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{12}} + \boldsymbol{F_{13}}$$

όπου τα μέτρα των δυνάμεων είναι

$$F_{12} = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\ 2}} = 9\times10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\times\frac{2\times(-5)\times10^{-12}\,\mathrm{C^2}}{(10\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow F_{12} = -9\mathrm{N}$$

και

$$F_{13} = K\frac{q_1 q_3}{r_{13}^{\ 2}} = 9\times10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\times\frac{2\times3\times10^{-12}\,\mathrm{C^2}}{(15\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow F_{13} = 2.4\mathrm{N}$$

Το αρνητικό πρόσημο της F_{12} δηλώνει ότι η δύναμη είναι ελκτική, ενώ το θετικό της F_{13} δηλώνει ότι είναι απωστική. Οι διευθύνσεις των δυνάμεων $\boldsymbol{F_{12}}$ και $\boldsymbol{F_{13}}$ φαίνονται στο σχ. 1.7. Το διανυσματικό τους άθροισμα $\boldsymbol{F}$ έχει συνιστώσες

$$F_x = F_{12_x} + F_{13_x} = F_{12} + F_{13}\sin\theta = 9\mathrm{N} + 2.4\mathrm{N}\sin30^o = 9\mathrm{N} + (2.4\mathrm{N}\times0.5) \Rightarrow F_x = 10.2\mathrm{N}$$

και

$$F_y = F_{12_y} + F_{13_y} = 0 + F_{13}\cos\theta = 2.4\mathrm{N}\cos30^o = 2.4\mathrm{N}\times0.866 \Rightarrow F_y = 2.08\mathrm{N}$$

οπότε το μέτρο της συνισταμένης δυνάμεως $\boldsymbol{F}$ είναι

$$F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = \sqrt{(10.2\mathrm{N})^2 + (2.08\mathrm{N})^2} = 10.4\mathrm{N}$$

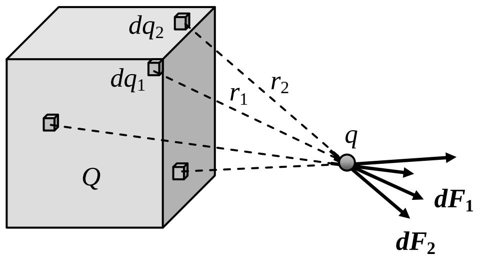
Η διεύθυνση της δύναμης $\boldsymbol{F}$ στο επίπεδο *xy* δίνεται από την γωνία φ, όπου

$$\tan\varphi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{2.08}{10.2} = 0.20 \Rightarrow \varphi = 11.5^o .$$

Η κατεύθυνση της συνολικής δύναμης είναι 11.5^o νοτιοανατολικά (βλ. σχ. 1.7).

1.4 Ηλεκτρικές δυνάμεις μεταξύ μη σημειακών φορτίων

Είδαμε παραπάνω την αλληλεπίδραση σημειακών ηλεκτρικών φορτίων με την εφαρμογή του νόμου του Coulomb. Τι συμβαίνει όμως όταν κάποιο από τα φορτία ή και τα δύο δεν είναι σημειακά; Σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορεί να εφαρμοσθεί άμεσα ο νόμος του Coulomb, διότι μολονότι ισχύει, δεν υπάρχει ορισμένη και σταθερή απόσταση μεταξύ των φορτίων. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε προς χάριν απλότητας, ένα μόνο φορτίο από ένα ζεύγος να είναι μη σημειακό, όπως φαίνεται στο σχ. 1.8, τότε η δύναμη Coulomb, που ασκεί το μη σημειακό φορτίο Q στο σημειακό q, δεν μπορεί να ορισθεί, διότι αδυνατούμε να ορίσουμε την απόσταση μεταξύ των δύο φορτίων. Εντούτοις, εάν χωρίσουμε νοητά το φορτίο Q σε απειράριθμα στοιχειώδη ηλεκτρικά φορτία dq_{i} , τότε για κάθε στοιχειώδες φορτίο μπορεί να ορισθεί η αντίστοιχη απόστασή του από το φορτίο q. Βάσει αυτής της αποστάσεως, ορίζεται η δύναμη Coulomb μεταξύ κάθε στοιχειώδους φορτίου και του φορτίου q, να είναι ίση με



Σχήμα 1.8 *Οι στοιχειώδεις δυνάμεις* $\boldsymbol{dF_i}$ *που ασκούν τα στοιχειώδη φορτία* dq_i*, τα οποία απαρτίζουν ένα τρισδιάστατο φορτίο Q, επάνω σε ένα σημειακό φορτίο q.*

$$\boldsymbol{dF}_{\mathbf{i}} = K\frac{qdq_{\mathrm{i}}}{r_{\mathrm{i}}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{i}} \tag{1.4}$$

Για να υπολογίσουμε τη συνολική ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το τρισδιάστατο φορτίο στο σημειακό φορτίο q, βάσει της αρχής της επαλληλίας θα πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα όλων των στοιχειωδών δυνάμεων $\boldsymbol{dF}_{\mathbf{i}}$ και να γράψουμε

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{dF}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{dF}_{\mathbf{2}} + ...\boldsymbol{dF}_{\mathbf{N}} \tag{1.5}$$

όπου $\mathrm{N}\to\infty$. Ένα άθροισμα με απειράριθμους μικρούς προσθετέους μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά με ένα ολοκλήρωμα. Έτσι η εξ. 1.5 μπορεί να γραφθεί

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{dF}_{\mathbf{i}} \tag{1.6}$$

Λόγω της 1.4 η 1.6 γίνεται για κάθε συνιστώσα της $\boldsymbol{F}$ στο χώρο

$$\boldsymbol{F_x} = \int K\frac{qdq_{\mathrm{i}}}{x_{\mathrm{i}}^2}\hat{\boldsymbol{i}} \Rightarrow F_x = Kq\int\frac{dq_{\mathrm{i}}}{x_{\mathrm{i}}^2} \tag{1.7α}$$

και ομοίως

$$\boldsymbol{F_y} = \int K\frac{qdq_{\mathrm{i}}}{y_{\mathrm{i}}^2}\hat{\boldsymbol{j}} \Rightarrow F_y = Kq\int\frac{dq_{\mathrm{i}}}{y_{\mathrm{i}}^2} \tag{1.7β}$$

και

$$\boldsymbol{F_z} = \int K\frac{qdq_{\mathrm{i}}}{z_{\mathrm{i}}^2}\hat{\boldsymbol{k}} \Rightarrow F_z = Kq\int\frac{dq_{\mathrm{i}}}{z_{\mathrm{i}}^2}. \tag{1.7γ}$$

Τελικά, η συνολική ηλεκτροστατική δύναμη δίνεται από το διανυσματικό άθροισμα των τριών συνιστωσών της, όπου το μέτρο της είναι

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{1.8}$$

Οι ολοκληρώσεις των εξ. 1.7 γίνονται σ' όλον τον όγκο του τρισδιάστατου φορτίου Q, το οποίο στην πραγματικότητα είναι το άθροισμα όλων των στοιχειωδών φορτίων dq_{i}. Γενικά, τα ολοκληρώματα των εξ. 1.7 δεν είναι εύκολο να επιλυθούν. Στις περιπτώσεις όμως που το τρισδιάστατο φορτίο παρουσιάζει μια συμμετρία ως προς την θέση του σημειακού, και η κατανομή του φορτίου στην ύλη του είναι ομοιόμορφη, η επίλυσή τους διευκολύνεται αρκετά. Θα ιδούμε στην συνέχεια κάποιες τέτοιες περιπτώσεις. Στην ακόμη πιο γενική περίπτωση όπου και τα δυο φορτία είναι μη σημειακά, ο υπολογισμός της ηλεκτρικής δύναμης μεταξύ τους δυσκολεύει περισσότερο. Στο παρόν σύγγραμμα δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την περίπτωση αλληλεπίδρασης, μιας και δεν εμπίπτει στους εκπαιδευτικούς του στόχους.

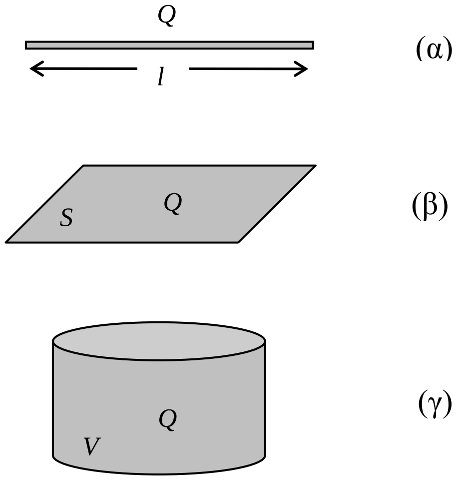
1.5 Πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο εδάφιο, για να υπολογίσουμε την δύναμη μεταξύ ενός σημειακού και ενός μη σημειακού φορτίου, είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε πώς κατανέμεται το ηλεκτρικό φορτίο στο τελευταίο. Γενικά η φυσική ποσότητα που εκφράζει την κατανομή του φορτίου σ' ένα σώμα είναι η **πυκνότητα φορτίου**. Όταν το σώμα είναι ομοιόμορφα φορτισμένο, τότε η πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή ποσότητα και τα ολοκληρώματα των εξισώσεων 1.7 υπολογίζονται σχετικά εύκολα. Υπάρχουν τρία είδη πυκνοτήτων φορτίου, αναλόγως τις διαστάσεις του φορτισμένου σώματος (Serway & Jewett, 2013), (Young & Freedman, 2010), (Knight, 2010) (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Για παράδειγμα, εάν το ηλεκτρικό φορτίο μεγέθους Q εκτείνεται ομοιόμορφα σε μια διάσταση, κατανέμεται δηλαδή κατά μήκος μιας γραμμής μήκους l, ορίζεται η **γραμμική πυκνότητα φορτίου** λ ίση με

$$\lambda = \frac{Q}{l} \tag{1.9}$$

Εάν το φορτίο Q εκτείνεται ομοιόμορφα στις δυο διαστάσεις, δηλαδή καταλαμβάνει μια επιφάνεια εμβαδού S, τότε ορίζεται η **επιφανειακή πυκνότητα φορτίου** σ, ίση με

$$\sigma = \frac{Q}{S} \tag{1.10}$$



Σχήμα 1.9 *Κατανομή φορτίου σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, (α) σε μία διάσταση, (β) σε δύο διαστάσεις, και (γ) σε τρεις διαστάσεις.*

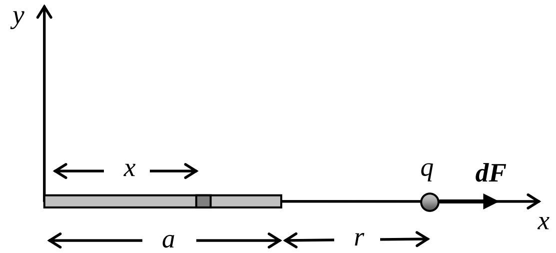
Τέλος, εάν το φορτίο Q εκτείνεται ομοιόμορφα στις τρεις διαστάσεις, καταλαμβάνει δηλαδή έναν όγκο V αυτόν του φορτισμένου τρισδιάστατου σώματος, ορίζεται η **πυκνότητα φορτίου** ρ, ίση με

$$\rho = \frac{Q}{V} \tag{1.11}$$

Στο σχ. 1.9 φαίνονται οι τρεις παραπάνω περιπτώσεις κατανομής φορτίου. Για μια λεπτή και μακριά ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο μήκους l και φορτίου Q (σχ. 1.9 α), η πυκνότητα φορτίου είναι γραμμική (μία διάσταση, C/m). Για μια ομοιόμορφα φορτισμένη επιφάνεια εμβαδού S και φορτίου Q (σχ. 1.9 β), η πυκνότητα φορτίου είναι επιφανειακή (δύο διαστάσεις, C/m^2). Για ένα στερεό σώμα όγκου V και ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου Q (σχ. 1.9 γ), η πυκνότητα φορτίου είναι πυκνότητα όγκου (τρεις διαστάσεις, C/m^3). Στη συνέχεια θα ιδούμε κάποια παραδείγματα για τον υπολογισμό ηλεκτρικών δυνάμεων μεταξύ σημειακών και μη σημειακών φορτίων, με την χρήση της πυκνότητας φορτίου.

Παράδειγμα 1.4 Ηλεκτροστατική δύναμη φορτισμένης ράβδου σε σημειακό φορτίο

Θετικό ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα σε λεπτή ευθύγραμμη ράβδο, η οποία κείται κατά μήκος του θετικού άξονα x από το σημείο x=0 ως το x=a. Ένα θετικό σημειακό φορτίο q ευρίσκεται στην θέση x=a+r του άξονα x, δηλαδή σε απόσταση r από το δεξί άκρο της ράβδου, όπως δείχνει το σχ. 1.10. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί πάνω



Σχήμα 1.10 *Ηλεκτρική δύναμη ομοιόμορφης ηλεκτρικά φορτισμένης ράβδου επάνω σε σημειακό ηλεκτρικό φορτίο.*

στο q η κατανομή του φορτίου Q.

Λύση

Επειδή η ράβδος δεν είναι σημειακό φορτίο, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν το νόμο του Coulomb. Αν όμως θεωρήσουμε στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο της ράβδου dQ, το οποίο ευρίσκεται σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων, τότε το στοιχειώδες αυτό φορτίο ασκεί μια στοιχειώδη απωστική δύναμη στο φορτίο Q, ίση με

$$\boldsymbol{dF} = K\frac{qdQ}{(r+a-x)^2}\hat{\boldsymbol{i}} \qquad (1)$$

Η δύναμη $\boldsymbol{dF}$ κείται στον άξονα x, διότι η απόσταση που χωρίζει τα δύο σημειακά φορτία dq και q, είναι πάνω στον άξονα x και είναι ίση με $r+a-x$. Για να υπολογίσουμε την συνολική δύναμη της ράβδου επάνω στο φορτίο q, θα πρέπει να προσθέσουμε όλες τις στοιχειώδεις δυνάμεις που ασκούν όλα τα στοιχειώδη φορτία που απαρτίζουν την ράβδο. Ένα τέτοιο άθροισμα έχει άπειρους προσθετέους, μιας και άπειρος είναι ο αριθμός των dq, και εκφράζεται με ένα ολοκλήρωμα του τύπου

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{dF} \Rightarrow F = \int_0^Q K\frac{qdQ}{(r+a-x)^2} \qquad (2)$$

Η ράβδος είναι φορτισμένη με φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο σε όλο το μήκος της α. Επομένως η αναλογία φορτίου προς μήκος εκφράζεται με την γραμμική πυκνότητα φορτίου Q/α. Το φορτίο dQ έχει μήκος dx, και αναλογικά μπορούμε να γράψουμε την σχέση

$$dQ = \frac{Q}{a}dx \qquad (3)$$

Η εξ. 3 στην 2 δίνει

$$F = \int_0^a K\frac{qQdx}{a(r+a-x)^2} = \frac{KqQ}{a}\int_0^a \frac{dx}{(r+a-x)^2} \qquad (4)$$

Εάν τώρα πραγματοποιήσουμε αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης x, θέτοντας $\omega=r+a-x$, και από την οποία προκύπτει $d\omega=-dx$, τότε με τις κατάλληλες αλλαγές των ορίων της ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$F = -\frac{KqQ}{a}\int_{r+a}^{r}\frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{KqQ}{a}\left(-\frac{1}{\omega}\right)\Bigg|_{r+a}^{r} = \frac{KqQ}{a}\left(\frac{1}{\omega}\right)\Bigg|_{r+a}^{r} = \frac{KqQ}{a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+a}\right) = \frac{KqQ}{a}\left(\frac{r+a-r}{r(r+a)}\right) \Rightarrow$$

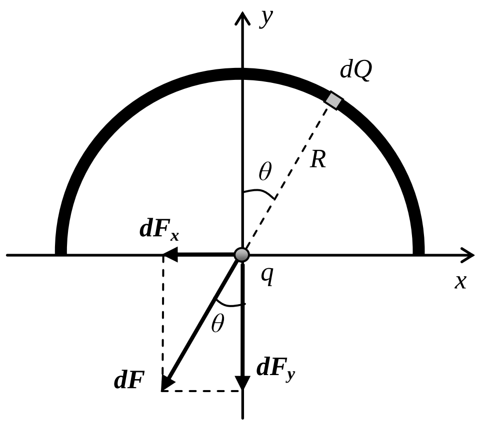
$$F = \frac{KqQ}{r(r+a)} \qquad (5)$$

Η εξ. 5 μας δίνει το μέτρο της συνολικής δύναμης που ασκεί η ράβδος στο σημειακό φορτίο q. Επειδή η δύναμη έχει κατεύθυνση αυτήν του θετικού ημιάξονα των x, τελικά γράφουμε

$$\boldsymbol{F} = \frac{KqQ}{r(r+a)}\hat{\boldsymbol{i}}\,.$$

Παράδειγμα 1.5 Ηλεκτροστατική δύναμη φορτισμένου ημικυκλίου σε σημειακό φορτίο

Μία ομοιόμορφα φορτισμένη λεπτή ράβδος με θετικό φορτίο ανά μονάδα μήκους, λ, κάμπτεται σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας R, όπως φαίνεται στο σχ. 1.11. Στο κέντρο καμπυλότητας τοποθετείται σημειακό θετικό φορτίο q. Υπολογίστε την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το ημικύκλιο στο φορτίο q. *Υπόδειξη*: Υπολογίστε αρχικά τις συνολικές δυνάμεις στους x και y άξονες.



Σχήμα 1.11 *Ηλεκτρική δύναμη* **dF** *από στοιχειώδες φορτίο dQ, ομοιόμορφου φορτισμένου ημικυκλίου, επάνω σε σημειακό ηλεκτρικό φορτίο q, το οποίο ευρίσκεται στο κέντρο της καμπυλότητάς του ημικυκλίου.*

Λύση

Το ομοιόμορφα φορτισμένο ημικύκλιο έχει διαστάσεις στο επίπεδο *xy*, με συνολικό μήκος πR, και είναι φορτισμένο με λ φορτίο ανά μονάδα μήκους. Δηλαδή εάν το ημικύκλιο έχει συνολικό φορτίο Q, ισχύει ότι

$$Q = \lambda\pi R \tag{1}$$

Για να εύρουμε την δύναμη που ασκεί το ημικύκλιο στο φορτίο q, πρέπει να χωρίσουμε το μήκος του σε στοιχειώδη φορτία dQ, και αφού υπολογίσουμε από το νόμο του Coulomb την δύναμη $\boldsymbol{dF}$ που ασκεί το κάθε στοιχειώδες φορτίο στο φορτίο q, να αθροίσουμε όλες τις στοιχειώδεις δυνάμεις ολοκληρώνοντας την $\boldsymbol{dF}$ σε όλο το μήκος του ημικυκλίου. Έτσι το στοιχειώδες φορτίο dQ που ευρίσκεται σε γωνία θ από την κατακόρυφο (βλ.σχ. 1.11), ασκεί στο q δύναμη

$$\boldsymbol{dF} = K\frac{qdQ}{R^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2}$$

Η δύναμη $\boldsymbol{dF}$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες $\boldsymbol{dF_x}$ και $\boldsymbol{dF_y}$ όπου

$$\boldsymbol{dF}_x = \boldsymbol{dF}\sin\theta \Rightarrow \boldsymbol{dF}_x = K\frac{qdQ}{R^2}\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{i}} \tag{3α}$$

και

$$\boldsymbol{dF}_y = \boldsymbol{dF}\cos\theta \Rightarrow \boldsymbol{dF}_y = K\frac{qdQ}{R^2}\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{j}} \tag{3β}$$

Εάν ολοκληρώσουμε κάθε μία από τις εξισώσεις 3α και 3β, θα εύρουμε τις συνολικές συνιστώσες $\boldsymbol{F_x}$ και $\boldsymbol{F_y}$, και ακολούθως την τελική δύναμη του ημικυκλίου επάνω στο φορτίο q. Για να επιτευχθεί αυτό, πρέπει να έχουμε μία μεταβλητή ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε ότι αναλόγως την θέση του dQ στο ημικύκλιο, η γωνία θ αλλάζει. Επομένως είναι λογικό να εύρουμε μια σχέση μεταξύ του dQ και της γωνίας θ. Το φορτίο dQ έχει μήκος dl (μήκος στοιχειώδους τόξου πάνω στο ημικύκλιο) και αντιστοιχεί σε γωνία $d\theta$. Από την γεωμετρία γνωρίζουμε ότι για πολύ μικρές γωνίες ισχύει

$$dl = Rd\theta \tag{4}$$

Επειδή το ημικύκλιο είναι ομοιόμορφα φορτισμένο, το μήκος dl περιέχει φορτίο

$$dQ = \lambda dl \tag{5}$$

όπου λ είναι η γραμμική πυκνότητα φορτίου. Η εξ. 5 λόγω της εξ. 4 δίνει

$$dQ = \lambda Rd\theta \tag{6}$$

Η εξ. 6 στην 3α δίνει

$$\boldsymbol{dF}_x = K\frac{q\lambda R\sin\theta d\theta}{R^2}\hat{\boldsymbol{i}} \Rightarrow \boldsymbol{dF}_x = K\frac{q\lambda\sin\theta d\theta}{R}\hat{\boldsymbol{i}} \tag{7}$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. 7 ως προς την γωνία θ και κατά μήκος ολοκλήρου του ημικυκλίου από $-\pi/2$ έως $\pi/2$ παίρνουμε

$$F_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K\frac{q\lambda d\theta}{R}\sin\theta = K\frac{q\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta d\theta = K\frac{q\lambda}{R}(\text{-}\cos\theta)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = K\frac{q\lambda}{R}[\text{-}\cos\frac{\pi}{2} + \cos(\text{-}\frac{\pi}{2})] =$$

$$= K\frac{q\lambda}{R}[0+0] \Rightarrow F_x = 0$$

Επομένως η συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη στον άξονα x είναι μηδενική. Επίσης στον άξονα y για την $\boldsymbol{dF_y}$ έχουμε από την εξ,. 3β και 6

$$\boldsymbol{dF}_y = K\frac{q\lambda R\cos\theta d\theta}{R^2}\hat{\boldsymbol{j}} \Rightarrow \boldsymbol{dF}_y = K\frac{q\lambda\cos\theta d\theta}{R}\hat{\boldsymbol{j}} \tag{8}$$

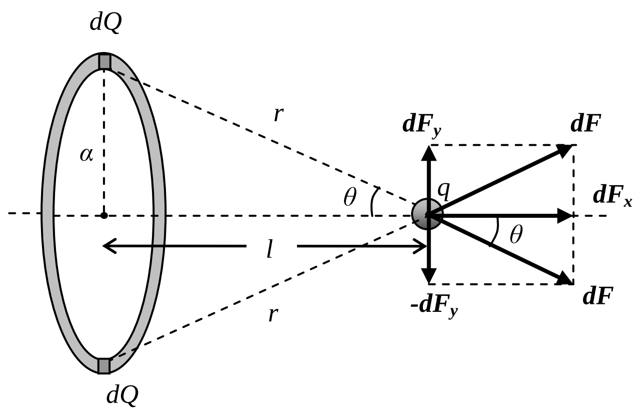
Ολοκληρώνοντας τοιουτοτρόπως την εξ. 8 ως προς θ, από $-\pi/2$ έως $\pi/2$ παίρνουμε

$$F_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K\frac{q\lambda d\theta}{R}\cos\theta = K\frac{q\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = K\frac{q\lambda}{R}\sin\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = K\frac{q\lambda}{R}[\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{2})] =$$
$$= K\frac{q\lambda}{R}[1-(-1)] \Rightarrow F_y = 2K\frac{q\lambda}{R}$$

Άρα ηλεκτρική δύναμη υπάρχει μόνο στον άξονα $-y$ και είναι ίση με $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_y} = 2K\frac{q\lambda}{R}(-\hat{\boldsymbol{j}})$. Η δύναμη αυτή τείνει να απομακρύνει το σημειακό φορτίο q από το ημικύκλιο, οπότε είναι απωστική.

Παράδειγμα 1.6 Ηλεκτροστατική δύναμη φορτισμένου δακτυλίου σε σημειακό φορτίο

Ένας αγωγός σε σχήμα δακτυλίου ακτίνας a=0.250 m είναι φορτισμένος ομοιογενώς με συνολικό θετικό φορτίο Q=8.40 μC, όπως δείχνει το σχ. 1.12. Ένα σημειακό θετικό φορτίο q=2.50 μC τοποθετείται πάνω στην κάθετη στο επίπεδο του δακτυλίου που περνά από το κέντρο του και σε απόσταση l=0.500 m από αυτό. Πόσο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται από τον δακτύλιο στο φορτίο q;



Σχήμα 1.12 *Ηλεκτρική δύναμη φορτισμένου δακτυλίου επάνω σε σημειακό θετικό φορτίο q, το οποίο ευρίσκεται στην κάθετη στο επίπεδο του δακτυλίου που περνά από το κέντρο του και απέχει απόσταση l από αυτό.*

Λύση

Επειδή ο δακτύλιος είναι ένα στερεό σώμα με διαστάσεις δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον νόμο του Coulomb γιατί ισχύει μόνο για σημειακά φορτία. Χωρίζοντας όμως τον δακτύλιο σε στοιχειώδη φορτία dQ (σχ. 1.12), τα οποία θεωρούνται σημειακά, μπορούμε να γράψουμε για την στοιχειώδη ηλεκτρική δύναμη $\boldsymbol{dF}$ την οποία ασκεί κάθε στοιχειώδες φορτίο dQ επάνω στο q

$$\boldsymbol{dF} = K\frac{qdQ}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (1)$$

Ισχύει όμως ότι

$$r^2 = l^2 + a^2 \Rightarrow r = \sqrt{l^2 + a^2} \qquad (2)$$

Αντικατάσταση της εξ. 2 στην 1 δίνει για το μέτρο της $\boldsymbol{dF}$

$$dF = K\frac{qdQ}{l^2 + a^2} \qquad (3)$$

που έχει την κατεύθυνση του $\boldsymbol{r}$ διανύσματος μιας και η δύναμη είναι απωστική. Θεωρώντας το φορτίο dQ αρχικά πάνω στον άξονα y (όπως φαίνεται στο σχ. 1.11), το διάνυσμα $\boldsymbol{dF}$ αναλύεται σε δυο κάθετες συνιστώσες $\boldsymbol{dF_x}$ και $\boldsymbol{dF_y}$. Για το dQ όμως, (όπως και για κάθε dQ), υπάρχει ένα αντιδιαμετρικό dQ, το οποίο δημιουργεί ένα αντίστοιχο $\boldsymbol{dF}$ με τέτοιο προσανατολισμό που να αναλύεται σε κάθετες συνιστώσες $\boldsymbol{dF_x}$, $\boldsymbol{dF_y}$ και $\boldsymbol{dF_z}$. Για κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών dQ, η συνολική δύναμη $\boldsymbol{dF}$ πάνω στο σημειακό φορτίο q, έχει μηδενικές $\boldsymbol{dF_y}$ και $\boldsymbol{dF_z}$, και έτσι η $\boldsymbol{dF}$ έχει πάντα την κατεύθυνση αυτή της $\boldsymbol{dF_x}$, και μέγεθος, $2\boldsymbol{dF_x}$ όπου

$$\boldsymbol{dF_x} = \boldsymbol{dF}\cos\theta \qquad (4)$$

και

$$\cos\theta = \frac{l}{r} \qquad (5)$$

Η συνολική δύναμη επάνω στο q είναι το άθροισμα όλων των $\boldsymbol{dF_x}$ από όλα τα dQ του δακτυλίου. Έτσι ισχύει για το μέτρο της $\boldsymbol{F}$

$$F = \int 2dF_x \Rightarrow F = \int 2dF\cos\theta \qquad (6)$$

Τώρα για να υπολογίσουμε τη συνολική δύναμη F, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την εξ. 6 για όλα τα αντιδιαμετρικά ζεύγη του δακτυλίου, άρα τα όρια του ολοκληρώματος ως προς dQ πρέπει να είναι από 0 έως Q/2. Η εξ. 6 μέσω των 2, 3 και 5 γράφεται

$$F = \int_0^{Q/2} K\frac{2qldQ}{\sqrt{l^2+a^2}\,(l^2+a^2)} = \frac{2Kql}{(l^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{Q/2} dQ \Rightarrow F = \frac{KqlQ}{(l^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές στην εξ. 7 παίρνουμε

$$F = \frac{9\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}\times2.50\times10^{-6}\,\mathrm{C}\times0.500\mathrm{m}\times8.40\times10^{-6}\,\mathrm{C}}{[(0.500\mathrm{m})^2+(0.250\mathrm{m})^2]^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow F = 0.541\mathrm{N}$$

Η κατεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης $\boldsymbol{F}$ είναι αυτή του θετικού ημιάξονα των x, δηλαδή $\boldsymbol{F} = 0.541\hat{\boldsymbol{i}}$. Το θετικό πρόσημο της δύναμης δηλώνει άπωση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε1.1 Ένα μεταλλικό νόμισμα αποκτά θετικό ηλεκτρικό φορτίο. Τι συμβαίνει με την μάζα του; α) Αυξάνεται ανεπαίσθητα, β) μειώνεται ανεπαίσθητα, γ) παραμένει η ίδια. Εάν το νόμισμα αποκτήσει αρνητικό φορτίο, ποιο από τα παραπάνω θα συμβεί για την μάζα του; Σε κάθε περίπτωση δικαιολογείστε σύντομα την απάντησή σας.

Ε1.2* Ένας άνθρωπος ηλεκτρικά ουδέτερος, στέκεται όρθιος φορώντας πλαστικά μονωτικά παπούτσια. Ξαφνικά ακουμπά μια φορτισμένη αρνητικά αγώγιμη σφαίρα η οποία είναι ηλεκτρικά μονωμένη από το περιβάλλον. Θα συμβεί μεταφορά ηλεκτρικού φορτίου μεταξύ ανθρώπου-σφαίρας; Θα εκφορτιστεί ή όχι η σφαίρα;

Ε1.3 Μια γυάλινη ράβδος θετικά φορτισμένη έλκει ένα μικρό σώμα το οποίο κρέμεται κατακόρυφα από λεπτό νήμα. Τι συμπεραίνουμε για το σώμα; Είναι οπωσδήποτε φορτισμένο ή μπορεί και όχι;

Ε1.4 Δυο μικρές μεταλλικές σφαίρες αναρτώνται σε λεπτά μονωτικά νήματα και ισορροπούν κατακόρυφα. Όταν πλησιάσουμε τη μία κοντά στην άλλη παρατηρούμε ότι οι δυο σφαίρες έλκονται μέχρι που ακουμπούν μεταξύ τους. Τι θα συμβεί στην συνέχεια; Θα απομακρυνθούν η μία από την άλλη ή θα μείνουν κολλημένες;

Ε1.5* Ο πυρήνας του ατόμου του λιθίου έχει τρία πρωτόνια και τέσσερα ουδετερόνια με συνολικό φορτίο 3e. Επίσης η μάζα του πυρήνα είναι περίπου 11000 φορές μεγαλύτερη από αυτή του ηλεκτρονίου. Κάθε ηλεκτρόνιο από τα τρία που γυρίζουν γύρω από τον πυρήνα αλληλεπιδρά με τον πυρήνα μέσω ηλεκτρικών δυνάμεων Coulomb. Ο πυρήνας ασκεί μεγαλύτερη ηλεκτρική δύναμη στο ηλεκτρόνιο ή το ηλεκτρόνιο στον πυρήνα;

Ε1.6 Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια στους αγωγούς δεν ανήκουν σε άτομα, και επομένως οι πυρήνες των ατόμων δεν ασκούν ελκτικές δυνάμεις πάνω τους. Εφόσον η Γη έλκει με βαρυτικές δυνάμεις τα ηλεκτρόνια, γιατί αυτά δεν συγκεντρώνονται στο κάτω μέρος των αγώγιμων σωμάτων;

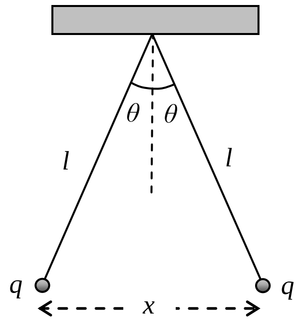
Ε1.7* Πόσο διαφορετική θα ήταν η ζωή μας, αν το φορτίο του ηλεκτρονίου ήταν θετικό και του πρωτονίου αρνητικό; Εάν όλα τα ατομικά σωμάτια ήταν μόνο θετικά ή μόνο αρνητικά, θα άλλαζε κάτι;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π1.1 Ηλεκτρική φόρτιση. Μια γυάλινη ράβδος με φορτίο +12.0 nC, (1 nC=10^{-9} C), ακουμπά σε μια αφόρτιστη μεταλλική σφαίρα. Μετά από αυτό το φορτίο της ράβδου γίνεται +8.00 nC. Τι είδους φορτισμένα σωματίδια μεταφέρθηκαν ανάμεσα στη ράβδο και τη σφαίρα, και με ποια κατεύθυνση; Μεταφέρθηκαν δηλαδή από την ράβδο στη σφαίρα ή από την σφαίρα στη ράβδο; Πόσα φορτισμένα σωματίδια μεταφέρθηκαν συνολικά; Δίνεται: e=-1.60×10^{-19}C. *Απάντηση*: 2.5×10^{10}.

Π1.2 Ηλεκτρική φόρτιση σφαιρών. Δυο ίδιες μεταλλικές σφαίρες Α και Β συνδέονται μεταξύ τους με πλαστική ράβδο. Όλα τα σώματα είναι ηλεκτρικά ουδέτερα. Ξαφνικά στην σφαίρα Α προστίθενται 10^{13} ηλεκτρόνια και μετά η συνδετική ράβδος απομακρύνεται. Πόσο είναι το ηλεκτρικό φορτίο κάθε σφαίρας; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση εάν στη θέση της ράβδου τοποθετηθεί μεταλλικό σύρμα. Δίνεται e=-1.60×10^{-19} C.

Π1.3 Ηλεκτρική δύναμη σημειακών φορτίων. Σημειακά φορτία 6.00 nC τοποθετούνται σε τρεις κορυφές τετραγώνου με πλευρά 0.200 m. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης σε σημειακό φορτίο –2.00 nC τοποθετημένο α) στο κέντρο του τετραγώνου β) στην τέταρτη κορυφή του; Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά K=9×10^9 N.m^2.C^{-2}. *Απάντηση*: α) 5.4×10^{-6} N β) 5.15×10^{-6} N.

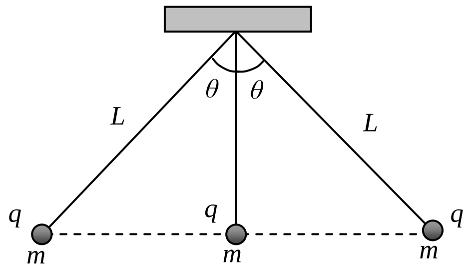


Σχήμα 1.13 *Πρόβλημα 1.4.*

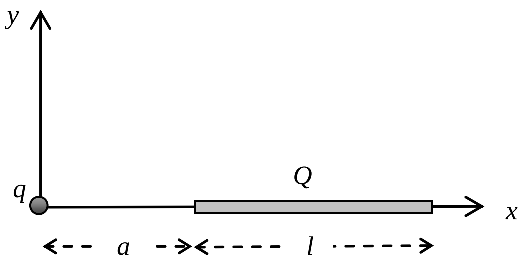
Π1.4 Ισορροπία φορτίων. Δυο όμοιες σφαίρες μάζας m, κρεμιούνται από μεταξωτά λεπτά νήματα μήκους l και φέρουν το ίδιο φορτίο q, όπως φαίνεται στο σχ. 1.13. Υποθέστε ότι η γωνία θ είναι τόσο μικρή, ώστε tanθ=sinθ. Αποδείξτε ότι όταν το σύστημα ισορροπεί ισχύει $x=\left(\dfrac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_o mg}\right)^{1/3}$.

Π1.5 Ισορροπία φορτίων Δύο ελεύθερα σημειακά φορτία q_1=$+q$ και q_2=$+4q$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση L. Ένα τρίτο φορτίο q_3 τοποθετείται έτσι ώστε όλα τα φορτία να ισορροπούν. Να εύρετε α) τη θέση του φορτίου q_3, και β) το πρόσημο και το μέγεθος του q_3. *Απάντηση*: α) L/3 από το q, β) -4/9 q.

Π1.6 Ισορροπία φορτίων. Τρία πανομοιότυπα σημειακά φορτία, κάθε ένα μάζας m=0.1 kg, κρέμονται από τρία νήματα, όπως φαίνονται στο σχ. 1.14. Εάν το μήκος του αριστερού και του δεξιού νήματος είναι L=30 cm και οι γωνίες θ είναι 45^o, προσδιορίστε το φορτίο q της κάθε μάζας. Δίνονται g= 9.81 m/s^2, m_e= 9.1×10^{-31} kg και K= 9×10^9 Nm^2/C^2. *Απάντηση*: 1.98×10^{-6} C.



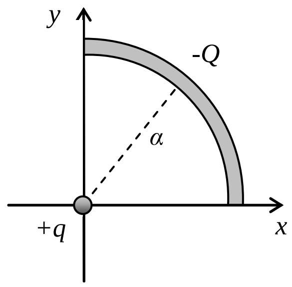
Σχήμα 1.14 *Πρόβλημα 1.6.*



Σχήμα 1.15 *Πρόβλημα 1.7.*

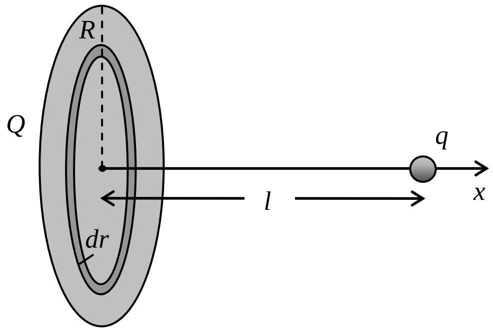
Π1.7 Γραμμική κατανομή φορτίου. Θετικό ηλεκτρικό φορτίο Q κατανέμεται ομοιόμορφα κατά μήκος του θετικού άξονα x από το σημείο x=a ως το x=l+a. Ένα θετικό σημειακό φορτίο q ευρίσκεται στην θέση x=0 του άξονα x, δηλ. σε απόσταση a από το αριστερό άκρο του Q , όπως δείχνεται στο σχ. 1.15. Υπολογίστε το μέτρο και βρείτε την κατεύθυνση της δύναμης που ασκεί πάνω στο q η κατανομή του φορτίου Q.

Π1.8 Ηλεκτρική δύναμη τεταροκυκλίου. Ένα τεταρτοκύκλιο ομοιογενώς φορτισμένο με φορτίο -Q και ακτίνα α, είναι τοποθετημένο στο πρώτο τεταρτημόριο κύκλου. Στο κέντρο καμπυλότητας του τεταρτημορίου τοποθετείται θετικό σημειακό φορτίο q, όπως φαίνεται στο σχ. 1.16. Να υπολογισθούν οι συνιστώσες F_x και F_y, καθώς και η συνισταμένη ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το τεταρτοκύκλιο πάνω στο σημειακό φορτίο q.



Σχήμα 1.16 *Πρόβλημα 1.8.*

Π1.9 Ηλεκτρική δύναμη φορτισμένου κύκλου. Ένας λεπτός κυκλικός δίσκος ακτίνας R είναι φορτισμένος με φορτίο Q. Το φορτίο κατανέμεται ομοιόμορφα στην επιφάνεια του δίσκου και είναι ίσο με σ ανά μονάδα επιφανείας (C/m^2). Ένα σημειακό φορτίο q τοποθετείται σε απόσταση l από το κέντρο του δίσκου, πάνω στον κάθετο άξονα συμμετρίας του δίσκου, όπως δείχνει το σχ. 1.17. Να υπολογίσετε την ηλεκτρική δύναμη που ο δίσκος ασκεί πάνω στο φορτίο q. *Υπόδειξη*: Χωρίστε τον δίσκο σε ομόκεντρους λεπτούς δακτυλίους και χρησιμοποιείστε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 1.6.



Σχήμα 1.17 *Πρόβλημα 1.9.*

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Ashcroft, N. W., & Mermin, N. D. (1976). *Φυσική στερεάς κατάστασης*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2012 Εκδόσεις Γ. Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-77-9.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975 by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). *Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Kittel, Ch. (1979). *Εισαγωγή στη φυσική στερεάς καταστάσεως*. 5η Έκδοση, Copyright © 1979, Εκδόσεις Γ. Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΥ.

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 2

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Σύνοψη

Στο δεύτερο τούτο κεφάλαιο, ορίζεται το ηλεκτρικό πεδίο ως ιδιότητα του χώρου γύρω από το ηλεκτρικό φορτίο. Γίνεται περιγραφή του ηλεκτρικού πεδίου με την έννοια των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών και εισάγεται η σχέση μεταξύ του πεδίου και της ηλεκτρικής δύναμης. Επίσης μελετάται το ηλεκτρικό πεδίο μη σημειακών φορτίων και η κίνηση φορτίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.

Προαπαιτούμενη γνώση

Διανυσματικός λογισμός. Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός.

2.1 Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

Στο πρώτο κεφάλαιο, μελετήσαμε τις ηλεκτρικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων. Η ηλεκτρική δύναμη, η οποία ασκείται από ένα ηλεκτρικό φορτίο επάνω σε ένα άλλο, δημιουργείται όταν το δεύτερο φορτίο προσεγγίσει το πρώτο, δηλαδή «εισέλθει» στο χώρο του. Πώς όμως ένα ηλεκτρικό φορτίο «αντιλαμβάνεται» την παρουσία κάποιου άλλου, ώστε να αλληλεπιδράσει ηλεκτρικά μαζί του; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, πρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στο χώρο γύρω από το αρχικό φορτίο. Γενικά, ο χώρος γύρω από ένα ηλεκτρικό φορτίο αποτελεί ένα πεδίο δράσης ηλεκτρικών δυνάμεων για κάθε άλλο φορτίο που εισέρχεται σ' αυτόν. Έτσι λοιπόν, η παρουσία ενός φορτίου Q, ή γενικότερα μιας κατανομής φορτίων, αποδίδει στον τριγύρω χώρο, μια ιδιότητα που ονομάζεται **ηλεκτρικό πεδίο**. Σ' οποιοδήποτε άλλο ηλεκτρικό φορτίο q ευρεθεί σ' αυτόν το χώρο, θα ασκείται επάνω του μια ηλεκτρική δύναμη, ίση με

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{2.1}$$

όπου $\boldsymbol{E}$ είναι το διανυσματικό μέγεθος της **έντασης του ηλεκτρικού πεδίου**. Δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια ιδιότητα του χώρου που οφείλεται αποκλειστικά στην παρουσία ηλεκτρικού φορτίου σ' αυτόν. Απουσία ηλεκτρικού φορτίου δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή $\boldsymbol{E}$=0. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια αφηρημένη και δυσνόητη έννοια, μιας και εκτείνεται στο χώρο γύρω από το ηλεκτρικό φορτίο προς όλες τις κατευθύνσεις και το άπειρο. Η ηλεκτρική δύναμη και το ηλεκτρικό πεδίο είναι δυο φυσικές ποσότητες αλληλένδετες μεταξύ τους, οι οποίες η μια χρησιμοποιείται για τον ορισμό της άλλης. Έτσι λοιπόν, ένας πιο ακριβής ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ είναι

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\boldsymbol{F}}{q} \tag{2.2}$$

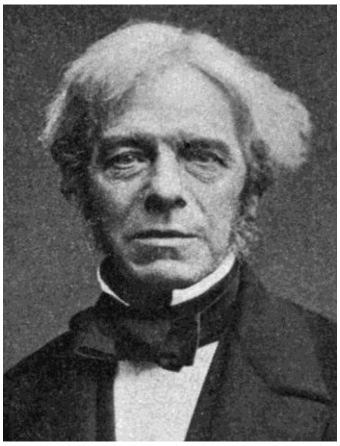
μιας και το φορτίο q πρέπει να είναι μικρό σε σύγκριση με το φορτίο Q που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$, διότι διαφορετικά το φορτίο q επηρεάζει το πεδίο του Q αλλάζοντάς το, επειδή και το q δημιουργεί γύρω του το δικό του ηλεκτρικό πεδίο (Grant & Phillips, 1975), (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Η εξ. 2.2 είναι λοιπόν στην πραγματικότητα προσεγγιστική, μιας και πάντα το φορτίο q οσοδήποτε μικρό και να είναι, επηρεάζει το πεδίο $\boldsymbol{E}$, αλλάζοντάς το τοπικά έστω και απειροελάχιστα. Βάσει λοιπόν της εξ. 2.1, το ηλεκτρικό πεδίο είναι μια ιδέα άρρηκτα συνδεδεμένη με την ηλεκτρική δύναμη και μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q} = K\frac{Qq}{r^2 q}\hat{\boldsymbol{r}} \Rightarrow \boldsymbol{E} = K\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{2.3}$$

Πρέπει σ' αυτό το σημείο να τονίσουμε ότι η εξ. 2.3 ισχύει μόνο για σημειακά φορτία. Το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζουν δυο ή περισσότερα φορτία, είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που δημιουργεί το κάθε φορτίο ξεχωριστά. Ισχύει δηλαδή για το ηλεκτρικό πεδίο η αρχή της επαλληλίας. Έτσι λοιπόν για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου που δημιουργούν n σημειακά φορτία, πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}_i$ που δημιουργεί κάθε φορτίο q_i στο συγκεκριμένο σημείο, και στη συνέχεια να υπολογίσουμε το διανυσματικό άθροισμα όλων των επιμέρους ηλεκτρικών πεδίων (Lobkowicz & Melissinos, 1975). Ισχύει δηλαδή

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \ldots + \boldsymbol{E}_n \qquad (2.4)$$

Ο ορισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου έγινε πιο πάνω συναρτήσει της δύναμης που ασκείται πάνω στο φορτίο (εξ. 2.3). Εντούτοις, ο ορισμός αυτός είναι αυθαίρετος, καθιστώντας την περιγραφή και κατανόηση αυτής της φυσικής ποσότητας αρκετά δύσκολη, μιας και το πεδίο $\boldsymbol{E}$ αποτελεί μια ιδιότητα του χώρου που εξαρτάται από το σημείο στο οποίο το μελετάμε κάθε φορά. Τούτο είναι προφανές διότι αλλάζοντας τη θέση ενός φορτίου q ως από ένα άλλο Q, αλλάζει και η μεταξύ τους ηλεκτρική δύναμη.



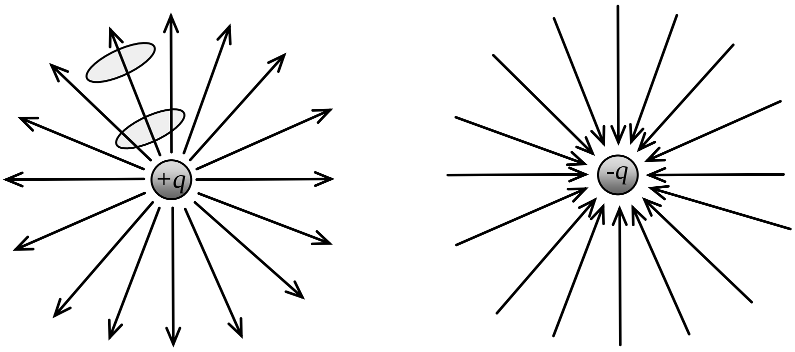
Michael Faraday (1791-1867) (https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Faraday#/media/File:Faraday-Millikan-Gale-1913.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

Την ιδέα του ηλεκτρικού πεδίου την εισήγαγε πρώτος ο Άγγλος φυσικός και χημικός Michael Faraday (1791-1867), ως αποτέλεσμα της προσπάθειάς του να εξηγήσει πώς ένα φορτίο «αντιλαμβάνεται» την ύπαρξη ενός άλλου, ώστε να αλληλεπιδράσει μαζί του. Ο Faraday κατάφερε να περιγράψει την αφηρημένη έννοια του πεδίου με την σχεδίαση γραμμών, οι οποίες ονομάζονται **γραμμές ηλεκτρικού πεδίου** ή **ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές** (Sears, 1951), (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Η περιγραφή του ηλεκτρικού πεδίου με τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές βασίζονται στους εξής κανόνες:

1) Οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν πάντα από θετικά φορτία και καταλήγουν σε αρνητικά. Εάν στο χώρο υπάρχουν μόνο θετικά ή αρνητικά φορτία, οι δυναμικές γραμμές εκτείνονται στο άπειρο, όμως με αντίθετη κατεύθυνση σε κάθε περίπτωση, έτσι όπως δείχνει το σχ. 2.1.

2) Ο αριθμός των δυναμικών γραμμών που διέρχονται κάθετα από μια επιφάνεια είναι ανάλογος της έντασης του πεδίου $\boldsymbol{E}$. Πυκνές γραμμές σημαίνουν μεγάλο $\boldsymbol{E}$ και το αντίθετο (βλέπε σχ.2.1α).

3) Η διεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{E}$ είναι πάντα εφαπτόμενη σε κάθε σημείο των δυναμικών γραμμών. Στην πραγματικότητα, οι δυναμικές γραμμές δείχνουν την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στον χώρο.

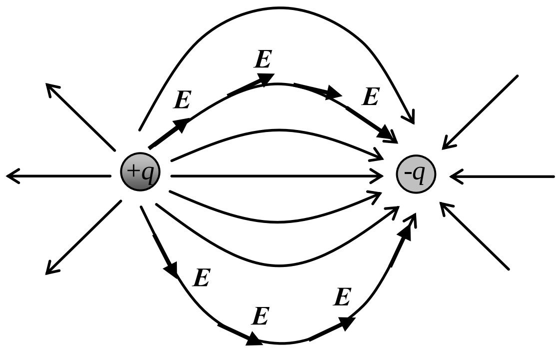


(α) (β)

Σχήμα 2.1 *Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από α) ένα θετικό σημειακό φορτίο, και β) ένα αρνητικό σημειακό φορτίο.*

Βάσει των πιο πάνω κανόνων, στο σχ. 2.1α φαίνονται οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που σχηματίζεται από ένα απομονωμένο θετικό σημειακό φορτίο, ενώ στο σχ. 2.1β από ένα αντίστοιχο αρνητικό. Γενικά, η κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών είναι η ίδια με αυτήν του ηλεκτρικού πεδίου και με την κατεύθυνση της ηλεκτρικής δύναμης που ασκείται σ' ένα θετικό φορτίο μέσα σε αυτό. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται με την απόσταση από το φορτίο, μιας και όπως φαίνεται στο σχ. 2.1α, μια δεδομένη επιφάνεια διαπερνάται από μικρότερο αριθμό δυναμικών γραμμών όσο πιο μακριά ευρίσκεται από το φορτίο (βλέπε 2^{ο} κανόνα πιο πάνω). Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγει κάποιος και από την εξ. 2.3, όπου η ένταση του πεδίου $\boldsymbol{E}$ είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης. Γενικά ο αριθμός των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών ανά μονάδα επιφανείας εκφράζεται με την φυσική ποσότητα της ηλεκτρικής ροής, η οποία είναι πολύ σημαντική στην θεωρία του ΗΜ και θα αναλυθεί λεπτομερειακώς παρακάτω.

Ένα άλλου είδους ηλεκτρικό πεδίο είναι αυτό που δημιουργείται από ένα ηλεκτρικό δίπολο και το οποίο απεικονίζεται στο σχ. 2.2. Το **ηλεκτρικό δίπολο** είναι ένα ζεύγος ισοδυνάμων και ταυτοχρόνως ετεροσήμων ηλεκτρικών φορτίων σε σταθερή απόσταση (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Ηλεκτρικά δίπολα σχηματίζονται στους ιοντικούς χημικούς δεσμούς, όπου παρατηρείται μεταφορά φορτίου μεταξύ ατόμων.



Σχήμα 2.2 *Ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από ζεύγος ετεροσήμων ηλεκτρικών φορτίων (ηλεκτρικό δίπολο), όπως αυτό ορίζεται με τις δυναμικές γραμμές.*

Ένα σημαντικό και χρήσιμο σε εφαρμογές ηλεκτρικό πεδίο, είναι το **ομογενές ηλεκτρικό πεδίο**, όπου το διάνυσμα ***E*** είναι σταθερού μέτρου και κατευθύνσεως σ’ ένα τμήμα του χώρου. Εξ ορισμού το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, παριστάνεται από ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, οι οποίες είναι παράλληλες ευθείες με την ίδια κατεύθυνση και πυκνότητα στο χώρο (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Θα περιγράψουμε πιο κάτω τη δημιουργία ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου και πώς ένα ηλεκτρικό φορτίο συμπεριφέρεται μέσα σ’ αυτό.

2.2 Ηλεκτρικό πεδίο συνόλου σημειακών φορτίων

Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την ένταση ***E*** του ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο δημιουργείται από διακριτά σημειακά φορτία σε ένα σημείο του χώρου, πρώτα υπολογίζουμε το πεδίο $\boldsymbol{E}_{\mathbf{i}}$ που δημιουργεί κάθε σημειακό φορτίο ξεχωριστά στο σημείο, και έπειτα ευρίσκουμε το διανυσματικό τους άθροισμα σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας. Η κατεύθυνση του διανύσματος ***E*** που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο είναι προς το φορτίο όταν αυτό είναι αρνητικό, και απομακρύνεται από το σημείο όταν είναι θετικό. Αυτή η σύμβαση βασίζεται στην θεώρηση των δυναμικών γραμμών, όπως τις περιγράψαμε πιο πάνω. Ένας άλλος τρόπος για να εύρουμε τη φορά του πεδίου ***E*** , είναι να θεωρήσουμε ένα θετικό δοκιμαστικό φορτίο στο υπό μελέτη σημείο του χώρου, και να εύρουμε τη φορά της δύναμης ***F*** επάνω στο φορτίο, η οποία θα συμπίπτει με εκείνη του πεδίου ***E***.

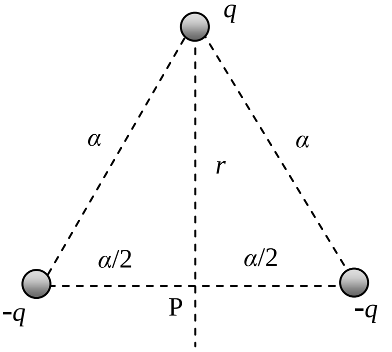
Παράδειγμα 2.1 Ηλεκτρικό πεδίο σημειακών ηλεκτρικών φορτίων

Τρία ηλεκτρικά φορτία ίσου μέτρου *q* ευρίσκονται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς *α*. Δύο από τα φορτία είναι αρνητικά και το τρίτο θετικό, όπως φαίνεται στο σχ. 2.3. Να ευρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P, ως συνάρτηση των *α*, *q* και της ηλεκτρικής σταθεράς *K*. Σημειωτέον, ότι το σημείο P είναι το μέσον της πλευράς στα άκρα της οποίας ευρίσκονται τα αρνητικά φορτία.

Λύση

Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P ευρίσκεται αν υπολογίσουμε τα ηλεκτρικά πεδία που δημιουργούν τα τρία επιμέρους φορτία, και στη συνέχεια τα προσθέτουμε διανυσματικά. Επειδή το σημείο P απέχει εξ ίσου από τα αρνητικά φορτία και ευρίσκεται στο μέσον τους, τα αρνητικά φορτία δημιουργούν στο σημείο *P* αντίθετα ηλεκτρικά πεδία μέτρου,

$$E = K\frac{q}{(a/2)^2} \Rightarrow E = K\frac{4q}{a^2} \qquad (1)$$



Σχήμα 2.3 *Ηλεκτρικό πεδίο τριών σημειακών ηλεκτρικών φορτίων (παράδειγμα 2.1).*

τα οποία αλληλοεξουδετερώνονται και δεν συνεισφέρουν στο συνολικό πεδίο. Δηλαδή στον άξονα *x* ισχύει

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{x}} = K\frac{q}{(a/2)^2}\hat{\boldsymbol{i}} + K\frac{q}{(a/2)^2}(-\hat{\boldsymbol{i}}) \Rightarrow \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{x}} = 0 \qquad (2)$$

Τελικώς μόνο το θετικό φορτίο *q* είναι αυτό που δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P, ίσο με

$$E = K\frac{q}{r^2} \qquad (3)$$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος 2.3 έχουμε

$$a^2 = r^2 + (a/2)^2 \Rightarrow r^2 = a^2 - (a/2)^2 = a^2 - a^2/4 \Rightarrow r^2 = \frac{3}{4}a^2 \qquad (4)$$

Η εξ. 3 λόγω της 4 δίνει το μέτρο του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου, ίσο με

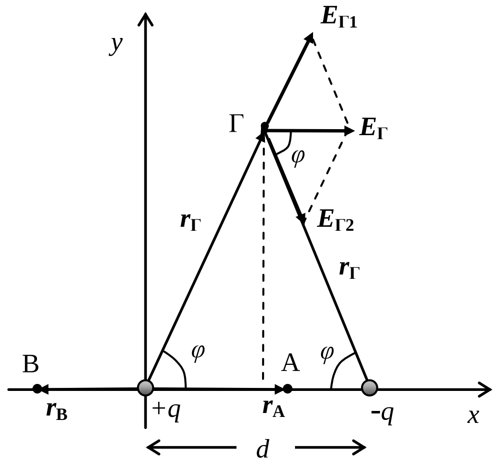
$$E = K\frac{4q}{3a^2} \qquad (5)$$

Παρατηρώντας το σχ. 2.3 η κατεύθυνση του πεδίου είναι προς τον Νότο, διότι λόγω της ηλεκτροθετικότητας του φορτίου στην επάνω κορυφή του ισοπλεύρου τριγώνου, οι δυναμικές γραμμές του πεδίου στο σημείο P έχουν φορά προς τα «κάτω». Δηλαδή μπορούμε να γράψουμε τελικά για το διάνυσμα του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P

$$\boldsymbol{E} = -K\frac{4q}{3a^2}\hat{\boldsymbol{j}}\,.$$

Παράδειγμα 2.2 Ηλεκτρικό πεδίο δίπολου

Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλεί το ηλεκτρικό δίπολο με φορτία $q=\pm 5\times 10^{-9}$ C σε απόσταση d=20 cm μεταξύ τους, στα σημεία A, B και Γ, όπως δείχνει το σχ. 2.4. Οι αποστάσεις των A, B και Γ σημείων από την αρχή των αξόνων είναι r_A=12 cm, r_B=8 cm και $r_Γ$=26 cm αντιστοίχως. Το σημείο Γ ευρίσκεται στην μεσοκάθετο της απόστασης μεταξύ των δυο φορτίων.



Σχήμα 2.4 *Ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο γύρω από ηλεκτρικό δίπολο. Το κάθε φορτίο δημιουργεί το δικό του επιμέρους ηλεκτρικό πεδίο (παράδειγμα 2.2).*

Λύση

Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο σε απόσταση r από αυτό, δίνεται από την εξ. 2.3. Έτσι λοιπόν, στο σημείο A σε απόσταση r_A, το φορτίο q δημιουργεί πεδίο $\boldsymbol{E}_{A1}$

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{A1}} = K\frac{q}{r_A^{\,2}}\hat{\boldsymbol{i}} \Rightarrow E_{A1} = 9\times 10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\times\frac{5\times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(12\times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}$$

$$\Rightarrow E_{A1} = 3.12\times 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Ομοίως, μπορούμε να εύρουμε ότι το $-q$ δημιουργεί πεδίο $\boldsymbol{E}_{A2}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{A2}} = K\frac{-q}{(d-r_A)^2}(-\hat{\boldsymbol{i}}) \Rightarrow E_{A2} = 9\times 10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\times\frac{5\times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(8\times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow E_{A2} = 7.03\times 10^3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Οι συνιστώσες x και y των δυο πεδίων $\boldsymbol{E}_{A1}$ και $\boldsymbol{E}_{A2}$ είναι E_{A1x}=3.12×10^3 N/C, E_{A1y}=0 και E_{A2x}=7.03×10^3 N/C, E_{A2y}=0. Επομένως, το συνολικό πεδίο $\boldsymbol{E}_A$ στο σημείο A είναι κατά μήκος του άξονα x με φορά προς το $-q$ και με μέτρο

$$E_A = E_{A1x} + E_{A2x} = 3.12\times 10^3\ \mathrm{N/C} + 7.03\times 10^3\ \mathrm{N/C} = 10.15\times 10^3\ \mathrm{N/C}$$

ή διανυσματικά $\boldsymbol{E}_A = 1.015\times 10^4\,\mathrm{N/C}\ \hat{\boldsymbol{i}}$.

Στο σημείο B και σε απόσταση r_B=8 cm προς τον αρνητικό ημιάξονα x, το φορτίο q δημιουργεί πεδίο

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{B1}} = K\frac{q}{r_B^{\,2}}(-\hat{\boldsymbol{i}}) \Rightarrow E_{B1} = K\frac{q}{r_B^{\,2}} = 9\times 10^9\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{C^2}}\times\frac{5\times 10^{-9}\,\mathrm{C}}{(8\times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow E_{B1} = 7.03\times 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Το $-q$ δημιουργεί στο σημείο B πεδίο

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{B2}} = K\frac{-q}{(d+r_{\mathrm{B}})^2}(-\hat{\boldsymbol{i}}) \Rightarrow E_{\mathrm{B2}} = K\frac{q}{(d+r_{\mathrm{B}})^2} = 9\times10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\times\frac{5\times10^{-9}\,\mathrm{C}}{(28\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow E_{\mathrm{B2}} = 5.74\times10^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Η φορά του $\boldsymbol{E}_{\mathbf{B2}}$ είναι προς το $-q$ και αντίθετη από αυτή του $\boldsymbol{E}_{\mathbf{B1}}$. Οι συνιστώσες των πεδίων στον άξονα των y είναι μηδέν. Επομένως το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο B είναι

$$\boldsymbol{E}_{\mathbf{B}}=\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}x}+\boldsymbol{E}_{\mathbf{2}x}=(-7.03\boldsymbol{i}+0.0574\boldsymbol{i})\times10^4\,\mathrm{N/C} \Rightarrow \boldsymbol{E}_{\mathbf{B}}= -7.09\times10^4\,\mathrm{N/C}\,\boldsymbol{i}.$$

Το μείον δηλώνει τη φορά του πεδίου $\boldsymbol{E}_{\mathbf{B}}$, η οποία είναι προς τα αριστερά.

Στο σημείο Γ που ευρίσκεται στη μεσοκάθετο της απόστασης μεταξύ των δυο φορτίων, το ηλεκτρικό πεδίο θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{1}}$ και $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{2}}$, που δημιουργούν τα φορτία q και $-q$ αντιστοίχως. Το διάνυσμα $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{1}}$ έχει μέτρο

$$E_{\Gamma 1} = K\frac{q}{r_{\Gamma}^{2}} \Rightarrow E_{\Gamma 1} = 9\times10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\times\frac{5\times10^{-9}\,\mathrm{C}}{(26\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2} \Rightarrow E_{\Gamma 1} = 6.65\times10^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

και ομοίως υπολογίζεται το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{2}}$ ως $E_{\Gamma 2} = 6.65\times10^2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$.

Οι διευθύνσεις των $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{1}}$ και $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{2}}$ φαίνονται στο σχ. 2.4. Το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο Γ είναι

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{1}} + \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{2}}$$

Επειδή το $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{1}y} = -\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{2}y}$, το $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}}$ δεν έχει συνιστώσα στην y διεύθυνση, οπότε $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}y}$=0. Επίσης $\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}x}$=$\boldsymbol{E}_{\mathbf{2}x}$.

Άρα ισχύει $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}} = 2\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}x}$.

Όμως $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{1}x} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{1}}\cos\varphi$, όπου $\cos\varphi = \sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ και

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi) = \frac{d/2}{r_{\Gamma}} = \frac{10}{26} = 0.385 \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\varphi = \sin^{-1}0.385 = 22.6^{\mathrm{o}} \Rightarrow \varphi = 90^0 - 22.6^{\mathrm{o}} \Rightarrow \varphi = 67.4^{\mathrm{o}}$$

Άρα $E_{\Gamma 1x} = 6.65\times10^2\,\mathrm{N/C}\times\cos 67.4^{\mathrm{o}} = 6.65\times10^2\,\mathrm{N/C}\times0.384 \Rightarrow E_{\Gamma 1x} = 2.55\times10^2\,\mathrm{N/C}$.

Επομένως

$$E_{\Gamma} = 2\times2.55\times10^2\,\mathrm{N/C} \Rightarrow E_{\Gamma} = 5.10\times10^2\,\mathrm{N/C}\,,$$

και επειδή η κατεύθυνσή του είναι αυτή του θετικού ημιάξονα των x, διανυσματικά εκφράζεται ως $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Gamma}} = 5.10\times10^2\,\mathrm{N/C}\hat{\boldsymbol{i}}$.

2.3 Ηλεκτρικό πεδίο συνεχούς κατανομής φορτίου

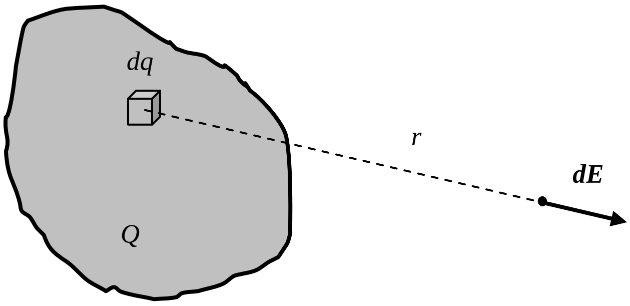
Όταν έχουμε μια συνεχή κατανομή φορτίου στο χώρο, όπως είναι ένα φορτισμένο σώμα, πχ. μια ράβδος, ένας δακτύλιος ή ένα τυχαίου σχήματος σώμα, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε απευθείας τον νόμο του Coulomb για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο του χώρου. Τούτο συμβαίνει διότι δεν ορίζεται η απόσταση μεταξύ ενός σημείου και ενός σώματος με διαστάσεις. Σε τέτοια περίπτωση, πρέπει να χωρίσουμε το συνολικό φορτίο Q του σώματος σε στοιχειώδη απειροελάχιστα φορτία dq, και για κάθε τέτοιο φορτίο, αφού το θεωρήσουμε σημειακό, να εφαρμόσουμε τον νόμο του Coulomb, και να εύρουμε το αντίστοιχο στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{dE}$ που δημιουργεί στο συγκεκριμένο σημείο του χώρου. Στη συνέχεια, για να υπολογίσουμε το συνολικό $\boldsymbol{E}$ πρέπει να αθροίσουμε διανυσματικά όλα τα στοιχειώδη πεδία $\boldsymbol{dE}$. Μια τέτοια διαδικασία περιγράφεται στο σχ. 2.5.

Έτσι λοιπόν, ορίζουμε το πεδίο **dE** του στοιχειώδους φορτίου dq το οποίο θα είναι

$$\boldsymbol{dE} = K\frac{dq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (2.5)$$

Επειδή κάθε τρισδιάστατο σώμα φορτισμένο με φορτίο Q, απαρτίζεται από έναν απείρως μεγάλο αριθμό στοιχειωδών φορτίων dq, έχουμε να προσθέσουμε έναν πολύ μεγάλο αριθμό στοιχειωδών πεδίων **dE**, με αποτέλεσμα το άθροισμα να ανάγεται σε ολοκλήρωση. Τοιουτοτρόπως ολοκληρώνοντας την εξ. 2.5 στο χώρο που εκτείνεται το φορτίο Q, μπορούμε να πάρουμε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ ως

$$\boldsymbol{E} = \int K\frac{dq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (2.6)$$

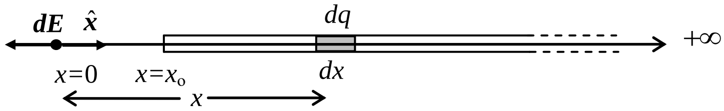


Σχήμα 2.5 *Στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο* ***dE*** *που δημιουργείται από στοιχειώδες φορτίο dq ενός τρισδιάστατου φορτίου Q. Το διανυσματικό άθροισμα όλων των* ***dE*** *από όλα τα dq που απαρτίζουν το σώμα θα δώσουν το ολικό* ***E****.*

Γενικά το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.6 δεν είναι ευκόλως υπολογίσιμο, μιας και η απόσταση r εξαρτάται από το dq. Εντούτοις, σε περιπτώσεις που το σχήμα του σώματος παρουσιάζει κάποια συμμετρία και η πυκνότητα του φορτίου είναι γνωστή, το ολοκλήρωμα 2.6 μπορεί να υπολογισθεί σχετικά εύκολα. Στη συνέχεια θα ιδούμε τον υπολογισμό των ηλεκτρικών πεδίων κάποιων κατανομών φορτίων με την χρήση της πυκνότητας φορτίου.

Παράδειγμα 2.3 Ηλεκτρικό πεδίο μονοδιάστατης φορτισμένης ράβδου

Έστω μια θετικά φορτισμένη μονοδιάστατη ράβδος πολύ μεγάλου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου λ, όπως φαίνεται στο σχ. 2.6. Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ στο σημείο x=0, για α) $\lambda = \lambda_o$ σταθερή, και β) μεταβλητή πυκνότητα φορτίου $\lambda = \dfrac{\lambda_o x_o}{x}$.



Σχήμα 2.6 *Μονοδιάστατη θετικά φορτισμένη ράβδος πολύ μεγάλου μήκους (παράδειγμα 2.3).*

Λύση

Για να υπολογίσουμε το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ στην αρχή του άξονα των x (x=0), πρέπει να υπολογίσουμε το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο **dE**, το οποίο δημιουργείται από κάθε στοιχειώδες φορτίο dq της ράβδου μήκους dx. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\boldsymbol{dE} = K\frac{dq}{x^2}(-\hat{\boldsymbol{i}}) \qquad (1)$$

Η θέση όμως του dq εξαρτάται από την απόσταση x γιατί κάθε dq ευρίσκεται σ' ένα διαφορετικό x.
Όμως από τον ορισμό της γραμμικής πυκνότητας (βλ. εξ. 1.9) φορτίου ισχύει,

$$\lambda = \frac{dq}{dx} \Rightarrow dq = \lambda dx \qquad (2)$$

και επομένως από την εξ.2 παίρνουμε για την περίπτωση σταθερής γραμμικής πυκνότητας λ_o

$$dq = \lambda_o dx \qquad (3)$$

Τότε η στοιχειώδης ένταση dE του στοιχειώδους ηλεκτρικού φορτίου dq είναι

$$dE = K\frac{\lambda_o}{x^2}dx \qquad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. 4 κατά μήκος όλης της ράβδου από $x=x_o$ έως $x=\infty$, γράφουμε

$$dE = K\frac{\lambda_o}{x^2}dx \Rightarrow \int dE = \int_{x_o}^{+\infty} K\frac{\lambda_o}{x^2}dx \Rightarrow E = K\lambda_o\int_{x_o}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = -K\lambda_o\left.\frac{1}{x}\right|_{x_o}^{+\infty} = -K\lambda_o(0-\frac{1}{x_o}) \Rightarrow E = \frac{K\lambda_o}{x_o}$$

Επειδή το φορτίο της ράβδου είναι θετικό, η φορά του πεδίου είναι προς τον αρνητικό ημιάξονα των *x* και επομένως ισχύει

$$\boldsymbol{E} = \frac{K\lambda_o}{x_o}(-\hat{\boldsymbol{i}})$$

Για την β) περίπτωση όπου η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι μεταβλητή, ισχύει

$$dq = \lambda dx \Rightarrow dq = \frac{\lambda_o x_o}{x}dx \qquad (5)$$

Από την εξ.5 μπορούμε να γράψουμε για το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο dE του φορτίου dq

$$dE = K\frac{\lambda_o x_o}{x^3}dx \Rightarrow \int dE = \int_{x_o}^{+\infty} K\frac{\lambda_o x_o}{x^3}dx \Rightarrow E = K\lambda_o x_o\int_{x_o}^{+\infty}\frac{dx}{x^3} = -K\lambda_o x_o\left.\frac{1}{2x^2}\right|_{x_o}^{+\infty} = -\frac{K\lambda_o x_o}{2}(-\frac{1}{x_o{}^2}) \Rightarrow E = \frac{K\lambda_o}{2x_o}$$

Η κατεύθυνση του $\boldsymbol{E}$ είναι και εις αυτήν την περίπτωση προς τα αριστερά, διότι το φορτίο της ράβδου είναι θετικό. Άρα το ηλεκτρικό πεδίο της ράβδου είναι

$$\boldsymbol{E} = -\frac{K\lambda_o}{2x_o}\hat{\boldsymbol{i}}$$

Παράδειγμα 2.4 Ηλεκτρικό πεδίο στη μεσοκάθετο μονοδιάστατης φορτισμένης ράβδου

Έστω μια θετικά ομοιόμορφα φορτισμένη μονοδιάστατη ράβδος πολύ μεγάλου μήκους με γραμμική πυκνότητα φορτίου *λ*. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ σε σημείο Ο που απέχει απόσταση *α* από την ράβδο, και ευρίσκεται στην μεσοκάθετό της, όπως φαίνεται στο σχ. 2.7.

Λύση

Θεωρώντας στοιχειώδες φορτίο dq της ράβδου, το οποίο απέχει απόσταση *r* από το σημείο Ο, το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{dE}$ που αυτό δημιουργεί στο σημείο Ο, έχει μέτρο

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{r^2} \qquad (1)$$

όπου

$$dq = \lambda dx \qquad (2)$$

και

$$r^2 = x^2 + a^2 \qquad (3)$$

Λόγω των εξισώσεων 2 και 3, η εξ. 1 γράφεται

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dx}{x^2 + a^2} \qquad (4)$$

Όμως για κάθε στοιχειώδες φορτίο dq, υπάρχει ένα αντιδιαμετρικό dq ως προς το σημείο x=0 της ράβδου, το οποίο δημιουργεί ένα αντίστοιχο dE , με αποτέλεσμα η συνισταμένη του E στον άξονα των x να είναι μηδέν, διότι τα δυο dE_x αλληλοαναιρούνται. Αντιθέτως, η συνισταμένη στον κάθετο άξονα y θα είναι

$$dE_y = 2dE\cos\theta \qquad (5)$$

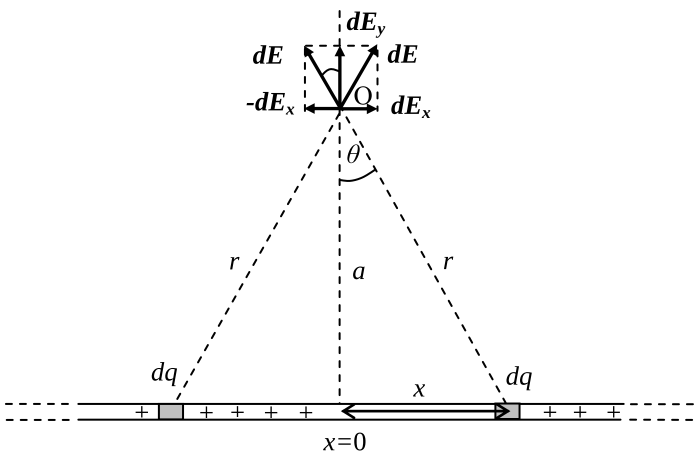
Όμως ισχύει ότι

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{r} \qquad (6)$$

Επομένως γράφουμε για το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα φορτίο dq μαζί με το αντιδιαμετρικό του

$$dE_y = \frac{2adE}{r} \qquad (7)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο E που ολόκληρη η ράβδος δημιουργεί στο σημείο O, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την πιο πάνω σχέση από το $x = 0$ έως το $x = \infty$. Η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της μισής ράβδου, γιατί στον υπολογισμό του dE_y συμπεριλάβαμε και το αντιδιαμετρικό φορτίο του dq, το οποίο ευρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα των x. Έτσι, ολοκληρώνοντας την εξ. 7 έχουμε



Σχήμα 2.7 *Ηλεκτρικό πεδίο dE που παράγεται από στοιχειώδες φορτίο dq θετικά ομοιόμορφης φορτισμένης μονοδιάστατης ράβδου πολύ μεγάλου μήκους σε απόσταση α από αυτή (παράδειγμα 2.4).*

$$E = \int dE_y = \int_0^{+\infty} 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dx}{x^2+a^2}\frac{a}{r} = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{a\lambda dx}{(x^2+a^2)(x^2+a^2)^{1/2}} = \frac{a\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} =$$ [6]

$$= \frac{a\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a}(1-0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a}$$

Η διεύθυνση του $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετη στη ράβδο και εκτείνεται ακτινικά προς αυτή, με κατεύθυνση προς τα «έξω» μιας και το φορτίο της ράβδου είναι θετικό. Δηλαδή ισχύει

$$\boldsymbol{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o a}\hat{\boldsymbol{j}}$$

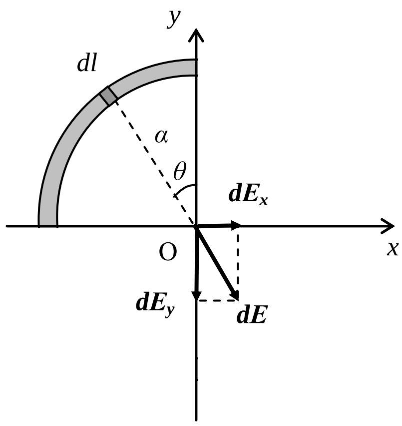
Παράδειγμα 2.5 Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου τεταρτοκυκλίου

Θετικό ηλεκτρικό φορτίο $+Q$, κατανέμεται ομοιόμορφα επάνω σε τεταρτοκύκλιο με ακτίνα α. Το τεταρτοκύκλιο ευρίσκεται στο τεταρτημόριο του σχήματος 2.8, και το κέντρο καμπυλότητάς του O είναι στην αρχή των αξόνων ορθογωνίου καρτεσιανού συστήματος αναφοράς. Υπολογίστε το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ στο κέντρο καμπυλότητας, αφού προηγουμένως υπολογίστε τις συνιστώσες x και y του ηλεκτρικού πεδίου.

Λύση

Θεωρούμε στοιχειώδες φορτίο dq του τεταρτοκυκλίου με μήκος dl. Το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{dE}$ στο κέντρο του τεταρτοκυκλίου δίνεται ως

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{a^2}\hat{\boldsymbol{r}} \qquad (1)$$



Σχήμα 2.8 *Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου τεταρτημορίου στο κέντρο καμπυλότητάς του (παράδειγμα 2.5).*

όπου $\hat{\boldsymbol{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση που ορίζεται από την γωνία θ (βλ. σχ. 2.8). Το διάνυσμα $\boldsymbol{dE}$ αναλύεται σε δυο συνιστώσες κατά μήκος των x και y αξόνων, την $\boldsymbol{dE_x}$ και την $\boldsymbol{dE_y}$ αντιστοίχως. Για το $\boldsymbol{dE_x}$ ισχύει

[6] Ισχύει για το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

$$\boldsymbol{dE}_x = \boldsymbol{dE}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{a^2}\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}} \qquad (2α)$$

και

$$\boldsymbol{dE}_y = \boldsymbol{dE}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{a^2}\cos\theta\hat{\boldsymbol{j}} \qquad (2β)$$

Επειδή η κατανομή φορτίου είναι ομοιόμορφη κατά μήκος του τεταρτημορίου, η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή και ίση με

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi\alpha/4} \Rightarrow \lambda = \frac{2Q}{\pi\alpha} \qquad (3)$$

Για το στοιχειώδες τμήμα της ράβδου με φορτίο dq και μήκος dl, λόγω της εξ. 3 ισχύει

$$dq = \frac{2Q}{\pi\alpha}dl \qquad (4)$$

Επίσης το στοιχειώδες μήκος dl που αντιστοιχεί σε γωνία $d\theta$, γράφεται

$$dl = \alpha d\theta \qquad (5)$$

Λόγω των εξισώσεων 4 και 5, οι αντίστοιχες 2α και 2β γράφονται

$$\boldsymbol{dE}_x = \boldsymbol{dE}\sin\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\sin\theta d\theta\hat{\boldsymbol{i}} \qquad (6α)$$

και

$$\boldsymbol{dE}_y = \boldsymbol{dE}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\cos\theta d\theta\hat{\boldsymbol{j}} \qquad (6β)$$

Για να υπολογίσουμε την συνολική E_x συνιστώσα του πεδίου E που δημιουργεί το τεταρτημόριο κατά μήκος του άξονα x, ολοκληρώνουμε την εξ. 6α. Επομένως

$$E_x = \int dE_x = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\sin\theta d\theta = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\cos(\pi/2) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\cos(0) = 0 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2} \Rightarrow E_x = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_o\alpha^2} \qquad (7α)$$

Ομοίως για την συνολική E_y συνιστώσα του πεδίου E γράφουμε

$$E_y = \int dE_y = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\cos\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\sin(\pi/2) - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2}\sin(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2Q}{\pi\alpha^2} - 0 \Rightarrow E_y = \frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_o\alpha^2} \qquad (7β)$$

Τελικά γνωρίζοντας τις συνιστώσες E_x και E_y μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο του πεδίου E ως

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{2\left(\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_o\alpha^2}\right)^2} \Rightarrow E = \frac{\sqrt{2}Q}{2\pi^2\varepsilon_o\alpha^2} \qquad (8)$$

Η κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{E}$ είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο με γωνία φ, όπου

$$\tan\varphi = \frac{E_y}{E_x} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^o.$$

2.4 Κίνηση ηλεκτρικού φορτίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, όταν ένα ηλεκτρικό φορτίο ευρεθεί μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο, ασκείται επάνω του μια ηλεκτρική δύναμη, οπότε το φορτίο κινείται με επιτάχυνση. Όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές, δηλαδή το διάνυσμα $\boldsymbol{E}$ είναι σταθερό σ' όλη την έκταση του πεδίου, η δύναμη $\boldsymbol{F}$ και επομένως και η επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha}$ του φορτίου είναι επίσης σταθερή. Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{q\boldsymbol{E}}{m} \tag{2.7}$$

Ένα παράδειγμα ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, είναι αυτό που δημιουργείται ανάμεσα από δυο παράλληλες και ομοιογενώς αντίθετα φορτισμένες επίπεδες μεταλλικές πλάκες, όπως δείχνει το σχ. 2.9. Εάν θεωρήσουμε ότι ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται εντός του ηλεκτρικού πεδίου οριζοντίως και με αρχική ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_o}$, μια κατακόρυφη ηλεκτρική δύναμη $\boldsymbol{F}$ ασκείται επάνω του. Αυτή η δύναμη επιταχύνει το ηλεκτρόνιο προς τα κάτω, αναγκάζοντάς το να εκτραπεί από την αρχική του πορεία. Η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου δίνεται από την εξ. 2.7. Η βαρυτική δύναμη έχει σκοπίμως αγνοηθεί, μιας και η ισχύ της είναι απειροελάχιστη σε σύγκριση με την ηλεκτρική (περίπου 10^{14} φορές ασθενέστερη). Σε μια τυχαία θέση της τροχιάς του το ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_x \hat{\boldsymbol{x}} + \upsilon_y \hat{\boldsymbol{y}} \tag{2.8}$$

Η οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon_o}$ δεν αλλάζει, διότι κατά μήκος της x διεύθυνσης δεν ασκείται κάποια δύναμη. Αντίθετα στην y διεύθυνση το μέτρο της ταχύτητας μεταβάλλεται με τον χρόνο σύμφωνα με την σχέση

$$\upsilon_y = at = \frac{eE}{m}t \tag{2.9}$$

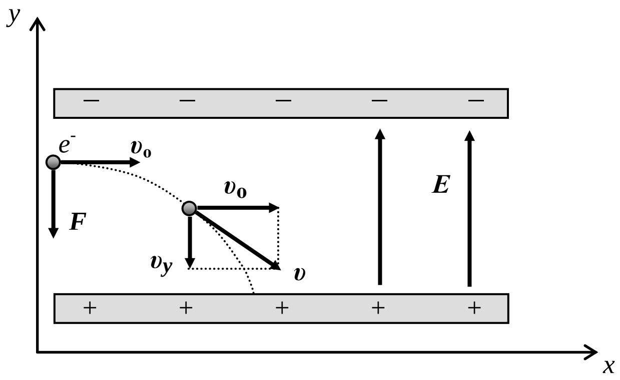
Οι συντεταγμένες του ηλεκτρονίου μετά από χρόνο t από την είσοδό του στο ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$x = \upsilon_o t \tag{2.10α}$$

και μέσω της εξ. 2.10α η κάθετη μετατόπιση του ηλεκτρονίου είναι

$$y = \frac{1}{2}at^2 \overset{(2.10\alpha)}{\Rightarrow} y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \tag{2.10β}$$

Για $t=x/\upsilon_o$, η εξ. 2.10β δίνει την εξίσωση της τροχιάς του ηλεκτρονίου



Σχήμα 2.9 *Κίνηση ηλεκτρονίου στο επίπεδο, μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο.*

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m\upsilon_o}x^2 \tag{2.11}$$

δηλαδή

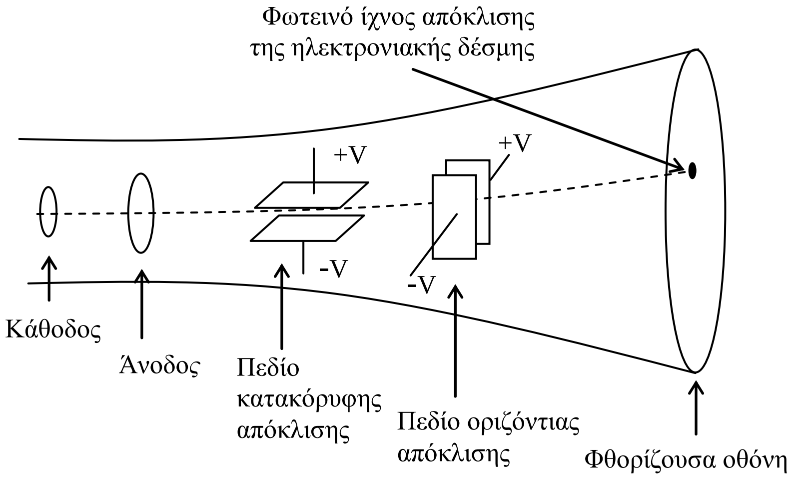
$$y = Ax^2 \tag{2.12}$$

όπου $A=eE/m\upsilon_o$.

Από την εξ. 2.12 είναι φανερό ότι η τροχιά που διαγράφει το ηλεκτρόνιο είναι παραβολή. Στην πραγματικότητα δηλαδή, το ηλεκτρόνιο εκτελεί οριζόντια βολή. Εάν το ηλεκτρόνιο εξέλθει από το ηλεκτρικό πεδίο, θα εκτελέσει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, διότι η ηλεκτρική δύναμη $\boldsymbol{F}$ σταματά να δρα πάνω του.

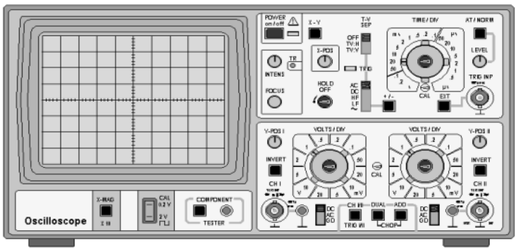
2.4.1 Ο παλμογράφος

Μια τεχνολογική εφαρμογή του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου και της κίνησης ηλεκτρικών φορτίων μέσα σ' αυτό, είναι η συσκευή του παλμογράφου (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Giancoli, 2012). Ο **παλμογράφος** είναι όργανο το οποίο χρησιμοποιείται για ηλεκτρικές μετρήσεις. Το βασικό εξάρτημα του παλμογράφου είναι ο **σωλήνας Braun** (Μπράουν), ή αλλιώς **λυχνία καθοδικών ακτίνων**, η οποία παράγει μια δέσμη ηλεκτρονίων που επιταχύνονται προς την θετικά φορτισμένη άνοδο. Η δέσμη ηλεκτρονίων περνά διαμέσου δυο ηλεκτρικών πεδίων που δημιουργούνται από δυο ζεύγη παράλληλων οπλισμών τοποθετημένα κάθετα μεταξύ τους. Η λειτουργία της λυχνίας φαίνεται σχηματικά στο σχ. 2.10.



Σχήμα 2.10 *Σχεδιάγραμμα της λυχνίας καθοδικών ακτίνων στην λειτουργία του παλμογράφου. Η ηλεκτρονιακή δέσμη εκτρέπεται από το σύστημα των εξωτερικώς ελεγχομένων ηλεκτρικών πεδίων, αφήνοντας ένα φωτεινό ίχνος στο σημείο πρόσπτωσης πάνω στη φθορίζουσα οθόνη του παλμογράφου.*

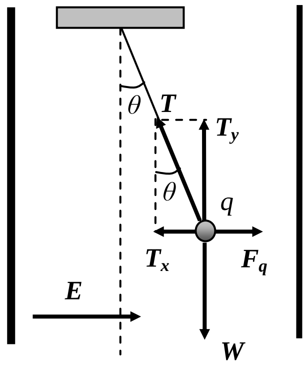
Ανάλογα το ηλεκτρικό πεδίο των πλακών, η ηλεκτρονιακή δέσμη εκτρέπεται και προσκρούει τελικά πάνω στην φθορίζουσα οθόνη αφήνοντας ένα φωτεινό ίχνος. Εφαρμόζοντας μεταβλητές τάσεις στα άκρα των οπλισμών κατακόρυφης και οριζόντιας απόκλισης, είναι δυνατόν να επιτευχθεί σάρωση ολόκληρης της οθόνης από την ηλεκτρονιακή δέσμη. Πριν λίγα χρόνια τέτοιου είδους σάρωση γινόταν και στις οθόνες των τηλεοράσεων και των ηλεκτρονικών υπολογιστών, με τη μόνη διαφορά ότι σ' αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιούνταν μαγνητικά πεδία για την εκτροπή της δέσμης. Βεβαίως σήμερα, οι οθόνες καθοδικού σωλήνα στις τηλεοράσεις και στους ηλεκτρονικούς υπολογιστές έχουν αντικατασταθεί από τις οθόνες υγρών κρυστάλλων (Liquid Crystal Display – LCD) και τις οθόνες φωτοδιόδων (Light Emission Display - LED). Στον παλμογράφο μπορούμε να συνθέσουμε δυο διαφορετικές ηλεκτρικές τάσεις Y και X (σχήματα Lissaejous) ή ακόμα να καταγράψουμε τη μεταβολή μιας τάσης [7] σαν συνάρτηση του χρόνου t (x άξονας), αν το πεδίο της οριζόντιας απόκλισης εκτρέπει την δέσμη με σταθερό ρυθμό (εναλλασσόμενη τάση). Ο παλμογράφος, σχεδιάγραμμα του οποίου φαίνεται στο σχ. 2.11, είναι ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαστηριακό όργανο στις θετικές και βιολογικές επιστήμες.



Σχήμα 2.11 *Σχεδιάγραμμα εμπροσθίου μέρους παλμογράφου HM203-6 της εταιρίας HAMEG Instruments. Διακρίνεται η φθορίζουσα οθόνη.* (*http://www.doctronics.co.uk/scope.htm*). *Ευγενική προσφορά του Dr W. D. Phillips.*

Παράδειγμα 2.6 Στατική ισορροπία φορτίου σε ηλεκτρικό πεδίο

Μικρή σφαίρα μάζας 3 g κρέμεται με νήμα μεταξύ δυο παραλλήλων φορτισμένων πλακών. Το φορτίο της σφαίρας είναι $5.00{\times}10^{-6}$ C. Πόση είναι η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών, ώστε το νήμα να σχηματίσει σταθερή γωνία θ=30^o με την κατακόρυφο, όπως φαίνεται στο σχ. 2.12; Δίδεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g=9.81 m/s^2.



Σχήμα 2.12 *Ισορροπία φορτισμένης σφαίρας αναρτημένης σε νήμα μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο (παράδειγμα 2.6).*

Λύση

[7] Θα εξηγήσουμε τί σημαίνει ηλεκτρική τάση σε επόμενο κεφάλαιο.

Για να σχηματίζει το νήμα σταθερή γωνία πρέπει η σφαίρα να ισορροπεί. Η συνισταμένη δύναμη πάνω στη σφαίρα πρέπει να είναι μηδέν. Άρα

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F_q} + \boldsymbol{W} = 0 \qquad (1)$$

Αναλύουμε την τάση του νήματος $\boldsymbol{T}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες $\boldsymbol{T_x}$ και $\boldsymbol{T_y}$. Τότε ισχύει

$$\boldsymbol{T_x} = -\boldsymbol{F_q} \Rightarrow T_x = F_q \qquad (2)$$

και

$$\boldsymbol{T_y} = -\boldsymbol{W} \Rightarrow T_y = W \Rightarrow T_y = mg \qquad (3)$$

Από την γεωμετρία του σχ. 2.12 μπορούμε να γράψουμε

$$\tan\theta = \frac{T_x}{T_y} \qquad (4)$$

Οι εξισώσεις 2 και 3 στην εξ. 4 δίνουν

$$\tan\theta = \frac{F_q}{mg} \qquad (5)$$

Όμως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται από το πεδίο $\boldsymbol{E}$ πάνω στο φορτίο q είναι

$$\boldsymbol{F_q} = q\boldsymbol{E} \Rightarrow F_q = qE \qquad (6)$$

Η εξ. 6 στην 5 δίνει τελικά

$$E = \frac{mg}{q}\tan\theta \Rightarrow E = \frac{3.00\times10^{-3}\,\mathrm{kg}\times9.81\,\mathrm{m/s^2}}{5.00\times10^{-6}\,\mathrm{C}}\times\tan30^{o} = 9.81\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\times10^{3}\times0.577 \Rightarrow E = 5.89\times10^{3}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

Η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι αυτή του σχήματος 2.12, κάθετα στο επίπεδο των πλακών. Δηλαδή ισχύει $\boldsymbol{E} = 5.89\times10^{3}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\hat{\boldsymbol{i}}$.

Παράδειγμα 2.7. Κίνηση ηλεκτρικού φορτίου σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο

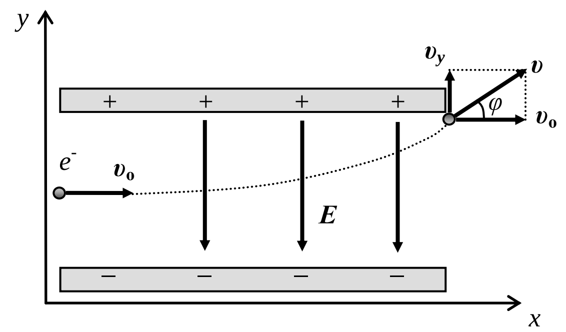
Ηλεκτρόνιο εισέρχεται οριζοντίως σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δυο οριζοντίων πλακών, με αρχική ταχύτητα υ_o=3×10^6 m/s, όπως φαίνεται στο σχ. 2.13. Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου κατευθύνεται κατακόρυφα προς τα κάτω, και η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι 3 cm, ενώ το μήκος τους είναι 5 cm. Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται σε ύψος ακριβώς ενδιάμεσα των δύο πλακών και εξέρχεται ξυστά από την επάνω πλάκα. Να ευρεθεί α) το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου, και β) η ταχύτητα εξόδου του ηλεκτρονίου. Δίνονται η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου, m_e=9.11×10^{-31} kg και e=1.60×10^{-19} C αντιστοίχως.

Λύση

α) Κατά την διάρκεια της κίνησης του ηλεκτρονίου μέσα στο πεδίο ασκείται επάνω του ηλεκτρική δύναμη, η οποία έχει φορά προς τα επάνω διότι ισχύει

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \qquad (1)$$

Η βαρυτική δύναμη επάνω στο ηλεκτρόνιο μπορεί να αγνοηθεί, μιας και είναι απειροελάχιστη εν συγκρίσει με την ηλεκτρική. Γι' αυτόν τον λόγο η τροχιά που ακολουθεί το ηλεκτρόνιο είναι προς την επάνω θετικά φορτισμένη πλάκα (σχ. 2.13). Λόγω της φοράς της σταθερής ηλεκτρικής δύναμης, το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα πάνω, οπότε η τεταγμένη y δίνεται ως



Σχήμα 2.13 *Κίνηση ηλεκτρονίου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο παραλλήλων πλακών (παράδειγμα 2.7).*

$$y = \frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

ενώ, επειδή οριζοντίως δεν υπάρχει δύναμη, το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλή ευθύγραμμη κίνηση με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon_o}$ οπότε η τετμημένη x δίνεται ως

$$x = \upsilon_o t \qquad (3)$$

Η επιτάχυνση α δίδεται από την σχέση

$$a = \frac{F}{m_e} \overset{(1)}{\Rightarrow} a = \frac{eE}{m_e} \qquad (4)$$

Η εξ. 2 βάσει των 3 και 4 δίνουν

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\left(\frac{x}{\upsilon_o}\right)^2 \Rightarrow E = \frac{2m_e\upsilon_o^{\,2}y}{ex^2} \qquad (5)$$

Όταν το ηλεκτρόνιο περνά ξυστά από την επάνω πλάκα και βγαίνει εκτός πεδίου, η θέση του στο κατακόρυφο επίπεδο xy, είναι x_o=5 cm και y_o=1.5 cm. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στην εξ. 5 παίρνουμε

$$E = \frac{2m_e\upsilon_o^{\,2}y}{ex^2} = \frac{2\times 9.11\times 10^{-31}\,\text{kg}\times(3\times 10^6\,\text{m/s})^2\times 1.5\times 10^{-2}\,\text{m}}{1.60\times 10^{-19}\,\text{C}\times(5\times 10^{-2}\,\text{m})^2} \Rightarrow E = 615\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

β) Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα εξόδου του ηλεκτρονίου, θα πρέπει να αναλύσουμε την ταχύτητα σε δυο συνιστώσες υ_x και υ_y, όπως φαίνεται στο σχ. 2.13. Τότε ισχύει ότι

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_x + \boldsymbol{\upsilon}_y \qquad (6)$$

ή αλλιώς

$$\boldsymbol{\upsilon} = \upsilon_x\boldsymbol{\hat{i}} + \upsilon_y\boldsymbol{\hat{j}} \qquad (7)$$

οπότε για το μέτρο της υ ισχύει

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \qquad (8)$$

όπου $\upsilon_x=\upsilon_o$, και για την συνιστώσα υ_y ισχύει ότι

$$\upsilon_y = at \overset{(4)}{\Rightarrow} \upsilon_y = \frac{eE}{m_e}t \overset{(3)}{\Rightarrow} \upsilon_y = \frac{eE}{m_e}\frac{x_o}{\upsilon_o} \Rightarrow \upsilon_y = \frac{1.60\times 10^{-19}\,\text{C}\times 615\,\text{N/C}\times 5\times 10^{-2}\,\text{m}}{9.11\times 10^{-31}\,\text{kg}\times 3\times 10^6\,\text{m/s}} \Rightarrow \upsilon_y = 1.80\times 10^6\,\text{m/s}$$

Έτσι η εξ.8 δίνει τελικά

$$\upsilon = \sqrt{(3\times 10^6\,\text{m/s})^2 + (1.80\times 10^6\,\text{m/s})^2} = \sqrt{12.2\times 10^{12}\,(\text{m/s})^2} \Rightarrow \upsilon = 3.49\times 10^6\,\text{m/s}$$

Η κατεύθυνση της ταχύτητας δίνεται από την γωνία φ ως προς τον ορίζοντα (άξονας x, σχ. 2.7), όπου

$$\tan\varphi = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{1.80\times 10^6\,\text{m/s}}{3.00\times 10^6\,\text{m/s}} = 0.6 \Rightarrow \varphi = 31^{\text{o}}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

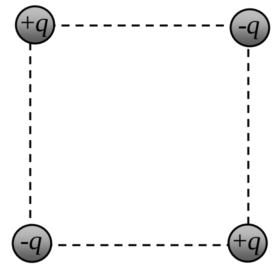
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε2.1* Ένα ηλεκτρόνιο κινείται προς τα δεξιά εκτελώντας ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Ποια είναι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση εάν αντί για ηλεκτρόνιο έχουμε πρωτόνιο.

Ε2.2 Φορτισμένο σώμα ισορροπεί αιωρούμενο σε χώρο όπου υπάρχει βαρυτικό πεδίο. Εξηγείστε πώς το σώμα ενώ έχει βάρος, δεν εκτελεί ελεύθερη πτώση.

Ε2.3 Θεωρείστε δυο ηλεκτρικά δίπολα ικανά να κινούνται ελεύθερα στο χώρο. Ποια θα είναι η τελική τους κατάληξη όσον αφορά τη θέση του ενός ως προς το άλλο;

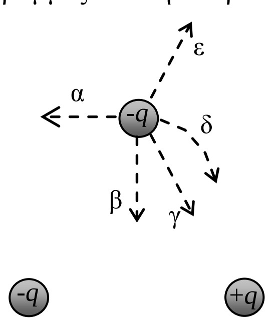
Ε2.4 Δυο σημειακά ηλεκτρικά φορτία απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση. Εάν σε κάποιο σημείο αυτής της απόστασης το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τα δυο φορτία;



Σχήμα 2.14 *Ερώτηση 2.6.*

Ε2.5 Σχεδιάστε τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές στο χώρο ηλεκτρικού πεδίου που σχηματίζει μια ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη μεταλλική πλάκα ορθογωνίου σχήματος. Επαναλάβετε για παρόμοια αρνητικά φορτισμένη πλάκα.

Ε2.6 Θεωρείστε τα τέσσερα ηλεκτρικά φορτία του σχήματος 2.14, τα οποία είναι ακίνητα και τοποθετημένα στις κορυφές τετραγώνου. Σχεδιάστε τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που σχηματίζουν στο χώρο του επιπέδου *xy*. Υπάρχει κάποιο σημείο όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν;



Σχήμα 2.15 *Ερώτηση 2.8.*

Ε2.7 Οι δυναμικές γραμμές ενός ηλεκτρικού πεδίου δεν τέμνονται ποτέ. Μπορείτε να φανταστείτε τον λόγο;

Ε2.8 Τρία μικρών διαστάσεων ηλεκτρικά φορτία ευρίσκονται επάνω σε λείο επίπεδο, τοποθετημένα στις κορυφές ενός νοητού ισόπλευρου τριγώνου, όπως δείχνει το σχ. 2.15. Τα δυο φορτία στη βάση του τριγώνου είναι πακτωμένα σε σταθερές θέσεις και δεν μπορούν να κινηθούν. Αντιθέτως, το τρίτο φορτίο είναι ελεύθερο να κινείται χωρίς τριβές. Ποια από τις πέντε διαδρομές θα ακολουθήσει;

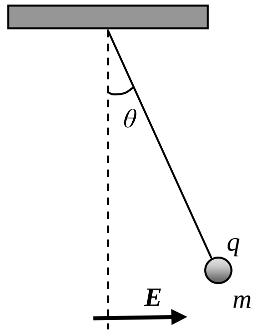
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π2.1. Ηλεκτρικό πεδίο πυρήνα. Ο ατομικός αριθμός του μολύβδου είναι 82. α) Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο του πυρήνα του ατόμου του μολύβδου σε απόσταση r=6.00×10^{-10} m από τον πυρήνα; β) Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί ένα πρωτόνιο σε απόσταση r=5.28×10^{-11} m από αυτό; Δίνεται η παγκόσμια ηλεκτρική σταθερά K=9×10^{9} N.m^{2}.C^{-2}. *Απάντηση*: α) 3.28×10^{11} N/C, και β) 5.16×10^{11} N/C.

Π2.2. Ηλεκτρικό πεδίο δύο σημειακών φορτίων. Δυο σωμάτια σε απόσταση 1.80 m μεταξύ τους έχουν φορτία q_1=1.00×10^{-6} C και q_2=2.00×10^{-6} C αντιστοίχως. Σε ποιο σημείο μεταξύ των δυο φορτίων μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο; *Απάντηση*: 0.748 m.

Π2.3. Ηλεκτρικό πεδίο δύο σημειακών φορτίων. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο κατά μέτρο και κατεύθυνση στο μέσον ευθείας μήκους r=3 m, η οποία ενώνει δυο φορτία q_1=-4.7 μC και q_2=9.0 μC. Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά K=9×10^9 N.m^2.C^{-2}. *Απάντηση*: 54.8×10^3 N/C.

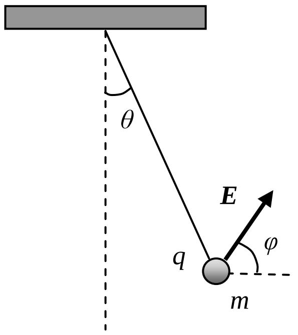
Π2.4. Φορτίο σε ηλεκτρικό πεδίο. Ένα μικρό πλαστικό σφαιρίδιο μάζας 2 g, αναρτάται από νήμα μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης 10^3 N/C όπως φαίνεται στο σχ. 2.16. Αν το σφαιρίδιο ισορροπεί όταν το νήμα σχηματίζει γωνία θ=15^o με την κατακόρυφο στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, ποιο είναι το φορτίο του σφαιριδίου; Είναι θετικό ή αρνητικό; Δίνεται g=9.81 m/s^2. *Απάντηση*: +5.2×10^{-6} C.



Σχήμα 2.16 *Πρόβλημα 2.4.*

Π2.5. Ισορροπία ηλεκτρικού φορτίου. Πόσο πρέπει να είναι το φορτίο (πρόσημο και μέγεθος) σωματίου με μάζα 5.60 g, ώστε να παραμείνει ακίνητο όταν τοποθετηθεί μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο E=5000 N/C και κατεύθυνση προς τα κάτω; Δίνεται g=9.81 m/s^2. *Απάντηση*: q=-10 μC.

Π2.6. Ηλεκτρικό πεδίο και δύναμη. Δύο ίσα και αντίθετα ηλεκτρικά φορτία q=1.88×10^{-7} C, συγκρατούνται σε απόσταση 15.2 cm μεταξύ τους. α) Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ στο μέσον της απόστασης των δυο φορτίων; β) Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης που ασκείται πάνω σε ένα ηλεκτρόνιο εάν τοποθετηθεί σ' αυτό το σημείο; Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά Coulomb, K=9×10^{9}N.m^2/C^2 και το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου e=1.6×10^{-19}C. *Απάντηση*: α) 5.86×10^5 N/m, και β) 9.38×10^{-14} N.

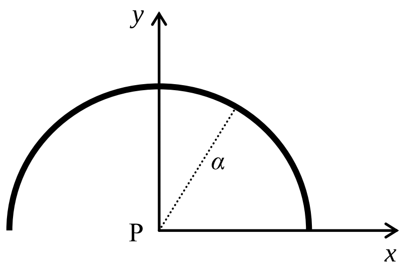


Σχήμα 2.17 *Πρόβλημα 2.7.*

Π2.7. Ισορροπία ηλεκτρικού φορτίου. Ένα φορτισμένο σφαιρίδιο από φελλό μάζας m=1 g αναρτάται με ελαφρό νήμα στην περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου E=5.83×10^5 N/C που έχει την κατεύθυνση του σχήματος 2.17 σχηματίζοντας γωνία φ=60^o με τον ορίζοντα. Το σφαιρίδιο ισορροπεί σχηματίζοντας γωνία θ=37^o με την κατακόρυφο. Υπολογίστε α) το φορτίο του σφαιριδίου, και β) την τάση του νήματος. *Απάντηση*: α) 10 nC και β) 5.3×10^{-3}N.

Π2.8. Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένης ράβδου. Ευθύγραμμη ράβδος μήκους L=5 m φορτίζεται, έτσι ώστε η γραμμική πυκνότητα φορτίου να είναι λ=kx, όπου k=5×10^{-9} C/m μια σταθερά, και x το μήκος της ράβδου το οποίο εκτείνεται από 0 έως L. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε ένα σημείο που ευρίσκεται στην προέκταση της ράβδου, προς την θετική κατεύθυνση και σε απόσταση 1 cm από το τέλος της. Δίνεται η ηλεκτρική σταθερά K=9×10^9 N.m^2/C^2. *Απάντηση*: 2.2×10^4 N/C.

Π2.9. Ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου ημικυκλίου. Θετικό ηλεκτρικό φορτίο Q είναι συνολικά κατανεμημένο ομοιόμορφα πάνω σε ημικύκλιο με ακτίνα α όπως φαίνεται στο σχ. 2.18. Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο (κατά μέτρο και κατά διεύθυνση) στο κέντρο καμπυλότητας (σημείο P);



Σχήμα 2.18 *Πρόβλημα 2.9*

Π2.10. Κίνηση ηλεκτρονίου σε ηλεκτρικό πεδίο. Ηλεκτρόνιο κινείται με ταχύτητα υ_o=5×10^6 m/s και εκτοξεύεται παράλληλα προς το ηλεκτρικό πεδίο έντασης E=1×10^3 N/C που επιβραδύνει την κίνησή του. α) Πόση απόσταση θα διανύσει το ηλεκτρόνιο ώσπου να σταματήσει (στιγμιαία); β) Πόσος χρόνος θα περάσει από την στιγμή που άρχισε η επιβράδυνση; Δίνονται m_e=9×10^{-31} kg και e=-1.6×10^{-19} C. *Απάντηση*: α) 0.071 m, και β) 2.8×10^{-8} s.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 3

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ GAUSS

Σύνοψη

Στο τρίτο τούτο κεφάλαιο ορίζεται η ποσότητα της ηλεκτρικής ροής και περιγράφεται ο νόμος του Gauss, με τον οποίο υπολογίζουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο διαφόρων μη σημειακών, αλλά συμμετρικών ηλεκτρικών φορτίων. Μελετάμε τα κύρια είδη των συμμετριών στο χώρο, και πώς αυτά συμβάλλουν στην επίλυση προβλημάτων ηλεκτροστατικής. Τέλος αναφέρουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα του νόμου του Gauss για την ηλεκτροστατική ισορροπία των αγωγών.

Προαπαιτούμενη γνώση

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Γεωμετρικά στοιχεία (όγκος και εμβαδόν) γεωμετρικών σχημάτων π.χ. κυλίνδρου, σφαίρας, κ.ά.

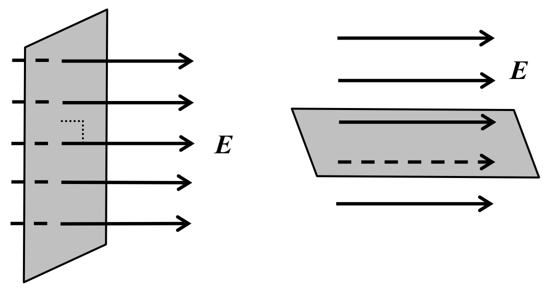
3.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο υπολογισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ***E*** μιας κατανομής φορτίου στο χώρο, μπορεί να γίνει, είτε με τον υπολογισμό ενός αθροίσματος για κατανομή σημειακών διακριτών φορτίων, είτε ενός ολοκληρώματος για συνεχή κατανομή φορτίου. Ο υπολογισμός αυτός βασίζεται στον νόμο του Coulomb και εκφράζεται με το ολοκλήρωμα της εξ. 2.6, το οποίο όμως συχνά αποδεικνύεται δύσκολα επιλύσιμο. Ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού του πεδίου ***E*** για μια συνεχή κατανομή φορτίου είναι ο νόμος του Gauss, ο οποίος είναι γενικότερος και πιο θεμελιώδης από τον νόμο του Coulomb. Ο νόμος του Gauss φέρει το όνομα του διασήμου Γερμανού φυσικού, μαθηματικού και αστρονόμου, Karl Friedrich Gauss (1777-1855), και για τις περιπτώσεις υπολογισμού ηλεκτρικών πεδίων από φορτισμένα σώματα συμμετρικού σχήματος, αποδεικνύεται πολύ πιο εύχρηστος και προτιμάται αντί του νόμου του Coulomb. Γενικότερα, ο νόμος του Gauss είναι σημαντικός για τον ηλεκτρισμό (και όχι μόνο), διότι μας προσφέρει την σχέση αλληλεξάρτησης του ηλεκτροστατικού πεδίου από το ηλεκτρικό φορτίο. Πριν όμως περιγράψουμε τον νόμο του Gauss, πρέπει να ορίσουμε την φυσική ποσότητα της ηλεκτρικής ροής, η οποία δημιουργείται από ένα ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855) (https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#/media/File:Carl_Friedrich_Gauss.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

3.2 Ηλεκτρική ροή

Όταν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την περιγραφή του ηλεκτρικού πεδίου ορίσαμε τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, αναφέραμε ότι η ένταση του πεδίου ***E*** είναι ανάλογη του αριθμού των δυναμικών γραμμών ανά μονάδα επιφανείας, δηλαδή ανάλογη της πυκνότητάς τους στον χώρο. Η αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου στον χώρο με την χρήση νοητών δυναμικών γραμμών, δημιουργεί την εντύπωση μιας ροής του πεδίου προς την κατεύθυνση που δείχνουν αυτές οι γραμμές. Έτσι λοιπόν, όπως ένα ρευστό δημιουργεί μια ροή στο χώρο, γνωστή ως υδροδυναμική ροή, με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υποθέσουμε ότι και το ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί μια αντίστοιχη ηλεκτρική ροή. Εάν τώρα θεωρήσουμε μια επιφάνεια (νοητή ή πραγματική), ο αριθμός των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών οι οποίες διαρρέουν νοητά την επιφάνεια, εξαρτάται από το μέγεθός της αλλά και από τον προσανατολισμό της ως προς τις δυναμικές γραμμές. Για παράδειγμα, εάν έχουμε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ***E***, (σταθερή πυκνότητα δυναμικών γραμμών στο χώρο), ο αριθμός των γραμμών που διαπερνούν μια υποθετική επιφάνεια, είναι μέγιστος όταν οι δυναμικές γραμμές διαρρέουν κάθετα την επιφάνεια, όπως δείχνει το σχ. 3.1α. Αντιθέτως, εάν οι δυναμικές γραμμές είναι παράλληλες με την επιφάνεια, καμία δυναμική γραμμή δεν διαρρέει την επιφάνεια, όπως δείχνει το σχ. 3.1β. Έτσι λοιπόν, καθώς οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου διαρρέουν μια επιφάνεια, δημιουργούν σ' αυτήν μια ροή, η οποία δεν εξαρτάται μόνο από το μέγεθος της επιφανείας, αλλά και από τον προσανατολισμό αυτής ως προς τις δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου. Η ροή των δυναμικών γραμμών και επομένως του ηλεκτρικού πεδίου διαμέσου μιας επιφάνειας, περιγράφεται με την φυσική ποσότητα της **ηλεκτρικής ροής**, η οποία μαθηματικώς εκφράζεται από το εσωτερικό γινόμενο του ηλεκτρικού πεδίου ***E*** και του εμβαδού της επιφάνειας *S*, ως



(α) (β)

Σχήμα 3.1 *(α) Κάθετος προσανατολισμός επιφάνειας με ηλεκτρικό πεδίο **E**, επιφέρει την μέγιστη ροή δυναμικών γραμμών. (β) Παράλληλος προσανατολισμός επιφάνειας με ηλεκτρικό πεδίο **E**, επιφέρει μηδενική ροή δυναμικών γραμμών.*

$$\Phi_E = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} \tag{3.1}$$

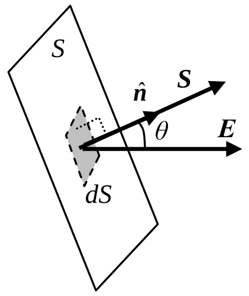
όπου η επιφάνεια εκφράζεται με διάνυσμα ***S***, μέτρου *S* και κατευθύνσεως κάθετης στην επιφάνεια (Grant & Phillips, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young. & Freedman, 2010), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Τον διανυσματικό χαρακτήρα του εμβαδού *S* της επιφανείας, τον ορίζει το κάθετο στην επιφάνεια μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{n}}$, ώστε να ισχύει

$$\boldsymbol{S} = S\hat{\boldsymbol{n}} \tag{3.2}$$

Από τα παραπάνω το μέτρο της ηλεκτρικής ροής είναι

$$\Phi_E = ES\cos\theta \tag{3.3}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ του ηλεκτρικού πεδίου και της επιφάνειας, δηλαδή μεταξύ των διανυσμάτων ***E*** και $\hat{\boldsymbol{n}}$ όπως φαίνεται στο σχ. 3.2. Είναι προφανές ότι για θ=0^o η ηλεκτρική ροή είναι μέγιστη (σχ. 3.1α), ενώ για θ=90^o είναι μηδενική (σχ. 3.1β). Η ηλεκτρική ροή είναι μονόμετρο μέγεθος και δύναται να παίρνει και αρνητικές τιμές. Η μονάδα μέτρησης της ηλεκτρικής ροής στο ΔΣΜ είναι το 1 Nm^2/C.



Σχήμα 3.2 *Επίπεδη επιφάνεια εμβαδού S, η οποία διαρρέεται από ηλεκτρικό πεδίο **E**. Η επιφάνεια αναπαριστάται από το κάθετο σ' αυτήν διάνυσμα **S**, ενώ ο προσανατολισμός της ως προς το πεδίο ορίζεται από την γωνία θ. Η μικρή σκιασμένη επιφάνεια dS, αποτελεί στοιχειώδες τμήμα ολόκληρης της επιφανείας εμβαδού S.*

Για ένα στοιχειώδες εμβαδόν *dS* (σχ. 3.2), η αντίστοιχη στοιχειώδης ηλεκτρική ροή $d\Phi_E$, η οποία διαρρέει το *dS* είναι

$$d\Phi_E = EdS\cos\theta \tag{3.4}$$

Η συνολική ροή Φ_E η οποία διαρρέει την επιφάνεια εμβαδού *S*, δίνεται από την ολοκλήρωση της εξ. 3.4, δηλ. ισχύει

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int EdS\cos\theta \Rightarrow \Phi_E = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dS} \tag{3.5}$$

Το ολοκλήρωμα της ηλεκτρικής ροής Φ_E είναι επιφανειακό ολοκλήρωμα, διότι η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε επιφάνεια. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο ***E*** είναι σταθερής έντασης και ιδίου προσανατολισμού κατά όλο το μήκος και πλάτος της επιφανείας, το ολοκλήρωμα 3.5 είναι εύκολο να επιλυθεί. Σε αυτό το γεγονός, όπως θα ιδούμε παρακάτω, συνεργεί η συμμετρία του πεδίου που δημιουργείται κυρίως από ομοιόμορφα φορτισμένα σώματα, τα οποία ταυτοχρόνως έχουν και κάποια γεωμετρική συμμετρία. Εάν το ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές, ή ο προσανατολισμός του με την επιφάνεια δεν είναι σταθερός, ο υπολογισμός του πεδίου με χρήση του νόμου του Gauss είναι εξαιρετικά δύσκολος.

Παράδειγμα 3.1 Ηλεκτρική ροή δια μέσω ορθογωνίου παραλληλογράμμου

Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές α=2 cm και b=4 cm, μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο εντάσεως E=3×10^3 N/C. Η κατεύθυνση του πεδίου σχηματίζει γωνία θ=30^o με την κάθετο στην επιφάνεια του παραλληογράμμου, όπως δείχνει το σχ. 3.3. α) Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή που διαρρέει την επιφάνεια. β) Ποια είναι η ηλεκτρική ροή, εάν το επίπεδο του παραλληλογράμμου είναι κάθετο στο πεδίο ***E***; γ) Ποια είναι η ροή όταν το παραλληλόγραμμο είναι παράλληλο στο ***E***;

Λύση

α) Για την ηλεκτρική ροή γράφουμε

$$\Phi_E = \int d\Phi_E = \int E dS \cos\theta = E\cos\theta \int dS \Rightarrow \Phi_E = ES\cos 30^o = Eab\cos 30^o \Rightarrow$$

$$\Phi_E = 3\times 10^3 \text{N/C} \times 2\times 10^{-2}\text{m} \times 4\times 10^{-2}\text{m} \times 0.866 \Rightarrow \Phi_E = 2.08\text{Nm}^2/\text{C}$$

β) Αν το πεδίο ***E*** είναι κάθετο στο παραλληλόγραμμο, η γωνία είναι $\theta=0^o$, και επομένως η ροή είναι

$$\Phi_E = ES\cos 0^o \Rightarrow \Phi_E = 3\times 10^3 \text{ N/C} \times 2\times 10^{-2}\text{m} \times 4\times 10^{-2}\text{m} \Rightarrow$$

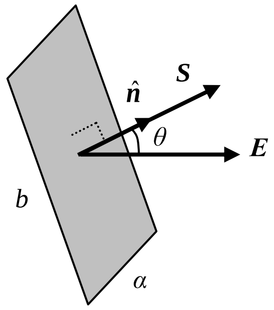
$$\Phi_E = 2.40\text{Nm}^2/\text{C}$$

δηλαδή είναι η μέγιστη ηλεκτρική ροή που μπορεί να επιτευχθεί γι' αυτήν την επιφάνεια.

γ) Αν το πεδίο ***E*** είναι παράλληλο με την επιφάνεια του παραλληλογράμμου, η γωνία είναι $\theta=90^o$ και επομένως η ηλεκτρική ροή είναι μηδενική. Δηλαδή ισχύει

$$\Phi_E = ES\cos 90^o \Rightarrow \Phi_E = 0$$

Σ' αυτήν την περίπτωση καμία νοητή δυναμική γραμμή δεν διαπερνά το παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 3.3 *Ορθογώνια επιφάνεια διαστάσεων a και b, η οποία διαρρέεται από ηλεκτρικό πεδίο **E**. Ο προσανατολισμός μεταξύ πεδίου κι επιφάνειας ορίζεται από την γωνία θ (παράδειγμα 3.1).*

Παράδειγμα 3.2 Ηλεκτρική ροή δια μέσω κύβου

Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή πεδίου ***E***, που διέρχεται δια μέσω ενός κύβου ακμής *α* με διεύθυνση παράλληλη προς κάποια ακμή του, όπως φαίνεται στο σχ. 3.4.

Λύση

Για να εύρουμε την συνολική ηλεκτρική ροή, η οποία διαρρέει τον κύβο, θα πρέπει να υπολογίσουμε την ροή κάθε πλευράς και στη συνέχεια να προσθέσουμε όλες τις επιμέρους ροές. Έτσι ισχύει

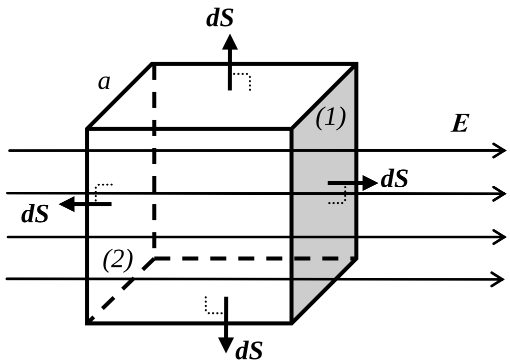
$$\Phi_E = \int d\Phi = \int d\Phi_1 + \int d\Phi_2 + \int d\Phi_3 + \int d\Phi_4 + \int d\Phi_5 + \int d\Phi_6 \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \int E dS\cos 0^o + \int E dS\cos 180^o + \int E dS\cos 90^o +$$

$$\int E dS\cos 90^o + \int E dS\cos 90^o + \int E dS\cos 90^o \Rightarrow$$

$$\Phi_E = Ea^2 - Ea^2 + 0 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow \Phi_E = 0$$

Η ροή από κάθε πλευρά, την οποία δεν διασχίζουν οι δυναμικές γραμμές είναι μηδέν, διότι για την γωνία 90^o το συνημίτονο είναι μηδέν. Μόνο οι ροές των πλευρών *(1)* και *(2)* είναι μη μηδενικές, διότι οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές είναι κάθετες στις πλευρές αυτές. Επειδή όμως οι ροές Φ_1 και Φ_2 είναι αντίθετες μεταξύ τους, η συνολική ηλεκτρική ροή που διαπερνά τον κύβο είναι μηδέν. Αυτό εξηγείται λόγω του γεγονότος ότι όσες δυναμικές γραμμές εισέρχονται στον κύβο, τόσες και εξέρχονται. Γενικότερα, κάθε επιφάνεια η οποία δεν περικλείει ηλεκτρικό φορτίο, έχει ηλεκτρική ροή μηδέν.



Σχήμα 3.4 *Δυναμικές γραμμές ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου διαπερνούν κύβο ακμής a παράλληλα προς αυτήν (παράδειγμα 3.2).*

3.3 Ο νόμος του Gauss

Έχοντας ορίσει την ηλεκτρική ροή μπορούμε να προχωρήσουμε στην διατύπωση του **νόμου του Gauss**, σύμφωνα με τον οποίο η ηλεκτρική ροή που διαπερνά μια οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι ανάλογη με το συνολικό φορτίο (λαμβάνοντας υπ' όψη και το αλγεβρικό πρόσημο), το οποίο αυτή η επιφάνεια περικλείει. Στη συνέχεια θα ιδούμε πώς μπορούμε να καταλήξουμε στη μαθηματική διατύπωση του νόμου του Gauss, ξεκινώντας από τον ορισμό του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ σημειακού φορτίου, απόρροια του νόμου του Coulomb.

Έστω λοιπόν, θετικό σημειακό φορτίο q το οποίο δημιουργεί στον κενό χώρο ηλεκτρικό πεδίο μέτρου

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r^2} \qquad (3.6)$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε μια υποθετική σφαίρα με ακτίνα R, στο κέντρο της οποίας ευρίσκεται το φορτίο q, η επιφάνεια της σφαίρας περικλείει συνολικό φορτίο q. Σύμφωνα με την εξ. 3.5, και επειδή το πεδίο $\boldsymbol{E}$ εκτείνεται ακτινικά στο χώρο, τέμνοντας κάθετα την σφαιρική επιφάνεια ($\theta={}^{o}0$), η ηλεκτρική ροή που διαπερνά την σφαιρική επιφάνεια είναι

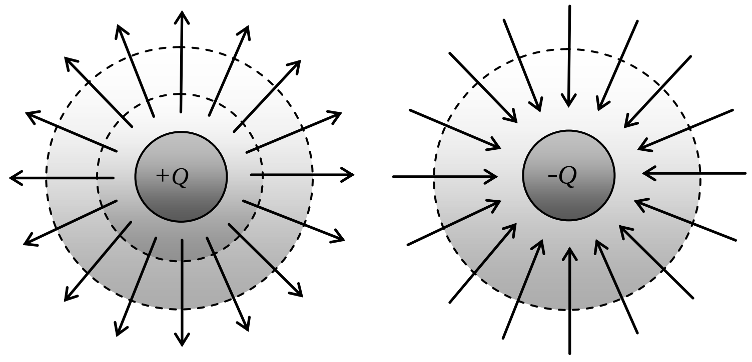
$$\Phi_E = \int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} = \int EdS = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R^2}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R^2}\int dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 \Rightarrow \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad (3.7)$$

Η εξ. 3.7 είναι η μαθηματική έκφραση του νόμου του Gauss, ο οποίος μας εκφράζει την αναλογία της ηλεκτρικής ροής με το φορτίο που περικλείει η κλειστή επιφάνεια (στην προκειμένη περίπτωση η σφαιρική επιφάνεια), η οποία ονομάζεται **επιφάνεια Gauss (Γκάους)** ή αλλιώς **γκαουσιανή επιφάνεια**. Η αναλογία μεταξύ ηλεκτρικής ροής και φορτίου, εκφράζεται μέσω του αντιστρόφου της διηλεκτρικής σταθεράς του μέσου, μέσα στο οποίο ευρίσκεται το φορτίο. Βάσει της 3.7, ο **νόμος του Gauss** διατυπώνεται γενικότερα με την εξίσωση

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \qquad (3.8)$$

όπου $q_{\pi\varepsilon\rho}$ είναι το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο που περικλείει η κλειστή επιφάνεια Γκάους (Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Grant & Phillips, 1975), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Επίσης ισχύει και η αντίστροφη διαδικασία, κατά την οποία ξεκινώντας από τον νόμο του Gauss (εξ. 3.8), μπορούμε να δείξουμε, ότι ένα σημειακό φορτίο q δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο που δίνει ο νόμος του Coulomb (βλ. πρόβλημα 3.4).

Στο σημείο αυτό, πρέπει να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις για την εξ. 3.8. Η εξίσωση του νόμου του Gauss ισχύει για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια ανεξαρτήτου μεγέθους και σχήματος, γύρω από το ηλεκτρικό φορτίο, το οποίο επίσης δύναται να έχει οποιοδήποτε μέγεθος και σχήμα, αρκεί να ευρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας Gauss. Ο κύκλος στο σύμβολο του ολοκληρώματος, δηλώνει ότι, η ολοκλήρωση γίνεται πάντα επάνω σε μια κλειστή επιφάνεια γύρω από το φορτίο. Επιπλέον, το εσωτερικό γινόμενο στο ολοκλήρωμα, δηλώνει ότι, στην ουσία ολοκληρώνουμε την κάθετη συνιστώσα $E_\perp$ σε όλη την επιφάνεια, μιας και η οριζόντια συνιστώσα $E_{//}$ (παράλληλη προς την επιφάνεια), δίνει εσωτερικό γινόμενο μηδέν. Η διηλεκτρική σταθερά είναι ε_o , όταν το ηλεκτρικό φορτίο είναι στο κενό. Σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να γνωρίζουμε την διηλεκτρική σταθερά του μέσου μέσα στο οποίο ευρίσκεται το φορτίο. Το πεδίο $\boldsymbol{E}$ έχει κατεύθυνση προς τα «έξω» της επιφάνειας, όταν το φορτίο είναι θετικό, διότι οι ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές απομακρύνονται από το φορτίο, δίνοντας θετική ηλεκτρική ροή (βλ. σχ. 3.5α). Εάν το φορτίο είναι αρνητικό, τότε πεδίο και δυναμικές γραμμές



$\Phi_E > 0$ $\quad$ $\Phi_E < 0$

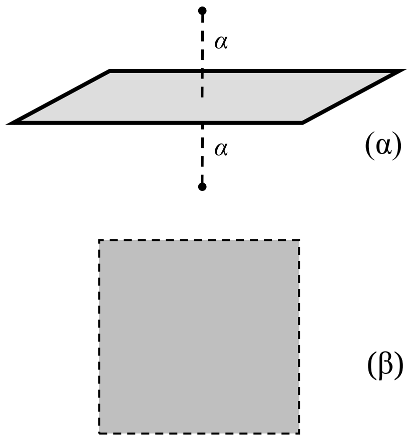
(α) $\quad$ (β)

Σχήμα 3.5 *Οι δυναμικές ηλεκτρικές γραμμές διαρρέουν τις σφαιρικές γκαουσιανές επιφάνειες (διακεκομμένες γραμμές) δημιουργώντας (α) θετική ηλεκτρική ροή ($\Phi_E > 0$), και (β) αρνητική ηλεκτρική ροή ($\Phi_E < 0$).*

κατευθύνονται προς το φορτίο, δηλαδή η $E_\perp$ είναι σε αντίθετη κατεύθυνση από το διάνυσμα $\boldsymbol{S}$ της επιφάνειας, οπότε η ροή είναι αρνητική (βλ. σχ. 3.5β). Όπως προαναφέραμε, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε (και να μην ξεχνούμε), ότι ο νόμος του Gauss (εξ. 3.8), ισχύει για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια ανεξαρτήτου μεγέθους και σχήματος, γύρω από οποιαδήποτε κατανομή φορτίου (σημειακή και μη). Για παράδειγμα στο σχ. 3.5, η ροή παραμένει η ίδια ανεξαρτήτως του μεγέθους της επιφάνειας Gauss. Στη μεγαλύτερη επιφάνεια οι δυναμικές γραμμές είναι πιο αραιές, ενώ στην μικρότερη πιο πυκνές, με αποτέλεσμα η ηλεκτρική ροή να παραμένει πάντα σταθερή. Επίσης, οποιοδήποτε ηλεκτρικό φορτίο ευρίσκεται «έξω» από τον όγκο που ορίζεται από την επιφάνεια Gauss, δεν συνεισφέρει στην ηλεκτρική ροή που διαπερνά την επιφάνεια, διότι όσες γραμμές εισέρχονται στην επιφάνεια, τόσες και την «εγκαταλείπουν» (βλ. παράδειγμα 3.2). Επιπλέον από το νόμο του Gauss είναι προφανές, ότι εάν μια κλειστή επιφάνεια δεν περιέχει φορτίο, η ηλεκτρική ροή που την διαρρέει είναι μηδέν. Τέλος ας μην ξεχνάμε ότι η επιφάνεια Gauss είναι συχνά μια φανταστική (μη πραγματική) επιφάνεια, όπου η επιλογή της γίνεται σύμφωνα με την συμμετρία του φορτίου που εξετάζουμε, με στόχο κυρίως την εύκολη επίλυση του ολοκληρώματος 3.8.

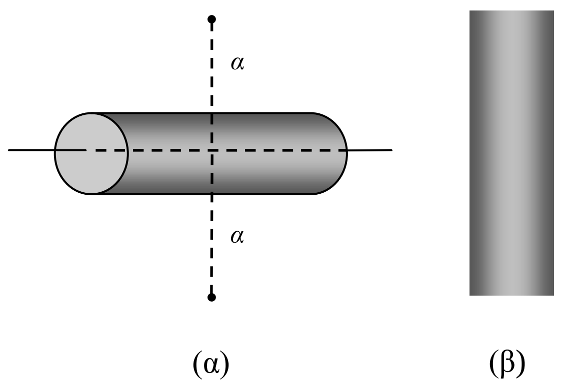
3.4 Συμμετρία φορτίου

Ο υπολογισμός της ηλεκτρικής ροής που δημιουργείται από φορτίο ή σύστημα φορτίων, είναι σχετικά εύκολη υπόθεση με την χρήση του νόμου του Gauss. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για τον υπολογισμό του ηλεκτρικού πεδίου. Σ’ αυτήν την περίπτωση, για να αποδειχθεί χρήσιμος ο νόμος του Gauss, θα πρέπει πρώτον το φορτισμένο σώμα να παρουσιάζει μια συμμετρία ως προς την κατανομή της μάζας του στο χώρο, και δεύτερον να έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου, δηλ. να είναι ομοιόμορφα φορτισμένο. Σε διαφορετική περίπτωση, ο νόμος του Gauss είναι εξαιρετικά δύσχρηστος. Ας ιδούμε τις πιο συνήθεις συμμετρικές κατανομές φορτίου στο χώρο, για τις οποίες ο υπολογισμός του πεδίου $\boldsymbol{E}$ είναι δυνατός με την εφαρμογή του νόμου του Gauss.



Σχήμα 3.6. *(α) Συμμετρία επιπέδου, και (β) άποψη επιπέδου από σταθερή απόσταση α, ανεξαρτήτως θέσεως στο χώρο.*

Εάν το φορτίο έχει την **συμμετρία επιπέδου**, έτσι όπως δείχνει το σχ. 3.6α, όλα τα σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση *α* από το επίπεδο, είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, και επομένως το ηλεκτρικό πεδίο σ’ όλα αυτά τα σημεία αναμένεται να έχει σταθερή τιμή (μέτρο). Το συμπέρασμα τούτο είναι λογικό, αν σκεφθείτε τον εαυτό σας να κινείται πάντα σε σταθερή απόσταση *α* από το επίπεδο. Τότε για μικρή σχετικά απόσταση *α* ως προς τις διαστάσεις του επιπέδου, ανεξαρτήτως της θέσεως που καταλαμβάνετε στο χώρο, η εικόνα που θα έχετε για το επίπεδο (αγνοώντας τα σημεία των άκρων), θα είναι ακριβώς η ίδια, όπως δείχνει το σχ. 3.6β.



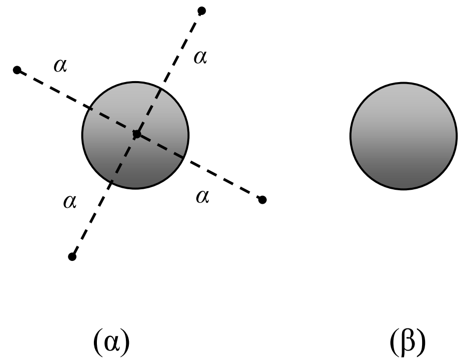
Σχήμα 3.7 *(α) Κυλινδρική συμμετρία, και (β) άποψη του κυλίνδρου από σταθερή απόσταση α ανεξαρτήτου θέσεως στο χώρο.*

Εάν το φορτίο έχει κυλινδρικό σχήμα, όπως φαίνεται στο σχ. 3.7α, τότε παρουσιάζει **κυλινδρική συμμετρία**, κατά την οποία όλα τα σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση *α* από τον άξονα συμμετρίας του κυλίνδρου, είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.[8] Για να ισχύει η κυλινδρική συμμετρία, πρέπει η απόσταση *α* να είναι σχετικά μικρή ως προς το μήκος του κυλίνδρου. Για να κατανοήσετε την κυλινδρική συμμετρία, φανταστείτε τον εαυτό σας να κοιτά τον κύλινδρο από μικρή σχετικά απόσταση ως προς το μέγεθός του. Ανεξαρτήτως της θέσης που έχετε στο χώρο ως προς τον κύλινδρο, εφόσον απέχετε σταθερή απόσταση *α*, η εικόνα που

[8] Τα σημεία πρέπει να είναι απομακρυσμένα από τις βάσεις του κυλίνδρου. Γι’ αυτό, στα προβλήματα κυλινδρικής συμμετρίας, ο κύλινδρος θεωρείται συνήθως πολύ μεγάλου μήκους.

βλέπετε είναι πάντα η ίδια, δηλ. αυτή του σχήματος 3.7β. Κυλινδρική συμμετρία παρουσιάζει και μια λεπτή μεγάλου μήκους ράβδος, ή ένα σύρμα μιας και τα δυο μπορούν να θεωρηθούν κύλινδροι με πολύ μικρές ακτίνες.

Μια τρίτη συμμετρία φορτίου την οποία συναντάμε στον ηλεκτρισμό, είναι η **σφαιρική συμμετρία**, κατά την οποία το φορτίο είναι σφαίρα, με αποτέλεσμα όλα τα σημεία που ευρίσκονται σε σταθερή απόσταση *α* από το κέντρο της, να είναι ισοδύναμα μεταξύ τους (βλ. σχ. 3.8α). Τούτο είναι αποτέλεσμα της ιδίας εικόνας που έχει κάποιος για την σφαίρα, εάν ευρίσκεται πάντα σε απόσταση *α* από το κέντρο της (βλ. σχ. 3.8β).



Σχήμα 3.8 *(α) Σφαιρική συμμετρία, και (β) άποψη της σφαίρας από σταθερή απόσταση α ανεξαρτήτως της θέσεως στο χώρο.*

Για ποιον λόγο όμως δίνουμε τόσο μεγάλη σημασία στο να έχουν συμμετρικό σχήμα και ομοιόμορφη φόρτιση τα φορτισμένα σώματα; Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο νόμος του Gauss ισχύει πάντα, και για οποιαδήποτε επιφάνεια περικλείει οποιοδήποτε φορτίο. Εντούτοις μπορούμε να τον εφαρμόσουμε με σκοπό να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε διάφορα σημεία του χώρου, μόνο για ομοιόμορφες και συμμετρικές κατανομές φορτίων. Τούτο συμβαίνει διότι μόνο υπό αυτές τις προϋποθέσεις το ολοκλήρωμα της σχέσης 3.8 δύναται να επιλυθεί, επιλέγοντας την καταλλήλου σχήματος και μεγέθους γκαουσιανή επιφάνεια γύρω από το συμμετρικό φορτισμένο σώμα. Έτσι για παράδειγμα εάν το φορτίο παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία (πχ. σφαίρα ή σημείο), η επιφάνεια Gauss επιλέγεται να είναι σφαίρα με κέντρο το φορτίο. Εάν το φορτίο παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία, (κύλινδρος ή λεπτή ράβδος), η επιφάνεια Gauss επιλέγεται να είναι ομοαξονικός κύλινδρος με αυτόν του φορτίου. Τέλος, εάν το φορτίο παρουσιάζει επίπεδη συμμετρία (επίπεδη πλάκα), η επιφάνεια Gauss επιλέγεται να είναι κύβος ή ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Σχεδόν όλα τα προβλήματα ηλεκτροστατικής στα οποία μελετάται το ηλεκτρικό πεδίο συμμετρικών φορτισμένων σωμάτων, εμπίπτουν σε μία από τις παραπάνω τρεις κατηγορίες συμμετρίας τις οποίες παρουσιάσαμε. Με την κατάλληλη επιλογή της επιφάνειας Gauss, το πεδίο E έχει σταθερό μέτρο σε όλα τα σημεία της επιφάνειας, οπότε το ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$, ανάγεται σε ολοκλήρωμα του εμβαδού της επιφανείας Gauss. Το εμβαδόν όπως και ο όγκος των συνήθων γεωμετρικών επιφανειών που συναντάμε σε προβλήματα ηλεκτροστατικής, είναι πολύ χρήσιμα για την επίλυση αυτών των προβλημάτων. Έτσι για διαστάσεις επιπέδου με μήκος a και πλάτος b, για κύλινδρο με ακτίνα R και μήκος h, και για σφαίρα με ακτίνα R, τα γεωμετρικά στοιχεία των τριών συνήθων συμμετριών φορτίου παρουσιάζονται στον πίνακα 3.1, και αποτελούν χρήσιμες πληροφορίες για την εφαρμογή του νόμου του Gauss στον ηλεκτρισμό.

Στη συνέχεια θα ιδούμε πως επιλέγοντας μια κατάλληλη γκαουσιανή επιφάνεια, μπορούμε να υπολογίσουμε ηλεκτρικά πεδία διαφόρων συμμετρικών κατανομών φορτίου. Τέλος πρέπει να γνωρίζουμε ότι όσον αφορά τον υπολογισμό ηλεκτρικών πεδίων, ο νόμος του Gauss είναι πλήρως ισοδύναμος με τον νόμο του Coulomb. Χρησιμοποιούμε τον νόμο του Gauss αντί αυτού του Coulomb, όταν το φορτίο του σώματος παρουσιάζει τέτοια συμμετρία, ώστε ο υπολογισμός του $\boldsymbol{E}$ να είναι απλούστερος, απ' ότι με την εφαρμογή του νόμου του Coulomb (βλ. ολοκλήρωμα στη σχέση 2.6).

Πίνακας 3.1 *Στοιχεία συμμετριών φορτίου.*

Συμμετρία	**Εμβαδόν**	**Όγκος**
Επίπεδο	$a.b$	-
Κύλινδρος	$2\pi Rh$*	$\pi R^2 h$
Σφαίρα	$4\pi R^2$	$(4/3)\ \pi R^3$

* Αυτή είναι η παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου. Για την συνολική επιφάνεια πρέπει να προσθέσουμε και το εμβαδόν των δυο βάσεων $2\pi R^2$. Για λόγους συμμετρίας όμως, συνήθως χρήσιμη επιφάνεια είναι μόνο η παράπλευρη.

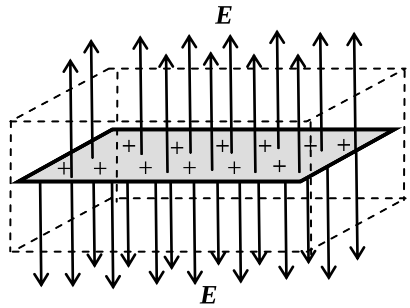
Παράδειγμα 3.3 Ηλεκτρικό πεδίο λεπτής τετράγωνης φορτισμένης πλάκας

Μια πολύ λεπτή μεταλλική πλάκα, η οποία έχει σχήμα τετραγώνου πλευράς $α$=50 cm, ευρίσκεται στο επίπεδο xy. Εάν η πλάκα φορτισθεί ομοιόμορφα με συνολικό φορτίο Q=4×10^{-8}C, να εύρετε α) την πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου στην πλάκα, και β) το ηλεκτρικό πεδίο ακριβώς πάνω στην πλάκα και κάτω από αυτήν, και μακριά από τα άκρα της.

Λύση

α) Επειδή η τετραγωνική πλάκα είναι πολύ λεπτή και έχει δύο πλευρές, το συνολικό της εμβαδόν είναι $S = 2a^2$. Η πυκνότητα φορτίου της πλάκας, ορίζεται ως η επιφανειακή πυκνότητα *σ*, διότι θεωρούμε ότι η πλάκα έχει μόνο δυο διαστάσεις και επομένως έχουμε

$$\sigma = \frac{Q}{2a^2} \Rightarrow \sigma = \frac{4\times10^{-8}\,\mathrm{C}}{2\times(0.5\mathrm{m})^2} = \frac{4\times10^{-8}\,\mathrm{C}}{0.5\mathrm{m}^2} \Rightarrow \sigma = 8\times10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$



Σχήμα 3.9. *Ηλεκτρικό πεδίο **E** από ομοιογενώς θετικά φορτισμένη λεπτή μεταλλική τετραγωνική πλάκα. Με διακεκομμένη γραμμή διακρίνεται η επιλεγμένη γκαουσιανή επιφάνεια (παράδειγμα 3.3).*

β) Για να εύρουμε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στην πλάκα, θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο του Gauss, περικλείοντας την πλάκα με μια κατάλληλη γκαουσιανή επιφάνεια, η οποία είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, όπως φαίνεται στο σχ. 3.9. Το ύψος του παραλληλεπιπέδου μπορούμε να το επιλέξουμε όσο μικρό επιθυμούμε, ώστε να προσεγγίσουμε τις επιφάνειες της πλάκας. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dS} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oint EdS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oint dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2a^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\varepsilon_o a^2}$$

ή αλλιώς

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{8\times10^{-8}\,\mathrm{C/m^2}}{8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}} \Rightarrow E = 9.09\times10^{3}\,\mathrm{N/C}$$

Αυτό είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην πλάκα και ανεξαρτήτως από την πλευρά (πάνω ή κάτω). Το διάνυσμα ***E*** δείχνει προς τα «επάνω» για την πάνω πλευρά, και προς τα «κάτω» για την κάτω πλευρά (βλ. σχ. 3.9).

Παράδειγμα 3.4 Ηλεκτρικό πεδίο ομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας

Ηλεκτρικό θετικό φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ολόκληρο τον όγκο μιας μονωτικής σφαίρας με ακτίνα *R*. Το ολικό φορτίο της σφαίρας είναι *Q*. Να ευρεθεί το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου, α) σε σημείο *r>R*, και β) σε σημείο *r<R*. γ) Παραστήστε γραφικά το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει της απόστασης *r*, δηλ. την συνάρτηση *E=f(r)*.

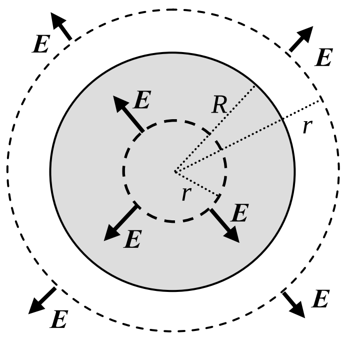
Λύση

α) Για απόσταση *r>R,* θεωρούμε την σφαιρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα *r* και κέντρο το κέντρο της φορτισμένης σφαίρας (μεγάλος διακεκομμένος κύκλος), όπως δείχνει το σχ. 3.10. Λόγω σφαιρικής συμμετρίας του φορτίου, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ***E*** σε όλη την επιφάνεια Gauss είναι η ίδια και κάθετη σ' αυτή, οπότε εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss παίρνουμε

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oint EdS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oint dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \quad (1)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της κλειστής σφαιρικής επιφάνειας Gauss, είναι το εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας ίσο με $4\pi r^2$. Επομένως η εξ. 1 γίνεται

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad (2)$$



Σχήμα 3.10 *Μονωτική φορτισμένη σφαίρα φορτίου Q και ακτίνας R (παράδειγμα 3.4).*

Παρατηρούμε ότι για αποστάσεις μεγαλύτερης της ακτίνας *R*, το πεδίο *E* είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της αποστάσεως και η κατεύθυνσή του είναι πάντα κάθετη στην επιφάνεια της σφαίρας Gauss, με φορά προς το άπειρο μιας και το φορτίο της σφαίρας είναι θετικό (βλ.

σχ. 3.10). Συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο της σφαίρας ακολουθεί τις δυναμικές γραμμές του πεδίου που δημιουργεί ένα σημειακό θετικό φορτίο, διότι όπως έχουμε προαναφέρει, η συμμετρία σφαίρας και σημείου στο χώρο είναι πανομοιότυπες.

β) Για απόσταση $r<R$, δηλ. για σημείο στο εσωτερικό της σφαίρας, θεωρούμε σφαιρική επιφάνεια Gauss (μικρός διακεκομμένος κύκλος στο σχ. 3.10), και εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss γράφουμε

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dS} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \qquad (3)$$

όπου $q_{\pi\varepsilon\rho}$ είναι το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείει η νέα επιφάνεια Gauss. Γνωρίζουμε ότι, το συνολικό φορτίο Q της μονωτικής σφαίρας κατανέμεται ομοιόμορφα στον όγκο της, οπότε η πυκνότητα φορτίου της σφαίρας είναι σταθερή και ίση με

$$\rho = \frac{Q}{V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \qquad (4)$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε την πυκνότητα φορτίου με τον όγκο που περικλείει η σφαιρική επιφάνεια Gauss ακτίνας r, θα εύρουμε το φορτίο που αυτή περικλείει. Έτσι ευρίσκουμε

$$q_{\pi\varepsilon\rho} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \overset{(4)}{\Rightarrow} q_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{3Q}{4\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow q_{\pi\varepsilon\rho} = \frac{Q}{R^3} r^3 \qquad (5)$$

Η εξ. 5 στην 3 δίνει τελικά

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o R^3} r^3 \Rightarrow \oint E dS = \frac{Q}{\varepsilon_o R^3} r^3 \Rightarrow E \oint dS = \frac{Q}{\varepsilon_o R^3} r^3 \Rightarrow ES = \frac{Q}{\varepsilon_o R^3} r^3 \qquad (6)$$

όπου E είναι το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από το κέντρο της σφαίρας, το οποίο λόγω της σφαιρικής συμμετρίας είναι σταθερό (εξαρτάται μόνο από το r), γι' αυτό και βγαίνει εκτός ολοκληρώματος. Το S είναι το συνολικό εμβαδόν το οποίο παίρνουμε από την ολοκλήρωση του dS επάνω στην σφαιρική επιφάνεια Gauss, και δίνεται από την επιφάνεια σφαίρας ως

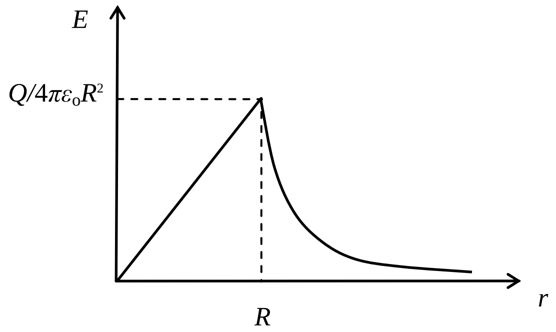
$$S = 4\pi r^2 \qquad (7)$$

Η εξ. 7 στην 6 δίνει τελικά

$$E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o R^3} r^3 \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3} r \qquad (8)$$

Το πεδίο $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας Gauss με ακτινική κατεύθυνση προς το άπειρο (βλ. σχ. 3.10), διότι το φορτίο είναι θετικό.

γ) Σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελέσματα, η γραφική παράσταση του E συναρτήσει της απόστασης r φαίνεται στο σχ. 3.11. Παρατηρούμε, ότι το πεδίο στο εσωτερικό της μονωτικής σφαίρας αυξάνεται γραμμικώς με την απόσταση από το κέντρο της, έως να πάρει την τιμή $Q/4\pi\varepsilon_o R^2$. Για αποστάσεις $r>R$, το πεδίο E είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της αποστάσεως, όπως ακριβώς συμβαίνει για το πεδίο ενός σημειακού φορτίου. Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι σφαίρα και σημείο είναι ισοδύναμα ως προς το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργούν, σε κάθε σημείο του χώρου, το οποίο ευρίσκεται εκτός σφαίρας.

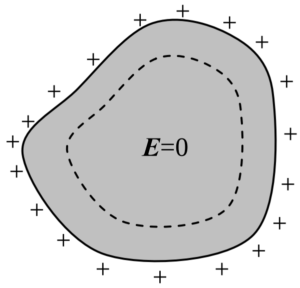


Σχήμα 3.11 *Μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου μονωτικής σφαίρας ακτίνας R και φορτίου Q, ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της (παράδειγμα 3.4).*

3.5 Φορτισμένος αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία

Ο νόμος του Gauss έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές, και οδηγεί σε σημαντικά συμπεράσματα για την περίπτωση των μονωμένων φορτισμένων αγώγιμων σωμάτων, τα οποία ευρίσκονται σε ηλεκτροστατική ισορροπία. Όταν λοιπόν ένας φορτισμένος αγωγός είναι σε ηλεκτροστατική ισορροπία, δηλ δεν συμβαίνει κίνηση ηλεκτρικών φορτίων δια μέσω της ύλης του, τότε ισχύουν οι εξής συνθήκες, οι οποίες και περιγράφονται σχηματικώς στο σχ. 3.12:

α) Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι μηδέν, $\boldsymbol{E}$=0. Τούτο είναι ένα λογικό συμπέρασμα, διότι εάν δεν ήταν μηδέν, τότε τα φορτία στο εσωτερικό του αγωγού, λόγω των ηλεκτρικών δυνάμεων θα μετακινούνταν, οπότε δεν θα υπήρχε ηλεκτροστατική ισορροπία.



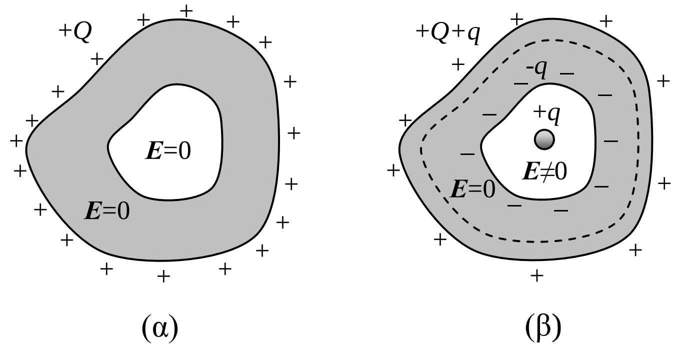
Σχήμα 3.12 *Εσωτερικό αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, ενώ όλα τα φορτία κατανέμονται στην επιφάνειά του. Η διακεκομμένη γραμμή ορίζει τυχαία επιφάνεια Gauss στο εσωτερικό του αγωγού (βλ. κείμενο).*

β) Το ηλεκτρικό φορτίο ενός φορτισμένου αγωγού, είναι συγκεντρωμένο στην επιφάνειά του. Τούτη η πρόταση είναι προφανής, διότι κατά την φόρτιση του αγωγού τα φορτία απωθούνται μεταξύ τους, και εφόσον μπορούν να κινούνται διαμέσου του αγωγού, απομακρύνονται όσο είναι δυνατόν το ένα από το άλλο, καταλαμβάνοντας τις πιο απομακρυσμένες θέσεις μεταξύ τους που είναι στις επιφάνειες του αγωγού. Η κίνηση αυτή διαρκεί, ώσπου να επέλθει ηλεκτροστατική ισορροπία στον αγωγό, οπότε και τα φορτία καταλαμβάνουν τις τελικές τους θέσεις. Σε διαφορετική περίπτωση, εάν τα φορτία παρέμεναν ακίνητα στο εσωτερικό του αγωγού, θα υπήρχαν σημεία στο εσωτερικό του, στα οποία το ηλεκτρικό πεδίο θα ήταν μη μηδενικό, γεγονός μη εφικτό σύμφωνα με τη συνθήκη (α). Πρέπει να τονίσουμε, ότι όταν αναφερόμαστε σε φορτία του αγωγού τα οποία κατανέμονται στην επιφάνειά του, εννοούμε τα φορτία εκτός των θετικών φορτίων των πυρήνων και των αρνητικών φορτίων των ηλεκτρονίων (ελευθέρων και μη), που έχει ο αγωγός στην ουδέτερή του κατάσταση. Τέτοια φορτία είναι η περίσσεια ηλεκτρικού φορτίου που αποκτά ο αγωγός με κάποια διαδικασία φόρτισης (βλ. κεφάλαιο 1).

γ) Το πεδίο $\boldsymbol{E}$ λίγο «έξω» από τον αγωγό είναι κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού με μέτρο, $E=\sigma/\varepsilon_o$, όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Και αυτή η πρόταση είναι εύλογη, διότι εάν το $\boldsymbol{E}$ δεν ήταν κάθετο στην επιφάνεια του αγωγού, θα υπήρχε μια οριζόντια συνιστώσα του πεδίου, με συνέπεια στα επιφανειακά φορτία να ασκείται δύναμη και επομένως αυτά να κινούνταν πάνω στην επιφάνεια του αγωγού, οπότε δεν θα υπήρχε ηλεκτροστατική ισορροπία.

δ) Το φορτίο τείνει να συσσωρευτεί σε σημεία όπου η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας είναι μικρότερη (ακίδες ή αιχμές). Θα ιδούμε γιατί αυτό συμβαίνει, στο επόμενο κεφάλαιο. Το ότι το φορτίο «προτιμά» τις αιχμές, είναι έκδηλο και από το γεγονός ότι οι κεραυνοί έχουν την τάση να «πέφτουν» σε κορυφές δένδρων ή σε τεχνητές αιχμηρές διατάξεις που ονομάζονται **αλεξικέραυνα** (Young. & Freedman, 2010). Μέσω αυτών, το τεράστιο ηλεκτρικό φορτίο που μεταφέρουν διοχετεύεται στη Γη, η οποία όπως έχουμε αναφέρει είναι μια τεράστια δεξαμενή ηλεκτρικού φορτίου και λειτουργεί ως αγωγός. Γι' αυτόν τον λόγο, είναι γνωστό ότι κάποιος ορειβάτης ή περιπατητής στην εξοχή, θα πρέπει να αποφεύγει τα ψηλά δένδρα, γιατί λειτουργούν ως ακίδες «προσελκύοντας» κεραυνούς. Αντιθέτως, κάποιος μπορεί να θεωρηθεί ασφαλής, εάν εισέλθει στο εσωτερικό ενός αυτοκινήτου, του οποίου το περίβλημα (αμάξωμα) είναι μεταλλικό, δηλ. αγώγιμο. Τότε ακόμη και εάν το αυτοκίνητο χτυπηθεί από κεραυνό, τα φορτία θα κατανεμηθούν στην επιφάνειά του και δεν θα διαχυθούν στο εσωτερικό του, μιας και στο εσωτερικό κάθε αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν. Γενικά, εάν θέλουμε να προστατέψουμε κάτι από ηλεκτρικά φορτία, το τοποθετούμε στο εσωτερικό ενός αγωγού, ο οποίος προσφέρει ηλεκτροστατική θωράκιση και ονομάζεται με τον γενικό όρο **κλωβός του Faraday** (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Kraus, 1993).

Βάσει των παραπάνω, εάν θεωρήσουμε μια επιφάνεια Gauss στο εσωτερικό του αγωγού, επειδή αυτή δεν περικλείει ηλεκτρικό φορτίο (βλ. *α* συνθήκη παραπάνω), η ένταση του πεδίου αποδεικνύεται μηδενική (βλ. σχ. 3.12). Δεδομένου ότι η γκαουσιανή επιφάνεια μπορεί να είναι οποιουδήποτε μεγέθους και σχήματος, και οσοδήποτε κοντά στην επιφάνεια του αγωγού, αποδεικνύεται ότι $\boldsymbol{E}$=0 παντού εντός του αγωγού. Αντιθέτως με τους αγωγούς, οι φορτισμένοι μονωτές μπορεί να έχουν πεδίο διάφορο του μηδενός στο εσωτερικό τους. Εάν θεωρήσουμε τώρα, ότι στο εσωτερικό του αγωγού υπάρχει μια κοιλότητα, τότε ορίζονται δύο επιφάνειες του αγωγού, η εξωτερική και η εσωτερική, όπως δείχνει το σχ. 3.13α. Εάν η κοιλότητα δεν περιέχει ηλεκτρικά φορτία και το συνολικό φορτίο του αγωγού είναι $+Q$, τότε αυτό κατανέμεται στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού (βλ. σχ.3.13α). Εάν στην κοιλότητα υπάρχει φορτίο +q, τότε η κατανομή του φορτίου Q στον αγωγό αλλάζει, όπως δείχνει το σχ. 3.13β. Συγκεκριμένα φορτίο -q αναπτύσσεται επαγωγικά στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού, ενώ στην εξωτερική επιφάνειά του κατανέμεται φορτίο Q+q. Η κατανομή αυτή επιτάσσεται από τον νόμο του Gauss, διότι στο εσωτερικό του αγωγού (μεταξύ εξωτερικής και εσωτερικής επιφάνειας), το πεδίο πρέπει να παραμένει E=0. Γι' αυτόν τον λόγο κάθε επιφάνεια Gauss στο εσωτερικό του αγωγού, πρέπει να περικλείει πάντα μηδενικό φορτίο, άρα στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού πρέπει να αναπτύσσεται αντίθετο φορτίο από αυτό που υπάρχει στην κοιλότητα, δηλ. -q. Αυτομάτως τότε, το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια του αγωγού αυξάνεται στην τιμή Q+q. Έτσι ενώ η κοιλότητα με φορτίο q έχει μη μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}\neq 0$, το εσωτερικό του αγωγού στην ηλεκτροστατική ισορροπία έχει πάντα μηδενικό πεδίο, $\boldsymbol{E}$=0.



Σχήμα 3.13 *Εσωτερικό φορτισμένου αγωγού με κοιλότητα. (α) Για κενή κοιλότητα στην ηλεκτροστατική ισορροπία,* ***E****=0, τόσο στην κοιλότητα όσο και στο εσωτερικό του αγωγού, το οποίο ορίζεται από την εξωτερική και εσωτερική του επιφάνεια. (β) Εάν στην κοιλότητα υπάρχει φορτίο, αυτομάτως η εσωτερική επιφάνεια του αγωγού φορτίζεται επαγωγικά με ίσο και αντίθετο φορτίο, ενώ ταυτοχρόνως ανακατανέμεται και το φορτίο στην εξωτερική επιφάνεια.*

Παράδειγμα 3.5 Ηλεκτρικό πεδίο αγώγιμων ομοαξονικών κυλίνδρων

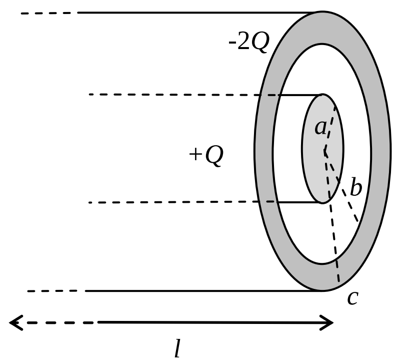
Αγώγιμος μονωμένος συμπαγής κύλινδρος ακτίνας α και μεγάλου μήκους l, είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με θετικό φορτίο Q. Ο κύλινδρος περιβάλλεται από ομοαξονικό επίσης αγώγιμο και μονωμένο κυλινδρικό σωλήνα με συνολικό φορτίο $-2Q$, και εσωτερική και εξωτερική ακτίνα b και c αντιστοίχως, όπως φαίνεται στο σχ. 3.14. Το μήκος του σωλήνα είναι επίσης μεγάλο και ίσο με l. Υπολογίστε α) την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E για $r<a$, $a<r<b$, $b<r<c$ και $r>c$, όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα συμμετρίας του κυλινδρικού συστήματος, και β) την επιφανειακή πυκνότητα κάθε φορτισμένης κυλινδρικής επιφάνειας.

Λύση

α) Επειδή έχουμε φορτισμένο σώμα κυλινδρικής συμμετρίας μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss θεωρώντας γκαουσιανή κλειστή κυλινδρική επιφάνεια μήκους l.

Για $r<a$,θεωρούμε κυλινδρική γκαουσιανή επιφάνεια με $r<a$ και γράφουμε

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \qquad (1)$$



Σχήμα 3.14 *Φορτισμένος με -2Q αγώγιμος κυλινδρικός σωλήνας μήκους l περιβάλει φορτισμένο με +Q αγώγιμο κύλινδρο (παράδειγμα 3.5).*

Πρέπει να υπολογίσουμε το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια Gauss. Επειδή ο κύλινδρος είναι αγωγός, δεν υπάρχουν φορτία στο εσωτερικό του. Επομένως το περικλειόμενο φορτίο της επιφάνειας Gauss είναι μηδέν, και ισχύει

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \Rightarrow \oint E dS = 0 \Rightarrow E = 0 \qquad (2)$$

Δηλαδή για $r<a$, το E=0.

Για $\alpha<r<b$,θεωρούμε γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα r και γράφουμε

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oint E dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oint dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o l r} \qquad (3)$$

Εφαρμόσαμε δηλαδή τον νόμο του Gauss με περικλειόμενο φορτίο *Q*, το φορτίο του εσωτερικού κυλίνδρου. Η κατεύθυνση του ***E*** είναι κάθετη στην παράπλευρη επιφάνεια του συμπαγούς κυλίνδρου και ακτινικά προς τα «έξω».

Για $b<r<c$, ευρισκόμεθα στο εσωτερικό αγωγού και επομένως το πεδίο E=0.

Για $r>c$, θεωρούμε γκαουσιανή κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα *r*, και γράφουμε

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dS} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oiint EdS = \frac{Q-2Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oiint dS = \frac{-Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E2\pi rl = \frac{-Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_o lr} \qquad (4)$$

όπου ως περικλειόμενο φορτίο θεωρήσαμε το συνολικό φορτίο των δυο κυλίνδρων. Θεωρήσαμε ότι λόγω του μεγάλου μήκους των κυλίνδρων το φορτίο κατανέμεται όλο στην παράπλευρη επιφάνειά τους και όχι στις βάσεις τους. Επομένως η ροή μέσω των δυο βάσεων του εσωτερικού κυλίνδρου θεωρείται μηδενική. Αυτό βέβαια είναι μια προσέγγιση λόγω του μεγάλου μήκους *l* του κυλίνδρου, οπότε και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας θεωρείται πολύ μεγαλύτερο των εμβαδών των βάσεων του κυλίνδρου. Παρατηρούμε ότι το αρνητικό πρόσημο του πεδίου, σημαίνει ότι σε αυτήν την περιοχή του χώρου οι δυναμικές γραμμές του πεδίου καταλήγουν κάθετα στην παράπλευρη επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου, δηλ. το ***E*** κατευθύνεται ακτινικά προς τα «μέσα».

β) Για να υπολογίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα κάθε φορτισμένης επιφάνειας, θα πρέπει να διαιρέσουμε το φορτίο της με το εμβαδόν της. Αρχικώς για τον εσωτερικό κύλινδρο ακτίνας *a*, όλο το φορτίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνεια, μιας και ως αγωγός δεν μπορεί να έχει φορτία στο εσωτερικό του. Έτσι, θεωρώντας αμελητέο το φορτίο που συσσωρεύεται στις κυκλικές επιφάνειες (βάσεις του κυλίνδρου), μιας και το μήκος θεωρείται πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα του κυλίνδρου, έχουμε $\sigma_\alpha = \dfrac{Q}{2\pi l\alpha}$.

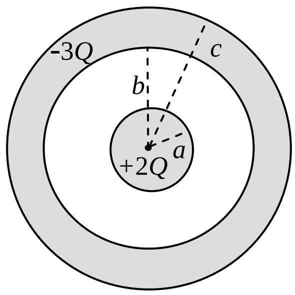
Με ανάλογο τρόπο δουλεύουμε για τις επιφανειακές πυκνότητες των επιφανειών του εξωτερικού κυλινδρικού σωλήνα. Καταρχήν θα πρέπει να υπολογίσουμε πόσο φορτίο έχει η κάθε μια επιφάνεια (εσωτερική και εξωτερική). Όλος ο εξωτερικός κύλινδρος έχει $-2Q$ φορτίο. Ας ιδούμε πώς αυτό κατανέμεται στις δυο επιφάνειές του, μιας και στο εσωτερικό του δεν μπορεί να υπάρχουν φορτία επειδή είναι αγωγός. Ας εξετάσουμε αρχικά τί συμβαίνει στην εσωτερική επιφάνεια ακτίνας *b*. Έστω ότι υπάρχει φορτίο q_b εκεί. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss για μια κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα $b<r<c$, γράφουμε

$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dS} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oiint EdS = \frac{Q+q_b}{\varepsilon_o} \qquad (7)$$

Από το (α) ερώτημα όμως έχουμε καταλήξει ότι το πεδίο στο εσωτερικό του σωλήνα είναι μηδέν διότι πρόκειται για αγωγό. Άρα η εξ. 7 δίνει

$$\frac{Q+q_b}{\varepsilon_o} = 0 \Rightarrow Q+q_b = 0 \Rightarrow q_b = -Q \qquad (8)$$

Άρα στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού κυλίνδρου είναι κατανεμημένο ομοιόμορφα φορτίο $-Q$, και επομένως η επιφανειακή πυκνότητά του είναι $\sigma_\alpha = \dfrac{-Q}{2\pi lb}$. Η εξωτερική επιφάνεια του κυλινδρικού σωλήνα έχει φορτίο επίσης $-Q$, ώστε το συνολικό φορτίο του σωλήνα να είναι $-2Q$. Έτσι η επιφανειακή του πυκνότητα είναι $\sigma_\alpha = \dfrac{-Q}{2\pi lc}$.



Σχήμα 3.15 *Αγώγιμη σφαίρα με θετικό φορτίο 2Q και ακτίνα α, ευρίσκεται στο εσωτερικό μιας κοίλης ομόκεντρης αγώγιμης φορτισμένης με -Q σφαίρας, με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c (παράδειγμα 3.6).*

Παράδειγμα 3.6 Ηλεκτρικό πεδίο ομόκεντρων αγώγιμων σφαιρών

Μια αγώγιμη σφαίρα με θετικό φορτίο $2Q$ έχει ακτίνα *α*. Η σφαίρα αυτή ευρίσκεται στο εσωτερικό μιας κοίλης ομόκεντρης αγώγιμης σφαίρας με εσωτερική ακτίνα *b* και εξωτερική *c*, όπως φαίνεται στο σχ. 3.15. Η κοίλη σφαίρα φέρει συνολικό φορτίο $-3Q$. α) Να ευρείτε το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει της απόστασης *r* από το κέντρο για τις περιοχές $r<a$, $a<r<b$, $b<r<c$ και $r>c$. β) Σχεδιάστε μια γραφική παράσταση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση του *r*, από *r*=0 έως *r*=2*c*. γ) Ποιο είναι το φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια της κοίλης σφαίρας, και ποιο στην εξωτερική της επιφάνεια; δ) Σχεδιάστε τις δυναμικές ηλεκτρικές γραμμές του συστήματος μέσα σε σφαιρικό όγκο ακτίνας 2*c*.

Λύση

α) Καταρχήν τα φορτισμένα σώματα παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία και επειδή είναι αγώγιμα, τα φορτία θα κατανέμονται ομοιόμορφα πάνω στις επιφάνειές τους. Για να υπολογίσουμε το φορτίο ***E*** σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε σφαιρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα *r* από το κέντρο συμμετρίας των σφαιρών.

Για απόσταση $r<a$, ευρισκόμεθα σε εσωτερικό αγωγού και επομένως ***E***=0, διότι όλο το φορτίο 2*Q* της εσωτερικής σφαίρας είναι κατανεμημένο στην επιφάνειά της.

Για απόσταση $a<r<b$, ορίζω σφαιρική επιφάνεια Gauss με ακτίνα *r* και από τον νόμο του Gauss γράφουμε

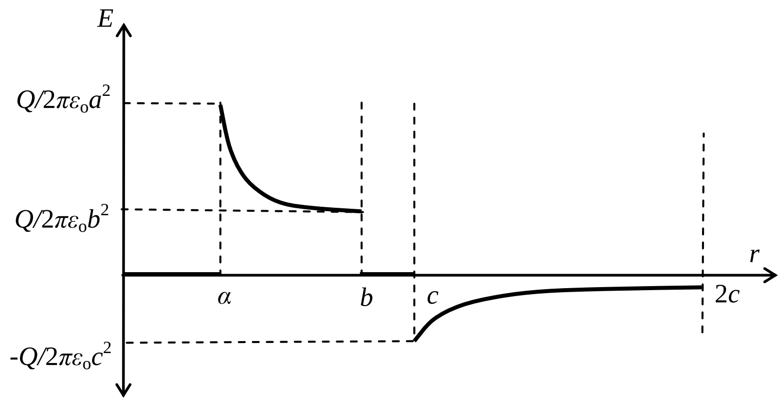
$$\oiint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oiint E dS = \frac{2Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oiint dS = \frac{2Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{2Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o r^2}$$

Το πεδίο ***E*** έχει ακτινική διεύθυνση προς τα «έξω» (προς το άπειρο), μιας και το φορτίο της σφαίρας είναι θετικό.

Για απόσταση $b<r<c$, ευρισκόμεθα στο εσωτερικό της εξωτερικής σφαίρας, η οποία ως αγωγός έχει μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο σ' αυτήν την περιοχή. Έτσι ***E***=0.

Για απόσταση $r>c$, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss για γκαουσιανή επιφάνεια που περικλείει και τις δυο σφαίρες, και επομένως ισχύει

$$\oiint \boldsymbol{E.dS} = \frac{q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oiint E.dS = \frac{2Q-3Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oiint dS = \frac{-Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{-Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$



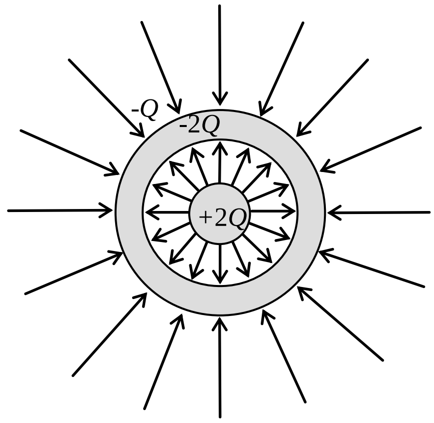
Σχήμα 3.16 *Μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου του συστήματος των δυο φορτισμένων σφαιρών ως συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο συμμετρίας (παράδειγμα 3.6).*

Το μείον δηλώνει ότι η κατεύθυνση του πεδίου ***E*** είναι ακτινικά προς τα «μέσα», δηλ. οι δυναμικές ηλεκτρικές γραμμές έρχονται από το άπειρο και καταλήγουν ακτινικά στην εξωτερική επιφάνεια του φλοιού.

β) Σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς, η γραφική παράσταση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου ως συνάρτηση του *r*, από *r*=0 έως *r*=2*c*, φαίνεται στο σχ. 3.16.

γ) Το συνολικό φορτίο της εξωτερικής κοίλης σφαίρας είναι −3*Q*, το οποίο κατανέμεται στις δυο επιφάνειές της, την εσωτερική ακτίνας *b* και την εξωτερική ακτίνας *c*. Η εσωτερική επιφάνεια φορτίζεται επαγωγικά με φορτίο −2*Q*, λόγω του θετικού φορτίου της εσωτερικής σφαίρας που έχει φορτίο +2*Q* στην επιφάνειά της. Ένας άλλος τρόπος για να καθορίσουμε το φορτίο της σφαίρας με ακτίνα *b*, είναι να εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss για γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα $b<r<c$. Το υπολογιζόμενο πεδίο σ' αυτήν την περιοχή του χώρου είναι μηδέν (βλ. ερώτημα α). Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το περικλειόμενο συνολικό φορτίο της επιφάνειας Gauss είναι μηδέν. Δεδομένου ότι η εσωτερική σφαίρα έχει φορτίο +2*Q*, η εσωτερική επιφάνεια του σφαιρικού φλοιού πρέπει να έχει εξ επαγωγής φορτίο −2*Q*. Εφόσον όμως η εσωτερική σφαιρική επιφάνεια ακτίνας *b* έχει φορτίο −2*Q*, η εξωτερική σφαιρική επιφάνεια ακτίνας *c* απομένει να έχει το υπόλοιπο −*Q*, από τα συνολικά −3*Q* της κοίλης σφαίρας. Η παραπάνω περιγράφουσα κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου σε κάθε επιφάνεια, απεικονίζεται στο σχ. 3.17.

δ) Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που σχηματίζουν οι δυο ομόκεντρες φορτισμένες σφαίρες με φορτία $+2Q$ και $-3Q$ αντίστοιχα, είναι σχεδιασμένες στο σχ. 3.17, για περιοχή όγκου σφαίρας με ακτίνα περίπου ίση με 2*c*. Προσέξτε ότι οι δυναμικές γραμμές ξεκινούν πάντα από τα θετικά φορτία και καταλήγουν στα αρνητικά. Στο εσωτερικό χώρο των σφαιρών (σκιασμένες περιοχές), δεν υπάρχουν δυναμικές γραμμές, μιας και το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό, λόγω του ότι είναι εσωτερικός χώρος αγωγών. Σ' αυτές τις περιοχές οι δυναμικές γραμμές διακόπτονται απότομα.



Σχήμα 3.17 *Οι δυναμικές γραμμές στον σφαιρικό όγκο με ακτίνα 2c του συστήματος των δυο φορτισμένων ομόκεντρων σφαιρών του παραδείγματος 3.6.*

Παράδειγμα 3.7 Ηλεκτρικό πεδίο ανομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας

Μια μονωτική συμπαγής σφαίρα ακτίνας *R*, έχει μεταβλητή πυκνότητα φορτίου, η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση *r* από το κέντρο της σφαίρας, σύμφωνα με την σχέση $\rho=Ar^2$, όπου *A* είναι σταθερά. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο.

Λύση

α) Για $r>R$, θεωρούμε γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια που περιβάλλει όλη την μονωτική σφαίρα και εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss. Έτσι γράφουμε

$$\oiint \boldsymbol{E.dS} = \frac{Q_{\pi\varepsilon\rho}}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oiint EdS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oiint dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad (1)$$

όπου *Q* είναι το συνολικό φορτίο της σφαίρας, το οποίο και πρέπει να υπολογίσουμε. Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα φορτίου εξαρτάται μόνο από το μέτρο της ακτίνας *r* (ακτινική συμμετρία) και όχι από την κατεύθυνση. Αυτό έχει ως συνέπεια, η πυκνότητα φορτίου σε σφαιρικό φλοιό πάχους *dr* και με κέντρο το κέντρο της σφαίρας, να έχει παντού την ίδια πυκνότητα φορτίου. Θεωρώντας τώρα την σφαίρα σαν ένα άθροισμα απείρων πολύ λεπτών στοιχειωδών σφαιρικών φλοιών με πάχος *dr* ο καθένας, (βλ. σχ. 3.18), μπορούμε αρχικά να υπολογίσουμε το φορτίο *dq* που έχει κάθε τέτοιος φλοιός, ως

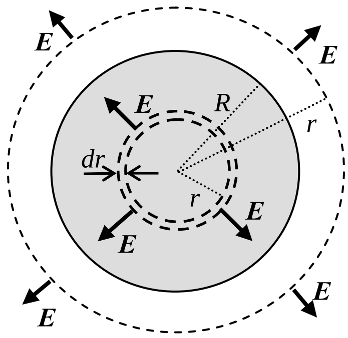
$$dq = \rho dV \quad (2)$$

όπου *dV* είναι ο όγκος του στοιχειώδους φλοιού, ίσος με

$$dV = 4\pi r^2 dr \quad (3)$$

Η εξ. 3 στην 2 δίνει

$$dq = 4\rho\pi r^2 dr \quad (4)$$



Σχήμα 3.18 *Μονωτική σφαίρα ακτίνας R και μεταβλητής πυκνότητας φορτίου (παράδειγμα 3.7). Η σφαίρα θεωρείται άθροισμα απείρων λεπτών σφαιρικών φλοιών πάχους dr.*

Ολοκληρώνοντας την εξ. 4 από 0 έως *R*, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό φορτίο *Q* της σφαίρας. Έτσι ισχύει

$$\int dq = \int_0^R 4\rho\pi r^2 dr = \int_0^R 4Ar^2\pi r^2 dr = \int_0^R 4\pi Ar^4 dr = 4\pi A\int_0^R r^4 dr =$$

$$4\pi A \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R \Rightarrow Q = 4\pi A\frac{R^5}{5} \quad (5)$$

Εφόσον υπολογίσαμε το *Q*, μπορούμε να το αντικαταστήσουμε στην εξ. 1, οπότε παίρνουμε

$$E = \frac{4\pi A(R^5/5)}{4\pi\varepsilon_o r^2} \Rightarrow E = \frac{AR^5}{5\varepsilon_o r^2}$$

Άρα για $r>R$, το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\boldsymbol{E} = \dfrac{AR^5}{5\varepsilon_o r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$, με ακτινική διεύθυνση προς το άπειρο μιας και η σφαίρα είναι θετικά φορτισμένη.

β) Για $r<R$, το ηλεκτρικό πεδίο υπολογίζεται ξανά με τον νόμο του Gauss, θεωρώντας όμως γκαουσιανή σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα r που περικλείει φορτίο q μικρότερο από το Q, μιας και τώρα θεωρούμε ένα μόνο μέρος της μονωτικής σφαίρας. Έτσι η εξ. 1 μπορεί να γραφθεί

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad (6)$$

Το περικλειόμενο φορτίο q υπολογίζεται όπως το Q με μόνη διαφορά τα όρια της ολοκλήρωσης που είναι από 0 έως r. Έτσι γράφουμε

$$\int dq = \int_0^r 4\rho\pi r^2 dr = \int_0^r 4Ar^2\pi r^2 dr = \int_0^r 4\pi A r^4 dr = 4\pi A\int_0^r r^4 dr = 4\pi A \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^r \Rightarrow q = 4\pi A\frac{r^5}{5} \qquad (7)$$

Αντικατάσταση της εξ. 7 στην 6 δίνει

$$E = \frac{4\pi A(r^5/5)}{4\pi\varepsilon_o r^2} \Rightarrow E = \frac{Ar^3}{5\varepsilon_o}$$

Ξανά η κατεύθυνση είναι ακτινική προς το άπειρο. Έτσι συγκεντρωτικά μπορούμε να ειπούμε για το πεδίο που δημιουργεί η σφαίρα, ότι

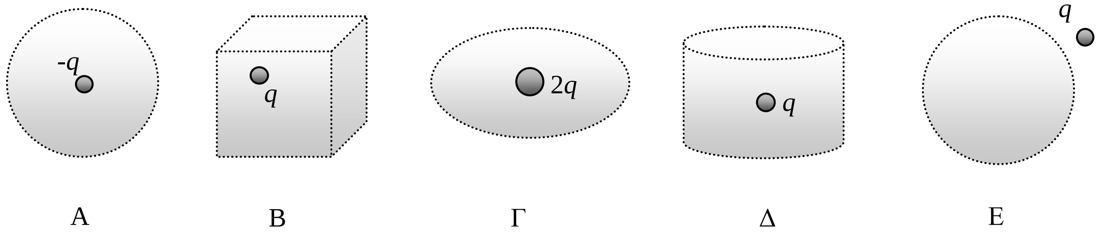
$\boldsymbol{E} = \dfrac{AR^5}{5\varepsilon_o r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$, για $r>R$ και

$\boldsymbol{E} = \dfrac{Ar^3}{5\varepsilon_o}\hat{\boldsymbol{r}}$, για $r<R$.

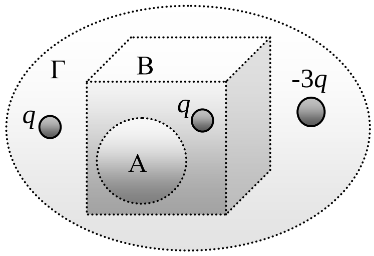
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε3.1 Ταξινομείστε τις τιμές της ηλεκτρικής ροής για κάθε επιφάνεια Gauss του σχήματος 3.19, κατά αύξουσα σειρά (από την μεγαλύτερη στην μικρότερη), επισημαίνοντας τυχόν ισότητες της ροής. Λάβετε υπόψη και το πρόσημο των φορτίων.



Σχήμα 3.19 *Ερώτηση 3.1.*

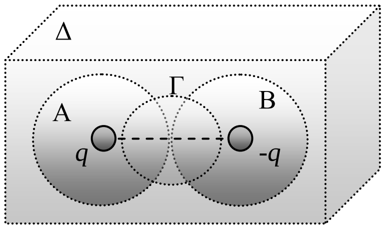


Σχήμα 3.20 *Ερώτηση 3.2.*

Ε3.2 Σο σχ. 3.20 υπολογίστε την ηλεκτρική ροή που διαπερνά κάθε επιφάνεια, εάν όλα τα φορτία ευρίσκονται στο κενό. Ταξινομείστε τις επιφάνειες με αύξουσα σειρά, ανάλογα της ηλεκτρικής τους ροής.

Ε3.3 Θεωρείστε δυο ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες Gauss με ακτίνες $R_1<R_2$. Εάν στο κοινό τους κέντρο τοποθετηθεί ηλεκτρικό φορτίο, μέσω ποιάς σφαίρας διέρχεται μεγαλύτερη ηλεκτρική ροή;

Ε3.4 Ένα ηλεκτρικό δίπολο περιβάλλεται από τις επιφάνειες Gauss A, B και Γ του σχήματος 3.21. Ταξινομείστε τις επιφάνειες με αύξουσα σειρά, ανάλογα με την ηλεκτρική τους ροή.



Σχήμα 3.21 *Ερώτηση 3.4.*

Ε3.5 Εάν το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου ήταν ανάλογο του $1/r$ και όχι του $1/r^2$, θα εξακολουθούσε να ισχύει ο νόμος του Gauss; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

Ε3.6 Μερικές φορές ευαίσθητα ηλεκτρονικά εξαρτήματα υπολογιστών συσκευάζονται για την μεταφορά τους, μέσα σε ηλεκτρικά αγώγιμα κιβώτια. Πώς προστατεύονται με αυτόν τον τρόπο τα εξαρτήματα;

Ε3.7 Τα σύγχρονα επιβατικά αεροπλάνα έχουν την άτρακτό τους κατασκευασμένη από ελαφριά συνθετικά μονωτικά υλικά. Παρόλα αυτά οι κατασκευαστές τοποθετούν αγώγιμα σύρματα στο περίβλημα της ατράκτου για προστασία του αεροπλάνου από τους κεραυνούς. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Ε3.8 Στο κέντρο μιας κοίλης μεταλλικής σφαίρας τοποθετείται ηλεκτρικό φορτίο $+q$. Ποιο είναι το φορτίο που αναπτύσσεται στην εξωτερική και στην εσωτερική επιφάνεια της σφαίρας, όταν α) είναι ηλεκτρικά ουδέτερη, και β) έχει συνολικό φορτίο $+2q$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π3.1 Ηλεκτρική ροή μέσω κυλινδρικής επιφάνειας. Η ολική ηλεκτρική ροή που διαρρέει μια κλειστή κυλινδρική επιφάνεια είναι 8.60×10^4 Nm^2/C. α) Ποιο είναι το συνολικό φορτίο μέσα στον κύλινδρο; β) Ποιο είναι το φορτίο, αν η ηλεκτρική ροή είναι -7.50×10^4 Nm^2/C; Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού $\varepsilon_o=8.85\times10^{-12}$ C^2/Nm^2. *Απάντηση*: α) 761 nC, και β) -663 nC.

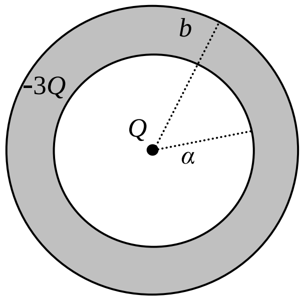
Π3.2 Ηλεκτρική ροή μέσω κυβικής επιφάνειας. Ένα σημειακό φορτίο 3.00 nC ευρίσκεται στο κέντρο ενός κύβου. Ποια είναι η ηλεκτρική ροή που διαπερνά κάθε μια από τις έξι πλευρές του κύβου; Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού $\varepsilon_o=8.85\times10^{-12}$ C^2/Nm^2. *Απάντηση*: 56.6 Nm^2/C.

Π3.3 Ηλεκτρική ροή και δυναμικές ηλεκτρικές γραμμές. Στο εσωτερικό ενός μεταλλικού κιβωτίου υπάρχουν σε διάφορες θέσεις τα εξής ηλεκτρικά φορτία: 5 μC, -9 μC, 27 μC και -84 μC. Υπολογίστε την συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του κιβωτίου. Το πλήθος των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών που εισέρχονται στο κιβώτιο, είναι μεγαλύτερο, ίσο, ή μικρότερο του αριθμού των γραμμών που εξέρχονται από αυτό και γιατί; Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού $\varepsilon_o=8.85\times10^{-12}$ C^2/Nm^2.

Π3.4 Νόμος του Gauss. Ξεκινώντας από τον νόμο του Gauss, να αποδείξετε, ότι ένα σημειακό φορτίο q δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο που δίνει ο νόμος του Coulomb.

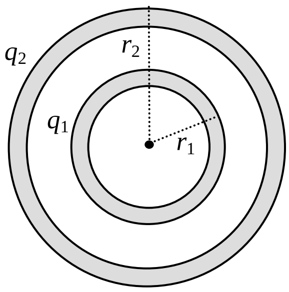
Π3.5 Ηλεκτρικό πεδίο κυλινδρικού μονωτή. Ένας μονωτής κυλινδρικού σχήματος, ακτίνας R και μεγάλου μήκους l είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο Q. α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο E σε απόσταση r από τον άξονα συμμετρίας του στις περιπτώσεις, $r<R$, $r=R$ και $r>R$. β) Σχεδιάστε γραφικά το $E=f(r)$.

Π3.6 Ηλεκτρικό πεδίο αγώγιμου σφαιρικού φλοιού. Αγώγιμος μονωμένος σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b, έχει σημειακό θετικό φορτίο Q τοποθετημένο στο κέντρο του, όπως φαίνεται στο σχ. 3.22. Το ολικό φορτίο του φλοιού είναι $-3Q$. α) Να ευρείτε τις εκφράσεις για το ηλεκτρικό πεδίο, συναρτήσει της απόστασης r από το κέντρο του φλοιού, για τις περιοχές $r<a$, $a<r<b$ και $r>b$. β) Ποια είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ στην εσωτερική, και ποια στην εξωτερική επιφάνεια του αγώγιμου φλοιού; γ) Αποδώστε γραφικά την εξάρτηση του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει του r.



Σχήμα 3.22 *Πρόβλημα 3.6.*

Π3.7 Ηλεκτρικό πεδίο κυλινδρικής μεταλλικής ράβδου. Μια μεταλλική ράβδος μεγάλου μήκους και κυλινδρικής μορφής έχει διατομή ακτίνας 5 cm και φέρει φορτίο ανά μονάδα μήκους ίσο με λ=30 nC/m. Να ευρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στις ακόλουθες αποστάσεις από τον άξονα της ράβδου: α) 3 cm, β) 10 cm, γ) 1 m. Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού $\varepsilon_o=8.83\times10^{-12}$ C^2/m^{2}N. *Απάντηση*: α) 0, β) 5.41×10^3 N/m και γ) 54 N/m.

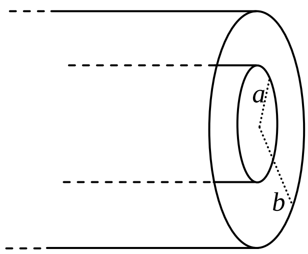


Σχήμα 3.23 *Πρόβλημα 3.8.*

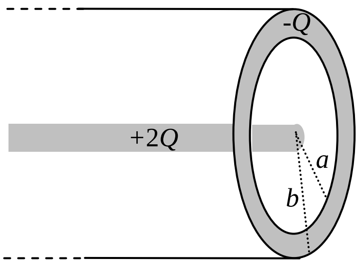
Π3.8 Ηλεκτρικό πεδίο ομόκεντρων σφαιρικών φλοιών. Δύο ομόκεντροι φορτισμένοι λεπτοί σφαιρικοί φλοιοί έχουν ακτίνες r_1=10 cm και r_2=15 cm, όπως δείχνει το σχ. 3.23. Το φορτίο στον εσωτερικό φλοιό είναι q_1=40 nC και στον εξωτερικό q_2=19.3 nC. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση α) r=12.0 cm, β) r=22.0 cm και γ) r=8.0 cm από το κέντρο των φλοιών. Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού $\varepsilon_o=8.8\times10^{-12}$ C^2/N m^2. *Απάντηση*: α) 2.5×10^4 N/m, β) 1.1×10^4 N/m και γ) 0.

Π3.9 Ηλεκτρικό πεδίο ομοαξονικών κυλινδρικών σωλήνων. Το σχ. 3.24 δείχνει την τομή δυο ομοαξονικών μακριών λεπτών κυλινδρικών σωλήνων με ακτίνες a και b. Οι σωλήνες είναι ομοιόμορφα φορτισμένοι με ίσα και αντίθετα φορτία που κατανέμονται στην επιφάνειά τους. Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου του σωλήνα με ακτίνα a είναι σ. Δείξτε ότι α) το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν για $r>b$ και $r<a$, και β) το πεδίο E ανάμεσα στους κυλίνδρους είναι $E=\dfrac{a\sigma}{r\varepsilon_o}$.

Π3.10 Ηλεκτρικό πεδίο αγώγιμου κυλινδρικού σωλήνα. Ένας πολύ μακρύς αγώγιμος κυλινδρικός σωλήνας έχει εσωτερική ακτίνα α και εξωτερική b. Ο σωλήνας φέρει συνολικό φορτίο $-Q$ ομοιόμορφα κατανεμημένο πάνω του. Φορτίο $+2Q$ ευρίσκεται κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του σωλήνα, και έχει γραμμική κατανομή όπως δείχνει το σχ 3.25. α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση r από τον άξονα του σωλήνα για 1) $r<a$, 2) $a < r < b$ και 3) $r>b$. β) Ποιο είναι το φορτίο στην εξωτερική και ποιο στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα;



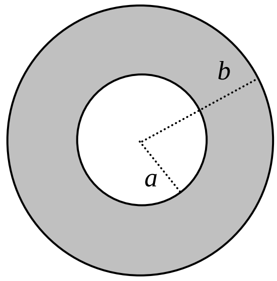
Σχήμα 3.24 *Πρόβλημα 3.9.*



Σχήμα 3.25 *Πρόβλημα 3.10.*

Π3.11 Ηλεκτρικό φορτίο μονωτικής σφαίρας. Μια μονωτική σφαίρα ακτίνας R είναι ανομοιόμορφα ηλεκτρικά φορτισμένη. Η πυκνότητα φορτίου ρ δίνεται ως $\rho=\rho_o(1-r/R)$ για απόσταση $r<R$, και $\rho=0$ για $r>R$. Ισχύει ότι $\rho_o=3Q/\pi R^3$. Αποδείξτε ότι το συνολικό φορτίο της σφαίρας είναι Q. *Υπόδειξη*: Θεωρείστε ότι το στοιχειώδες φορτίο dq της σφαίρας είναι $dq=\rho dV$, όπου $dV=4\pi r^2dr$.

Π3.12 Ηλεκτρικό πεδίο κοίλης μονωτικής σφαίρας. Μια κοίλη μονωτική σφαίρα έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου ρ. Η εσωτερική και εξωτερική ακτίνα της είναι a και b αντιστοίχως, όπως φαίνεται στο σχ. 3.26. Να ευρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο στις περιοχές α) $r<a$, β) $a<r<b$ και γ) $r>b$.



Σχήμα 3.26 *Πρόβλημα 3.12.*

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 4

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Σύνοψη

Στο τέταρτο τούτο κεφάλαιο, ορίζονται οι φυσικές ποσότητες του ηλεκτρικού δυναμικού και της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας για σημειακά και μη φορτία. ενώ μελετάται το ηλεκτρικό στατικό πεδίο ως διατηρητικό πεδίο. Επίσης, μελετώντας της δυναμική του ηλεκτρικού διπόλου μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, ορίζεται η έννοια της ηλεκτρικής διπολικής ροπής,

Προαπαιτούμενη γνώση

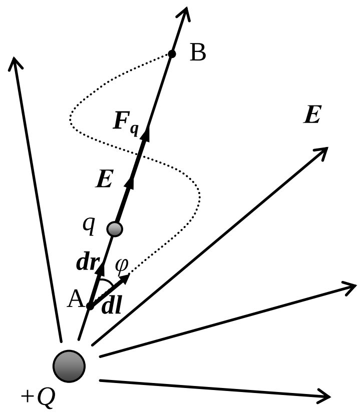
Κανόνες παραγώγισης και ολοκληρώσεως. Μερική παράγωγος.

4.1 Έργο ηλεκτρικού πεδίου και ηλεκτρική δυναμική ενέργεια

Έως τώρα έχουμε εξετάσει τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ηλεκτρικών φορτίων από δυναμικής άποψης, δηλ. με βάση την ηλεκτροστατική δύναμη Coulomb που αναπτύσσεται μεταξύ των φορτίων. Εντούτοις δεν έχουμε αναφερθεί στο τι συμβαίνει από ενεργειακής άποψης, δηλ. ποια ενέργεια χαρακτηρίζει τα ηλεκτρικά φορτία στις ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις. Γι' αυτόν τον λόγο, ας εξετάσουμε την απλή περίπτωση, όπου δυο σημειακά θετικά ηλεκτρικά φορτία Q και q, αλληλεπιδρούν μεταξύ τους όπως δείχνει το σχ. 4.1. Το φορτίο Q προς χάριν απλότητος θεωρείται ακίνητο, ενώ το φορτίο q δύναται να κινείται ελεύθερα στο χώρο. Εφόσον το q είναι ομώνυμο του Q, σύμφωνα με τον νόμο του Coulomb θα απωθηθεί από αυτό κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης r. Η ηλεκτρική δύναμη $\boldsymbol{F_q}$ που ασκείται πάνω στο q, είναι συνευθειακή και ομόρροπη του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$, το οποίο δημιουργείται από το φορτίο Q, λόγω της σχέσης $\boldsymbol{F_q}=q\boldsymbol{E}$. Η ηλεκτρική δύναμη $\boldsymbol{F_q}$ λοιπόν, καθώς μετατοπίζει το φορτίο q από ένα αρχικό σημείο Α σε ένα τελικό Β κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης r (βλ. σχ. 4.1), παράγει έργο W πάνω στο φορτίο q. Το έργο αυτό είναι ίσο με

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F_q}\cdot\boldsymbol{dr} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_q dr\cos\varphi \Rightarrow W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_q dr \qquad (4.1)$$

επειδή κατά την διάρκεια της αυθόρμητης απωστικής κίνησης του φορτίου q, ισχύει πάντα $\varphi=0^{\circ}$.



Σχήμα 4.1 *Κίνηση θετικού ηλεκτρικού φορτίου q από το σημείο Α στο σημείο Β, εντός ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργείται από το ακίνητο θετικό σημειακό φορτίο Q. Η αυθόρμητη διαδρομή που διαγράφει το φορτίο q είναι ακτινική. Για οποιαδήποτε άλλη τυχαία διαδρομή του φορτίου μεταξύ των σημείων Α και Β, το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο είναι το ίδιο με αυτό της ακτινικής τροχιάς ΑΒ. Εν γένει το έργο εξαρτάται μόνο από τις θέσεις των Α και Β σημείων, και όχι από την διαδρομή του φορτίου q μεταξύ αυτών.*

Εάν τώρα θεωρήσουμε μια τυχαία διαδρομή του φορτίου μεταξύ των σημείων Α και Β, όπως δείχνει το σχ. 4.1 (διακεκομμένη γραμμή), το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ λόγω της ηλεκτρικής δύναμης $\boldsymbol{F_q}$ πάνω στο φορτίο q κατά την μετατόπισή του από το Α στο Β στην νέα αυτή διαδρομή, είναι

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F_q}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} F_q \cos\varphi dl \qquad (4.2)$$

όπου $\boldsymbol{dl}$ είναι η στοιχειώδης μετατόπιση του q πάνω στην τυχαία διαδρομή, και φ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{F_q}$ και $\boldsymbol{dl}$. Η ποσότητα $\cos\varphi dl$ είναι η προβολή του $\boldsymbol{dl}$ στην διεύθυνση της $\boldsymbol{F_q}$, ή αλλιώς στην ακτινική διεύθυνση r. Για κάθε στοιχειώδες τμήμα της τυχαίας διαδρομής ισχύει

$$dr = dl\cos\varphi \qquad (4.3)$$

Λόγω της εξ. 4.3, το ολοκλήρωμα της εξ. 4.2 ανάγεται στο ολοκλήρωμα της εξ. 4.1. Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι για οποιαδήποτε τυχαία διαδρομή από το σημείο Α στο σημείο Β, το έργο που παράγει η ηλεκτρική δύναμη Coulomb είναι το ίδιο. Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο γεγονός ότι, το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται από την ηλεκτρική δύναμη Coulomb κατά την κίνηση ενός φορτίου από μια θέση r_A σε μια άλλη θέση r_B, εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση του φορτίου, ενώ είναι ανεξάρτητο από την διαδρομή που το φορτίο ακολουθεί μεταξύ αυτών των δυο θέσεων (Grant & Phillips, 1975), (Young. & Freedman, 2010). Ως συνέπεια τούτου, μπορούμε να ειπούμε ότι το έργο που παράγει η ηλεκτροστατική δύναμη κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής ενός φορτίου, είναι μηδέν. Από την Μηχανική γνωρίζουμε ότι τέτοια χαρακτηριστικά στην κίνηση σωμάτων, επιφέρουν μόνο οι διατηρητικές δυνάμεις και τα διατηρητικά πεδία που τις δημιουργούν, όπως για παράδειγμα είναι η βαρυτική δύναμη και το βαρυτικό πεδίο αντιστοίχως. Αποδείξαμε λοιπόν ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο και η δύναμη που αυτό δημιουργεί, είναι επίσης διατηρητικές φυσικές ποσότητες (Knight, 2010). Αντικαθιστώντας την ηλεκτρική δύναμη Coulomb στην εξ. 4.1, παίρνουμε για το έργο της

$$W_{A\to B}=\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{r^2}dr=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}(-\frac{1}{r}\Big|_{r_A}^{r_B})=-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A})\Rightarrow W_{A\to B}=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o r_A}-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o r_B}\quad(4.4)$$

Από την Μηχανική γνωρίζουμε ότι όταν σ' ένα σώμα ασκούνται μόνο διατηρητικές δυνάμεις, η μηχανική του ενέργεια, δηλ. το άθροισμα της κινητικής και δυναμικής του ενέργειας, παραμένει σταθερή σε οποιαδήποτε θέση και αν αυτό ευρεθεί. Ισχύει δηλ.

$$E=K+U=c\quad(4.5)$$

όπου E, K και U, είναι η μηχανική, η κινητική και η δυναμική ενέργεια του κινουμένου σώματος αντιστοίχως. Η εξ. 4.5 ισχύει και για την κίνηση του φορτίου q μέσα στο ηλεκτροστατικό πεδίο από την θέση Α στην θέση Β (σχ. 4.1), όπου K και U είναι η κινητική και η δυναμική ενέργεια αντιστοίχως του κινουμένου φορτίου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Έτσι μπορούμε να γράψουμε για το φορτίο q καθώς αυτό κινείται από το σημείο Α στο σημείο Β,

$$K_A+U_A=K_B+U_B\Rightarrow K_B-K_A=U_A-U_B\Rightarrow K_B-K_A=-(U_B-U_A)\Rightarrow\Delta K_{AB}=-\Delta U_{AB}\quad(4.6)$$

Η εξ. 4.6 μας πληροφορεί ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας που επιφέρει η ηλεκτροστατική δύναμη σ' ένα φορτίο, είναι ίση με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του φορτίου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Με άλλα λόγια διαπιστώνουμε, ότι όπως μια μάζα η οποία ευρίσκεται εντός βαρυτικού πεδίου χαρακτηρίζεται από βαρυτική δυναμική ενέργεια, έτσι και το ηλεκτρικό φορτίο όταν ευρίσκεται εντός ηλεκτρικού πεδίου χαρακτηρίζεται από ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. Από την Μηχανική και το θεώρημα έργου-κινητικής ενέργειας, γνωρίζουμε ότι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος ισούται με την παραγωγή ή δαπάνη έργου σε αυτό. Έτσι από τις εξισώσεις 4.4 και 4.6, παίρνουμε

$$W_{A\to B}=\Delta K_{AB}\overset{(4.4)}{\underset{(4.6)}{\Rightarrow}}\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o r_A}-\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_o r_B}=-\Delta U_{AB}=U_A-U_B\quad(4.7)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι, το έργο που απαιτείται για να μετακινηθεί ένα ηλεκτρικό φορτίο από μια θέση του ηλεκτροστατικού πεδίου σε μια άλλη, είναι ίσο με την αρνητική μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του φορτίου μεταξύ αυτών των θέσεων (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Από την εξ. 4.7 συνάγουμε ότι η **ηλεκτρική δυναμική ενέργεια** ενός φορτίου q σε σημείο Α που απέχει απόσταση r_A από ένα άλλο φορτίο Q, και εντός του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί το Q, είναι

$$U_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{r_A}\quad(4.8)$$

Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια περιγράφει την αλληλεπίδραση των δύο φορτίων και μπορεί να είναι, είτε θετική όταν τα φορτία είναι ομώνυμα (άπωση), είτε αρνητική όταν τα φορτία είναι ετερώνυμα (έλξη). Αρνητική δυναμική ενέργεια δηλώνει ένα δέσμιο και σταθερό σύστημα φορτίων, όπως πχ πυρήνας-ηλεκτρόνια. Θετική δυναμική ενέργεια δηλώνει ένα ασταθές σύστημα. Όταν η απόσταση των σημειακών φορτίων προσεγγίζει το άπειρο, η δυναμική ενέργεια προσεγγίζει το μηδέν. Επειδή όπως στην Μηχανική, έτσι και στον ΗΜ μας ενδιαφέρουν περισσότερο οι μεταβολές της δυναμικής ηλεκτρικής ενέργειας, συνήθως θεωρούμε την δυναμική ηλεκτρική ενέργεια στο άπειρο ίση με μηδέν. Υπό αυτήν την έννοια, η δυναμική ενέργεια ενός σημειακού φορτίου σε μία θέση του ηλεκτρικού πεδίου, είναι ίση με το έργο που πρέπει να καταναλωθεί για να μεταφερθεί το φορτίο από μια πολύ μακρινή θέση (στο άπειρο) στην συγκεκριμένη θέση.

Τελειώνοντας, ας διερευνήσουμε το έργο της ηλεκτρικής δύναμης βάσει της εξ. 4.7. Όταν το φορτίο q είναι ομώνυμο του Q (σχ. 4.1), θα απωθηθεί αυθόρμητα από το σημείο Α προς το Β, με την μετατόπιση $\boldsymbol{dr}$ να είναι ομόρροπη της ηλεκτρικής δύναμης $\boldsymbol{F}$, οπότε το έργο είναι θετικό. Σύμφωνα με το θεώρημα έργου-ενέργειας, θετικό έργο προκαλεί αύξηση της κινητικής ενέργειας του φορτίου q και αντίστοιχη μείωση της δυναμικής του ενέργειας. Πράγματι, καθώς το φορτίο q επιταχύνεται από την ηλεκτρική δύναμη, αυξάνει την κινητική του ενέργεια μειώνοντας ταυτόχρονα την δυναμική του (βλ. εξ. 4.8). Εάν το φορτίο q κατευθύνεται με ταχύτητα από το σημείο Β στο σημείο Α, η απωστική ηλεκτρική δύναμη είναι αντίθετη της μετατόπισης $\boldsymbol{dr}$, και το έργο της είναι αρνητικό, δηλ. η δύναμη καταναλώνει ενέργεια. Αυτό έχει ως συνέπεια, η κινητική ενέργεια του φορτίου q να ελαττώνεται καθώς πλησιάζει το φορτίο Q, ενώ ταυτόχρονα η δυναμική του ενέργεια αυξάνεται. Στην αντίθετη περίπτωση όπου το φορτίο q είναι ετερώνυμο του Q, κατά την μετατόπισή του από το σημείο Α προς το Β, η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται πάνω στο q είναι αντίθετη της μετατόπισης $\boldsymbol{dr}$ και επομένως το έργο της είναι αρνητικό. Τότε εάν το φορτίο q κινείται με μια αρχική ταχύτητα από το Α προς το Β, η ηλεκτρική δύναμη το επιβραδύνει μειώνοντάς του την κινητική ενέργεια και αυξάνοντάς του την δυναμική. Εάν όμως το φορτίο q κινείται από το σημείο Β προς το Α, τότε η ηλεκτρική δύναμη είναι ομόρροπη της μετατόπισης $\boldsymbol{dr}$ και επομένως το έργο της είναι θετικό. Τότε η ηλεκτρική δύναμη επιταχύνει το φορτίο q, αυξάνοντας την κινητική του ενέργεια και ελαττώνοντάς του την δυναμική. Προσοχή! Τα ετερώνυμα ηλεκτρικά φορτία έχουν αρνητική δυναμική ενέργεια (έλξη φορτίων), οπότε όσο πλησιέστερα είναι το ένα ως προς το άλλο, τόσο μικρότερη είναι η δυναμική τους ενέργεια (μεγάλος αρνητικός αριθμός, εξ. 4.8). Αντιθέτως για τα ομώνυμα ηλεκτρικά φορτία, όσο περισσότερο πλησιάζουν μεταξύ τους, τόσο αυξάνεται η ηλεκτρική δυναμική τους ενέργεια (μεγάλος θετικός αριθμός, εξ. 4.8). Σε κάθε περίπτωση, αφήνοντας ελεύθερα τα ηλεκτρικά φορτία να κινηθούν αυθόρμητα υπό την επίδραση της ηλεκτροστατικής δύναμης Coulomb, τα φορτία κινούνται πάντα το ένα ως προς το άλλο, έτσι ώστε η ηλεκτρική δυναμική τους ενέργεια να μειωθεί στο ελάχιστο δυνατό. Κάθε ηλεκτρικό φορτίο δηλαδή, τείνει πάντα να καταλάβει μια θέση ελάχιστης ηλεκτρική δυναμικής ενέργειας.

4.1.1 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια συνόλου σημειακών ηλεκτρικών φορτίων

Η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια μεταξύ δύο σημειακών ηλεκτρικών φορτίων ορίζεται από την εξ. 4.8. Προσέξτε ότι η εξ. 4.8, ορίζει την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του σημειακού φορτίου q σε απόσταση r_A ως προς το φορτίο Q (σχ. 4.1), το οποίο θεωρούμε ότι ευρίσκεται στην αρχή των αξόνων ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Ταυτοχρόνως όμως, η ίδια εξίσωση ορίζει και την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φορτίου Q ως προς το φορτίο q. Αυτό συμβαίνει διότι με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φορτίο Q ευρίσκεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο του φορτίου q και σε απόσταση r_A από αυτό, εφόσον βεβαίως θεωρήσουμε την αρχή ενός συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων στην θέση του φορτίου q. Έτσι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ορίζεται αμοιβαίως για ένα ζεύγος ηλεκτρικών φορτίων με απόσταση r μεταξύ τους, ως

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qq}{r} \qquad (4.9)$$

Από φυσική άποψη, η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δυο φορτίων q και Q, είναι η ενέργεια που πρέπει να αποδοθεί στο σύστημα των ηλεκτρικών φορτίων για να απομακρυνθούν μεταξύ τους σε άπειρη απόσταση, έχοντας μηδενική κινητική ενέργεια το καθένα, έτσι ώστε να σταματήσει κάθε ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Για την περίπτωση δύο ετεροσήμων σημειακών φορτίων, η εξ. 4.9 δίνει αρνητική δυναμική ενέργεια, που σημαίνει ότι τα δυο φορτία είναι δέσμια το ένα ως προς το άλλο, μιας και έλκονται από την δύναμη Coulomb, ώστε να τείνουν να ενωθούν. Για να σταματήσουν να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, δηλ. να έλκονται, κάποιος πρέπει να τους εφαρμόσει μια αντίθετη δύναμη από αυτήν του Coulomb, ώστε παράγοντας έργο πάνω τους, να τα απομακρύνει σε άπειρη απόσταση μεταξύ τους, με αποτέλεσμα να σταματήσει η ηλεκτροστατική αλληλεπίδρασή τους. Αντιθέτως για δύο ομόσημα σημειακά φορτία, η δυναμική τους ενέργεια είναι θετική, και τα φορτία λόγω της απωστικής δύναμης Coulomb τείνουν να απομακρυνθούν μεταξύ τους προς το άπειρο. Για να τα διατηρήσει κάποιος σε σταθερή απόσταση r το ένα από το άλλο, πρέπει να ασκήσει πάνω τους αντίθετη δύναμη από αυτήν του Coulomb, και επομένως να δαπανήσει ενέργεια ίση με την δυναμική ενέργεια που έχουν τα φορτία όταν απέχουν απόσταση r.

Εάν τώρα θεωρήσουμε ένα σημειακό φορτίο q να περιβάλλεται από N σημειακά ηλεκτρικά φορτία $Q_{\rm i}$, όπου i=1,2,…N, η συνολική δυναμική ενέργεια του φορτίου q δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα των ηλεκτρικών δυναμικών ενεργειών του q με κάθε ένα φορτίο $Q_{\rm i}$ ξεχωριστά, δηλ. ισχύει

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_{\rm o}}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \ldots + \frac{Q_{\rm N}}{r_{\rm N}}\right) \Rightarrow U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_{\rm o}}\sum_{i=1}^{\rm N}\frac{Q_i}{r_i} \qquad (4.10)$$

όπου r_i είναι η απόσταση του q φορτίου από το φορτίο $Q_{\rm i}$. Ισχύει δηλ. για την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια η αρχή της επαλληλίας. Υπενθυμίζουμε ότι η δυναμική ενέργεια είναι μονόμετρη φυσική ποσότητα. Έτσι οι όροι του αθροίσματος της εξ. 4.10 είναι θετικοί αριθμοί για ομώνυμα φορτία q και $Q_{\rm i}$, ενώ είναι αρνητικοί για ετερώνυμα φορτία.

Στην περίπτωση που έχουμε μια κατανομή N σημειακών ηλεκτρικών φορτίων q_1, q_2, …$q_{\rm N}$ στο χώρο, η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων είναι το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών ανά ζεύγος φορτίων, δηλ. ισχύει

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\rm o}}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \ldots + \frac{q_1q_{\rm N}}{r_{1\rm N}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}} + \frac{q_2q_4}{r_{24}} + \ldots + \frac{q_2q_{\rm N}}{r_{2\rm N}} + \ldots\right) \Rightarrow U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\rm o}}\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \qquad (4.11)$$

όπου r_{ij} είναι η απόσταση μεταξύ των q_i και q_j φορτίων (Knight, 2010). Προσέξτε ότι για να μην συμπεριλάβουμε στο άθροισμα το ίδιο ζευγάρι φορτίων δύο φορές, θεωρούμε πάντα γινόμενα φορτίων q_iq_j με $i<j$. Σε κάθε περίπτωση, για να εύρουμε την δυναμική ενέργεια ενός ή περισσοτέρων φορτίων, τα φορτία πρέπει να τοποθετούνται στις σχέσεις πάντα με τα πρόσημά τους. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος N σημειακών φορτίων σε συγκεκριμένες θέσεις, είναι ίση με το έργο που πρέπει να δαπανηθεί για να μεταφερθούν αυτά τα N φορτία από το άπειρο (U=0), σ' αυτές τις θέσεις.

Παράδειγμα 4.1 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια πρωτονίων

Ο πυρήνας του Ηλίου έχει δύο πρωτόνια τα οποία απέχουν μεταξύ τους απόσταση περίπου $d=3\times10^{-15}$ m. Ποια είναι η αμοιβαία ηλεκτρική δυναμική ενέργειά τους; Το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου είναι $q=1.6\times10^{-19}$C.

Λύση

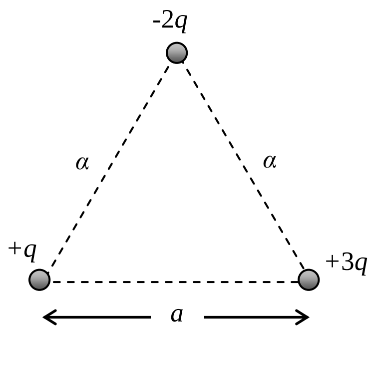
Η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μεταξύ δυο πρωτονίων δίνεται από την εξ. 4.9, όπου $q=Q$ είναι το φορτίο του πρωτονίου. Έτσι έχουμε

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\rm o}}\frac{q^2}{d} = 9\times10^9\,\frac{\rm Nm^2}{\rm C^2}\,\frac{(1.6\times10^{-19}\,{\rm C})^2}{3\times10^{-15}\,{\rm m}} \Rightarrow U = 7.68\times10^{-14}\,{\rm J}$$

Στην ατομική κλίμακα η ενέργεια μετράται σε μονάδες ηλεκτρονιοβόλτ (eV), όπου 1 eV = 1.6×10^{-19} Joule. Άρα η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των δυο πρωτονίων είναι $U=4.8\times10^5$ eV. Παρατηρούμε ότι η ενέργεια είναι θετική, που σημαίνει ότι τα πρωτόνια απωθούνται μεταξύ τους. Εντούτοις τα πρωτόνια παραμένουν δεσμευμένα στον πυρήνα, διότι εκτός της απωστικής ηλεκτρικής δύναμης υπάρχει και η πυρηνική δύναμη, η οποία είναι ελκτική. Σε αποστάσεις υποατομικών διαστάσεων, όπως αυτές των πυρήνων των ατόμων (10^{-15} m), η πυρηνική δύναμη είναι ισχυρότερη της ηλεκτρικής. Για να καταλάβουμε πόσο δυνατή είναι η πυρηνική δύναμη, αρκεί να υπολογίσουμε την απωστική δύναμη Coulomb μεταξύ των δυο πρωτονίων του ατόμου του Ηλίου, η οποία υπολογίζεται περίπου ίση με 25 N. Αυτή η μακροσκοπικού μεγέθους δύναμη, είναι αναλογικά μια τεράστια δύναμη, εάν σκεφθεί κανείς ότι δημιουργείται μεταξύ δύο σωματιδίων του ατομικού πυρήνα.

Παράδειγμα 4.2 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ομάδος σημειακών ηλεκτρικών φορτίων

Τρία σημειακά ηλεκτρικά φορτία είναι τοποθετημένα στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α, όπως φαίνεται στο σχ. 4.2. Τα φορτία είναι $q_1=+q$, $q_2=+3q$ και $q_3=-2q$, όπου $q=1\times10^{-9}$ C ενώ η πλευρά του τριγώνου είναι α=10 cm. Ποια είναι η συνολική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των ηλεκτρικών φορτίων;



Σχήμα 4.2 *Ηλεκτρικά σημειακά φορτία τοποθετημένα στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου (παράδειγμα 4.2).*

Λύση

Για να υπολογίσουμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια U του συστήματος των φορτίων, πρέπει να υπολογίσουμε την δυναμική ενέργεια κάθε ζεύγους φορτίων, και στη συνέχεια να αθροίσουμε τις επιμέρους δυναμικές ενέργειες, όπως υποδεικνύει η εξ. 4.11. Έτσι έχουμε για την δυναμική ενέργεια του συστήματος των φορτίων

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} \qquad (1)$$

όπου

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{a} \Rightarrow U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{3q^2}{a} \qquad (2)$$

$$U_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_3}{a} \Rightarrow U_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(-2)q^2}{a} \qquad (3)$$

$$U_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2 q_3}{a} \Rightarrow U_{23} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{(-6)q^2}{a} \qquad (4)$$

Η εξ. 1 λόγω των 2, 3 και 4 εξισώσεων γίνεται

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{3q^2}{a} + \frac{-2q^2}{a} + \frac{-6q^2}{a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{a}(3-2-6) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{5q^2}{a} \Rightarrow$$

$$U = -9\times10^9\,\frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\,\frac{5\times(1\times10^{-9}\,\text{C})^2}{10\times10^{-2}\,\text{m}} \Rightarrow U = -4.5\times10^{-7}\,\text{J}$$

Η συνολική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών φορτίων είναι αρνητική, γεγονός που σημαίνει ότι συνολικά υπάρχει ελκτική αλληλεπίδραση μεταξύ των φορτίων, ώστε να δημιουργείται ένα δέσμιο σύστημα. Έτσι εάν τα τρία φορτία αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν, θα καταλήξουν να ενωθούν το ένα με το άλλο, με το αρνητικό φορτίο να καταλαμβάνει θέση ανάμεσα στα δυο θετικά.

4.2 Το ηλεκτρικό δυναμικό

Έχουμε ορίσει την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός φορτίου q ως μια μονόμετρη φυσική ποσότητα, η οποία εξαρτάται από την θέση του φορτίου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο ενός άλλου φορτίου Q, και το μέγεθος του ιδίου του φορτίου q. Εάν θεωρήσουμε την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ανά μονάδα του φορτίου q (ανά C), τότε παίρνουμε μία μονόμετρη φυσική ποσότητα, η οποία ονομάζεται **ηλεκτρικό δυναμικό** V και εξαρτάται μόνο από την θέση του φορτίου q εντός του ηλεκτρικού πεδίου και το φορτίο Q που δημιουργεί το πεδίο. Με άλλα λόγια το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μια ιδιότητα του χώρου του ηλεκτρικού πεδίου, που για κάθε σημείο του χώρου λαμβάνει μια συγκεκριμένη τιμή, η οποία και καθορίζει την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια κάθε φορτίου που θα ευρεθεί στο συγκεκριμένο σημείο. Έτσι θεωρώντας ένα δοκιμαστικό φορτίο q, το οποίο τοποθετείται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο ενός άλλου σημειακού φορτίου Q, (βλ. σχ. 4.1), εξ ορισμού το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται ως

$$V = \frac{U}{q} \qquad (4.12)$$

(Sears, 1951), (Young. & Freedman, 2010), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Επειδή η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φορτίου q σε απόσταση r από το σημειακό φορτίο Q ορίζεται ως

$$U = K\frac{qQ}{r} \qquad (4.13)$$

το ηλεκτρικό δυναμικό που δημιουργεί ένα σημειακό ηλεκτρικό φορτίο στο χώρο είναι

$$V = K\frac{Q}{r} \qquad (4.14)$$

Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό είναι ανάλογο της ποσότητος του ηλεκτρικού φορτίου, το οποίο δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο, και αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης από αυτό. Επίσης όπως προαναφέραμε, το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μια μονόμετρη φυσική ποσότητα, η οποία παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε σημείο του χώρου. Έτσι το δυναμικό που δημιουργεί στο χώρο ένα θετικό φορτίο είναι θετικό, ενώ το αντίστοιχο δυναμικό ενός αρνητικού φορτίου είναι αρνητικό. Η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού δυναμικού στο ΔΣΜ είναι το Volt (V), όπου 1 V=J/C. Το Volt (βόλτ) ορίσθηκε προς τιμήν του Ιταλού φυσικού Alessandro Volta (1745-1827), ο οποίος πρώτος παρήγαγε ηλεκτρική ενέργεια από στοιχείο χημικής ενέργειας (μπαταρία).

Alessandro Volta (1745-1827) (https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Alessandro_Volta.jpg) Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

Από την εξ. 4.13, μπορούμε να γράψουμε ότι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ενός φορτίου q σε ένα σημείο του ηλεκτρικού πεδίου, είναι το γινόμενο του δυναμικού σ' αυτό το σημείο επί το ηλεκτρικό φορτίο, δηλ. ισχύει

$$U = qV \tag{4.15}$$

Κάποιος θα ερωτήσει: «Τί μας χρειάζεται το ηλεκτρικό δυναμικό, αφού μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ηλεκτρικό πεδίο;». Η απάντηση είναι ότι το δυναμικό ως μονόμετρη φυσική ποσότητα, σε πολλές περιπτώσεις μας δίνει πλεονέκτημα στην περιγραφή των ηλεκτρικών φαινομένων έναντι του διανυσματικού μεγέθους της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$. Επίσης κάποια προβλήματα είναι ευκολότερο να αντιμετωπισθούν με ενεργειακή θεώρηση, παρά με δυναμική, οπότε το ηλεκτρικό δυναμικό και η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια είναι εξαιρετικά χρήσιμα μεγέθη. Το ίδιο συμβαίνει και στην Μηχανική, όπου συχνά για την επίλυση προβλημάτων προτιμούμε την ενεργειακή ανάλυση (θεώρημα έργου-ενέργειας) από την δυναμική (νόμοι Νεύτωνα). Εκτός τούτου, πρέπει να τονίσουμε την θεμελιώδη φυσική σημασία του ηλεκτρικού δυναμικού ή ακριβέστερα της διαφοράς δυναμικού, ως την γενεσιουργό αιτία της κίνησης των ηλεκτρικών φορτίων στο χώρο, δηλ. της δημιουργίας ηλεκτρικού ρεύματος. Θα αναφερθούμε παρακάτω στην ιδιαίτερη αυτή φυσική σημασία του ηλεκτρικού δυναμικού, όπως επίσης και στο κεφάλαιο 6. Έτσι λοιπόν για την μελέτη των ηλεκτρικών φαινομένων, έχουμε από την μία πλευρά το μονόμετρο μέγεθος του ηλεκτρικού δυναμικού και από την άλλη το διανυσματικό του ηλεκτρικού πεδίου. Ωστόσο υπάρχει μια άρρηκτη σχέση μεταξύ αυτών των δυο μεγεθών. Ας συγκρίνουμε για παράδειγμα το ηλεκτρικό δυναμικό και το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί στο χώρο ένα σημειακό φορτίο Q. Το δυναμικό V δίνεται από την εξ. 4.14, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ από την εξίσωση.

$$\boldsymbol{E} = K\frac{Q}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{4.16}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 4.14 και 4.16, παρατηρούμε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι η αρνητική πρώτη παράγωγος του ηλεκτρικού δυναμικού ως προς την απόσταση r (Alonso & Finn, 1992). Διαφορετικά μπορούμε να ειπούμε ότι η αρνητική μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού κατά μήκος μιας κατεύθυνσης στο χώρο, μας δίνει το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$, βάσει της σχέσης

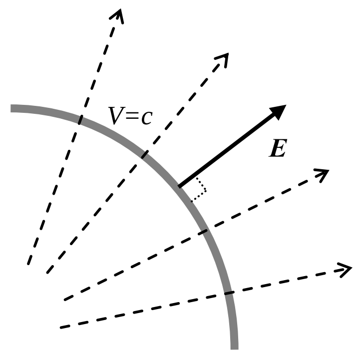
$$\boldsymbol{E} = -\frac{dV}{dr}\hat{\boldsymbol{r}} \tag{4.17}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να περιγράψουμε την εξ. 4.17, λέγοντας ότι, όταν το δυναμικό V αυξάνεται κατά μήκος μιας κατεύθυνσης $\hat{\boldsymbol{r}}$ στο χώρο, το διάνυσμα $\boldsymbol{E}$ αυξάνεται προς αυτήν την κατεύθυνση αλλά κατευθύνεται αντίθετα από το $\hat{\boldsymbol{r}}$. Αντιθέτως εάν το V μειώνεται κατά την κατεύθυνση $\hat{\boldsymbol{r}}$, το διάνυσμα $\boldsymbol{E}$ μειώνεται επίσης και έχει κατεύθυνση ίδια με του $\hat{\boldsymbol{r}}$. Η εξ. 4.17 έχει γενικότερη ισχύ, διότι ισχύει και για μη σημειακά φορτία.

Για το ηλεκτροστατικό πεδίο σημειακού φορτίου, το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την εξ. 4.14. Όλα τα σημεία τα οποία απέχουν ίση απόσταση r από ένα σημειακό φορτίο έχουν το ίδιο δυναμικό, εφόσον δεν υπάρχει άλλο φορτίο στο χώρο. Ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων που ισαπέχουν από ένα σημείο απόσταση r, είναι η επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα r. Βάσει λοιπόν της εξ. 4.14, και της ακτινικής συμμετρίας που αυτή παρουσιάζει στο χώρο, το ηλεκτρικό δυναμικό πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας είναι το ίδιο για όλα τα σημεία της επιφάνειας, και η επιφάνεια της σφαίρας ονομάζεται **ισοδυναμική επιφάνεια** (Giancoli, 2012). Γενικότερα για περιοχές του χώρου όπου το δυναμικό δεν αλλάζει αλλά είναι σταθερό, δημιουργούνται επιφάνειες οι οποίες ονομάζονται **ισοδυναμικές επιφάνειες** (Feynman, Leighton & Sands, 2009). Σύμφωνα με την εξ. 4.17, επειδή κατά μήκος και κατά πλάτος μιας ισοδυναμικής επιφάνειας το δυναμικό δεν αλλάζει, τότε ισχύει

$$dV = 0 \Rightarrow V = c \tag{4.18}$$

Η εξ. 4.18 βάσει της εξ. 4.17, μάς πληροφορεί ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου ***E*** σε κάθε παράλληλη διεύθυνση προς κάθε ισοδυναμική επιφάνεια είναι μηδέν. Με άλλα λόγια δεν μπορεί ένα φορτίο να κινείται πάνω σε μια ισοδυναμική επιφάνεια υπό την επίδραση κάποιας ηλεκτρικής δύναμης, διότι δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος και κατά πλάτος της. Εφόσον λοιπόν το ηλεκτρικό πεδίο είναι πάντα μηδέν εφαπτομενικώς της ισοδυναμικής επιφάνειας, αυτό σημαίνει ότι το πεδίο ***E*** μπορεί να είναι μόνο κάθετο στην επιφάνεια, οπότε και οι δυναμικές ηλεκτρικές γραμμές του είναι πάντα κάθετες σε κάθε ισοδυναμική επιφάνεια, όπως ακριβώς δείχνει το σχ. 4.3.



Σχήμα 4.3 *Οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετες σε κάθε ισοδυναμική επιφάνεια (V=c).*

Από την εξ. 4.17 μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο με παραγώγιση του δυναμικού ως προς την χωρική συντεταγμένη *r*. Αντιστρόφως από την ίδια εξίσωση, μπορούμε με ολοκλήρωση του ηλεκτρικού πεδίου ως προς την απόσταση *r*, να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό σε μια χωρική διάσταση ως

$$V(r) = -\int E(r)dr \tag{4.19}$$

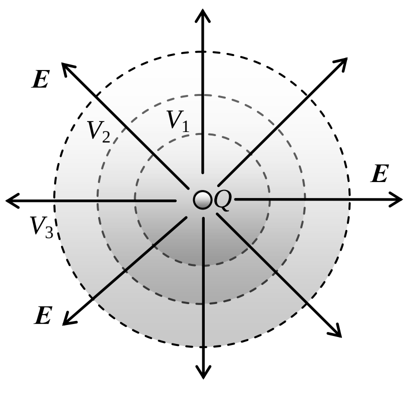
Για παράδειγμα, ένα σημειακό θετικό φορτίο που δημιουργεί στο χώρο ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο περιγράφεται από την εξ. 4.16, δημιουργεί ταυτοχρόνως στον ίδιο χώρο, ηλεκτρικό δυναμικό, το οποίο υπολογίζεται από την εξ. 4.19, ως

$$V(r) = -\int K\frac{Q}{r^2}dr = -KQ\int\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V(r) = K\frac{Q}{r} \tag{4.20α}$$

ή

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r} \tag{4.20β}$$

Για σταθερή απόσταση *r* από το σημειακό ηλεκτρικό φορτίο *Q*, το ηλεκτρικό δυναμικό παραμένει σταθερό. Έτσι γύρω από το φορτίο σχηματίζονται ισοδυναμικές επιφάνειες, οι οποίες είναι ομόκεντρες σφαίρες, όπως δείχνει το σχ. 4.4. Για θετικό *Q* το ηλεκτρικό δυναμικό φθίνει καθώς αυξάνεται η απόσταση από το φορτίο, δηλαδή όσο αυξάνεται το εμβαδόν της ισοδυναμικής επιφάνειας ισχύει $V_3<V_2<V_1$.



Σχήμα 4.4 *Ισοδυναμικές επιφάνειες (ομόκεντρες σφαίρες) ηλεκτρικού πεδίου **E** γύρω από σημειακό φορτίο Q.*

Στον ηλεκτρισμό, μεγάλη φυσική σημασία έχει η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων, η οποία ονομάζεται και **ηλεκτρική τάση**. Στην πραγματικότητα, η διαφορά δυναμικού είναι η γενεσιουργός αιτία για την ύπαρξη του ηλεκτρικού πεδίου (βλ. εξ. 4.17). Η ηλεκτρική τάση μετράται σε Volts από ειδικά όργανα τα οποία ονομάζονται **βολτόμετρα**, και θα την μελετήσουμε πιο διεξοδικά σε επόμενα κεφάλαια. Γνωρίζοντας το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο, η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων Α και Β μπορεί να υπολογισθεί βάσει της εξ. 4.20, γράφοντας

$$V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}} = \int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{B}}} dV(r) \overset{(4.19)}{\Rightarrow} V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}} = -\int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}} E(r)dr \qquad (4.21)$$

όπου $E(r)$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο κατά την διεύθυνση της απόστασης r μεταξύ των σημείων Α και Β (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Για τον υπολογισμό του δυναμικού σ' ένα σημείο του χώρου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξ. 4.21, θεωρώντας το σημείο Α στο άπειρο, όπου το δυναμικό συνήθως ορίζεται με την τιμή 0, μιας και είναι πολύ απομακρυσμένο από το φορτίο (βλ. εξ. 4.20β). Θα ιδούμε παρακάτω κάποια παραδείγματα υπολογισμού ηλεκτρικού δυναμικού στο χώρο. Για δύο οποιαδήποτε σημεία Α και Β μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να εύρουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ τους, γενικεύοντας την εξ. 4.21 στην μορφή

$$V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}} = -\int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}} \boldsymbol{E}(r) \cdot \boldsymbol{ds} \qquad (4.22)$$

όπου το ολοκλήρωμα του ds είναι το μήκος μιας διαδρομή μεταξύ των σημείων Α και Β. Παρατηρούμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου $\boldsymbol{E}(r)\cdot\boldsymbol{ds}$, είναι ίσο με την διαφορά δυναμικού η οποία είναι ανεξάρτητη της διαδρομής μεταξύ των δύο σημείων (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Αυτό είναι συνέπεια του ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι διατηρητική φυσική ποσότητα, όπως αποδείξαμε προηγουμένως στο εδάφιο 4.1.

Έως τώρα, προς χάριν απλότητος, θεωρήσαμε ότι το δυναμικό μεταβάλλεται κατά μήκος μιας χωρικής συντεταγμένης r. Στην πραγματικότητα η μεταβολή του δυναμικού για τις τρεις καρτεσιανές συντεταγμένες x,y και z, ενδέχεται να μην είναι ίδια. Τότε η εξ. 4.17 θα πρέπει να γραφεί για κάθε μία χωρική συντεταγμένη ξεχωριστά, δίνοντάς μας έτσι τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου E_x, E_y και E_z αντιστοίχως. Θα μελετήσουμε παρακάτω αυτή την περίπτωση.

Από τις εξισώσεις του ηλεκτρικού δυναμικού και της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας για σημειακά φορτία, (εξ. 4.20 και 4.9 αντιστοίχως), παρατηρούμε ότι και οι δύο ποσότητες είναι αντιστρόφως ανάλογες της απόστασης r. Έτσι όταν $r_i \rightarrow \infty$, τόσο το δυναμικό όσο και η δυναμική ενέργεια τείνουν στο μηδέν. Την ίδια συμπεριφορά παρουσιάζει και το βαρυτικό δυναμικό της Γης. Τόσο το ηλεκτρικό όσο και το βαρυτικό δυναμικό ονομάζονται **κεντρικά** ή **ακτινικά δυναμικά**, διότι παρουσιάζουν σφαιρική συμμετρία ($V \propto \frac{1}{r}$), δηλ. δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση στο χώρο αλλά μόνο από την απόσταση.

4.2.1 Το ηλεκτρικό δυναμικό συνόλου σημειακών ηλεκτρικών φορτίων

Ας θεωρήσουμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου στον χώρο υπάρχουν περισσότερα από ένα σημειακά ηλεκτρικά φορτία. Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν διάσπαρτα N ηλεκτρικά φορτία Q_{i}, όπου i=1,2,…N. σε αντίστοιχες θέσεις r_1, r_2,…r_{N}. Το ερώτημα είναι πώς διαμορφώνεται το δυναμικό που παράγει η ομάδα των φορτίων σ' ένα σημείο του χώρου; Η απάντηση δίνεται από την αρχή της επαλληλίας, όπου θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό, το οποίο δημιουργεί κάθε φορτίο ξεχωριστά στο υπό μελέτη σημείο, και στην συνέχεια να αθροίσουμε αλγεβρικά όλα τα δυναμικά για να εύρουμε το πραγματικό δυναμικό στο συγκεκριμένο σημείο. Δηλαδή το ηλεκτρικό δυναμικό σ' ένα σημείο του χώρου, δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα των δυναμικών που δημιουργεί στο σημείο αυτό κάθε ηλεκτρικό φορτίο του χώρου, ως

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{o}}}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \ldots + \frac{Q_{\mathrm{N}}}{r_{\mathrm{N}}}\right) \Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{o}}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \frac{Q_i}{r_i} \qquad (4.23)$$

όπου r_i είναι η απόσταση του q_i φορτίου από το σημείο του χώρου στο οποίο επιθυμούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό (Knight, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάποια παραδείγματα υπολογισμού ηλεκτρικού δυναμικού από συστήματα σημειακών ηλεκτρικών φορτίων.

Παράδειγμα 4.3 Ηλεκτρικό δυναμικό ατόμου

Το ηλεκτρικό δυναμικό γύρω από το κέντρο ενός ατόμου περιγράφεται με την εξίσωση, $V=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3})$, όπου R είναι η ακτίνα του ατόμου, Z ο ατομικός του αριθμός και r η απόσταση από το κέντρο του. Να ευρεθεί η έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου γύρω από το κέντρο του ατόμου.

Λύση

Εφόσον γνωρίζουμε πως μεταβάλλεται το δυναμικό με την απόσταση r, μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο από την σχέση

$$\boldsymbol{E}=-\frac{dV}{dr}\hat{\boldsymbol{r}}\Rightarrow E=-\frac{d}{dr}[\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3})]=-\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}[(-\frac{1}{r^2})-0+\frac{2r}{2R^3}]\Rightarrow E=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r^2}-\frac{2r}{2R^3})\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r^2}-\frac{2r}{2R^3})\hat{\boldsymbol{r}}$$

Παράδειγμα 4.4 Ηλεκτρικό δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου

Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δυο σημειακά φορτία +10 nC και -10 nC σε απόσταση a=20 cm, όπως φαίνονται στο σχ. 4.5. Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό του δίπολου στα σημεία Α, Β και Γ, εάν οι αποστάσεις που σημειώνονται στο σχήμα είναι b=10 cm και c=15 cm.

Λύση

Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Α δίνεται από την εξ. 4.23, οπότε γράφουμε

$$V_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_1}{r_1}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_2}{r_2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{c}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{a-c}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}q\left[\frac{(a-c)-c}{c(a-c)}\right]\Rightarrow V_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q(a-2c)}{c(a-c)}=$$

$$9\times10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{10\times10^{-9}\mathrm{C}\times(0.20\mathrm{m}-0.30\mathrm{m})}{0.15\mathrm{m}\times(0.20\mathrm{m}-0.15\mathrm{m})}\Rightarrow V_A=-1200\mathrm{V}$$

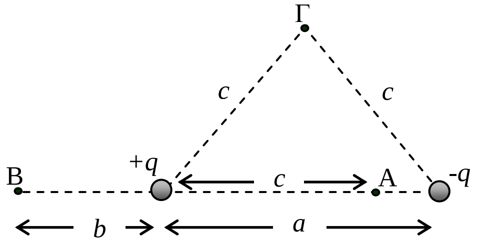
Το ηλεκτρικό δυναμικό V_A είναι αρνητικό, επειδή το σημείο Α είναι πιο κοντά στο αρνητικό φορτίο $-q$.
Ομοίως το δυναμικό στο σημείο Β δίνεται ως

$$V_B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{b}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{a+b}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}q\left[\frac{(a+b)-b}{b(a+b)}\right]\Rightarrow V_B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{qa}{b(a+b)}=$$

$$9\times10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\,\frac{10\times10^{-9}\mathrm{C}\times0.20\mathrm{m}}{0.10\mathrm{m}\times(0.20\mathrm{m}+0.10\mathrm{m})}\Rightarrow V_B=600\mathrm{V}$$

Το δυναμικό V_B είναι θετικό, διότι το σημείο Β είναι πιο κοντά στο θετικό φορτίο $+q$. Τέλος μπορούμε να υπολογίσουμε το δυναμικό στο σημείο Γ, το οποίο ανήκει στην μεσοκάθετο της απόστασης a, επειδή ισαπέχει από τα φορτία q και $-q$. Το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο Γ δίνεται ως

$$V_\Gamma=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{c}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{c}\Rightarrow V_\Gamma=0\mathrm{V}$$



Σχήμα 4.5 *Ηλεκτρικό δίπολο (παράδειγμα 4.4).*

Ομοίως μπορεί να δειχθεί ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου έχει δυναμικό μηδέν, διότι όλα τα σημεία ισαπέχουν από τα φορτία $+q$ και $-q$. Άρα μπορούμε να ειπούμε ότι η μεσοκάθετος του παραδείγματος, είναι μια ισοδυναμική γραμμή, ή πιο γενικά, το κάθετο επίπεδο που περνά από το μέσον της απόστασης a, είναι μία ισοδυναμική επιφάνεια, όπου το V=0.

4.2.2 Το δυναμικό και η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια συνεχούς κατανομής φορτίου

Όταν το ηλεκτρικό φορτίο έχει συνεχή κατανομή στο χώρο, δηλ. δεν μπορεί να θεωρηθεί σημειακό, τότε χωρίζοντας το φορτίο σε άπειρο αριθμό στοιχειωδών φορτίων dQ, το δυναμικό δύναται να γραφεί ως

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{dQ}{r} \qquad (4.24)$$

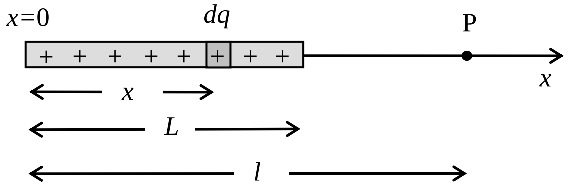
Αντιστοίχως η ηλεκτρική δυναμική ενέργειά ενός μή σημειακού ηλεκτρικού φορτίου ως προς ένα άλλο σημειακό φορτίο q, μπορεί να υπολογισθεί ως ένα άθροισμα των ηλεκτρικών δυναμικών ενεργειών ενός μεγάλου πλήθους απειροστών φορτίων dq. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\int \frac{dQ}{r} \qquad (4.25)$$

Στη συνέχεια θα ιδούμε κάποια παραδείγματα υπολογισμού δυναμικού και ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας που αφορούν μη σημειακά φορτία.

Παράδειγμα 4.5 Ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου

Μια λεπτή ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδο με μήκος L και φορτίο Q, ευρίσκεται τοποθετημένη κατά μήκος του άξονα x, όπως φαίνεται στο σχ. 4.6. Να ευρείτε μια έκφραση για το δυναμικό V στο σημείο P, το οποίο απέχει απόσταση l από την αρχή του άξονα.



Σχήμα 4.6 *Λεπτή ομοιόμορφα θετικά φορτισμένη ράβδος με μήκος L και φορτίο Q (παράδειγμα 4.5).*

Λύση

Επειδή έχουμε συνεχή κατανομή φορτίου, χωρίζουμε την ράβδο σε στοιχειώδη φορτία dq με στοιχειώδες μήκος dx το καθένα. Έστω λοιπόν ένα στοιχειώδες φορτίο dq σε απόσταση x από την αρχή της ράβδου. Η απόσταση του σημείου P από το φορτίο dq είναι l-x, και επομένως το στοιχειώδες δυναμικό που δημιουργείται από το φορτίο dq σ' αυτό το σημείο είναι

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{l-x} \qquad (1)$$

Επειδή η ράβδος είναι λεπτή και ομοιόμορφα φορτισμένη, θα έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ ίση με

$$\lambda = \frac{Q}{L} \qquad (2)$$

Το φορτίο dq έχει μήκος dx, και επομένως λόγω της εξίσωσης 2 μπορούμε να γράψουμε

$$dq = \lambda dx \Rightarrow dq = \frac{Q}{L}dx \qquad (3)$$

Η εξ. 3 στην 1 δίνει

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Qdx}{L(l-x)} \qquad (4)$$

Επειδή το φορτίο της ράβδου εκτείνεται από το x=0 έως x=L, ολοκληρώνοντας την εξ. 4 με αυτά τα όρια για την μεταβλητή x έχουμε

$$\int dV = \int_0^L \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{L}\frac{dx}{l-x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o L}\int_0^L \frac{dx}{l-x} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o L}\int_l^{l-L}\frac{d(l-x)}{l-x} = -\frac{Q}{\pi\varepsilon_o L}\int_l^{l-L}\frac{da}{a} \qquad (5)$$

όπου κάνοντας αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης, ορίσαμε a=l-x, με αντίστοιχη αλλαγή στα όρια ολοκλήρωσης. Τελικά από την εξ. 5 γράφουμε για το δυναμικό στο σημείο P

$$V = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o L}\ln a\Big|_l^{l-L} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o L}[\ln(l-L) - \ln l] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o L}[\ln l - \ln(l-L)] \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o L}\ln\frac{l}{l-L}$$

Παράδειγμα 4.6 Ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένου ημικυκλίου

Ένα ημικυκλικό τόξο είναι ομοιόμορφα ηλεκτρικά φορτισμένο, όπως δείχνει το σχ. 4.7. Η γραμμική πυκνότητα φορτίου του ημικυκλίου είναι λ=3.5 nC/m. Υπολογίστε το δυναμικό στο κέντρο του ημικυκλίου Ο. Δίνεται η διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_o=8.85×10^{-12} C^2/N·m^2.

Λύση

Επειδή έχουμε συνεχή κατανομή φορτίου, για να εύρουμε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό *V* το οποίο δημιουργείται στο κέντρο Ο του ημικυκλίου, θα θεωρήσουμε στοιχειώδες φορτίο *dq* στο ημικύκλιο και θα εύρουμε το στοιχειώδες δυναμικό *dV*. Μετά θα ολοκληρώσουμε κατά μήκος του ημικυκλίου για να υπολογίσουμε το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό *V* στο κέντρο Ο. Το στοιχειώδες φορτίο *dq* δημιουργεί στοιχειώδες δυναμικό *dV* στο Ο ίσο με

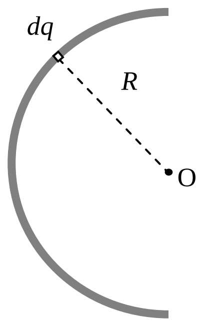
$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{dq}{R} \qquad (1)$$

Έστω ότι το φορτίο *dq* έχει μήκος *dl*. Επειδή η γραμμική πυκνότητα φορτίου είναι σταθερή ισχύει

$$dq = \lambda dl \qquad (2)$$

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{R} \qquad (3)$$



Σχήμα 4.7 *Ημικυκλικό ομοιόμορφα ηλεκτρικά φορτισμένο τόξο ακτίνας R (παράδειγμα 4.6).*

Ολοκληρώνοντας την εξ. 3 πάνω σε όλο το μήκος του ημικυκλίου που είναι πR παίρνουμε το δυναμικό *V* στο σημείο Ο. Άρα έχουμε

$$\int dV = \int_0^{\pi R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda dl}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{R}\int_0^{\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda\pi R}{R} \Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\varepsilon_o} = \frac{3.5\times10^{-9}\ \text{C/m}}{4\times8.85\times10^{-12}\ \text{C}^2/\text{Nm}^2} \Rightarrow V = 98.9\text{V}$$

Παράδειγμα 4.7 Ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας

Να ευρεθεί και να παρασταθεί γραφικώς το ηλεκτρικό δυναμικό, το οποίο δημιουργεί ομοιόμορφα φορτισμένη μονωτική σφαίρα ακτίνας *R* και φορτίου *Q*.

Λύση

Μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό από το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο έχει υπολογισθεί στο παράδειγμα 3.4 του προηγουμένου κεφαλαίου. Συγκεκριμένα το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργεί η μονωτική σφαίρα, δίνεται ως

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\text{, για } r>R \qquad (1)$$

και

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}r\text{, για } r<R \qquad (2)$$

Για $r\to\infty$, το $E\to0$. Ομοίως θεωρούμε ότι για πολύ μεγάλες τιμές της απόστασης *r*, το δυναμικό είναι μηδέν. Ισχύει δηλ. για $r\to\infty$, το V=0. Βάσει της εξ. 4.21, μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση *r* από το κέντρο της σφαίρας ως εξής:

για $r>R$ και λόγω της εξ. 1 γράφουμε

$$\int_{\infty}^{r} dV(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr \Rightarrow V(r) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr \Rightarrow V(r) - 0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow$$

$$V(r) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}(-\frac{1}{r})\Big|_{\infty}^{r} \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r})\Big|_{\infty}^{r} \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}) \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} \quad (3)$$

Από την εξ. 3 συμπεραίνουμε ότι στην επιφάνεια της σφαίρας, δηλ. για $r=R$, το δυναμικό είναι

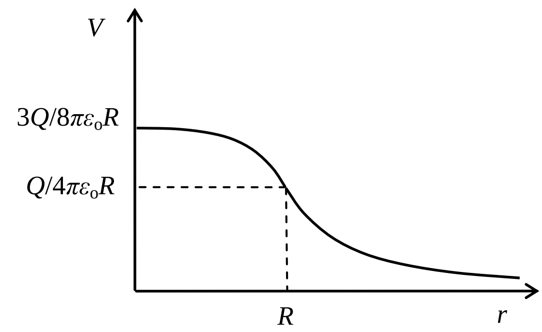
$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} \quad (4)$$

Με αναφορά αυτήν την τιμή του δυναμικού, μπορούμε από την εξ. 4.21 και την εξ. 2 να γράψουμε για $r<R$

$$\int_{R}^{r} dV(r) = -\int_{R}^{r} E(r)dr \Rightarrow V(r) - V(R) = -\int_{R}^{r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}rdr \overset{(4)}{\Rightarrow} V(r) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\int_{R}^{r} rdr \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{r^2}{2}\Big|_{R}^{r} \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} - (\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{r^2}{2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R^3}\frac{R^2}{2}) \Rightarrow$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R^3}r^2 + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R} \Rightarrow V(r) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_o R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R^3}r^2 \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}(3 - \frac{r^2}{R^2}) \quad (5)$$



Σχήμα 4.8 *Μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού ομοιόμορφα φορτισμένης μονωτικής σφαίρας, ακτίνας R και φορτίου Q, ως συνάρτηση της απόστασης r από το κέντρο της (παράδειγμα 4.7).*

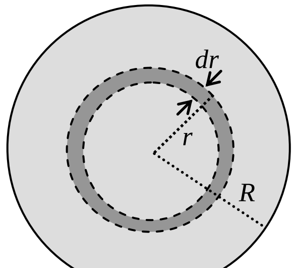
Για $r=R$, η εξ. 4 δίνει το δυναμικό πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας ίδιο με αυτό της εξίσωσης 4. Επομένως το δυναμικό που δημιουργεί η μονωτική σφαίρα στο χώρο, δίνεται από τις εξισώσεις 3 και 5, το οποίο και αναπαριστάται γραφικώς στο σχ. 4.8.

Αξίζει να σημειώσουμε την εξ. 4, η οποία μας πληροφορεί ότι για σταθερό φορτίο της σφαίρας, όσο μεγαλύτερη είναι η ακτίνα της, τόσο μικρότερο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνειά της. Γενικότερα ισχύει ότι για δεδομένη ποσότητα φορτίου, όσο μεγαλύτερη είναι η καμπυλότητα [9] μιας επιφάνειας, τόσο μικρότερο είναι το δυναμικό της. Το συμπέρασμα αυτό είναι σημαντικό και ισχύει ανεξαρτήτως του εάν η σφαίρα είναι μονωτική, ή αγώγιμη. Βεβαίως στην δεύτερη περίπτωση στο εσωτερικό της σφαίρας το E=0, οπότε το δυναμικό είναι σταθερό και όχι αυτό της εξίσωσης 3.

Το παραπάνω εξαγόμενο συμπέρασμα για την τιμή του δυναμικού σε μια καμπύλη επιφάνεια θα το χρησιμοποιήσουμε ευθύς αμέσως για την μελέτη της κατανομής των φορτίων στην επιφάνεια ενός αγωγού σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Παράδειγμα 4.8 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας

Μια συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας R, έχει σταθερή πυκνότητα φορτίου ρ και ολικό φορτίο Q. Να ευρείτε μια έκφραση για την ολική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια της φορτισμένης σφαίρας. *Υπόδειξη*: Θεωρείστε ότι η σφαίρα αποτελείται από διαδοχικά στρώματα ομοκέντρων σφαιρικών φλοιών φορτίου $dq = \rho(4\pi r^2 dr)$, και λάβετε υπόψη ότι η στοιχειώδης ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φορτίου dq είναι $dU = Vdq$.



Σχήμα 4.9 *Φορτισμένη μονωτική σφαίρα ακτίνας R και φορτίου Q. Η σφαίρα αποτελείται από ομόκεντρους σφαιρικούς φλοιούς πάχους dr (παράδειγμα 4.8).*

[9] Η επιφάνεια μιας σφαίρας μεγάλης ακτίνας έχει μικρή καμπυλότητα, ενώ μιας μικρής ακτίνας έχει μεγάλη καμπυλότητα.

Λύση

Έστω ο στοιχειώδης σφαιρικός φλοιός ακτίνας r και πάχους dr , όπως δείχνει το σχ. 4.9. Ο φλοιός έχει στοιχειώδη όγκο $d\mathrm{V} = 4\pi r^2 dr$ (προσέξτε ότι εδώ ορίζουμε τον όγκο της σφαίρας ως V ενώ το ηλεκτρικό δυναμικό ως *V*). Το φορτίο του φλοιού είναι

$$dq = \rho d\mathrm{V} \Rightarrow dq = \rho 4\pi r^2 dr \qquad (1)$$

Για ηλεκτρικό δυναμικό *V* η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φλοιού είναι

$$dU = Vdq \overset{(1)}{\Rightarrow} dU = V\rho 4\pi r^2 dr \qquad (2)$$

όπου ρ η σταθερή πυκνότητα φορτίου της σφαίρας

$$\rho = \frac{Q}{\mathrm{V}_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \qquad (3)$$

Ο φλοιός περικλείει φορτίο q, και εφόσον έχει ακτίνα $r<R$, το δυναμικό στην επιφάνεια του φλοιού δίνεται από την εξίσωση (βλ. εξ. 5, παράδειγμα 4.7)

$$V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \qquad (4)$$

Οι εξισώσεις 3 και 4 στην 2 δίνουν

$$dU = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{3Q}{4\pi R^3}4\pi r^2 dr \Rightarrow dU = \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^4} r^2\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)dr \qquad (5)$$

Για να υπολογίσουμε την ολική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια της σφαίρας, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την εξ. 5 ως προς την ακτίνα r, από 0 έως R, διότι η σφαίρα μπορεί να θεωρηθεί ένα άθροισμα πολλών στοιχειωδών ομοκέντρων φλοιών. Έτσι γράφουμε

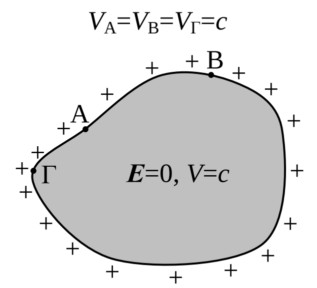
$$U = \int dU = \int_0^R \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^4} r^2\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)dr = \int_0^R \frac{9Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^4} r^2 dr - \int_0^R \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^6} r^4 dr = \frac{9Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^4}\int_0^R r^2 dr - \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\int_0^R r^4 dr =$$

$$\frac{9Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^4}\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R - \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_o R^6}\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \frac{9Q^2R^3}{24\pi\varepsilon_o R^4} - \frac{3Q^2R^5}{40\pi\varepsilon_o R^6} = \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_o R} - \frac{3Q^2}{40\pi\varepsilon_o R} = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{5}{10} - \frac{1}{10}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{4}{10}\right) \Rightarrow U = \frac{3Q^2}{10\pi\varepsilon_o R}$$

4.3 Ισοδυναμική επιφάνεια αγωγού

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την ηλεκτροστατική ισορροπία ενός αγωγού. Μεταξύ άλλων συνθηκών παραθέσαμε ότι το ηλεκτρικό φορτίο συγκεντρώνεται στην επιφάνεια του αγωγού και μάλιστα τείνει να συσσωρεύεται σε αιχμηρά σημεία της επιφανείας, όπως δείχνει το σχ. 4.10. Στο παρόν εδάφιο θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό. Καταρχήν, εφόσον υπάρχει ηλεκτροστατική ισορροπία στον αγωγό, κανένα ηλεκτρικό φορτίο δεν κινείται ούτε κατά μήκος ούτε κατά πλάτος της επιφάνειας του αγωγού. Τούτο σημαίνει ότι τα επιφανειακά ηλεκτρικά φορτία σχηματίζουν ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο είναι πάντα κάθετο στην επιφάνεια, δηλ. $E_{\perp}$, ενώ δεν υπάρχει οριζόντια συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου (παράλληλη στην επιφάνεια του αγωγού), δηλ. $E_{//} = 0$. Έτσι, λόγω των εξισώσεων. 4.17 και 18, ισχύει ότι το δυναμικό παντού στην επιφάνεια είναι το ίδιο, δηλ. $V=c$. Επομένως η επιφάνεια του κάθε αγωγού σε ηλεκτροστατική



Σχήμα 4.10 *Αγωγός σε ηλεκτροστατική ισορροπία. Η επιφάνειά του είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια. Το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια και στο εσωτερικό του αγωγού είναι το ίδιο.*

ισορροπία, είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια. Ταυτοχρόνως, επειδή στο εσωτερικό του αγωγού το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, και εκεί το ηλεκτρικό δυναμικό είναι παντού σταθερό και ίσο με την τιμή που έχει στην επιφάνεια (βλ. σχ. 4.10).

Από τις εξισώσεις 4.20 συμπεράναμε ότι το δυναμικό που δημιουργεί ένα σημειακό φορτίο στο χώρο, είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης από το φορτίο. Επειδή σημείο και σφαίρα έχουν την ίδια συμμετρία, δύναται να δειχθεί ότι το ηλεκτρικό δυναμικό της σφαίρας για $r>R$, είναι το ίδιο με αυτό του σημειακού φορτίου. Στο προηγούμενο παράδειγμα 4.7, αποδείξαμε ότι για δεδομένη ποσότητα φορτίου στην επιφάνεια μιας σφαίρας, το δυναμικό είναι αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας της σφαίρας. Έτσι για επιφάνειες ιδίου ηλεκτρικού φορτίου, οι επιφάνειες με μικρή ακτίνα (μεγάλη καμπυλότητα), έχουν μεγαλύτερο δυναμικό από τις επιφάνειες μεγάλης ακτίνας (μικρή καμπυλότητα). Η επιφάνεια ενός αγωγού με δεδομένο φορτίο, εάν δεν είναι σφαιρική αλλά έχει τυχαίο σχήμα, όπως αυτό του σχήματος 4.10, θα αποτελείται από μέρη με μεγαλύτερη καμπυλότητα (ομαλές επιφάνειες), και μέρη με μικρότερη καμπυλότητα (ανώμαλες επιφάνειες, αιχμές, ακίδες, κλπ). Για να είναι το δυναμικό σταθερό σε κάθε περιοχή και σημείο της επιφάνειας του αγωγού, θα πρέπει σύμφωνα με την εξ. 5 (βλ. παράδειγμα 4.7), το φορτίο να συσσωρεύεται σε περιοχές μεγάλης καμπυλότητας (μικρό R). Δηλαδή σε επίπεδες περιοχές της επιφάνειας του αγωγού, η κατανομή των φορτίων είναι αραιότερη (σημείο Β στο σχ. 4.10), ενώ για αιχμηρές περιοχές της επιφάνειας (σημείο Γ στο σχ. 4.10), η κατανομή των φορτίων είναι πυκνότερη. Έτσι εξηγείται γιατί οι ακίδες συσσωρεύουν μεγαλύτερα φορτία από τις επίπεδες επιφάνειες, και επομένως αναπτύσσουν υψηλότερα ηλεκτρικά πεδία (βλ. σχέση $E = \sigma/\varepsilon_o$).

4.4 Βαθμίδα ηλεκτρικού δυναμικού

Είδαμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται από την μεταβολή του ηλεκτρικού δυναμικού κατά μήκος μιας κατεύθυνσης, η οποία κατεύθυνση ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{r}}$ (βλ. εξ. 4.17). Έτσι λοιπόν, το διάνυσμα $\boldsymbol{E}$ κείται στη κατεύθυνση του διανύσματος $\hat{\boldsymbol{r}}$, και μπορεί να αναλυθεί σε τρεις συνιστώσες ενός ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς, ώστε να ισχύει

$$\boldsymbol{E} = E_x\hat{\boldsymbol{i}} + E_y\hat{\boldsymbol{j}} + E_z\hat{\boldsymbol{k}} \tag{4.26}$$

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες E_x, E_y και E_z του διανύσματος $\boldsymbol{E}$, δίνονται από τις αντίστοιχες μεταβολές του δυναμικού στις διευθύνσεις x,y και z (Benumof, 1961), (Grant & Phillips, 1975), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Young. & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Αυτές οι μεταβολές του δυναμικού στις τρεις διευθύνσεις, εκφράζονται από την έννοια της μερικής παραγώγου [10] του δυναμικού ως

$$E_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \tag{4.27α}$$

όπου παραγωγίζουμε το δυναμικό ως προς x, θεωρώντας τα y και z σταθερές. Αντιστοίχως λαμβάνουμε

$$E_y = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \tag{4.27β}$$

και

$$E_z = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \tag{4.27γ}$$

Έτσι λοιπόν, γνωρίζοντας την συνάρτηση του δυναμικού $V(x,y,z)$ ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες του χώρου, βάσει των εξισώσεων 4.27 και της εξ. 4.26, μπορούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ ως

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}} \right) \tag{4.28}$$

---

[10] Γενικά η μερική παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z)$ ως προς x, συμβολίζεται ως $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$, με τους δείκτες y και z να υπενθυμίζουν ότι αυτές οι μεταβλητές θεωρούνται σταθερές κατά την παραγώγιση (βλ. παράρτημα 4).

Η εξ. 4.28 γράφεται συντομογραφικά ως

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V(x, y, z) \tag{4.29}$$

όπου το ∇ ονομάζεται διανυσματικός τελεστής του ανάδελτα, ή αλλιώς τελεστής κλίσης, και εκφράζει το διανυσματικό χαρακτήρα της μεταβολής μιας βαθμωτής συνάρτησης στις τρεις διαστάσεις. Ο τελεστής ∇ ορίζεται ως

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}} \tag{4.30}$$

και είναι γνωστός ως κλίση (grad) ή **βαθμίδα** της συνάρτησης στην οποία εφαρμόζεται.[11] Έτσι στην προκειμένη περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο είναι το αρνητικό της **βαθμίδας του ηλεκτρικού δυναμικού**, δηλ. εκφράζει το πώς μεταβάλλεται το δυναμικό στο χώρο.

Παράδειγμα 4.9 Το ηλεκτρικό πεδίο ως βαθμίδα ηλεκτρικού δυναμικού

Στο χώρο γύρω από μια κατανομή ηλεκτρικού φορτίου, το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την σχέση $V(x,y,z) = 5xyz - 2x^2yz + 3xz^3$. Να ευρεθεί η διανυσματική έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου που δημιουργεί η κατανομή του φορτίου.

Λύση

Επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι η βαθμίδα του δυναμικού μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στις τρεις κατευθύνσεις *x*, *y* και *z*. Έτσι ισχύει για την συνιστώσα E_x,

$$E_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = -\frac{\partial(5xyz - 2x^2yz + 3xz^2)}{\partial x} = -(5yz - 4xyz + 3z^2) \Rightarrow E_x = 4xyz - 5yz - 3z^2$$

Για την συνιστώσα E_y στον άξονα *y*, ισχύει

$$E_y = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} = -\frac{\partial(5xyz - 2x^2yz + 3xz^2)}{\partial y} = -(5xz - 2x^2z) \Rightarrow E_y = 2x^2z - 5xz$$

Για την συνιστώσα στον άξονα *z*, E_z ισχύει

$$E_z = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{\partial(5xyz - 2x^2yz + 3xz^2)}{\partial z} = -(5xy - 2x^2y + 6xz) \Rightarrow E_z = 2x^2y - 5xz - 6xz$$

Γνωρίζοντας τις συνιστώσες E_x, E_y και E_z, μπορούμε να γράψουμε την διανυσματική έκφραση του ηλεκτρικού πεδίου ως

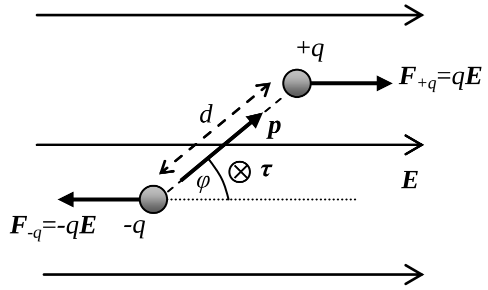
$$\boldsymbol{E} = E_x\hat{\boldsymbol{i}} + E_y\hat{\boldsymbol{j}} + E_z\hat{\boldsymbol{k}} \Rightarrow \boldsymbol{E} = (4xyz - 5yz - 3z^2)\hat{\boldsymbol{i}} + (2x^2z - 5xz)\hat{\boldsymbol{j}} + (2x^2y - 5xz - 6xz)\hat{\boldsymbol{k}}$$

4.5 Ηλεκτρικό δίπολο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο*

Δύο ίσα και αντίθετα ηλεκτρικά φορτία σε απόσταση *d* μεταξύ τους, αποτελούν ένα **ηλεκτρικό δίπολο** (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Το ηλεκτρικό πεδίο που σχηματίζεται από ένα τέτοιο ηλεκτρικό δίπολο, το μελετήσαμε με την βοήθεια των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών στο κεφάλαιο 2 (βλ. σχ. 2.2). Η έννοια του ηλεκτρικού διπόλου και το πώς αυτό συμπεριφέρεται στην φύση, είναι πολύ σημαντική μιας και πολλά συστήματα στη Φυσική και τη Χημεία, όπως για παράδειγμα τα άτομα, τα μόρια, οι κεραίες πομπών και δεκτών κ.α., μπορούν να θεωρηθούν σαν ηλεκτρικά δίπολα. Από φυσικής άποψης είναι σημαντικό να εξετάσουμε την συμπεριφορά ενός ηλεκτρικού διπόλου, όταν αυτό ευρεθεί μέσα σ' ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο ***E***, όπως φαίνεται στο σχ. 4.11. Καταρχήν όσον αφορά την δυναμική του διπόλου, επειδή τα φορτία του είναι αντίθετα, αντίθετες είναι και οι δυνάμεις που ασκούνται στο καθένα από αυτά από

[11] Η βαθμίδα της συνάρτησης *f* ορίζεται ως, $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}\right) f(x,y,z)$.

το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τα δυο φορτία να τείνουν να απομακρυνθούν μεταξύ τους. Εφόσον όμως η απόσταση d μεταξύ των φορτίων παραμένει σταθερή, το δίπολο αναγκαστικά περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα περιστροφής, ο οποίος περνά κάθετα από το μέσον της απόστασης d. Η περιστροφή αυτή είναι συνέπεια της δράσης του ζεύγους δυνάμεων $\boldsymbol{F}$ και $-\boldsymbol{F}$, οι οποίες όντας μη συγγραμμικές, ασκούν μια ροπή επάνω στο δίπολο, το οποίο τελικά ευθυγραμμίζεται με το διάνυσμα του πεδίου $\boldsymbol{E}$.



Σχήμα 4.11 *Ηλεκτρικό δίπολο μέσα σε ομογενές εξωτερικό πεδίο. Το ζεύγος των ηλεκτρικών δυνάμεων που ασκεί το πεδίο στα ηλεκτρικά φορτία, δημιουργεί ηλεκτρική διπολική ροπή που τείνει να ευθυγραμμίσει το δίπολο με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου (βλ. το κείμενο).*

Από την Μηχανική γνωρίζουμε ότι η ροπή που ασκεί μια δύναμη F σε απόσταση r από το σημείο στρέψης του άξονα περιστροφής, ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = rF\sin\varphi\hat{\boldsymbol{n}} \qquad (4.31)$$

όπου $\hat{\boldsymbol{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{F}$.[12] Επειδή το σημείο στρέψης του διπόλου είναι το κέντρο της απόστασης d που χωρίζει τα δυο φορτία, η συνολική ροπή που ασκείται από το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στο δίπολο είναι

$$\boldsymbol{\tau} = (\frac{\boldsymbol{d}}{2} \times \boldsymbol{F}) + [-\frac{\boldsymbol{d}}{2} \times (-\boldsymbol{F})] \qquad (4.32)$$

Ο προσανατολισμός του διπόλου ως προς το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$, ορίζεται από την γωνία φ μεταξύ της απόστασης d και της δύναμης F, όπως φαίνεται στο σχ. 4.11. Τότε από την εξ. 4.31 εξάγουμε ότι το μέτρο της ροπής $\boldsymbol{\tau}$ είναι

$$\tau = \frac{d}{2}F\sin\varphi + \frac{d}{2}F\sin\varphi = Fd\sin\varphi \Rightarrow \tau = qEd\sin\varphi \qquad (4.33)$$

με διεύθυνση κάθετη στο μέσον της απόστασης d και φορά προς τα «μέσα» της σελίδας (βλ. σχ. 4.11). Η ποσότητα qd ονομάζεται **ηλεκτρική διπολική ροπή $\boldsymbol{p}$**, και είναι διάνυσμα με φορά από το αρνητικό προς το θετικό φορτίο κατά μήκος της απόστασης d (Benumof, 1961), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Knight, 2010). Ισχύει δηλ.

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d} \qquad (4.34)$$

Η ηλεκτρική διπολική ροπή έχει μονάδες C.m στο ΔΣΜ. Η εξ. 4.33 μπορεί να γραφτεί λόγω της 4.34 ως

$$\tau = pE\sin\varphi \qquad (4.35)$$

Πιο γενικά η εξ. 4.35 δύναται να εκφραστεί σε διανυσματική μορφή, (δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ροπή είναι διανυσματική ποσότητα), ως

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} \qquad (4.36)$$

Η μηχανική ροπή $\boldsymbol{\tau}$ μεγιστοποιείται όταν η ηλεκτρική διπολική ροπή $\boldsymbol{p}$ είναι κάθετη στο πεδίο $\boldsymbol{E}$.[13] Γενικά η ροπή $\boldsymbol{\tau}$ τείνει να περιστρέψει το διάνυσμα $\boldsymbol{p}$, ώστε τελικά να το ευθυγραμμίσει με το διάνυσμα $\boldsymbol{E}$. Η θέση της ευθυγράμμισης είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας ($\boldsymbol{p}//\boldsymbol{E}$, $\varphi=0^o$). Για να εκτρέψουμε το δίπολο από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας ($\varphi=0^o$) σε μια άλλη που ορίζεται από γωνία φ, θα πρέπει να περιστρέψουμε το δίπολο κατ' αυτήν τη γωνία φ, εξασκώντας ροπή $\boldsymbol{\tau}$ αντίθετη αυτής που εξασκεί το πεδίο πάνω στο δίπολο (εξ. 4.36). Το έργο που πρέπει να παράγουμε για να περιστρέψουμε το δίπολο μέσα στο πεδίο E ώστε να σχηματίσει μ' αυτό γωνία φ, είναι

[12] Για να ορισθεί το διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{n}}$ και επομένως η κατεύθυνση του διανύσματος της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{\tau}$, χρησιμοποιείται ο κανόνας του δεξιόστροφου κοχλία.
[13] Δεν πρέπει να συγχέουμε την μηχανική ροπή $\boldsymbol{\tau}$ της δύναμης $\boldsymbol{F}$, με την ηλεκτρική διπολική ροπή $\boldsymbol{p}$.

$$W = -\int_0^{\varphi} \tau d\varphi \qquad (4.37)$$

Το μείον οφείλεται στο γεγονός ότι η ροπή $\boldsymbol{\tau}$ τείνει να περιστρέψει το δίπολο σε γωνίες αντίθετης φοράς από την φ. Η εξ. 4.37 μέσω της 4.35 γίνεται

$$W = -\int_0^{\varphi} pE\sin\varphi d\varphi = -pE\,(-\cos\varphi)\Big|_0^{\varphi} = pE\cos\varphi\Big|_0^{\varphi} = pE(\cos\varphi - \cos 0) \Rightarrow W = pE(\cos\varphi - 1) \qquad (4.38)$$

Από την εξ. 4.38 συμπεραίνουμε ότι το W είναι πάντα αρνητικό, γεγονός που δηλώνει ότι κάποιος πρέπει να δαπανήσει ενέργεια για να στρέψει το δίπολο από την θέση ισορροπίας, στην οποία έχει την ελάχιστη ενέργεια. Επίσης από την εξ. 4.7 έχουμε συμπεράνει ότι το έργο W της ηλεκτρικής δύναμης, η οποία είναι διατηρητική δύναμη, είναι ίσο με την αρνητική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του φορτίου μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο. Έτσι στην προκειμένη περίπτωση του ηλεκτρικού διπόλου, μπορούμε ομοίως να γράψουμε ότι

$$W = -\Delta U = -(U_{\mathrm{B}} - U_{\mathrm{A}}) = U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} \overset{(4.38)}{\Rightarrow} U_{\mathrm{A}} - U_{\mathrm{B}} = pE\cos\varphi - pE \qquad (4.39)$$

Από την εξ. 4.39 συμπεραίνουμε ότι το ηλεκτρικό δίπολο έχει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια μέσα στο πεδίο E, η οποία ορίζεται από την σχέση

$$U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E} \Rightarrow U = -pE\cos\varphi \qquad (4.40)$$

(Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Λόγω της εξ. 4.40, συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη δυναμική ενέργεια του ηλεκτρικού διπόλου μέσα στο ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, συμβαίνει για παράλληλο προσανατολισμό της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}$ με το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$, και είναι $U_{\min} = -pE$ για φ=0^{o}. Η ελάχιστη δυναμική ενέργεια του διπόλου είναι αρνητική και αντιστοιχεί σε κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας του διπόλου μέσα στο πεδίο. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε διαταραχή απομακρύνει το δίπολο από αυτήν την ενεργειακή κατάσταση, το δίπολο τείνει να επανέλθει σε αυτήν εντελώς αυθορμήτως. Αντιθέτως η μέγιστη δυναμική ενέργεια του διπόλου είναι θετική, και αντιστοιχεί σε αντιπαράλληλο προσανατολισμό της ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}$ με το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$, και είναι $U_{\max} = pE$ για φ=180^{o}. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του διπόλου αντιστοιχεί σε θέση μη ευσταθούς ισορροπίας. Η παραμικρή διαταραχή του διπόλου από την θέση αυτή, έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του προς την κατάληψη της θέσεως ευσταθούς ισορροπίας (φ=0^{o}), όπου έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια.

4.5.1 Αλληλεπιδράσεις ηλεκτρικών διπολικών ροπών*

Όπως προαναφέραμε πιο πάνω, αρκετά συστήματα στη φύση παρουσιάζουν ιδιότητες ηλεκτρικών διπόλων, ή πιο σωστά αποτελούν τα ίδια ηλεκτρικά δίπολα. Τέτοια συστήματα μπορεί να είναι άτομα ή μόρια όπου το θετικό φορτίο τους παρουσιάζει έναν προσανατολισμό ως προς το αρνητικό. Για παράδειγμα το μόριο του νερού (H_2O), ή αυτό του χλωριούχου νατρίου (NaCl), παρουσιάζουν μόνιμη ηλεκτρική διπολική ροπή, δηλαδή το «κέντρο» του θετικού φορτίου δεν συμπίπτει με αυτό του αρνητικού.[14] Τα μόρια αυτά ονομάζονται διπολικά μόρια. Αντιθέτως τα άτομα των ευγενών αερίων, λόγω του ηλεκτρονιακού τους νέφους γύρω από τον πυρήνα τους, έχουν μια σφαιρική συμμετρία ώστε να μην παρουσιάζουν μόνιμη ηλεκτρική διπολική ροπή, διότι τα κέντρα του θετικού και αρνητικού φορτίου συμπίπτουν. Εντούτοις, όταν μη πολικά άτομα ή μόρια ευρεθούν μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, είναι δυνατόν να αποκτήσουν διπολική ροπή μιας και η σφαιρική συμμετρία της κατανομής των ηλεκτρονίων αίρεται. Οι διπολικές ροπές των ατόμων ή μορίων είναι υπεύθυνες για τις **δυνάμεις van der Waals**, οι οποίες προέρχονται από την αλληλεπίδραση των διπολικών ροπών (Alonso & Finn, 1992), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Η δυναμική ενέργεια που αναπτύσσεται μεταξύ δυο πολικών ατόμων ή μορίων είναι

[14] Το μόριο του νερού παρουσιάζει ηλεκτρική διπολική ροπή ίση με 6.13×10^{-30} Cm.

$$U = -\frac{A}{r^6} \qquad (4.41)$$

όπου το A εξαρτάται από τις διπολικές ροπές και το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την ελκτική αλληλεπίδραση των ροπών και επομένως των ατόμων ή των μορίων. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι υπεύθυνη για τις δυνάμεις μεταξύ των μορίων του νερού στην υγρή και στερεά κατάσταση. Επίσης οι δυνάμεις van der Waals, χαρακτηρίζουν τους αντίστοιχους δεσμούς van der Waals, οι οποίοι επιτυγχάνουν τις καταστάσεις υγροποίησης και στερεοποίησης ευγενών και αδρανών αερίων, όπως H_2, O_2, N_2 κ.ά. Λόγω της μικρής εμβέλειας αυτών των δεσμών (δυνάμεων), $\propto r^{-6}$, η ενέργειά τους είναι της τάξης του 0.1 eV. Γενικά χαρακτηρίζονται σαν ασθενείς δεσμοί σε σύγκριση με τους ιοντικούς και ομοιοπολικούς δεσμούς.

Ας δούμε κάποιες περιπτώσεις για το πώς δρουν τα ηλεκτρικά δίπολα στην καθημερινή μας ζωή. Αναφέραμε πιο πάνω ότι το νερό αποτελείται από πολικά μόρια. Αντιθέτως το λίπος δεν διαθέτει πολικά μόρια, οπότε δεν είναι δυνατή η αλληλεπίδραση των μορίων λίπους με μόρια νερού μιας και δεν αναπτύσσονται μεταξύ τους ελκτικές δυνάμεις van der Waals. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο δεν είναι δυνατόν να απομακρύνουμε λίπος από τα χέρια μας πλένοντάς τα μόνο με νερό. Απεναντίας, είναι γνωστό ότι το σαπούνι διαθέτει μόρια όπου το ένα τους άκρο είναι πολικό και το άλλο όχι. Χρησιμοποιώντας σαπούνι και νερό είναι δυνατή η απομάκρυνση λίπους από τα χέρια μας, διότι τα μόρια του σαπουνιού ενώνονται με το ένα τους πολικό άκρο με τα πολικά μόρια του νερού, ενώ με το άλλο μη πολικό αλλά λιπόφιλο άκρο τους ενώνονται με τα μόρια του λίπους. Έτσι με σαπούνι και νερό μπορούμε να καθαρίζουμε τα λίπη. Ένα άλλο παράδειγμα το οποίο στηρίζεται στην αλληλεπίδραση πολικών μορίων, είναι η θέρμανση τροφών στον φούρνο μικροκυμάτων. Τα φαγητά στον φούρνο μικροκυμάτων ζεσταίνονται λόγω της ύπαρξης των πολικών μορίων που υπάρχουν σε αυτά. Τα πολικά μόρια στις τροφές οφείλονται κυρίως στο νερό που αυτές περιέχουν. Εφαρμόζοντας ένα εναλλασσόμενο ηλεκτρικό πεδίο μικρής έντασης και υψηλής συχνότητας, τα μόρια ταλαντώνονται πολύ γρήγορα, προσκρούοντας το ένα πάνω στο άλλο, ώστε τα φαγητά να θερμαίνονται λόγω τριβής. Αντιθέτως τα πιάτα ή γενικώς τα σκεύη, τα οποία δεν έχουν πολλά πολικά μόρια, δεν θερμαίνονται το ίδιο εύκολα μέσα στο φούρνο μικροκυμάτων. Γενικότερα χωρίς την ύπαρξη των διπόλων και ιδίως της πολικότητας του νερού, η Χημεία και η Βιοχημεία θα ήταν πολύ διαφορετική. Ακόμη και η ύπαρξη της ζωής στην Γη, η οποία συντελείται μέσω σειράς βιοχημικών αντιδράσεων, θα ήταν αμφίβολη.

Παράδειγμα 4.10 Διπολική ροπή του χλωριούχου καλίου

Το μόριο του χλωριούχου καλίου (KCl) έχει διπολική ροπή 8×10^{-30} Cm. α) Εάν αυτή προέρχεται από δυο φορτία $\pm1.6\times10^{-19}$C σε απόσταση l μεταξύ τους, υπολογίστε την απόσταση l. β) Πόση είναι η μέγιστη και η ελάχιστη ροπή την οποία ασκεί στο μόριο KCl ένα ηλεκτρικό πεδίο έντασης E=6×10^4N/C; Σ’ ένα πρόχειρο σχήμα δείξτε τους σχετικούς προσανατολισμούς της ηλεκτρικής διπολικής ροπής p και του ηλεκτρικού πεδίου E όταν η ροπή είναι μέγιστη και ελάχιστη.

Λύση

α) Η ηλεκτρική διπολική ροπή p ορίζεται ως

$$p = ql \qquad (1)$$

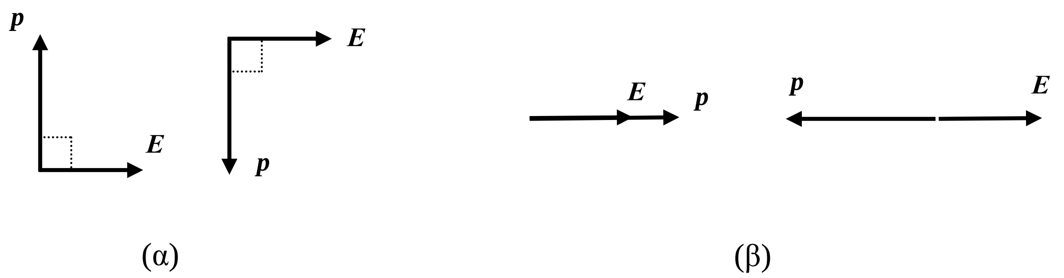
Άρα από την εξ.1 η απόσταση l μπορεί να υπολογισθεί ως

$$l = \frac{p}{q} \Rightarrow l = \frac{8\times10^{-30}\ \text{Cm}}{1.6\times10^{-19}\text{C}} \Rightarrow l = 5.6\times10^{-11}\text{m}$$

β) Η ροπή του διπόλου μέσα στο πεδίο $\boldsymbol{E}$ ορίζεται ως

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E} \Rightarrow \tau = pE\sin\theta \qquad (2)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ηλεκτρικής ροπής με αυτό του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου. Από την εξ. 2 καταλαβαίνουμε ότι το μέτρο της ροπής είναι μέγιστο όταν sinθ=±1, δηλ. για θ=90^o ή 270^o. Τότε τα διανύσματα $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο. σχ. 4.12α. Αντιθέτως η ροπή είναι ελάχιστη, δηλ. μηδενική, όταν sinθ=0, δηλ. για θ=0^o ή 180^o , όπως δείχνει το σχ. 4.12β.



Σχήμα 4.12 *(α) Μέγιστη ροπή για κάθετο προσανατολισμό μεταξύ των* **p** *και* **E**. *(β) Μηδενική ροπή όταν τα διανύσματα* **p** *και* **E** *είναι παράλληλα ή αντιπαράλληλα μεταξύ τους (παράδειγμα 4.10).*

Παράδειγμα 4.11 Έργο περιστροφής διπολικών μορίων νερού

Το μόριο του νερού έχει ηλεκτρική διπολική ροπή 6.3×10^{-30} C·m. Ένα δείγμα νερού περιέχει 10^{21} μόρια των οποίων η ροπή ηλεκτρικού διπόλου έχει προσανατολιστεί κατά την κατεύθυνση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου εντάσεως 2.5×10^{5}N/C. Πόσο έργο πρέπει να καταναλωθεί για να περιστραφούν όλα τα δίπολα από την κατεύθυνση αυτή (θ=0^o) στην κάθετη κατεύθυνση (θ=90^o);

Λύση

Όπως είδαμε στο παρόν κεφάλαιο, επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι διατηρητικό πεδίο, το έργο που παράγεται ή δαπανάται είναι ίσο με την μεταβολή της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Έτσι το έργο που δαπανάται για να περιστρέψουμε ένα δίπολο νερού από την αρχική του θέση στην τελική είναι

$$W = -\Delta U = -(U_{\rm B} - U_{\rm A}) = -[-pE\cos\varphi_{\rm B} - (-pE\cos\varphi_{\rm A})] = pE(\cos\varphi_{\rm B} - \cos\varphi_{\rm A}) =$$

$$pE(\cos 90^{o} - \cos 0^{o}) = pE(0-1) = -pE = -6.3\times10^{-30}\,\text{C.m}\times 2.5\times10^{5}\,\text{N/C} \Rightarrow W = -1.6\times10^{-24}\,\text{J}$$

Το έργο είναι με αρνητικό πρόσημο διότι πρέπει να παραχθεί (να το δαπανήσουμε εμείς) για να περιστραφεί ένα δίπολο νερού. Το συνολικό έργο για να περιστραφούν όλα τα δίπολα του δείγματος είναι

$$W_{\text{ολ}} = \text{N}\times W \Rightarrow W_{\text{ολ}} = 10^{21}\times(-1.6\times10^{-24}\,\text{J}) \Rightarrow W_{\text{ολ}} = -1.6\times10^{-3}\,\text{J}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

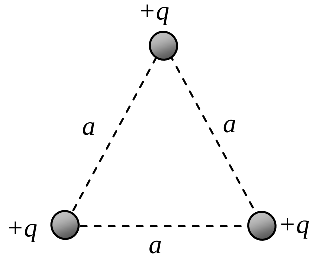
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε4.1 Εάν το ηλεκτρικό δυναμικό σε ένα σημείο του χώρου είναι μηδέν, θα είναι οπωσδήποτε μηδέν και το ηλεκτρικό πεδίο;

Ε4.2 Εάν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E είναι μηδέν κατά μήκος μιας διαδρομής από ένα σημείο Α σε ένα άλλο σημείο Β, πόση θα είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ αυτών των δυο σημείων; Κατά μήκος μιας διαφορετικής διαδρομής που συνδέει τα ίδια σημεία το Ε είναι υποχρεωτικά πάλι μηδέν ή όχι;

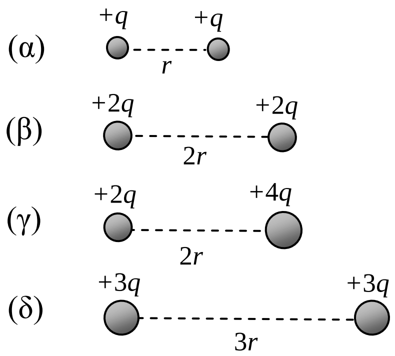
Ε4.3 Έστω ότι γνωρίζετε την τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού σ’ ένα σημείο του χώρου. Γνωρίζετε και το ηλεκτρικό πεδίο σ’ αυτό το σημείο; Ναι ή όχι και γιατί;

Ε4.4 Εάν ένα αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο αρχικά ηρεμεί εντός ενός ηλεκτρικού πεδίου, το φορτίο θα κινηθεί προς την περιοχή του υψηλότερου ή του χαμηλότερου δυναμικού; Τι συμβαίνει εάν το φορτίο είναι θετικό; Κατά



Σχήμα 4.13 *Ερώτηση 4.5.*

την κίνηση του φορτίου, πώς μεταβάλλεται η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια σε κάθε περίπτωση;



Σχήμα 4.14 *Ερώτηση 4.6.*

Ε4.5 Ποια είναι η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τριών ομοίων φορτίων του σχήματος 4.13; Ποια είναι η φυσική της σημασία; Απαντήστε στα ίδια ερωτήματα εάν όλα τα φορτία είναι $-q$.

Ε4.6 Ταξινομείστε κατά αύξουσα σειρά τις ηλεκτρικές δυναμικές ενέργειες των παρακάτω ζευγών ηλεκτρικών φορτίων του σχήματος 4.14.

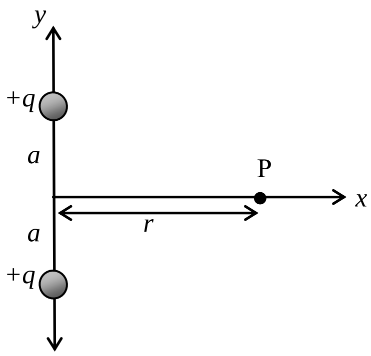
Ε4.7 Δύο όμοιες μεταλλικές σφαίρες είναι απομονωμένες η μία από την άλλη, και η μία είναι φορτισμένη με φορτίο Q ενώ η άλλη είναι αφόρτιστη. Εάν οι δυο σφαίρες έρθουν σε επαφή και στη συνέχεια απομακρυνθούν, α) ποιο θα είναι το δυναμικό, και β) ποιο το φορτίο της κάθε σφαίρας μετά την επαφή τους; Εάν η φορτισμένη σφαίρα έχει διπλάσια ακτίνα από την αφόρτιστη, ποιές θα είναι οι νέες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα;

Ε4.8 Περιγράψτε τις ισοδυναμικές επιφάνειες που δημιουργούν, α) ένας ομοιόμορφα φορτισμένος κύλινδρος πολύ μεγάλου μήκους, και β) μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα.

Ε4.9 Εάν η επιφάνεια ενός φορτισμένου αγωγού είναι ισοδυναμική, τότε οπωσδήποτε το φορτίο του είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο πάνω σ' αυτήν; Εάν το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερού μέτρου πάνω στην επιφάνεια του αγωγού, τότε η κατανομή του φορτίου πάνω σ' αυτήν είναι οπωσδήποτε ομοιόμορφη;

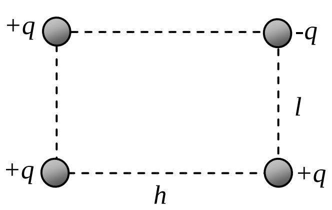
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π4.1 Ηλεκτρικό δυναμικό σημειακών φορτίων. Δύο θετικά σημειακά φορτία το καθένα φορτίου q, είναι τοποθετημένα στον άξονα y, στα σημεία $y=+a$ και $y=-a$ αντιστοίχως, όπως δείχνει το σχ. 4.15. α) Πόσο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στην αρχή των αξόνων; β) Ευρείτε μια έκφραση για το δυναμικό στο σημείο P το οποίο είναι πάνω στον άξονα x σε απόσταση r από την αρχή των αξόνων. γ) Για ποια τιμή του r η τιμή του δυναμικού είναι η μισή της τιμής που έχει το δυναμικό στην αρχή των αξόνων;



Σχήμα 4.15 *Πρόβλημα 4.1.*

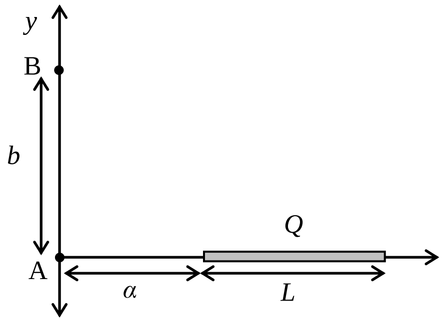
Π4.2 Ηλεκτρική δυναμική ενέργεια. Τέσσερα ηλεκτρικά φορτία μικρών διαστάσεων ευρίσκονται στις κορυφές ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο σχ. 4.16. α) Εάν q=5 μC, να ευρεθεί η δυναμική ηλεκτρική ενέργεια του κάτω αριστερά φορτίου. β) Ποια είναι η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος των τεσσάρων φορτίων; Δίνονται οι αποστάσεις l=10 cm και h=20 cm, και η ηλεκτρική σταθερά $K=9\times10^9$ N·m^2/C^2.



Σχήμα 4.16 *Πρόβλημα 4.2.*

Π4.3 Ηλεκτρικό δυναμικό σταγόνας νερού. Μια σφαιρική σταγόνα νερού ακτίνας 2 mm, έχει ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνειά της ίσο με 300 V. α) Ποιο είναι το φορτίο της σταγόνας; β) Αν δυο τέτοιες σταγόνες ίσου φορτίου και ίσης ακτίνας συνενωθούν, έτσι ώστε να σχηματίσουν μια νέα σφαιρική σταγόνα, ποιο θα είναι το δυναμικό στην επιφάνεια της νέας σταγόνας; Υποθέστε ότι δεν υπάρχουν απώλειες φορτίου και μάζας όταν οι σταγόνες ενώνονται. Δίνεται η σταθερά Coulomb, $K= 9\times10^9$ N·m^2/C^2. *Απάντηση*: α) 6.67×10^{-11} C , και β) 476 V.

Π4.4 Άτομο του υδρογόνου. Στο μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου, το μοναδικό ηλεκτρόνιο περιστρέφεται γύρω από το μοναδικό πρωτόνιο σε κύκλο ακτίνας *r*. Υποθέστε ότι το πρωτόνιο παραμένει ακίνητο. α) Εξισώνοντας την ηλεκτρική δύναμη με την κεντρομόλο δύναμη της περιστροφής του ηλεκτρονίου, να εύρετε μια έκφραση για την ταχύτητα του ηλεκτρονίου. β) Να ευρεθεί μια έκφραση για την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου και να την συγκρίνετε με την ηλεκτρική δυναμική ενέργειά του. γ) Να υπολογίσετε την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου θεωρώντας ότι η ακτίνα περιστροφής είναι r=5.29×10^{-11} m. Δίνονται το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου e=-1.6×10^{-19} C, και η ηλεκτρική σταθερά K=9×10^{9} N·m^{2}C^{-2}. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές σε joule και eV αντίστοιχα.



Σχήμα 4.17 *Πρόβλημα 4.5.*

Π4.5 Ηλεκτρικό δυναμικό λεπτής ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου. Η λεπτή ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος του σχήματος 4.17, έχει φορτίο Q και μήκος L. Να ευρεθεί το δυναμικό στα σημεία Α και Β. Οι αποστάσεις α και b είναι γνωστές. *Απάντηση*:

α) $V_A = \dfrac{KQ}{L}\ln(\dfrac{L+a}{a})$, και β) $V_B = \dfrac{KQ}{L}\ln\left[\dfrac{L+a+\sqrt{(L+a)^2+b^2}}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right]$.

Π4.6 Ηλεκτρικό δυναμικό σφαιρών. Δυο μεταλλικές σφαίρες διαφορετικού μεγέθους φορτίζονται έτσι ώστε το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνειά τους να είναι το ίδιο. Η σφαίρα Α έχει ακτίνα τρεις φορές μεγαλύτερη εκείνης της Β. Τα φορτία της κάθε σφαίρας είναι Q_A και Q_B , ενώ οι εντάσεις των ηλεκτρικών πεδίων στην επιφάνεια της κάθε σφαίρας είναι E_A και E_B. Υπολογίστε τους λόγους Q_A/Q_B και E_A/E_B; *Απάντηση*: α) 3 και β) 1/3.

Π4.7 Ηλεκτρικό δυναμικό στο χώρο. Υποθέστε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό στο χώρο είναι $V = 3x^2 - 15x + 7$. α) Αν το δυναμικό μετράται σε Volts και η απόσταση x σε μέτρα, υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο E στο χώρο. β) Σε ποιο σημείο η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν; *Απάντηση*: α) E=-6x+15, β) x=2.5 m.

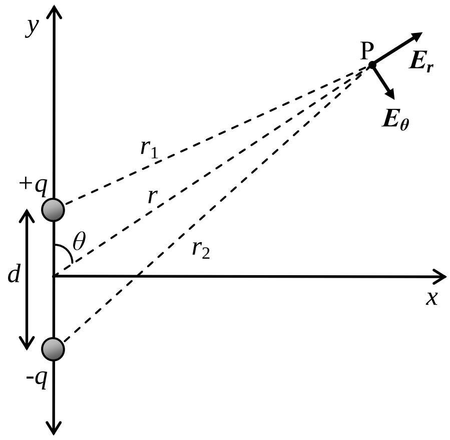
Π4.8 Ηλεκτρικό δυναμικό φορτισμένου δίσκου. Ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας α και επιφανειακής πυκνότητας σ, δημιουργεί δυναμικό κατά μήκος του καθέτου άξονα συμμετρίας που περνά από το κέντρο του. Το ηλεκτρικό δυναμικό δίνεται από την σχέση $V = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}(\sqrt{a^2+r^2} - r)$, όπου r είναι η κάθετη απόσταση από το κέντρο του δίσκου. Να ευρείτε το ηλεκτρικό πεδίο E που δημιουργεί ο δίσκος σε σημείο πάνω στον άξονα που απέχει απόσταση r από το κέντρο του. *Απάντηση*: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_o}(1 - \dfrac{r}{\sqrt{a^2+r^2}})$.

Π4.9 Ηλεκτρικό πεδίο αγώγιμης σφαίρας. Μια αφόρτιστη αγώγιμη σφαίρα ακτίνας R τοποθετείται μέσα σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E_o\hat{\boldsymbol{k}}$.Το κέντρο της σφαίρας συμπίπτει με την αρχή των αξόνων ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων *x*, *y* και z. Εάν το δυναμικό μέσα στην σφαίρα είναι σταθερό και ίσο με V_o, και εκτός της σφαίρας δίνεται από την σχέση $V(x,y,z) = V_o - E_o z + \dfrac{E_o a^3 z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, να ευρεθούν οι συνιστώσες του τελικού ηλεκτρικού πεδίου E_x, E_y και E_z, εντός και εκτός σφαίρας.

Π4.10 Ηλεκτρικό δυναμικό φορτισμένου κυλίνδρου. Ένας κύλινδρος με άπειρο μήκος και ακτίνα R έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου λ . Το δυναμικό πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου είναι V_o και το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του κυλίνδρου είναι $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$, όπου r είναι η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου.

Να ευρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε σχέση με την επιφάνεια του κυλίνδρου σε απόσταση $r>R$. *Απάντηση*: $V = V_o - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r}{R}$.

Π4.11 Δυναμικό ηλεκτρικού διπόλου σε μεγάλη απόσταση. Ένα ηλεκτρικό δίπολο ευρίσκεται κατά μήκος του άξονα y, όπως δείχνει το σχ. 4.18. Η απόσταση μεταξύ των φορτίων του διπόλου είναι d. α) Να δειχθεί ότι σε σημείο P πολύ μεγάλης απόστασης από το δίπολο ($r>>d$), το δυναμικό δίνεται από την σχέση $V = \frac{Kp\cos\theta}{r^2}$, όπου p είναι η ηλεκτρική διπολική ροπή του διπόλου, r είναι η απόσταση του σημείου από το κέντρο του διπόλου, και θ είναι η γωνία της κατεύθυνσης r με τον άξονα y (βλ. σχ. 4.18). β) Εάν στο σημείο P το ηλεκτρικό πεδίο έχει μια ακτινική συνιστώσα E_r και μια γωνιακή συνιστώσα E_θ, να υπολογισθούν από το δυναμικό αυτές οι συνιστώσες. Υπόδειξη: Λάβετε υπόψη ότι $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}$. γ) Για θ=90^o και θ=0^o έχουν νόημα τα αποτελέσματα του δυναμικού και του ηλεκτρικού πεδίου; δ) Για r=0;



Σχήμα 4.18 *Πρόβλημα 4.11.*

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 5

ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΑ

Σύνοψη

Στο πέμπτο τούτο κεφάλαιο περιγράφεται η έννοιες της χωρητικότητας και του διηλεκτρικού υλικού. Επίσης, παρουσιάζονται τα είδη των πυκνωτών και η συνδεσμολογία τους. Επιπλέον, ορίζεται η ενέργεια του πυκνωτή και αναλύεται ο ρόλος του διηλεκτρικού υλικού, τόσο στην μεταβολή της χωρητικότητάς όσο και της ενέργειας του πυκνωτή.

Προαπαιτούμενη γνώση

Κανόνες παραγώγισης και ολοκληρώσεως.

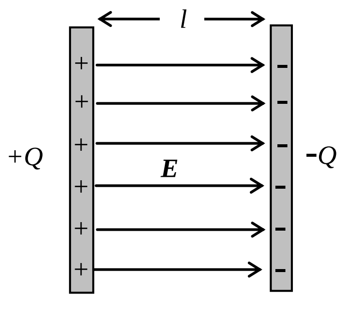
5.1 Χωρητικότητα και πυκνωτής

Στο εδάφιο 1.2 μιλήσαμε για τις κατηγορίες των υλικών βάσει της ικανότητάς τους να επιτρέπουν στο εσωτερικό τους την διέλευση ηλεκτρικών φορτίων. Ονομάσαμε μονωτές τα υλικά τα οποία δεν επιτρέπουν την διέλευση φορτίου, και αγωγούς αυτά που την επιτρέπουν. Όταν ένας μονωτής τοποθετηθεί ανάμεσα από δυο αγωγούς, τα υλικά απαρτίζουν ένα σύστημα που ονομάζεται **πυκνωτής**.[15] Το μονωτικό υλικό το οποίο υπάρχει μεταξύ των αγωγών ονομάζεται **διηλεκτρικό**. Εάν οι δυο αγωγοί είναι φορτισμένοι με αντίθετα φορτία Q και $-Q$, μια διαφορά δυναμικού αναπτύσσεται μεταξύ των δυο αγωγών του πυκνωτή, η οποία είναι ανάλογη προς την απόλυτη τιμή του φορτίου Q. Η **χωρητικότητα** C ενός πυκνωτή είναι η ικανότητα αποθήκευσης ηλεκτρικού φορτίου στους αγωγούς του, και ορίζεται με το πηλίκο της απόλυτης τιμής του φορτίου Q προς την διαφορά δυναμικού V μεταξύ των δύο αγωγών.[16] Δηλαδή ισχύει

$$C = \frac{Q}{V} \tag{5.1}$$

(Sears, 1951), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012). Οι μονάδες χωρητικότητας στο ΔΣΜ είναι το Farad (F), όπου 1 F=1 C/V. Το Farad είναι σχετικά μεγάλη χωρητικότητα και γι’ αυτό οι συνήθεις μονάδες χωρητικότητας των πυκνωτών είναι το μF=10^{-6} F, το nF=10^{-9} F και το pF=10^{-12} F.

Οι αγωγοί του πυκνωτή, οι οποίοι μπορούν να έχουν οποιοδήποτε μέγεθος και σχήμα, ονομάζονται **οπλισμοί** του πυκνωτή, ενώ η διαφορά δυναμικού V ονομάζεται **ηλεκτρική τάση** ή απλώς **τάση** του πυκνωτή. Οι πυκνωτές είναι στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούνται συχνά σε **ηλεκτρικά κυκλώματα**, δηλ. σε κλειστές αγώγιμες διαδρομές, (θα αναφερθούμε λεπτομερώς στα ηλεκτρικά κυκλώματα σε επόμενο κεφάλαιο), κυρίως για αποθήκευση ηλεκτρικού φορτίου και επομένως ηλεκτρικής ενέργειας. Πολλές φορές ο πυκνωτής ονομάζεται χωρητικότητα, λόγω της ικανότητάς του να αποθηκεύει ηλεκτρικό φορτίο. Υπάρχουν αρκετά διαφορετικά είδη πυκνωτών, τόσο βάσει των γεωμετρικών σχημάτων των οπλισμών τους, όσο και από τα υλικά των διηλεκτρικών υλικών που περιέχουν. Έτσι έχουμε τους επίπεδους, τους σφαιρικούς και τους κυλινδρικούς πυκνωτές. Ακόμα έχουμε τους πυκνωτές με υγρά διηλεκτρικά (π.χ. ορυκτέλαιο) και πυκνωτές με στερεά διηλεκτρικά όπως μίκα, χαρτί, κ.ά. (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Τέλος, υπάρχουν και οι πυκνωτές μεταβλητής χωρητικότητας, στους οποίους το μέγεθος της επιφάνειας των οπλισμών μεταβάλλεται. Τέτοιου είδους πυκνωτές χρησιμοποιούνται στα ραδιόφωνα για την αλλαγή



Σχήμα 5.1 *Επίπεδος πυκνωτής με φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στους οπλισμούς του, μεταξύ των οποίων υπάρχει απόσταση l και αέρας ως μονωτικό υλικό.*

[15] Τόσο το κενό, όσο και ο αέρας έχουν μονωτικές ιδιότητες, οπότε όταν ευρεθούν μεταξύ δύο αγωγών μπορούν να σχηματίσουν πυκνωτή.
[16] Στην πραγματικότητα η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών του πυκνωτή ορίζεται ως $\Delta V=V_a-V_b$, όμως στη συνέχεια προς χάριν απλότητας, θα συμβολίζεται ως V.

συχνοτήτων λήψης ραδιοφωνικών κυμάτων. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε κάποια είδη πυκνωτών, τα οποία διαχωρίζονται σύμφωνα με την γεωμετρία των οπλισμών τους.

5.1.1 Επίπεδος πυκνωτής

Ο πιο κοινός πυκνωτής είναι ο **επίπεδος πυκνωτής** που φαίνεται στο σχ. 5.1 και αποτελείται από δυο παράλληλες αγώγιμες πλάκες ίσου εμβαδού *A*, οι οποίες απέχουν απόσταση *l* και είναι φορτισμένες με αντίθετα φορτία *Q* και –*Q* (Sears, 1951), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010). Ανάμεσα στους οπλισμούς του πυκνωτή υπάρχει κενό το οποίο παίζει το ρόλο του μονωτή. Γενικά το κενό, όπως επίσης και ο αέρας, έχουν μονωτικές ιδιότητες, όμως στην πραγματικότητα οι πυκνωτές του εμπορίου περιέχουν διαφορετικά μονωτικά υλικά. Η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου ***E*** στο εσωτερικό του πυκνωτή και μακριά από τα άκρα του είναι

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{Q}{\varepsilon_o A} \tag{5.2}$$

όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στους οπλισμούς, και ε_o είναι η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Η σχέση αυτή λαμβάνεται από τον νόμο του Gauss. (βλ. κεφ. 3). Οι δυναμικές γραμμές του πεδίου ***E*** του πυκνωτή είναι παράλληλες μεταξύ τους και το πεδίο δίνεται ως

$$\boldsymbol{E} = -\frac{dV}{dx}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{5.3}$$

όπου *dV/dx* είναι η βαθμίδα (μεταβολή) του ηλεκτρικού δυναμικού κατά μήκος των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών. Για να υπολογίσουμε την διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή, ολοκληρώνουμε την εξ. 5.3 και παίρνουμε

$$V = -\int_0^l E dx \Rightarrow V = -El \tag{5.4}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η διαφορά δυναμικού κατά μήκος των δυναμικών γραμμών είναι αρνητική, διότι καθώς απομακρυνόμαστε από τον θετικά φορτισμένο οπλισμό (+*Q*) και πλησιάζουμε τον αρνητικά φορτισμένο οπλισμό (-*Q*), το δυναμικό ελαττώνεται. Τελικά η απόλυτη τιμή της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή ή αλλιώς η τάση του πυκνωτή *V*, ορίζεται ως

$$V = El \overset{(5.2)}{\Rightarrow} V = \frac{Ql}{\varepsilon_o A} \tag{5.5}$$

Από την εξ. 5.1 του ορισμού της χωρητικότητας και την εξ. 5.5 καταλήγουμε στην σχέση

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{l} \tag{5.6}$$

η οποία μας δίνει την χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή συναρτήσει της διηλεκτρικής σταθεράς του κενού, του εμβαδού των οπλισμών του και της απόστασης μεταξύ αυτών. Συμπεραίνουμε δηλ. ότι η χωρητικότητα ενός πυκνωτή εξαρτάται αποκλειστικά από την γεωμετρία των οπλισμών του και το διηλεκτρικό υλικό ανάμεσά τους. Αυτή είναι μια γενικότερη ιδιότητα των πυκνωτών, όπου η χωρητικότητά τους εξαρτάται μόνο από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά τους και όχι από το φορτίο και την τάση τους. Βάσει της γεωμετρίας των οπλισμών ενός πυκνωτή, υπάρχουν και άλλα είδη πυκνωτών όπως είναι ο κυλινδρικός και ο σφαιρικός πυκνωτής. Θα αναφερθούμε διεξοδικά στα δύο αυτά είδη πυκνωτών παρακάτω.

Παράδειγμα 5.1 Επίπεδος πυκνωτής

Σε έναν τύπο πληκτρολογίου υπολογιστή, το κάθε πλήκτρο συνδέεται με ένα μικρό μεταλλικό πλακίδιο, το οποίο παίζει το ρόλο του οπλισμού ενός επίπεδου πυκνωτή με μονωτικό υλικό τον αέρα. Αν πιεστεί το πλήκτρο, η απόσταση των οπλισμών μειώνεται και η χωρητικότητα του πυκνωτή αυξάνεται. Κατάλληλο ηλεκτρικό κύκλωμα ανιχνεύει τη μεταβολή της χωρητικότητας και έτσι γίνεται αντιληπτό ότι το πλήκτρο πατήθηκε. Έστω ότι η επιφάνεια του κάθε πλακιδίου είναι 50 mm^2 και η απόσταση μεταξύ των πλακιδίων είναι 0.600 mm πριν πατηθεί το πλήκτρο. Εάν η ελάχιστη χωρητικότητα που ανιχνεύεται από το κύκλωμα είναι 0.250 pF, πόσο πρέπει να μετακινηθεί το πλακίδιο για να ανιχνεύσει το κύκλωμα ότι το πλήκτρο πατήθηκε;

Λύση

Σύμφωνα με την μελέτη του επίπεδου πυκνωτή που κάναμε προηγουμένως η χωρητικότητα του πλήκτρου με τα δυο πλακίδια δίνεται ως

$$C = \frac{\varepsilon_o A}{l} \qquad (1)$$

Κατά το πάτημα του πλήκτρου τα A και ε_o δεν μεταβάλλονται. Μειώνεται όμως η απόσταση l και επομένως σύμφωνα με την εξ. 1 αυξάνεται η χωρητικότητα. Εάν η μεταβολή της απόστασης είναι Δl, τότε ισχύει

$$C + \Delta C = \frac{\varepsilon_o A}{l + \Delta l} \Rightarrow l + \Delta l = \frac{\varepsilon_o A}{C + \Delta C} \qquad (2)$$

Από την εξ. 1 μπορούμε να υπολογίσουμε την C, δηλαδή την χωρητικότητα όταν το πλήκτρο δεν είναι πατημένο. Έτσι υπολογίζουμε

$$C = \frac{8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2} \times 50 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2}}{0.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} \Rightarrow C = 0.738 \times 10^{-12}\,\mathrm{F}$$

Η αρχική χωρητικότητα είναι 0.738 pF και η απόσταση των οπλισμών είναι l=0.600 mm. Από την εξ. 2, όταν το πλήκτρο πατιέται, προκαλείται μεταβολή της απόστασης Δl και κατά συνέπεια μεταβολή της χωρητικότητας ΔC=0.250 pF. Τότε από την εξ. 5 μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta l = \frac{\varepsilon_o A}{C + \Delta C} - l \Rightarrow \Delta l = \frac{8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2} \times 50 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^2}}{0.988 \times 10^{-12}\,\mathrm{F}} - 0.6 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \Rightarrow \Delta l = -0.152 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

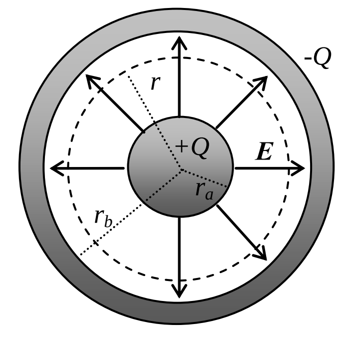
Επομένως όταν πατήσουμε το πλήκτρο και μετακινηθεί προς τα κάτω κατά 0.152 mm, το κύκλωμα του υπολογιστή ανιχνεύει το πάτημα του πλήκτρου. Τότε για παράδειγμα στην οθόνη του υπολογιστή μπορεί να αναγραφθεί ένα γράμμα, ή να εκτελεσθεί μια άλλη λειτουργία.

5.1.2 Σφαιρικός πυκνωτής

Ένα άλλο είδος πυκνωτή είναι ο **σφαιρικός πυκνωτής** του οποίου οι αγωγοί έχουν σφαιρικό σχήμα. Στην πραγματικότητα ο ένας οπλισμός είναι ένας αγώγιμος σφαιρικός φλοιός, και ο άλλος οπλισμός είναι μια ομόκεντρη αγώγιμη σφαίρα ή ένας ομόκεντρος σφαιρικός φλοιός μικρότερης ακτίνας από του έτερου οπλισμού (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Οι δύο οπλισμοί είναι φορτισμένοι με αντίθετα φορτία, και στον ενδιάμεσό τους χώρο υπάρχει το μονωτικό υλικό. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στον σφαιρικό πυκνωτή είναι ακτινικό, και οι δυναμικές γραμμές του ξεκινούν καθέτως από την επιφάνεια του ενός οπλισμού, και καταλήγουν επίσης καθέτως στην επιφάνεια του άλλου οπλισμού, όπως δείχνει το σχ. 5.2. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, υπολογίζουμε την χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή.

Παράδειγμα 5.2 Χωρητικότητα σφαιρικού πυκνωτή

Ένας σφαιρικός πυκνωτής αποτελείται από σφαιρικό αγωγό ακτίνας r_a που περιβάλλεται από σφαιρικό αγώγιμο κέλυφος ακτίνας r_b, με τον ενδιάμεσο χώρο να είναι κενός, όπως φαίνεται στο σχ. 5.2. Εάν το φορτίο του εσωτερικού σφαιρικού οπλισμού είναι $+Q$, να υπολογιστεί η χωρητικότητα του πυκνωτή.



Σχήμα 5.2 *Σφαιρικός πυκνωτής με φορτίο Q και ακτίνες οπλισμών r_a και r_b αντίστοιχα (παράδειγμα 5.2).*

Λύση

Η χωρητικότητα του πυκνωτή δίδεται από την γενική σχέση

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (1)$$

όπου Q το φορτίο και V η τάση του πυκνωτή. Για να υπολογίσουμε την χωρητικότητα του πυκνωτή, πρέπει πρώτα να εύρουμε την τάση, δηλαδή την διαφορά του δυναμικού μεταξύ των δυο οπλισμών. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών θα δίνεται από την σχέση

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} E dr \qquad (2)$$

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ των οπλισμών, εφαρμόζουμε τον νόμο του Gauss για κλειστή σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα r, η οποία περικλείει το φορτίο $+Q$ του εσωτερικού οπλισμού. Έτσι γράφουμε

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oint E dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E \oint dS = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} \qquad (3)$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών δίνεται βάσει της εξ. 2 και μέσω της εξ. 3

$$V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} E dr = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_a}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}\Bigg|_{r_a}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right) \Rightarrow$$

$$V_b - V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{r_a - r_b}{r_b r_a}\right) \Rightarrow V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{r_b - r_a}{r_b r_a}\right) \qquad (4)$$

Η διαφορά δυναμικού $V=V_a-V_b$ είναι θετική, διότι $V_a>V_b$. Επομένως η χωρητικότητα του σφαιρικού πυκνωτή λόγω των εξισώσεων 1 και 4 είναι

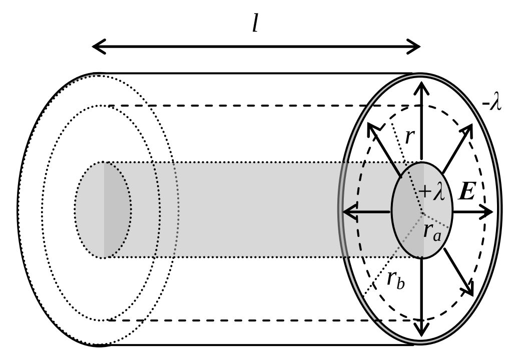
$$C = 4\pi\varepsilon_o\left(\frac{r_b r_a}{r_b - r_a}\right)$$

5.1.3 Κυλινδρικός πυκνωτής

Ένα τρίτο είδος πυκνωτή όσον αφορά την γεωμετρία των οπλισμών είναι ο **κυλινδρικός πυκνωτής**, του οποίου οι οπλισμοί έχουν κυλινδρικό σχήμα. Πιο συγκεκριμένα ο ένας οπλισμός είναι αγώγιμος κυλινδρικός φλοιός, ο οποίος περιβάλει έναν ομοαξονικό αγώγιμο κύλινδρο ή κυλινδρικό φλοιό μικρότερης ακτίνας (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Οι δύο κυλινδρικές επιφάνειες των οπλισμών έχουν αντίθετα φορτία, και ο ενδιάμεσος χώρος καταλαμβάνεται από διηλεκτρικό υλικό. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται μεταξύ των δυο οπλισμών, περιγράφεται από δυναμικές γραμμές που ξεκινούν καθέτως από την επιφάνεια του εσωτερικού οπλισμού, και καταλήγουν επίσης καθέτως στην εσωτερική επιφάνεια του εξωτερικού οπλισμού, όπως φαίνεται στο σχ. 5.3. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, υπολογίζουμε την χωρητικότητα του κυλινδρικού πυκνωτή.

Παράδειγμα 5.3 Χωρητικότητα κυλινδρικού πυκνωτή

Ένας κυλινδρικός πυκνωτής αποτελείται από δυο ομοαξονικούς κυλινδρικούς αγωγούς ακτίνων r_a και r_b αντιστοίχως, με τον ενδιάμεσο χώρο να είναι κενός. Ο πυκνωτής είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με γραμμική πυκνότητα φορτίου $+\lambda$ στον εσωτερικό κύλινδρο, και $-\lambda$ στον εξωτερικό όπως φαίνεται στο σχ. 5.3. Υπολογίστε την χωρητικότητα του πυκνωτή εάν οι κυλινδρικοί οπλισμοί έχουν μήκος l.



Σχήμα 5.3 *Κυλινδρικός πυκνωτής με φορτίο λ ανά μονάδα μήκους και ακτίνες οπλισμών r_a και r_b αντιστοίχως (παράδειγμα 5.3).*

Λύση

Η χωρητικότητα του πυκνωτή ορίζεται ως

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (1)$$

Το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή δίνεται από την σχέση

$$Q = \lambda l \qquad (2)$$

Όπως και προηγουμένως η διαφορά δυναμικού *V* μεταξύ των οπλισμών είναι

$$V = V_b - V_a = -\int_{r_a}^{r_b} E dr \qquad (3)$$

Για να υπολογίσουμε το *V* λοιπόν, θα πρέπει να ξέρουμε πώς μεταβάλλεται το *E* στο χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή. Χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss για μια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας *r* , η οποία περιβάλει τον οπλισμό *α* με πυκνότητα φορτίου +*λ* όπως φαίνεται στο σχ. 5.3, έχουμε

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_o} \Rightarrow \oint EdS = \frac{\lambda l}{\varepsilon_o} \Rightarrow E\oint dS = \frac{\lambda l}{\varepsilon_o} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_o} \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r} \qquad (4)$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι στον πιο πάνω υπολογισμό της ηλεκτρικής ροής μέσα από την κυλινδρική επιφάνεια Gauss, δεν συνεισφέρουν οι βάσεις της κυλινδρικής επιφάνειας, διότι το διάνυσμα ***E*** δεν τις διαπερνά αφού δεν είναι φορτισμένες. Έτσι, ροή υπάρχει μόνο διαμέσου της παράπλευρης επιφάνειας. Αντικαθιστώντας την εξ. 4 στην εξ. 3, παίρνουμε για την τάση του πυκνωτή

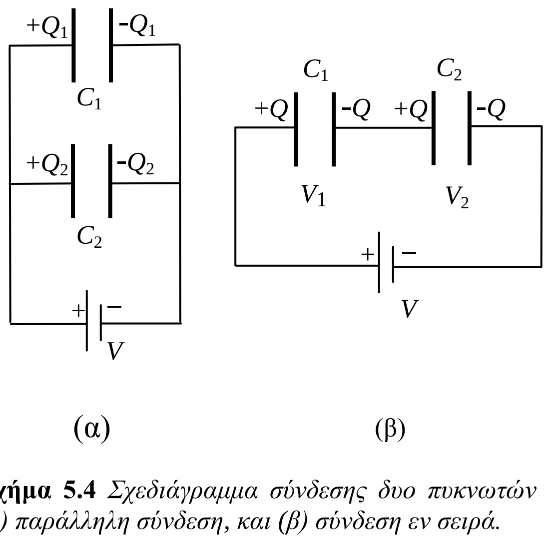
$$V = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\frac{\lambda}{r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln r\Big|_{r_a}^{r_b} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}(\ln r_b - \ln r_a) \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_b}{r_a} \qquad (5)$$

Η διαφορά δυναμικού είναι αρνητική, διότι από το θετικό δυναμικό του οπλισμού *α*, καταλήγουμε στο αρνητικό δυναμικό του οπλισμού *b*. Οι εξισώσεις 2, 5 στην εξ. 1 δίνουν

$$C = -\frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{r_b}{r_a}} = -\frac{2\pi\varepsilon_o l}{\ln\frac{r_b}{r_a}} = -2\pi\varepsilon_o l \ln\frac{r_a}{r_b} \Rightarrow C = 2\pi\varepsilon_o l \ln\frac{r_b}{r_a}$$

5.2 Συνδεσμολογία πυκνωτών

Όπως προαναφέραμε, συχνά οι πυκνωτές είναι βασικά εξαρτήματα σε ηλεκτρικά κυκλώματα για την αποθήκευση ηλεκτρικής ενέργειας. Για την εύρυθμη λειτουργία ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, είναι δυνατόν να συνδέονται σ' αυτό, περισσότεροι του ενός πυκνωτή. Η συνολική χωρητικότητα των πυκνωτών του κυκλώματος ονομάζεται και **ισοδύναμη χωρητικότητα** (Benumof, 1961), (Young & Freedman, 2010), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Η συνδεσμολογία μεταξύ των πυκνωτών γίνεται, είτε με παράλληλη σύνδεση ο ένας προς τον άλλο, είτε με σύνδεση σε σειρά. Γενικά ο πυκνωτής στα ηλεκτρικά κυκλώματα συμβολίζεται με δυο παράλληλες κατακόρυφες γραμμές | |, οι οποίες συμβολίζουν τους δύο οπλισμούς. Στο σχήμα 5.4 φαίνονται σχηματικά οι δυο διαφορετικοί τρόποι σύνδεσης δύο πυκνωτών. Στην παράλληλη συνδεσμολογία του κυκλώματος στο σχ.5.4α, οι δύο πυκνωτές συνδέονται έτσι ώστε στα άκρα τους να έχουν την ίδια διαφορά δυναμικού *V*. Τότε η ολική ή ισοδύναμη χωρητικότητα $C_{ολ}$ του κυκλώματος είναι



Σχήμα 5.4 *Σχεδιάγραμμα σύνδεσης δυο πυκνωτών σε (α) παράλληλη σύνδεση, και (β) σύνδεση εν σειρά.*

$$C_{ολ} = \frac{Q_{ολ}}{V} \qquad (5.7)$$

όπου

$$Q_{ολ} = Q_1 + Q_2 \qquad (5.8)$$

Η εξ.5.8 στην 5.7 δίνει

$$C_{ολ} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} \Rightarrow C_{ολ} = C_1 + C_2 \qquad (5.9α)$$

Δηλαδή η συνολική χωρητικότητα δυο πυκνωτών συνδεδεμένων παράλληλα, είναι το άθροισμα των επιμέρους χωρητικοτήτων. Γενικότερα, για Ν πυκνωτές συνδεδεμένους παράλληλα, βάσει της εξ. 5.9α ισχύει επαγωγικά

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N \qquad (5.9β)$$

Για συνδεσμολογία δύο πυκνωτών σε σειρά, όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος 5.4β, ο ένας πυκνωτής έπεται του άλλου, έτσι ώστε ο αρνητικά φορτισμένος οπλισμός του ενός, να συνδέεται με τον θετικά φορτισμένο οπλισμό του άλλου, με συνέπεια οι δύο οπλισμοί να αποκτούν κοινό δυναμικό. Οι επιμέρους τάσεις στα άκρα των δύο πυκνωτών είναι V_1 και V_2 αντιστοίχως, και ισχύει

$$V = V_1 + V_2 \qquad (5.10)$$

Τα φορτία που αναπτύσσονται επαγωγικά στους οπλισμούς των πυκνωτών που είναι συνδεμένοι σε σειρά, θα πρέπει να είναι ίσα και αντίθετα +Q και -Q. Έτσι λοιπόν η εξ. 5.10 μπορεί να γραφτεί

$$V = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \qquad (5.11)$$

Όμως για την ολική χωρητικότητα ισχύει

$$C_{ολ} = \frac{Q}{V} \overset{(5.10)}{\Rightarrow} C_{ολ} = \frac{Q}{V_1 + V_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{V_1 + V_2}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (5.12α)$$

Γενικά για Ν πυκνωτές συνδεδεμένους σε σειρά, βάσει της εξ. 5.12α ισχύει επαγωγικά

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} \qquad (5.12β)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι παράλληλα συνδεδεμένοι πυκνωτές έχουν πάντα την ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα τους, ενώ πυκνωτές συνδεδεμένοι σε σειρά έχουν πάντα ίδιο φορτίο στους οπλισμούς τους.[17]

Παράδειγμα 5.4 Ισοδύναμη χωρητικότητα για σύνδεση πυκνωτών

Θεωρείστε ότι έχουμε την σύνδεση των πυκνωτών που δείχνει το σχ. 5.5. α) Ποια είναι η ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των σημείων *a* και *b*, αν C_1=5 μF, C_2=3 μF, C_3=20 μF και C_4=5 μF. β) Προσδιορίστε το φορτίο κάθε πυκνωτή εάν V_{AB}=4.8 V.

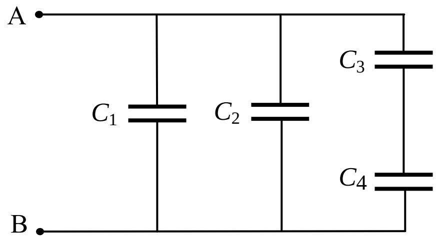
Λύση

α) Η συνολική χωρητικότητα δίνεται ως

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + C_{34} \qquad (1)$$

επειδή οι πυκνωτές C_1, C_2 και C_{34} είναι παράλληλα συνδεδεμένοι μεταξύ τους. Η χωρητικότητα C_{34} είναι η συνολική χωρητικότητα των πυκνωτών C_3 και C_4 οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Έτσι ισχύει

$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow C_{34} = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} \qquad (2)$$



Σχήμα 5.5 *Σύνδεση πυκνωτών (παράδειγμα 5.4).*

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

---

[17] Προσοχή! Ν πυκνωτές συνδεδεμένοι σε σειρά έχουν όλοι το ίδιο φορτίο Q. Εντούτοις το συνολικό φορτίο της διάταξης είναι Q και όχι ΝQ.

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4} = 5\mu F + 3\mu F + \frac{25\mu F \times 5\mu F}{20\mu F + 5\mu F} = 8\mu F + 4\mu F \Rightarrow C_{ολ} = 12\mu F$$

β) Το φορτίο του πυκνωτή C_1 είναι

$$Q_1 = C_1V_{AB} = 5\mu F \times 4.8V \Rightarrow Q_1 = 24\mu C$$

Ομοίως το φορτίο του πυκνωτή C_2 είναι

$$Q_2 = C_2V_{AB} = 3\mu F \times 4.8V \Rightarrow Q_2 = 14.4\mu C$$

Οι πυκνωτές C_3 και C_4 οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, έχουν το ίδιο φορτίο στους οπλισμούς τους, άρα

$$Q_3 = Q_4 = C_{34}V_{AB} = 4\mu F \times 4.8V = 19.2\mu C$$

Παράδειγμα 5.5 Σύνδεση πυκνωτών

Να ευρεθεί η συνολική χωρητικότητα του κυκλώματος των πυκνωτών στο σχ. 5.6. Αν η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B είναι 100 V, ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και D; Δίνονται C_1=4.0 μF, C_2=12.0 μF, C_3=3.0 μF και C_4=1.0 μF.

Λύση

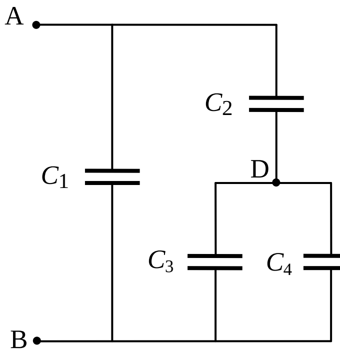
Βλέποντας το σχ. 5.6, παρατηρούμε ότι ο πυκνωτής C_1 και η συνολική χωρητικότητα C_{234} των πυκνωτών C_1, C_2 και C_3, είναι παράλληλα συνδεδεμένα μεταξύ τους. Άρα ισχύει

$$C_{ολ} = C_1 + C_{234} \qquad (1)$$

Για την C_{234} χωρητικότητα ισχύει

$$\frac{1}{C_{234}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} = \frac{C_3 + C_4 + C_2}{C_2(C_3 + C_4)} \Rightarrow$$

$$C_{234} = \frac{C_2(C_3 + C_4)}{C_3 + C_4 + C_2} \qquad (2)$$



Σχήμα 5.6 *Σύνδεση πυκνωτών (παράδειγμα 5.5).*

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$C_{ολ} = C_1 + \frac{C_2(C_3 + C_4)}{C_3 + C_4 + C_2} = \frac{C_1(C_3 + C_4 + C_2) + C_2(C_3 + C_4)}{C_3 + C_4 + C_2} = \frac{(4\mu F \times 16\mu F) + (12\mu F \times 4\mu F)}{16\mu F} = \frac{112\mu F^2}{16\mu F} \Rightarrow C_{ολ} = 7\mu F$$

Για την διαφορά δυναμικού V_{AB} ισχύει

$$V_{AB} = V_{AD} + V_{DB} \qquad (3)$$

Το φορτίο Q_1 στον πυκνωτή C_1 είναι

$$Q_1 = C_1V_{AB} \qquad (4)$$

Το φορτίο Q_2 στον πυκνωτή C_2 είναι το ίδιο με αυτό της συνολικής χωρητικότητας C_{34}, διότι είναι συνδεμένοι σε σειρά. Έτσι ισχύει

$$Q_2 = C_2V_{AD} \qquad (5)$$

και

$$Q_2 = C_{34}V_{DB} \qquad (6)$$

Οι εξισώσεις 5 και 6 δίνουν

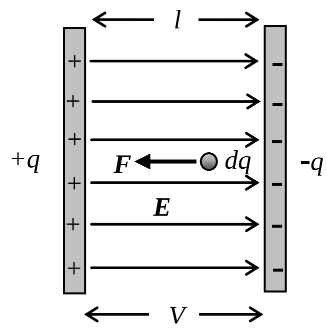
$$C_2V_{AD}=C_{34}V_{DB}\overset{(3)}{\Rightarrow}C_2V_{AD}=(C_3+C_4)(V_{AB}-V_{AD})\Rightarrow V_{AB}-V_{AD}=\frac{C_2V_{AD}}{C_3+C_4}\Rightarrow V_{AB}=V_{AD}(\frac{C_2}{C_3+C_4}+1)\Rightarrow$$

$$V_{AD}\frac{C_2+C_3+C_4}{C_3+C_4}=V_{AB}\Rightarrow V_{AD}=V_{AB}\frac{C_3+C_4}{C_2+C_3+C_4}\Rightarrow V_{AD}=100\text{V}\frac{3\mu\text{F}+1\mu\text{F}}{12\mu\text{F}+3\mu\text{F}+1\mu\text{F}}=100\text{V}\frac{4\mu\text{F}}{16\mu\text{F}}\Rightarrow V_{AD}=25\text{V}$$

5.3 Ενέργεια πυκνωτή

Ο ρόλος των πυκνωτών στα ηλεκτρικά κυκλώματα είναι να αποθηκεύουν ηλεκτρική ενέργεια, την οποία μπορούν ανά πάσα στιγμή να την παρέχουν ως ωφέλιμο έργο. Ας υποθέσουμε ότι κατά την διάρκεια φόρτισης ενός πυκνωτή χωρητικότητας C, το φορτίο στους οπλισμούς του είναι q, ενώ η αντίστοιχη τάση στα άκρα του είναι V, όπως φαίνεται στο σχ. 5.7. Η φόρτιση του πυκνωτή γίνεται με την σύνδεσή του με ένα στοιχείο ηλεκτρικής ενέργειας, π.χ. μια μπαταρία, το οποίο παρέχει μια σταθερή διαφορά δυναμικού, δηλαδή είναι μια πηγή ενέργειας (την φόρτιση και εκφόρτιση ενός πυκνωτή θα την μελετήσουμε διεξοδικά σε επόμενο κεφάλαιο). Η μπαταρία λοιπόν παρέχει το έργο που απαιτείται για την φόρτιση του πυκνωτή. Για την μεταφορά ενός στοιχειώδους θετικού φορτίου dq από τον οπλισμό φορτίου $-q$ στον οπλισμό φορτίου $+q$ (ο οποίος έχει υψηλότερο δυναμικό) απαιτείται στοιχειώδες έργο

$$dW=dF.l=dq.El\overset{(5.4)}{\Rightarrow}dW=Vdq \qquad (5.13)$$



Σχήμα 5.7 *Φόρτιση επίπεδου πυκνωτή με μετακίνηση φορτίου dq από τον αρνητικό οπλισμό στον θετικό, την στιγμή που στα άκρα του πυκνωτή υπάρχει φορτίο q και τάση V.*

(Benumof, 1961). Όμως το φορτίο στα άκρα του πυκνωτή είναι q την δεδομένη στιγμή της φόρτισης, και άρα ισχύει $C=q/V$. Επομένως η εξ. 5.13 γίνεται

$$dW=\frac{q}{C}dq \qquad (5.14)$$

Αν το μέγιστο φορτίο που μπορεί να δεχθεί ο πυκνωτής είναι Q, το συνολικό έργο που θα πρέπει να δαπανηθεί από την πηγή ηλεκτρικής ενέργειας του κυκλώματος για την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή είναι

$$W=\int_0^Q\frac{q}{C}dq=\frac{1}{C}\frac{q^2}{2}\bigg|_0^Q\Rightarrow W=\frac{Q^2}{2C} \qquad (5.15)$$

(Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Το έργο της εξ. 5.15 αποθηκεύεται ως ηλεκτροστατική ενέργεια στον πυκνωτή, η οποία μπορεί να αποβεί χρήσιμη κατά την εκφόρτισή του. Από την εξ. 5.1 και βάσει της εξίσωσης 5.15, η ηλεκτροστατική ενέργεια U του πυκνωτή είναι

$$U=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2 \qquad (5.16)$$

Μία άλλη έκφραση για την ηλεκτρική ενέργεια U του πυκνωτή προκύπτει από την εξ. 5.16, λόγω των εξισώσεων 5.4 και 6. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$U=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_o A}{l}E^2l^2\Rightarrow U=\frac{1}{2}\varepsilon_o AlE^2 \qquad (5.17)$$

όπου περιγράφουμε την ενέργεια του πυκνωτή συναρτήσει του ηλεκτρικού πεδίου E μεταξύ των οπλισμών του.

Παράδειγμα 5.6 Μέγιστη ενέργεια πυκνωτή

Υποθέστε ότι ένας πυκνωτής έχει χωρητικότητα C, και η μέγιστη τάση που μπορούμε να εφαρμόσουμε μεταξύ των οπλισμών του χωρίς να καταστραφεί ο πυκνωτής, είναι V (βλ. στο επόμενο εδάφιο 5.4 για το πώς καταστρέφεται ένας πυκνωτής). Συγκρίνετε τη μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί σε μια σύνδεση σε σειρά δυο τέτοιων πυκνωτών, με την μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί σε μια παράλληλη σύνδεση των ίδιων πυκνωτών.

Λύση

Η μέγιστη ενέργεια ενός πυκνωτή δίνεται από την εξίσωση

$$U_{\max} = \frac{1}{2} C V_{\max}{}^{2} \tag{1}$$

όπου $V_{\max}$ είναι η μέγιστη διαφορά δυναμικού που μπορεί να εφαρμοστεί στα άκρα του πυκνωτή.
Όταν οι δυο πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, έχουν συνολική χωρητικότητα

$$C_{\text{ολ}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{C^2}{2C} \Rightarrow C_{\text{ολ}} = \frac{C}{2} \tag{2}$$

Η μέγιστη διαφορά δυναμικού στον κάθε πυκνωτή είναι V, και αφού είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, η συνολική διαφορά δυναμικού θα είναι το άθροισμα των επιμέρους δυναμικών, άρα

$$V_{\text{ολ}} = V_1 + V_2 = V + V \Rightarrow V_{\text{ολ}} = 2V \tag{3}$$

Η εξ. 1 βάσει των 2 και 3 δίνει

$$U_{\max}(\text{σειρά}) = \frac{1}{2}\frac{C}{2}(2V)^2 \Rightarrow U_{\max}(\text{σειρά}) = CV^2 \tag{4}$$

Όταν οι δυο πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, έχουν συνολική χωρητικότητα

$$C_{\text{ολ}} = C_1 + C_2 = C + C \Rightarrow C_{\text{ολ}} = 2C \tag{5}$$

Στην παράλληλη σύνδεση η διαφορά δυναμικού στα άκρα των πυκνωτών είναι κοινή ίση με V. Άρα για την μέγιστη ενέργεια του συστήματος των δυο πυκνωτών η εξ. 1 δίνει

$$U_{\max}(\text{παράλληλα}) = \frac{1}{2} 2CV^2 \Rightarrow U_{\max}(\text{παράλληλα}) = CV^2 \tag{6}$$

Από τις εξισώσεις 4 και 6 συμπεραίνουμε ότι η μέγιστη ενέργεια του συστήματος των δυο πυκνωτών είναι ίδια, ανεξαρτήτως εάν αυτοί είναι συνδεδεμένοι σε σειρά ή παράλληλα.

5.4 Διηλεκτρικά υλικά πυκνωτών

Όπως προαναφέραμε, το μονωτικό υλικό που υπάρχει μεταξύ των οπλισμών ενός πυκνωτή ονομάζεται **διηλεκτρικό** και η ύπαρξή του εξυπηρετεί την ηλεκτρική μόνωση των δυο οπλισμών. Μ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατό να συγκρατούνται τα ετερώνυμα φορτία στους οπλισμούς του πυκνωτή, δημιουργώντας διαφορά δυναμικού μεταξύ αυτών, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο του διηλεκτρικού, καθιστώντας τον πυκνωτή μια διάταξη αποθήκευσης ηλεκτρικής ενέργειας. Ο χώρος μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή έχει μια συγκεκριμένη **διηλεκτρική σταθερά** ε, η οποία είναι διαφορετική από αυτήν του κενού ε_{o} , και εξαρτάται από το διηλεκτρικό υλικό του πυκνωτή. Μάλιστα η σχέση που συνδέει τα ε και ε_{o} είναι

$$\varepsilon = \kappa \varepsilon_{\text{o}} \Rightarrow \kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\text{o}}} \tag{5.18}$$

Η σταθερά κ ονομάζεται **σχετική διηλεκτρική σταθερά** (Giancoli, 2012), διότι συγκρίνει την διηλεκτρική σταθερά του υλικού με αυτήν του κενού.[18] Ας ιδούμε όμως ποιες αλλαγές επιφέρει το διηλεκτρικό υλικό σε έναν επίπεδο πυκνωτή. Η χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή δίνεται από την εξ. 5.6. Εάν αντί για κενό μεταξύ των οπλισμών, τοποθετήσουμε ένα μονωτικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε ή αλλιώς με σχετική διηλεκτρική σταθερά κ, θα δημιουργήσουμε στον πυκνωτή μια νέα χωρητικότητα C_κ , όπου

[18] Συχνά το κ ονομάζεται απλώς διηλεκτρική σταθερά του υλικού, όμως αυτό δεν είναι ακριβές.

$$C_\kappa = \varepsilon \frac{A}{l} \overset{(5.18)}{\Rightarrow} C_\kappa = \kappa \varepsilon_o \frac{A}{l} \Rightarrow C_\kappa = \kappa C \qquad (5.19)$$

(Lobkowicz & Melissinos, 1975). Το κενό είναι στην ουσία και αυτό ένα διηλεκτρικό, το οποίο έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά κ=1. Ο αέρας επίσης είναι διηλεκτρικό με κ~1. Άλλα μονωτικά υλικά έχουν τιμές του κ >1. Το χαρτί για παράδειγμα έχει 3.7, το νερό 80, ενώ το τιτανιούχο βάριο 1200! Στον πίνακα 5.1 φαίνονται οι τιμές της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς διαφόρων μονωτικών υλικών. Από την εξ. 5.19, συμπεραίνουμε ότι το διηλεκτρικό υλικό μπορεί να αυξήσει την χωρητικότητα ενός πυκνωτή πολλές φορές. Αυτή η ιδιότητά του διηλεκτρικού έχει ως συνέπεια την αύξηση του φορτίου στους οπλισμούς και επομένως της ενέργειας του πυκνωτή (βλ. εξ. 5.15). Επίσης, το διηλεκτρικό είναι απαραίτητο στοιχείο σε έναν πυκνωτή, διότι όπως προαναφέραμε, μονώνει τον έναν οπλισμό από τον άλλο, ώστε να μην υπάρχει κίνηση των θετικών φορτίων του ενός οπλισμού προς τα αρνητικά του άλλου και αντιστρόφως. Έτσι, η παρουσία του διηλεκτρικού επιτρέπει τη δημιουργία διαφοράς δυναμικού (τάση) στα άκρα του πυκνωτή, έτσι ώστε ο πυκνωτής να λειτουργεί ως πηγή ηλεκτρικής ενέργειας, χρήσιμη σε ηλεκτρικά κυκλώματα. Βεβαίως η τάση στα άκρα ενός πυκνωτή δεν μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα, διότι οι μονωτικές ιδιότητες ενός διηλεκτρικού έχουν κάποιο όριο. Για παράδειγμα, εάν η διαφορά δυναμικού γίνει υπερβολικά μεγάλη, τότε και το ηλεκτρικό πεδίο στο διηλεκτρικό μεγαλώνει, με αποτέλεσμα τα φορτία από τον θετικό οπλισμό του πυκνωτή να κινηθούν προς τον αρνητικό οπλισμό διαμέσου του διηλεκτρικού. Τότε συμβαίνουν ηλεκτρικές εκκενώσεις, το διηλεκτρικό καταρρέει, οι μονωτικές του ιδιότητες χάνονται ανεπιστρεπτί, οπότε συμβαίνει **διηλεκτρική κατάρρευση** και τελικά ο πυκνωτής καταστρέφεται. Γι' αυτόν τον λόγο, ο κατασκευαστής κάθε πυκνωτή αναφέρει την μέγιστη τάση λειτουργίας του, ώστε να μην πολώνεται ποτέ ο πυκνωτής με μεγαλύτερη τάση.

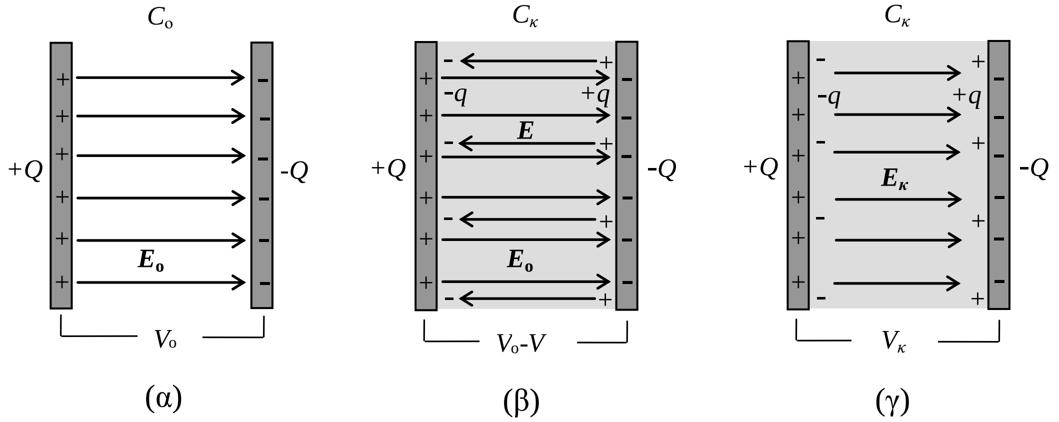
Πίνακας 5.1 *Προσεγγιστικές τιμές της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς κ διαφόρων υλικών.*

Υλικό	κ	**Υλικό**	κ
Κενό	1 (ακριβώς)	Γυαλί	5-10
Αέρας (ξηρός)	1.00059	Πορσελάνη	6
Τεφλόν	2.1	Σιλικόνη	12
Πολυστυρένιο	2.6	Γερμάνιο	16
Μαρμαρυγία (Μίκα)	3-6	Γλυκερίνη	42.5
Πλεξιγκλάς	3.4	Νερό	80
Χαρτί	3.7	Τιτανιούχο στρόντιο	310
Βακελίτης	4.9	Τιτανιούχο βάριο	1200

Γιατί όμως ένα διηλεκτρικό υλικό αυξάνει την χωρητικότητα ενός πυκνωτή; Για να απαντήσουμε σ' αυτήν την ερώτηση, πρέπει να εξετάσουμε πιο αναλυτικά τι συμβαίνει όταν ένα διηλεκτρικό τοποθετείται ανάμεσα στους οπλισμούς ενός επίπεδου πυκνωτή. Αρχικά, ας θεωρήσουμε κενό τον χώρο ανάμεσα στους οπλισμούς ενός φορτισμένου πυκνωτή, όπου δημιουργείται το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E_o}$, όπως φαίνεται στο σχ. 5.8α. Λόγω του πεδίου $\boldsymbol{E_o}$, το εισερχόμενο ανάμεσα στους οπλισμούς υλικό του διηλεκτρικού, ως μονωτής που είναι, πολώνεται, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται ηλεκτρικά δίπολα προσανατολισμένα ως προς το E_o (βλ. φόρτιση μονωτή, κεφάλαιο 1, σχ. 1.5). Η διαδικασία του προσανατολισμού των ηλεκτρικών διπόλων του διηλεκτρικού υλικού στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή, ονομάζεται **πόλωση του διηλεκτρικού** (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Young & Freedman, 2010). Τα δίπολα αυτά δημιουργούν ένα νέο ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ στο χώρο του διηλεκτρικού, το οποίο είναι αντίθετης φοράς αυτής του $\boldsymbol{E_o}$, έτσι όπως σχεδιάζεται στο σχ. 5.8β. Η γενεσιουργός αιτία του πεδίου $\boldsymbol{E}$ είναι τα επαγωγικά φορτία q που αναπτύσσονται στις περιοχές γειτνίασης του διηλεκτρικού με τους οπλισμούς του πυκνωτή. Έτσι τελικά, το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται στον πυκνωτή εντός του διηλεκτρικού υλικού όταν επέρχεται ηλεκτροστατική ισορροπία, είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυο αντιθέτων πεδίων (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), το οποίο έχει μέτρο την διαφορά των μέτρων τους, δηλ. ισχύει

$$\boldsymbol{E_\kappa} = \boldsymbol{E_o} + \boldsymbol{E} \Rightarrow E_\kappa = E_o - E \qquad (5.20)$$

(Serway & Jewett, 2013)Εφόσον η παρένθεση του διηλεκτρικού υλικού στον πυκνωτή, ελαττώνει το αρχικό του ηλεκτρικό πεδίο, θα ελαττώνει και την τάση στα άκρα του πυκνωτή, (ο πυκνωτής είναι αποσυνδεδεμένος από την πηγή ηλεκτρικής ενέργειας που αρχικά τον φόρτισε), διότι από την εξ. 5.4 παίρνουμε



Σχήμα 5.8 *(α) Επίπεδος πυκνωτής με φορτίο Q, χωρητικότητα C_o και διηλεκτρικό το κενό. (β) Διηλεκτρικό υλικό τοποθετείται μεταξύ των οπλισμών μεταβάλλοντας την χωρητικότητα σε $C_κ$ και μειώνοντας την τάση στα άκρα του πυκνωτή σε $V_κ=V_o-V$. (γ) Στην ηλεκτροστατική ισορροπία, το ηλεκτρικό πεδίο $E_κ$ του πυκνωτή είναι μικρότερο του αρχικού πεδίου E_o που είχε πριν την παρένθεση του διηλεκτρικού.*

$$V_κ = E_κ l = (E_o - E)l = E_o l - El \Rightarrow V_κ = V_o - V \tag{5.21}$$

όπου V_o είναι η αρχική τάση στα άκρα του πυκνωτή χωρίς το διηλεκτρικό (με κενό ανάμεσα στους οπλισμούς), και V είναι η τάση λόγω της πόλωσης του διηλεκτρικού. Επειδή με την εισαγωγή του διηλεκτρικού η αρχική τάση V_o ελαττώνεται σε $V_κ$, αλλά το φορτίο Q στους οπλισμούς δεν αλλάζει, καταλήγουμε στην αύξηση της χωρητικότητας του πυκνωτή, διότι ισχύει

$$C_κ = \frac{Q}{V_κ} = \frac{C_o V_o}{V_κ} \Rightarrow C_κ = \frac{V_o}{V_κ} C_o \Rightarrow C_κ > C_o \tag{5.22}$$

μιας και $V_o > V_κ$. Το συμπέρασμα αυτό το έχουμε εξάγει ήδη από την εξ. 5.19. Έτσι λοιπόν η διηλεκτρική σταθερά *ε* ενός υλικού, αυξάνει την χωρητικότητα ενός πυκνωτή κενού ή αέρα, μειώνοντας ταυτόχρονα την τάση του. Με αυτόν τον τρόπο, χρησιμοποιώντας υλικά μεγάλης διηλεκτρικής σταθεράς, μπορούμε να επιτυγχάνουμε μεγάλες χωρητικότητες πυκνωτών, με αποτέλεσμα να αποθηκεύουμε περισσότερο φορτίο στους οπλισμούς τους, αυξάνοντας την τάση τους μέχρι τα επιτρεπτά όρια του κατασκευαστή τους.

Εκτός από την χωρητικότητα, το διηλεκτρικό υλικό του πυκνωτή μεταβάλλει και την ενέργεια που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής. Έτσι από την εξ. 5.16 που δίνει την ενέργεια φορτισμένου επίπεδου πυκνωτή με διηλεκτρικό τον αέρα, μπορούμε αντιστοίχως να γράψουμε για την ενέργεια επίπεδου πυκνωτή $U_κ$ σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς *κ*

$$U_κ = \frac{1}{2} C_κ V_κ^2 \tag{5.23}$$

όπου $C_κ$ είναι η νέα χωρητικότητα του πυκνωτή, η οποία δίνεται από την 5.19, και $V_κ$ η νέα τάση στα άκρα του πυκνωτή μετά την παρένθεση του διηλεκτρικού (βλ. σχ. 5.8). Ας συγκρίνουμε την ενέργεια $U_κ$ με την ενέργεια $U_o = \frac{1}{2} C_o V_o^2$ που έχει ο πυκνωτής με διηλεκτρικό μέσο τον αέρα ($ε_o$). Από την εξ. 5.22 γράφουμε για την τάση $V_κ$

$$V_κ = \frac{V_o}{C_κ} C_o \tag{5.24}$$

Τότε η εξ. 5.23 δίνει

$$U_\kappa = \frac{1}{2} C_\kappa (\frac{V_o}{C_\kappa} C_o)^2 = \frac{1}{2} C_o{}^2 \frac{V_o{}^2}{C_\kappa} = \frac{1}{2} C_o V_o{}^2 (\frac{C_o}{C_\kappa}) \overset{(5.19)}{\Rightarrow} U_\kappa = \frac{U_o}{\kappa} \quad (5.25)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι με την παρένθεση ενός διηλεκτρικού υλικού στον χώρο με αέρα ενός φορτισμένου επίπεδου πυκνωτή, η ενέργειά του μειώνεται από U_o σε U_κ. Τούτο οφείλεται στην πόλωση του διηλεκτρικού και στην ελάττωση της τάσης στα άκρα του. Παρ’ όλα αυτά, η μέγιστη ενέργεια που δύναται να αποκτήσει ο πυκνωτής, εξαρτάται από την μέγιστη τάση στην οποία μπορεί αυτός να υποβληθεί, και η οποία ορίζεται από το διηλεκτρικό υλικό ώστε να μην υπάρξει διηλεκτρική κατάρρευση. Η μέγιστη δυνατή εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα ενός πυκνωτή, ονομάζεται **τάση κατάρρευσης**, και αντιστοιχεί σ’ ένα μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό υλικό, το οποίο ονομάζεται **διηλεκτρική αντοχή** του υλικού και μετράται σε V/m (Kraus, 1993). Η διηλεκτρική αντοχή ενός υλικού εξαρτάται από παράγοντες όπως η θερμοκρασία, η υγρασία, οι ατέλειες κ.α. Στον πίνακα 5.2 φαίνονται προσεγγιστικά μόνο, οι τιμές της διηλεκτρικής αντοχής διαφόρων υλικών. Όσο μεγαλύτερη τιμή διηλεκτρικής αντοχής έχει ένα υλικό, τόσο καλύτερος μονωτής είναι.

Τα διηλεκτρικά υλικά που χρησιμοποιούνται στους πυκνωτές έχουν μεγαλύτερη διηλεκτρική αντοχή από τον αέρα, και επομένως, μπορούν να εφαρμοστούν σ’ αυτά μεγαλύτερες τάσεις από την τάση κατάρρευσης του αέρα V_o(max), με αποτέλεσμα η μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια U_κ(max) στον πυκνωτή με διηλεκτρικό σχετικής διηλεκτρικής σταθερά κ, να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του πυκνωτή αέρος U_o(max). Ισχύει δηλ. U_κ(max) > U_o(max) και συνεπώς τα διηλεκτρικά, εκτός της χωρητικότητας αυξάνουν και την μέγιστη αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή.

Πίνακας 5.2 *Προσεγγιστικές τιμές της διηλεκτρικής αντοχής διαφόρων υλικών.*

Υλικό	**Διηλεκτρική αντοχή** (10^6V/m)
Κενό	∞
Αέρας (ξηρός)	3
Τεφλόν	60
Πολυστυρένιο	24
Μαρμαρυγία (Μίκα)	160
Χαρτί	16
Βακελίτης	24
Τιτανιούχο στρόντιο	8
Γυαλί (πυρέξ)	14
Πορσελάνη	12

Παράδειγμα 5.7 Πυκνωτής με διηλεκτρικό

Ένας επίπεδος πυκνωτής με αέρα έχει χωρητικότητα 1.32 pF. Η απόσταση των πλακών διπλασιάζεται και ανάμεσά τους τοποθετείται κερί. Η νέα χωρητικότητα είναι 2.57 pF. Εάν η σχετική διηλεκτρική σταθερά του αέρα είναι κ_α=1, να ευρείτε την σχετική διηλεκτρική σταθερά του κεριού.

Λύση

Η χωρητικότητα του επίπεδου πυκνωτή με μονωτικό υλικό τον αέρα, δίνεται από την σχέση

$$C_o = \varepsilon_o \frac{A}{l} \quad (1)$$

όπου ε_o είναι η διηλεκτρική σταθερά του αέρα (ίση περίπου με αυτή του κενού), A το εμβαδόν των πλακών του πυκνωτή και l η απόσταση των πλακών. Αυξάνοντας την απόσταση των πλακών σε $2l$ και τοποθετώντας κερί ανάμεσα από τις πλάκες, η νέα χωρητικότητα C_κ είναι

$$C_\kappa = \varepsilon \frac{A}{2l} \quad (2)$$

όπου ε είναι η διηλεκτρική σταθερά του κεριού. Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις 1 και 2 παίρνουμε

$$\frac{C_\kappa}{C_o} = \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_o} \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \frac{2C_\kappa}{C_o} \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_o \frac{2C_\kappa}{C_o} \tag{3}$$

Η εξ. 3 συνδέει την διηλεκτρική σταθερά του κεριού με αυτήν του αέρα. Επειδή ζητάμε την σχετική διηλεκτρική σταθερά του κεριού, εάν διαιρέσουμε και τα δυο μέλη της εξ. 3 με την διηλεκτρική σταθερά του κενού ε_o παίρνουμε

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} = \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon_o}\frac{2C_\kappa}{C_o} \Rightarrow \kappa = \frac{2C_\kappa}{C_o} \Rightarrow \kappa = 1\times\frac{2\times 2.57\text{pF}}{1.32\text{pF}} \Rightarrow \kappa = 3.89$$

Επειδή το κερί έχει μεγαλύτερη σχετική διηλεκτρική σταθερά από τον αέρα, γι' αυτόν τον λόγο αυξάνει την χωρητικότητα του πυκνωτή.

Παράδειγμα 5.8 Σχετική διηλεκτρική σταθερά διηλεκτρικού

Επίπεδος πυκνωτής με μονωτικό υλικό τον αέρα ($\kappa \approx 1$) είναι φορτισμένος με ηλεκτρικό φορτίο Q. Στα άκρα του πυκνωτή συνδέεται βολτόμετρο που μετρά τάση V_o=51.5 V. Ξαφνικά εισάγεται διηλεκτρικό μεταξύ των πλακών του πυκνωτή και η ένδειξη του βολτομέτρου αλλάζει σε V=4.29 V, όπως δείχνει το σχ. 5.9α. α) Ποια είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού; β) Ποια θα είναι η ένδειξη του βολτομέτρου V', εάν το διηλεκτρικό συρθεί προς τα έξω, ώστε να γεμίζει μόνο το ένα τρίτο του χώρου μεταξύ των πλακών, όπως δείχνει το σχ. 5.9β;

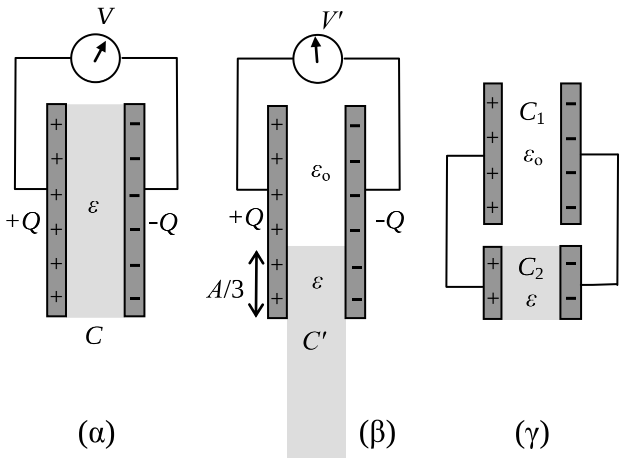
Λύση

α) Αρχικά, πριν την εισαγωγή του διηλεκτρικού στον πυκνωτή, η χωρητικότητα C_o του επίπεδου πυκνωτή με αέρα δίνεται από την εξ. 5.6, ως

$$C_o = \varepsilon_o \frac{A}{l} \tag{1}$$

όπου C_o είναι η χωρητικότητα του πυκνωτή, έχοντας ως διηλεκτρικό τον αέρα, ε_o η διηλεκτρική σταθερά του αέρα, A το εμβαδόν του κάθε οπλισμού και l η απόσταση μεταξύ των οπλισμών. Η τάση που μετρά το βολτόμετρο στα άκρα του πυκνωτή με αέρα είναι V_o=51.5 V. Όταν εισάγεται στον πυκνωτή το νέο διηλεκτρικό με διηλεκτρική σταθερά ε, ισχύει για την νέα χωρητικότητα C

$$C = \varepsilon \frac{A}{l} \tag{2}$$



Σχήμα 5.9 *(α) Επίπεδος πυκνωτής με διηλεκτρικό, χωρητικότητας C και τάση V. (β) Ο ίδιος πυκνωτής με μερικώς ενδοπαρενθεμένο διηλεκτρικό, χωρητικότητας C' και τάση V'. (γ) Ισοδυναμία δύο πυκνωτών σε παράλληλη σύνδεση με διηλεκτρικά ε_o και ε αντιστοίχως (παράδειγμα 5.8).*

Το ηλεκτρικό φορτίο του πυκνωτή δεν αλλάζει με την τοποθέτηση του νέου διηλεκτρικού, οπότε ισχύει

$$Q_o = C_o V_o = CV \tag{3}$$

όπου V_o είναι η τάση του πυκνωτή με αέρα, και V είναι η τάση που μετρά το βολτόμετρο στα άκρα του πυκνωτή μετά την εισαγωγή του διηλεκτρικού, διηλεκτρικής σταθεράς ε (σχ. 5.9α). Από την εξ. 3 παίρνουμε

$$V = \frac{C_o}{C} V_o \overset{(2)}{\Rightarrow} V = \frac{\varepsilon_o \frac{A}{l}}{\varepsilon \frac{A}{l}} V_o \Rightarrow V = \frac{\varepsilon_o}{\varepsilon} V_o \tag{4}$$

Η σχετική διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού ορίζεται ως

$$\kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} \tag{5}$$

Η εξ. 4 λόγω της 5 γράφεται

$$V = \frac{V_o}{\kappa} \Rightarrow \kappa = \frac{V_o}{V} \Rightarrow \kappa = \frac{51.5}{4.29} \Rightarrow \kappa = 12$$

Βλέποντας τον πίνακα 5.1, καταλαβαίνουμε ότι το διηλεκτρικό είναι η σιλικόνη.

β) Εάν το διηλεκτρικό τοποθετηθεί σε μια νέα θέση ώστε τα δύο τρίτα του πυκνωτή να έχουν ως διηλεκτρικό τον αέρα, ενώ το υπόλοιπο ένα τρίτο του πυκνωτή να έχει διηλεκτρικό τη σιλικόνη, στην ουσία έχουμε ένα νέο πυκνωτή, του οποίου η χωρητικότητά είναι C' (βλ. σχ. 5.9β). Η τάση στα άκρα του νέου πυκνωτή που μετρά το βολτόμετρο, είναι μια μικρότερη τάση V'. Η χωρητικότητα C' είναι ισοδύναμη της χωρητικότητας μιας παράλληλης σύνδεσης δύο πυκνωτών με διηλεκτρικά σταθεράς ε_o και ε αντιστοίχως, και χωρητικοτήτων C_1 και C_2, όπως ακριβώς δείχνει το σχ. 5.9γ. Η συνολική χωρητικότητα της διάταξης είναι

$$C' = C_1 + C_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} C' = \varepsilon_o \frac{2A/3}{l} + \varepsilon \frac{A/3}{l} = \frac{A}{l}\left(\frac{2\varepsilon_o}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\right) \Rightarrow C' = \frac{A}{3l}(2\varepsilon_o + \varepsilon) \tag{6}$$

Όμως η εξ. 5 στην 6 δίνει

$$C' = \frac{A}{3l}(2\varepsilon_o + \kappa\varepsilon_o) = \frac{A}{3l}\varepsilon_o(2+\kappa) \overset{(1)}{\Rightarrow} C' = \frac{C_o}{3}(2+\kappa) \tag{7}$$

Επειδή ισχύει $C_o = Q_o / V_o$, τελικά παίρνουμε από την εξ. 7

$$C' = \frac{Q_o}{3V_o}(2+\kappa) \tag{8}$$

Εφόσον η τάση του πυκνωτή με τα δυο διαφορετικά διηλεκτρικά (βλ. σχ. 5.9γ) είναι V', τότε ισχύει

$$C' = \frac{Q_o}{V'} \tag{9}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις 8 και 9 έχουμε

$$1 = \frac{V'}{3V_o}(2+\kappa) \Rightarrow V' = \frac{3V_o}{2+\kappa} \Rightarrow V' = \frac{3 \times 51.5\text{V}}{2+12} = \frac{154.5}{14}\text{V} \Rightarrow V' = 11\text{V}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε5.1 Εάν διπλασιάσετε το φορτίο που υπάρχει συσσωρευμένο στους οπλισμούς ενός πυκνωτή, θα μεταβληθεί η χωρητικότητά του; Ναι ή όχι και γιατί.

Ε5.2 Σ' έναν φορτισμένο πυκνωτή, το συνολικό φορτίο που αποθηκεύεται στους δύο οπλισμούς του είναι μηδέν μιας και ισχύει $+Q-Q=0$. Τι πραγματικά αποθηκεύεται σ' έναν πυκνωτή;

Ε5.3 Στο χώρο μεταξύ των πλακών επιπέδου πυκνωτή εισέρχεται επίπεδη λεπτή μεταλλική πλάκα ακριβώς στην ενδιάμεση απόσταση, χωρίς να τους αγγίζει και παράλληλη προς αυτούς. Η χωρητικότητα του πυκνωτή, αυξάνεται, μειώνεται ή μένει η ίδια; Εξηγείστε τον συλλογισμό σας.

Ε5.4 Επίπεδος πυκνωτής είναι φορτισμένος με φορτίο Q και με τάση V στα άκρα του. Εάν τριπλασιάσουμε την απόσταση των οπλισμών, πως μεταβάλλεται η χωρητικότητά, η τάση, το φορτίο και η ενέργειά του;

Ε5.5 Δυο πυκνωτές έχουν την ίδια χωρητικότητα, όμως η τάση λειτουργίας του ενός είναι μεγαλύτερη από την τάση του άλλου. Ποιος από τους δύο πυκνωτές έχει οπλισμούς μεγαλυτέρων διαστάσεων;

Ε5.6 Διαθέτετε δυο πυκνωτές με χωρητικότητες $C_2 > C_1$. Πως πρέπει να συνδεθούν οι δυο πυκνωτές μεταξύ τους, ώστε ο χωρητικότητας C_2 πυκνωτής να έχει μεγαλύτερο φορτίο από τον C_1;

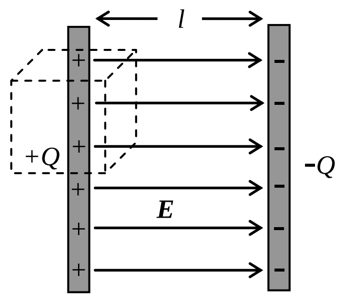
Ε5.7 Έστω τρεις πανομοιότυποι πυκνωτές οι οποίοι συνδέονται με μια πηγή τάσης. Πότε το σύστημα των πυκνωτών αποκτά μεγαλύτερη ενέργεια; Όταν συνδέονται και οι τρεις σε σειρά με την πηγή, ή όταν συνδέονται παράλληλα μ' αυτήν;

Ε5.7 Εξηγείστε γιατί ένα διηλεκτρικό υλικό αυξάνει την μέγιστη τάση λειτουργίας στα άκρα ενός πυκνωτή, παρότι οι διαστάσεις του πυκνωτή δεν αλλάζουν.

Ε5.8 Το νερό έχει μεγάλη διηλεκτρική σταθερά (βλ. πίνακα 5.1). Γιατί δεν χρησιμοποιείται ως διηλεκτρικό υλικό στους πυκνωτές;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

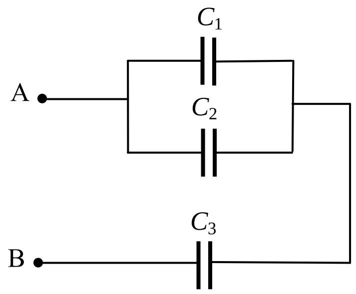
Π5.1 Επίπεδος πυκνωτής. Επίπεδος πυκνωτής αέρος έχει χωρητικότητα 500 pF και φορτίο μέτρου 0.200μC στον κάθε οπλισμό του. Οι οπλισμοί (πλάκες) βρίσκονται σε απόσταση 0.400 mm μεταξύ τους. α) Πόση είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών; β) Πόση είναι η επιφάνεια κάθε οπλισμού; γ) Πόσο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ των πλακών; δ) Πόση είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στον κάθε οπλισμό; *Απάντηση*: α) 400 V, β) 0.0226 m^2, γ) 1×10^6 V/m και δ) 8.85×10^{-6} C/m^2.



Σχήμα 5.10 *Πρόβλημα 5.2.*

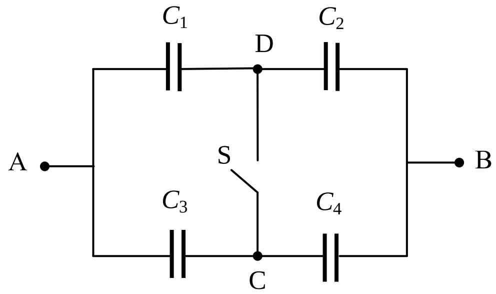
Π5.2 Ηλεκτρικό πεδίο επίπεδου πυκνωτή. Επίπεδος πυκνωτής με φορτίο Q ομοιόμορφα κατανεμημένο στους οπλισμούς του εμβαδού A, οι οποίοι απέχουν απόσταση l, δημιουργούν ομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ όπως φαίνεται στο σχ. 5.10. Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss αποδείξτε τη σχέση $E = \sigma/\varepsilon_o$. *Υπόδειξη*: Θεωρείστε κλειστή κυβική επιφάνεια να περιβάλει μέρος του ενός οπλισμού, όπως φαίνεται στο σχ. 5.10, και ότι το φορτίο κατανέμεται εξίσου και στις δυο πλευρές του κάθε οπλισμού.

Π5.3 Σύνδεση πυκνωτών. Τρεις πανομοιότυποι επίπεδοι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Το εμβαδόν πλάκας κάθε πυκνωτή είναι A και η απόσταση μεταξύ των πλακών είναι d. α) Πόση πρέπει να είναι η απόσταση μεταξύ των πλακών ενός μόνο πυκνωτή με εμβαδόν οπλισμού A, ώστε η χωρητικότητά του να είναι ίδια με εκείνη του παράλληλου συνδυασμού; β) Πόση πρέπει να είναι η απόσταση, εάν οι τρεις πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι εν σειρά; *Απάντηση:* α) $d/3$ και β) $3d$.



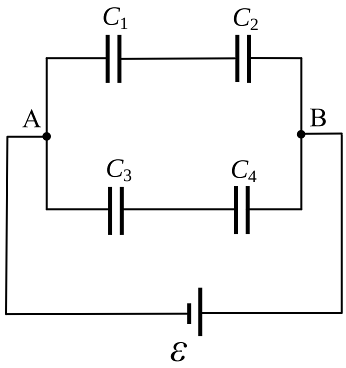
Σχήμα 5.11 *Πρόβλημα 5.3.*

Π5.4 Σύνδεση πυκνωτών Οι τρείς πυκνωτές στο κύκλωμα του σχήματος 5.11, έχουν χωρητικότητες C_1=2.00 μF, C_2=4.00 μF και C_3=9.00 μF αντίστοιχα. Η εφαρμοσμένη διαφορά δυναμικού είναι μεταξύ των σημείων A και B είναι V_{AB}=48 V. Υπολογίστε α) το φορτίο του καθενός πυκνωτή, β) την διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών κάθε πυκνωτή. *Απάντηση*: α) Q_1=57.6 μC, Q_2=115.2 μC, Q_3=172.8 μC, β) V_1= V_2=28.8 V, V_3=19.2 V.



Σχήμα 5.12 *Πρόβλημα 5.5.*

Π5.5 Κύκλωμα πυκνωτών. Οι πυκνωτές του σχήματος 5.12, C_1=3.00 μF, C_2=6.00 μF, C_3=6.00 μF και C_4=3.00 μF συνδέονται όπως στο διάγραμμα με τον διακόπτη S ανοικτό. Η εφαρμοσμένη διαφορά δυναμικού είναι V_{AB}=400 V. α) Πόση είναι η διαφορά δυναμικού V_{CD}; β) Πόση είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα του καθενός πυκνωτή αφού κλείσει ο διακόπτης S; *Απάντηση*: α) 134 V, και β) όλες οι τάσεις είναι ίσες με 200 V.

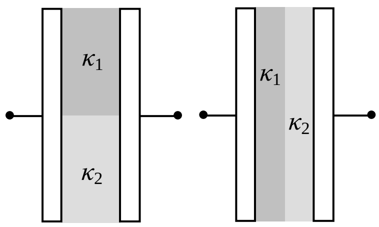


Σχήμα 5.13 *Πρόβλημα 5.6.*

Π5.6 Ισοδύναμη χωρητικότητα Στο κύκλωμα των τεσσάρων πυκνωτών του σχήματος 5.13 υπολογίστε: α) την ισοδύναμη χωρητικότητα του κυκλώματος, β) την διαφορά δυναμικού στα άκρα του κάθε πυκνωτή, και γ) το φορτίο του κάθε πυκνωτή. Δίνονται, C_1=3 μF, C_2=6 μF, C_3=2 μF, και C_4=4 μF, ενώ η τάση της πηγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι ίση με $\mathcal{E}$=100 V.

Π5.7 Διηλεκτρικό σε επίπεδο πυκνωτή. Δυο παράλληλες πλάκες εμβαδού 110 cm^2, φορτίζονται με το ίδιο φορτίο 890 nC αλλά με αντίθετο πρόσημο. Το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο διηλεκτρικό, το οποίο γεμίζει το χώρο ανάμεσα στις πλάκες είναι 1.4 MV/m. Υπολογίστε την σχετική διηλεκτρική σταθερά του υλικού *κ*. *Απάντηση*: 6.5.

Π5.8 Πυκνωτής με διαφορετικά διηλεκτρικά. Ένας επίπεδος πυκνωτής με εμβαδόν οπλισμών *A*, και απόσταση *d* μεταξύ τους, είναι γεμάτος με δύο διηλεκτρικά υλικά σχετικών διηλεκτρικών σταθερών κ_1 και κ_2 αντιστοίχως, έτσι όπως φαίνεται στα σχήματα 5.14α και 5.14β. Να ευρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή σε κάθε περίπτωση. *Απάντηση*: α) $C = \frac{\varepsilon_o A}{d}(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2})$, και β) $C = \frac{2\varepsilon_o A}{d}(\frac{\kappa_1 . \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2})$.



(α) (β)

Σχήμα 5.14 *Πρόβλημα 5.8.*

Π5.9 Πυκνωτής με διηλεκτρικό. Ένα διηλεκτρικό πάχους *b* εισάγεται ανάμεσα στις πλάκες ενός επιπέδου πυκνωτή, οι οποίες απέχουν απόσταση *d*. Αποδείξτε ότι η χωρητικότητά του δίνεται από την σχέση $C = \frac{\kappa \varepsilon_o A}{\kappa d - b(\kappa - 1)}$.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1^{η} Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4^{η} Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2^{η} Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1^{η} Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 6

ΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΡΕΥΜΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ

Σύνοψη

Στο έκτο τούτο κεφάλαιο ορίζεται και περιγράφεται η ποσότητα του ηλεκτρικού ρεύματος και οι συναφείς ποσότητες της πυκνότητας ρεύματος, αγωγιμότητας, αντίστασης και ειδικής αντίστασης. Μελετώνται τα αγώγιμα υλικά βάσει του νόμου του Ohm, καθώς επίσης και το μοντέλο για την επεξήγηση της αγωγιμότητας στα υλικά. Τέλος γίνεται αναφορά στο φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας.

Προαπαιτούμενη γνώση

Κανόνες παραγώγισης και ολοκληρώσεως.

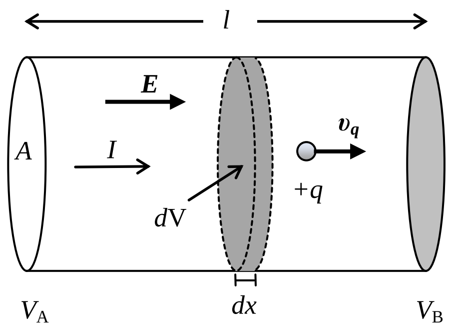
6.1 Ηλεκτρικό ρεύμα και αντίσταση

Είδαμε στο κεφάλαιο 4 ότι, όταν υπάρχει διαφορά δυναμικού σε μια κατεύθυνση του χώρου ή αλλιώς βαθμίδα δυναμικού, σ' αυτήν την κατεύθυνση δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$. Έτσι λοιπόν, με τον ίδιο τρόπο, εάν στα άκρα ενός αγωγού υπάρχει διαφορά δυναμικού, στο εσωτερικό του αγωγού δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο. Τότε, μια ηλεκτρική δύναμη $\boldsymbol{F}=-e\boldsymbol{E}$ ασκείται στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού, η οποία τα επιταχύνει κινώντας τα προς την αντίθετη κατεύθυνση του $\boldsymbol{E}$. Γενικότερα, οποιαδήποτε μακροσκοπική και κατευθυνόμενη κίνηση ηλεκτρικού φορτίου από μια περιοχή του χώρου σε μια άλλη, ονομάζεται **ηλεκτρικό ρεύμα**. Ο ρυθμός διέλευσης του φορτίου από μια περιοχή ορίζει την **ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος**, I. Δηλαδή ισχύει

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{6.1}$$

Andre Marie Ampere (1775-1836) (*https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Andre-marie-ampere2.jpg*). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

(Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Grant & Phillips, 1975), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Η μονάδα μέτρησης της έντασης του ρεύματος στο ΔΣΜ είναι το Ampere (A), προς τιμή του Γάλλου φυσικού Andre Marie Ampere (1775-1836), και ορίζεται ως 1A=1C/s. Η ένταση I του ηλεκτρικού ρεύματος, παρότι αναπαριστάται σχηματικά πάντα με ένα διάνυσμα, είναι μονόμετρο μέγεθος, διότι δεν υπακούει στις πράξεις των διανυσμάτων. Η φορά του ηλεκτρικού ρεύματος, ορίζεται συμβατικά να είναι η φορά των θετικών φορτίων μέσα σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$, το οποίο δημιουργείται εντός αγωγού από μια διαφορά δυναμικού V_{AB} στα άκρα του, όπως φαίνεται στο σχ. 6.1. Στην πραγματικότητα, τα φορτία που κινούνται είναι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού, τα οποία κατευθύνονται πάντα από το χαμηλό δυναμικό V_B στο υψηλό V_A. Όπως όμως έχουμε αναφέρει στο εδάφιο 1.2, η μετακίνηση ενός ελευθέρου ηλεκτρονίου από ένα σημείο σε ένα άλλο, κατά την διαδικασία της ηλεκτρικής φόρτισης ενός σώματος, δημιουργεί αυτόματα μια έλλειψη αρνητικού φορτίου στο αρχικό σημείο, και επομένως μια περίσσεια θετικού φορτίου. Έτσι λοιπόν, η κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων διαμέσου ενός μεταλλικού αγωγού προς μια κατεύθυνση, δημιουργεί μια φαινομενική κίνηση θετικών φορτίων (με



Σχήμα 6.1 *Η συμβατική φορά του ηλεκτρικού ρεύματος, όπως καθορίζεται από την κίνηση των θετικών ηλεκτρικών φορτίων μέσα σ' έναν μεταλλικό αγωγό, υπό διαφορά δυναμικού V_B-V_A.*

φορτίο +*e*) προς την αντίθετη κατεύθυνση. Στο σχ. 6.1 φαίνεται η κίνηση αυτών των φαινομενικών θετικών φορτίων, μέσα σ’ ένα κυλινδρικό μεταλλικό αγωγό μήκους *l* και διατομής *A*. Η κίνηση των θετικών ηλεκτρικών φορτίων, γίνεται πάντα από το άκρο υψηλού δυναμικού V_A προς αυτό του χαμηλού V_B. Αν και στο παρόν κεφάλαιο περιοριζόμαστε σε ηλεκτρικά ρεύματα ελευθέρων ηλεκτρονίων διαμέσου μεταλλικών αγωγών, ηλεκτρικά ρεύματα μπορούν να δημιουργηθούν και από άλλου είδους φορτισμένα σωμάτια όπως είναι τα ιόντα. Ηλεκτρικά ρεύματα δημιουργούνται από κίνηση ιόντων σε δέσμες, σε περιβάλλον κενού με ευρείες εφαρμογές στην τεχνολογία. Επίσης, ηλεκτρικά ρεύματα δημιουργούνται και σε διαλύματα ηλεκτρολυτών, τα οποία αποτελούν αντικείμενο έρευνας στον ειδικό κλάδο της Ηλεκτροχημείας.

Μια φυσική ποσότητα που περιγράφει την διάδοση του ηλεκτρικού ρεύματος διαμέσου ενός αγωγού, είναι η **πυκνότητα του ρεύματος** *J*, η οποία ορίζεται ως το πηλίκο

$$J = \frac{I}{A} \tag{6.2}$$

όπου *A* είναι η διατομή από την οποία διέρχεται το ρεύμα έντασης *I*, (Kraus, 1993), (Knight, 2010), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Serway & Jewett, 2013). Η μονάδα μέτρησης της πυκνότητας ρευματος στο ΔΣΜ είναι το $1 \mathrm{A/m^2}$. Η εξ. 6.2 μέσω της 6.1 γίνεται

$$J = \frac{dQ}{Adt} \tag{6.3}$$

Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδη όγκο *d*V [19] (γραμμοσκιασμένος δίσκος) στον αγωγό του σχήματος 6.1, το φορτίο που αυτός περιέχει είναι

$$dQ = nqd\mathrm{V} \tag{6.4}$$

όπου *n* είναι η πυκνότητα των κινουμένων φορτίων ανά μονάδα όγκου, και *q* είναι το στοιχειώδες φορτίο των φορέων (πχ *e* για ηλεκτρόνια). Η εξ. 6.4 στην 6.3 δίνει

$$J = \frac{nqd\mathrm{V}}{Adt} = \frac{nqAdx}{Adt} \Rightarrow J = nq\upsilon_q \tag{6.5}$$

όπου θεωρήσαμε τον στοιχειώδη όγκο *d*V=*Adx*, και την ταχύτητα μετατόπισης των φορέων φορτίου $\upsilon_q = dx/dt$. Η πυκνότητα του ρεύματος $\boldsymbol{J}$ είναι διανυσματικό μέγεθος που βάσει της εξίσωσης 6.5 έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας των φορέων θετικού φορτίου $\boldsymbol{\upsilon_q}$, η οποία ονομάζεται **ταχύτητα διολίσθησης**.

Όπως προαναφέραμε, η δημιουργία ενός ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ είναι η αιτία της κίνησης ηλεκτρικών φορτίων μέσα σ’ ένα αγωγό, η οποία οφείλεται στην διαφορά δυναμικού που υπάρχει μεταξύ των άκρων του αγωγού (βλ. σχ. 6.1). Εάν η διαφορά δυναμικού είναι σταθερή, τότε το ίδιο συμβαίνει και για τα $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{J}$. Για πολλά υλικά υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ των δυο αυτών διανυσματικών φυσικών ποσοτήτων, η οποία είναι

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \tag{6.6}$$

όπου η σταθερά αναλογίας *σ* ονομάζεται **αγωγιμότητα** του υλικού, και είναι ανεξάρτητη των ποσοτήτων $\boldsymbol{J}$ και $\boldsymbol{E}$. Κάθε υλικό στη Φύση που ικανοποιεί την εξ. 6.6 έχει μια χαρακτηριστική τιμή αγωγιμότητας. Η εξ. 6.6 ονομάζεται νόμος του Ohm προς τιμή του Γερμανού φυσικού George Simon Ohm (1789-1854), ο οποίος πρώτος ανακάλυψε αυτή την σχέση. Δηλαδή ο **νόμος του Ohm** ορίζει ότι η πυκνότητα ρεύματος σε ένα υλικό, είναι γραμμικώς ανάλογη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που υπάρχει μέσα σ’ αυτό (Grant & Phillips, 1975), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Τα υλικά για τα οποία ισχύει ο νόμος του Ohm ονομάζονται **ωμικά υλικά**, τα οποία κυρίως είναι όλα τα μέταλλα σε σταθερή θερμοκρασία.

George Simon Ohm (1789-1854) (https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Ohm#/media/File:Georg_Simon_Ohm3.jpg). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

Θεωρώντας τον μεταλλικό αγωγό του σχήματος 6.1, μπορούμε από την σχέση 5.4 του προηγουμένου κεφαλαίου να γράψουμε για την διαφορά

[19] Προσέξτε ότι για τον όγκο χρησιμοποιούμε εδώ το σύμβολο V (όχι ιτάλικ), για να μην το συγχέομε με την διαφορά δυναμικού *V*.

δυναμικού $V = V_{AB}$ στα άκρα του αγωγού

$$V = El \Rightarrow E = \frac{V}{l} \tag{6.7}$$

Η εξ. 6.6 από την 6.7 δίνει

$$J = \sigma \frac{V}{l} \tag{6.8}$$

Όμως από τον ορισμό της πυκνότητας ρεύματος της εξίσωσης 6.2, και την εξ. 6.8 παίρνουμε

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{l} \Rightarrow V = \frac{l}{\sigma A} I \tag{6.9}$$

ή αλλιώς

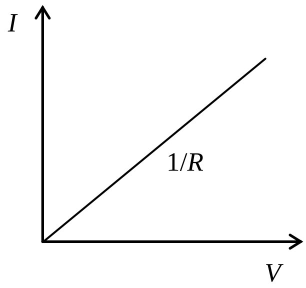
$$V = RI \tag{6.10}$$

όπου

$$R = \frac{l}{\sigma A} \tag{6.11}$$

Η ποσότητα R ονομάζεται **ωμική αντίσταση** του αγωγού, ή απλώς **αντίσταση**. Βάσει της εξίσωσης 6.10, η ωμική αντίσταση γράφεται

$$R = \frac{V}{I} \tag{6.12}$$



Σχήμα 6.2 *Η γραμμική σχέση (νόμος του Ohm) μεταξύ του ρεύματος και της διαφοράς δυναμικού V στα άκρα ενός αγωγού.*

Η εξ. 6.12 είναι μια διαφορετική έκφραση του νόμου του Ohm (εξ. 6.6). Όσο μεγαλύτερη διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται στα άκρα ενός αγωγού, τόσο μεγαλύτερο ρεύμα διαρρέει τον αγωγό. Έτσι για τα ωμικά υλικά, υπάρχει μια γραμμική σχέση μεταξύ εντάσεως ρεύματος I και τάσης V, η οποία αναπαριστάται στο σχ. 6.2. Η κλίση της ευθείας είναι το αντίστροφο της αντίστασης R. Η μονάδα μέτρησης της αντίστασης στο ΔΣΜ είναι το 1 Ohm (Ω), όπου 1Ω = 1V/A. Δηλαδή όταν στα άκρα ενός αγωγού εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού 1 V ώστε να παραχθεί ρεύμα 1 A, τότε η αντίσταση του αγωγού είναι 1 Ω. Προσέξτε ότι η αντίσταση δεν εξαρτάται από τις τιμές των I και V.

Μία άλλη φυσική ποσότητα που εκφράζει την αντίσταση ενός υλικού στην διέλευση ηλεκτρικού φορτίου, είναι η **ειδική αντίσταση** ρ, η οποία ορίζεται ως το αντίστροφο μέγεθος της αγωγιμότητας, δηλ.

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{6.13}$$

(Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Knight, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Από τον ορισμό της ειδικής αντίστασης ρ, η αντίσταση R βάσει της εξίσωσης 6.11 γράφεται

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{6.14}$$

(Sears, 1951), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Giancoli, 2012). Έτσι λοιπόν η αντίσταση R ενός αγωγού εξαρτάται όχι μόνο από το υλικό του και την ειδική του αντίσταση ρ, αλλά και από τα γεωμετρικά του στοιχεία (μήκος, πλάτος και ύψος). Κάθε υλικό έχει μια χαρακτηριστική τιμή ειδικής αντίστασης, η οποία εξαρτάται τόσο από την φύση του υλικού, όπως δείχνει ο πίνακας 6.1, όσο και από την θερμοκρασία του. Στο ΔΣΜ η ειδική αντίσταση μετράται σε Ω.m. Δεν πρέπει να συγχέουμε την ειδική αντίσταση με την αντίσταση. Είναι ανάλογες αλλά διαφορετικές φυσικές ποσότητες. Έτσι, ενώ η ειδική αντίσταση είναι ιδιότητα του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο ένα σώμα, η αντίσταση του σώματος είναι ιδιότητα του συγκεκριμένου σώματος. Γενικότερα, διαφορετικά σώματα ως προς το σχήμα και το μέγεθος, αλλά του ιδίου υλικού, έχουν την ίδια ειδική αντίσταση ρ, αλλά διαφορετική αντίσταση R.

Κάθε υλικό σώμα που παρουσιάζει ωμική αντίσταση R ονομάζεται **αντιστάτης**. Οι αντιστάτες χρησιμοποιούνται στα ηλεκτρικά κυκλώματα και τις ηλεκτρονικές διατάξεις, κυρίως για έλεγχο της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος. Οι αντιστάτες παρουσιάζουν αντιστάσεις οι οποίες κυμαίνονται μεταξύ πολλών τάξεων μεγέθους, από δέκατα του Ohm έως εκατομμύρια Ohm. Η αντίσταση ενός αντιστάτη μετράται με ειδικό όργανο το οποίο ονομάζεται **ωμόμετρο**. Επίσης, η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος μετράται με όργανο το οποίο ονομάζεται **αμπερόμετρο**, ενώ η ηλεκτρική τάση μετράται με αντίστοιχο όργανο που ονομάζεται **βολτόμετρο**. Συνήθως και τα τρία αυτά όργανα μέτρησης, αντίστασης, ρεύματος και τάσης αντιστοίχως, ενσωματώνονται σε ένα σύνθετο όργανο το οποίο είναι γνωστό ως **πολύμετρο**. Το πολύμετρο είναι απαραίτητο όργανο σε ηλεκτρολόγους, ηλεκτρονικούς, φυσικούς και άλλους επιστήμονες.

Πίνακας 6.1 *Τιμές της ειδικής αντίστασης ρ διαφόρων υλικών σε θερμοκρασία 20 ^oC.*

Υλικό	**Ειδική αντίσταση** ρ (Ω.m)
Άργυρος	1.59×10^{-8}
Χαλκός	1.68×10^{-8}
Χρυσός	2.44×10^{-8}
Αλουμίνιο	2.65×10^{-8}
Βολφράμιο	5.60×10^{-8}
Σίδηρος	9.71×10^{-8}
Πλατίνα	10.6×10^{-8}
Μόλυβδος	22×10^{-8}
Υδράργυρος	98×10^{-8}
Γραφίτης*	$(3\text{-}60)\times10^{-5}$
Πυρίτιο (καθαρό)	2.3×10^{3}
Πυρίτιο (n-τύπου)	8.7×10^{-4}
Πυρίτιο (p-τύπου)	2.8×10^{-3}
Γερμάνιο (καθαρό)	0.46
Ήλεκτρον (κεχριμπάρι)	5×10^{4}
Γυαλί	$10^{9}\text{-}10^{14}$
Ξύλο	$10^{8}\text{-}10^{11}$
Ελαστικό (σκληρό)	$10^{13}\text{-}10^{15}$
Μίκα	$10^{11}\text{-}10^{15}$
Θείο	10^{15}
Χαλαζίας (τετηγμένος)	7.5×10^{17}

*Οι τιμές εξαρτώνται από ατέλειες και προσμίξεις στο υλικό.

Παράδειγμα 6.1 Ηλεκτρικό ρεύμα και αντίσταση

Σύρμα αλουμινίου διαμέτρου 0.8 mm διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του εσωτερικού του σύρματος είναι 0.520 V/m. α) Ποιο είναι το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα; β) Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των δυο σημείων του σύρματος που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 7 m; γ) Ποια είναι η αντίσταση ενός τέτοιου σύρματος; Δίνεται ότι η ειδική αντίσταση του αλουμινίου είναι ρ=2.82×10^{-8}Ω·m.

Λύση

α) Το ρεύμα που διαρρέει το σύρμα δίδεται ως

$$I = JA \tag{1}$$

όπου

$$A = \pi R^2 = \pi(\frac{d}{2})^2 \Rightarrow A = \pi\frac{d^2}{4} \tag{2}$$

και

$$J = \sigma E \Rightarrow J = \frac{E}{\rho} \tag{3}$$

Οι εξ. 2 και 3 στην 1 δίνουν

$$I = \frac{E}{\rho}\pi\frac{d^2}{4} = \frac{0.520\text{N/C}\times(0.8\times10^{-3}\text{m})^2}{4\times2.82\times10^{-8}\Omega\text{m}} \Rightarrow I = 2.95\text{A}$$

β) Εφόσον τα σημεία απέχουν απόσταση l=7 m, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων είναι

$$V = El = 0.520\text{N/C}\times7\text{m} \Rightarrow V = 3.64\text{V}$$

γ) Το σύρμα είναι μέταλλο σε σταθερή θερμοκρασία, άρα είναι ωμικό υλικό. Επομένως η αντίσταση R του σύρματος, ικανοποιεί την σχέση

$$R = \frac{V}{I} = \frac{3.64\text{V}}{2.95\text{A}} \Rightarrow R = 1.23\Omega$$

Παράδειγμα 6.2 Μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό ρεύμα

Το ρεύμα σε ένα σύρμα μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση I=A+Bt^2, όπου A και B είναι σταθερές. Εάν A=4.00 C/s και B=0.60 C/s^3, τότε α) πόσα coulomb φορτίου διέρχονται από μια διατομή του σύρματος στο χρονικό διάστημα μεταξύ t=0 και t=10 s, και β) ποιο σταθερό ρεύμα θα μπορούσε να μεταφέρει το ίδιο φορτίο στο ίδιο χρονικό διάστημα;

Λύση

α) Το ρεύμα ορίζεται ως

$$I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = Idt \Rightarrow \int dQ = \int_{t_1}^{t_2} Idt = \int_{t_1}^{t_2}(\text{A}+\text{B}t^2)dt = (\text{A}t+\text{B}\frac{t^3}{3})\Big|_{t_1}^{t_2} \Rightarrow$$

$$Q = 4.00\text{C/s}\times(10-0)\text{s} + 0.60\text{C/s}^3\times(\frac{10^3-0}{3})\text{s}^3 = 40.0\text{C}+200\text{C} \Rightarrow Q = 240\text{C}$$

β) Το σταθερό ρεύμα που μεταφέρει αυτό το φορτίο στον ίδιο χρόνο, είναι

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow I = \frac{240\text{C}}{10\text{s}} \Rightarrow I = 24\text{A}$$

Παράδειγμα 6.3 Ηλεκτρικό ρεύμα και ταχύτητα διολίσθησης

Ηλεκτρικός αγωγός σχεδιασμένος για να διαρρέεται από μεγάλα ρεύματα έχει τετραγωνική διατομή με πλευρά α=2.00 mm και μήκος l=12.0 m. Η αντίσταση μεταξύ των άκρων του είναι R=0.064 Ω. α) Πόση είναι η ειδική αντίσταση του υλικού; β) Εάν το ολικό ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό είναι 225 A, ποιο είναι το μέτρο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E μέσα στον αγωγό; γ) Εάν το υλικό έχει n=8.5×10^{28} ελεύθερα ηλεκτρόνια ανά κυβικό μέτρο, υπολογίστε την ταχύτητα ολίσθησης υ_q υπό τις συνθήκες του (β) ερωτήματος. Δίνεται $e = 1.6\times10^{-19}\text{C}$.

Λύση

α) Η αντίσταση του αγωγού δίνεται ως

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow \rho = \frac{RA}{l} \qquad (1)$$

Επειδή η διατομή A του αγωγού είναι τετραγωνική, ισχύει

$$A = a^2 \qquad (2)$$

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$\rho = \frac{Ra^2}{l} \Rightarrow \rho = \frac{0.064\Omega\times(2.00\times10^{-3}\text{m})^2}{12.0\text{m}} = \frac{0.246\Omega\times10^{-6}\text{m}^2}{12.0\text{m}} \Rightarrow \rho = 2.13\times10^{-8}\Omega\text{m}$$

β) Το ολικό ρεύμα του αγωγού είναι

$$I = JA \qquad (3)$$

Όμως ισχύει για τα ωμικά υλικά

$$J = \sigma E \qquad (4)$$

Η αγωγιμότητα όμως σ του αγωγού, είναι το αντίστροφο της ειδικής αντίστασης ρ, και έτσι ισχύει

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \qquad (5)$$

Οι εξισώσεις. 4 και 5 στην 3 δίνουν

$$I = \frac{E}{\rho}A \Rightarrow E = \frac{I\rho}{A} \Rightarrow E = \frac{225\text{A} \times 2.13\times10^{-8}\,\Omega\text{m}}{(2.00\times10^{-3}\,\text{m})^2} \Rightarrow E = 2.00\ \text{Vm}^{-1}$$

γ) Το ρεύμα δίνεται ως

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (6)$$

όπου dQ είναι το φορτίο που περνά από την διατομή A του αγωγού στη μονάδα του χρόνου. Θεωρώντας έναν στοιχειώδη όγκο του αγωγού $d\text{V}$, (βλ. σχ. 6.1), μπορούμε να γράψουμε

$$d\text{V} = Adx \qquad (7)$$

Ο όγκος $d\text{V}$ περιέχει Ν φορτία (ηλεκτρόνια), όπου $\text{N} = nd\text{V}$ **,** όπου n είναι η πυκνότητα των φορέων φορτίου (πυκνότητα ηλεκτρονίων), και επομένως το συνολικό φορτίο του όγκου $d\text{V}$ είναι

$$dQ = \text{N}e = ned\text{V}dx \qquad (8)$$

Οι εξισώσεις 7 και 8 στην 6 δίνουν

$$I = \frac{neAdx}{dt} \Rightarrow I = neA\upsilon_q \qquad (9)$$

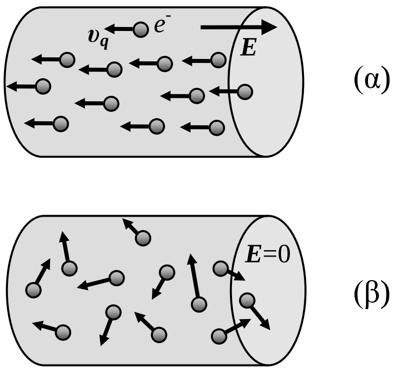
όπου $\upsilon_q = dx/dt$ είναι η ταχύτητα διολίσθησης των ηλεκτρονίων μέσα στον αγωγό. Τελικά η εξ. 9 μάς δίνει

$$\upsilon_q = \frac{I}{neA} \Rightarrow \upsilon_q = \frac{225\text{A}}{8.5\times10^{28} \times 1.6\times10^{-19}\,\text{C} \times (2.00\times10^{-3}\,\text{m})^2} \Rightarrow \upsilon_q = 4.13\times10^{-3}\,\text{m/s}$$

6.2 Μοντέλο αγωγιμότητας ελευθέρων ηλεκτρονίων

Paul Drude (1863-1906)
(https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Drude#/media/File:Paul_Drude.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

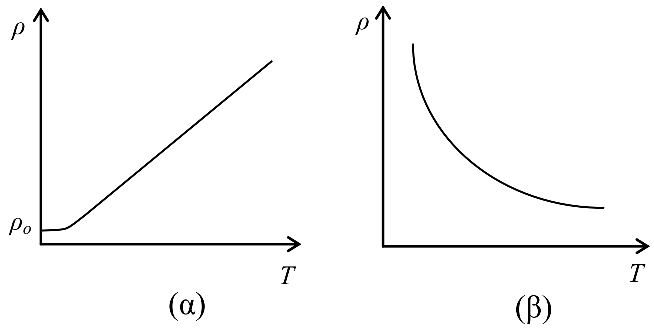
Σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο της ηλεκτρικής αγωγιμότητας (Ashcroft & Mermin, 1976), το οποίο προτάθηκε το 1900 από τον Γερμανό φυσικό Paul Drude (1863-1906), η αντίσταση ενός υλικού είναι ανάλογη της δυσκολίας που συναντούν τα ελέυθερα ηλεκτρόνια στην κίνησή τους, μέσα στο σώμα του υλικού. Γενικά, όπως αναφέραμε στο προηγούμενο εδάφιο, όταν στα άκρα ενός αγωγού εφαρμοσθεί κάποια διαφορά δυναμικού, αυτομάτως στο εσωτερικό του αγωγού δημιουργείται ηλεκτρικό πεδίο. Τότε τα ελεύθερα ηλεκτρόνια τα οποία αρχικώς κινούνται ατάκτως σε τυχαίες κατευθύνσεις εντός του αγωγού, θα κινηθούν τελικά προς την κατεύθυνση του άκρου με το υψηλότερο δυναμικό, κερδίζοντας ενέργεια από το πεδίο και αυξάνοντας την κινητική τους ενέργεια. Κατά την διάρκεια της κίνησής τους, τα ηλεκτρόνια «συγκρούονται» συνεχώς με τα άτομα του υλικού, τα οποία ταλαντώνονται γύρω από τη θέση τους μέσα στο υλικό, λόγω της θερμοκρασίας που έχει ο αγωγός. Οι συγκρούσεις των ηλεκτρονίων με τα ταλαντούμενα άτομα, παρεμποδίζει την κίνηση των πρώτων μέσα στον αγωγό, δημιουργώντας με άλλα λόγια μια αντίσταση στην κίνησή τους. Στις συνήθεις θερμοκρασίες, αυτές οι συγκρούσεις αποτελούν το κύριο αίτιο της αντίστασης στην κίνηση των φορτίων και συνεπώς της μείωσης της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος στους αγωγούς. Πιο συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα των «συγκρούσεων» μεταξύ ηλεκτρονίων και ατόμων, είναι η μεταφορά ενέργειας από τα ηλεκτρόνια στα άτομα, και η ταυτόχρονη μετατροπή μέρους της κινητικής ενέργειάς τους, σε άλλες μορφές ενέργειας, μεταξύ των οποίων και σε ταλαντωτική ενέργεια των ατόμων. Αυτή η μεταφορά ενέργειας από τα ηλεκτρόνια στα άτομα του υλικού, έχει ως συνέπεια την αύξηση της θερμοκρασίας του αγωγού. Όσες πιο πολλές «συγκρούσεις» συμβαίνουν μεταξύ ηλεκτρονίων και ατόμων, τόσο μειώνεται η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, και τόσο αυξάνεται η ταλαντωτική ενέργεια των ατόμων και επομένως η θερμοκρασία του αγωγού. Μικρότερη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων σημαίνει μικρότερη διέλευση ηλεκτρικού φορτίου στη μονάδα του χρόνου από μια περιοχή του αγωγού, και άρα μικρότερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος διαμέσου του αγωγού. Αντιθέτως, μεγαλύτερη ταλαντωτική ενέργεια των ατόμων του υλικού, σημαίνει μεγαλύτερη αντίσταση του αγωγού, μιας και η αντίσταση είναι ανάλογη του αριθμού των συγκρούσεων, και κατά συνέπεια ανάλογη της θερμοκρασίας του. Με άλλα λόγια δηλαδή, η αντίσταση του αγωγού αυξάνεται με την θερμοκρασία του. Συνεπώς λοιπόν, και η ειδική αντίσταση του υλικού μεταβάλλεται με την θερμοκρασία. Τελικά τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού, παρά τις συγκρούσεις τους με τα άτομά του, μπορεί να θεωρηθούν ότι κινούνται με μια μέση ταχύτητα προς την αντίθετη κατεύθυνση που έχει το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού, η οποία είναι γνωστή ως **ταχύτητα διολίσθησης $\boldsymbol{\upsilon_q}$**. Η κίνηση αυτή των ελευθέρων ηλεκτρονίων μέσα στον αγωγό με την ταχύτητα διολίσθησης, δείχνεται στο σχ.6.3α. Η παραπάνω περιγραφή κίνησης βεβαίως, αποτελεί μια απλοϊκή θεώρηση της κινήσεως των ελευθέρων ηλεκτρονίων, αφού στην πραγματικότητα κάθε ηλεκτρόνιο έχει την δική του ταχύτητα. Όταν στο εσωτερικό του αγωγού, δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, τότε η μέση ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι μηδέν, δηλ. δεν υπάρχει ηλεκτρικό ρεύμα. Αυτό συμβαίνει διότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται με τυχαίες ταχύτητες μέσα στον αγωγό, όπως δείχνει το σχ. 6.3β.



Σχήμα 6.3 *Η κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων στο εσωτερικό αγωγού, (α) για $E\neq0$ και μέση ταχύτητα υ_q, και (β) για $E=0$.*

6.3 Αντίσταση και θερμοκρασία

Όπως αναφέρθηκε στο εδάφιο 6.1, και εξηγήθηκε εν μέρει με το μοντέλο αγωγιμότητας στο εδάφιο 6.2, η ειδική αντίσταση ρ ενός υλικού, εξαρτάται από την θερμοκρασία του. Συγκεκριμένα, για τα περισσότερα ωμικά υλικά, δηλ. για τα αγώγιμα υλικά που ισχύει η εξ. 6.12, η ρ είναι ανάλογη της θερμοκρασίας. Για θερμοκρασίες κοντά στη θερμοκρασία δωματίου, η αναλογία αυτή είναι σχεδόν γραμμική, όπως φαίνεται στο σχ. 6.4α. Για πολύ χαμηλές θερμοκρασίες όμως, η αναλογία αυτή δεν ισχύει, και η ρ τείνει σε μια σταθερή τιμή ρ_o, η οποία σχετίζεται κυρίως με άτομα διαφόρων προσμίξεων που υπάρχουν σε κάθε υλικό. Εάν η μεταβολή της θερμοκρασίας αγώγιμων υλικών, όπως π.χ. τα μέταλλα, δεν είναι πολύ μεγάλη (μέχρι 100 ^oC), τότε η μεταβολή της ειδικής αντίστασης ως συνάρτηση της θερμοκρασίας, προσεγγίζεται από την σχέση



Σχήμα 6.4 *Η ειδική αντίσταση ρ συναρτήσει της θερμοκρασίας T, για α) αγωγούς και β) ημιαγωγούς.*

$$\rho(T) = \rho_o[1 + \alpha(T - T_o)] \tag{6.15}$$

όπου ρ_o είναι η ειδική αντίσταση σε μια ορισμένη θερμοκρασία αναφοράς T_o, ίση συνήθως με 0 ή 20 βαθμούς Κελσίου. Ο συντελεστής α ονομάζεται **θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης**, και εξαρτάται από το είδος του υλικού (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Στον πίνακα 6.2 παρουσιάζονται οι τιμές του θερμικού συντελεστή ειδικής αντίστασης α, ο οποίος μετράται σε $^oC^{-1}$. Προσέξτε την περίπτωση των ημιαγωγικών υλικών, για τα οποία ο συντελεστής α λαμβάνει αρνητικές τιμές, γεγονός που επιφέρει την μείωση της ειδικής αντίστασης με την αύξηση της

Πίνακας 6.2 *Προσεγγιστικές τιμές του θερμικού συντελεστή ειδικής αντίστασης διαφόρων υλικών κοντά στην θερμοκρασία περιβάλλοντος.*

Υλικό	**Θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης** α ($^{o}C^{-1}$)
Άργυρος	3.8×10^{-3}
Χαλκός	3.9×10^{-3}
Χρυσός	3.4×10^{-3}
Αλουμίνιο	4.4×10^{-3}
Βολφράμιο	4.5×10^{-3}
Σίδηρος	6.5×10^{-3}
Λευκόχρυσος	3.9×10^{-3}
Μόλυβδος	3.9×10^{-3}
Υδράργυρος	0.9×10^{-3}
Ορείχαλκος	2.0×10^{-3}
Κονσταντάνη	0.01×10^{-3}
Γραφίτης	-0.5×10^{-3}
Πυρίτιο (καθαρό)	-70×10^{-3}
Γερμάνιο (καθαρό)	-48×10^{-3}

θερμοκρασίας. Πράγματι, για μη ωμικά υλικά, όπως είναι για παράδειγμα οι ημιαγωγοί πυρίτιο και γερμάνιο, η ρ μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, γεγονός που αναπαριστάται γραφικά στο σχ. 6.4β. Αυτή η διαφορετική συμπεριφορά στην αγωγιμότητα των ημιαγωγών (αλλά και των μονωτών), δεν εξηγείται με το μοντέλο των ελευθέρων ηλεκτρονίων που περιγράψαμε στο εδάφιο 6.2. Χρειάζεται να θεωρήσουμε τους νόμους της κβαντικής Φυσικής και την θεωρία ζωνών για να ερμηνεύσουμε τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες. Κάτι τέτοιο δεν εμπίπτει στους στόχους του παρόντος συγγράμματος, γι’ αυτό και δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω. Γενικά όμως μπορούμε να αναφέρουμε ότι η αγωγιμότητα των ημιαγωγών, συχνά οφείλεται στην παρουσία ξένων ατόμων από προσμίξεις που υπάρχουν στο υλικό τους. Ένας άλλος παράγοντας, ο οποίος αυξάνει την αγωγιμότητά τους με την θερμοκρασία, είναι η δημιουργία κάποιων ελευθέρων ηλεκτρονίων κατά την θέρμανση του υλικού τους.

Παράδειγμα 6.4 Θερμόμετρο αντίστασης (θερμίστορ)

Η ιδιότητα των υλικών να μεταβάλλεται η αντίστασή τους με την θερμοκρασία, εφαρμόζεται στην κατασκευή θερμομέτρων αντίστασης, τα οποία είναι γνωστά ως θερμίστορ. Για παράδειγμα, ο λευκόχρυσος είναι ένα υλικό, το οποίο λόγω της αντοχής του στην διάβρωση και του υψηλού σημείου τήξης, χρησιμοποιείται στην κατασκευή τέτοιων θερμομέτρων. Έστω λοιπόν ότι η αντίσταση ενός θερμίστορ λευκόχρυσου στους 20 ^{o}C είναι 164.5 Ω. Το θερμόμετρο εισάγεται σε διάλυμα, του οποίου τη θερμοκρασία θέλουμε να μετρήσουμε, και τότε η αντίστασή του θερμομέτρου μετράται ίση με 195.6 Ω. Ποια είναι η θερμοκρασία του διαλύματος;

Λύση

Βάσει της εξίσωσης 6.14, η αντίσταση του θερμίστορ αλλά και κάθε υλικού, είναι ανάλογη της ειδικής αντίστασής του. Έτσι λόγω αυτής της αναλογίας, μπορούμε την εξίσωση εξ. 6.15 να την γράψουμε ως

$$R(T) = R_o[1+\alpha(T-T_o)] \qquad (1)$$

όπου α=3.9×10^{-3} $^{o}C^{-1}$ είναι ο θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης του λευκόχρυσου (βλ. πίνακα 6.1). Λύνοντας την εξ. 1 ως προς T, έχουμε

$$1+\alpha(T-T_o) = \frac{R(T)}{R_o} \Rightarrow \alpha(T-T_o) = \frac{R(T)}{R_o} - 1 \Rightarrow aT - aT_o = \frac{R(T)}{R_o} - 1 \Rightarrow aT - aT_o = \frac{R(T)-R_o}{R_o} \Rightarrow$$

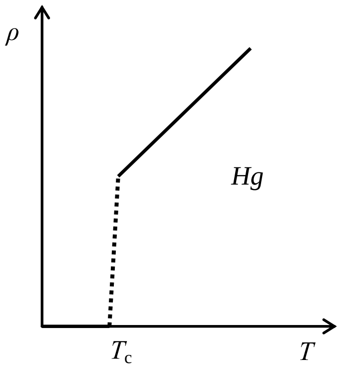
$$aT = \frac{R(T)-R_o}{R_o} + aT_o \Rightarrow T = \frac{R(T)-R_o}{aR_o} + T_o \Rightarrow T = \frac{195.6\Omega - 164.5\Omega}{3.9\times10^{-3}\ {}^{o}C^{-1}\times164.5\Omega} + 20^{o}C \Rightarrow T = 68.4^{o}C$$

Η θερμοκρασία λοιπόν του διαλύματος, την οποία μετρά το θερμίστορ, είναι 68.4 ^{o}C. Τα θερμίστορ έχουν την δυνατότητα να μετρούν πολύ χαμηλές αλλά και πολύ υψηλές θερμοκρασίες.

6.4 Υπεραγωγιμότητα

Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926) (*https://en.wikipedia.org/wiki/Heike_Kamerlingh_Onnes#/media/File:Kamerlingh_Onnes_signed.jpg*). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

Υπάρχουν υλικά, για τα οποία κάτω από μια θερμοκρασία, η οποία καλείται **κρίσιμη θερμοκρασία**, T_c , η αντίσταση σχεδόν μηδενίζεται. Τα υλικά αυτά ονομάζονται **υπεραγωγοί**, και είναι συνήθως μέταλλα ή σύνθετα υλικά, αποτελούμενα από διάφορα στοιχεία σε συγκεκριμένες στοιχειομετρικές αναλογίες. Το φαινόμενο της μηδενικής αντίστασης ονομάζεται **υπεραγωγιμότητα**, και έχει ως αποτέλεσμα την διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος διαμέσου των υπεραγωγών, ακόμη και με απουσία ηλεκτρικού πεδίου στην ύλη τους (Ashcroft & Mermin, 1976), (Kittel, 1979), (Alonso & Finn, 1992), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Η υπεραγωγιμότητα ανακαλύφθηκε το 1911 από τον Ολλανδό φυσικό Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926), καθώς εμελετούσε τις ηλεκτρικές ιδιότητες του υδραργύρου. Γι' αυτήν την ανακάλυψη, ο Onnes τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ στη Φυσική, το 1913. Ο υδράργυρος μετατρέπεται σε υπεραγωγό σε θερμοκρασία μικρότερη των T_c=4.2 K. Η ειδική αντίσταση ρ του υδραργύρου (Hg) ως συνάρτηση της θερμοκρασίας, φαίνεται στο σχ. 6.5.



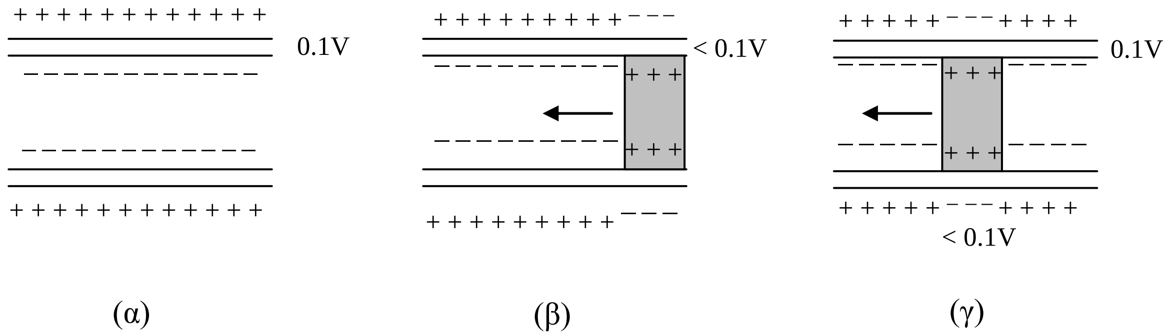
Σχήμα 6.5 *Η ειδική αντίσταση του υδραργύρου ως συνάρτηση της θερμοκρασίας.*

Είναι αυτονόητο ότι, η υπεραγωγιμότητα μπορεί να δώσει πηγές ανεξάντλητης ηλεκτρικής ενέργειας, αλλά μόνο σε χαμηλές θερμοκρασίες. Αυτό το γεγονός, προς το παρόν περιορίζει τις τεράστιας σημασίας τεχνολογικές εφαρμογές της υπεραγωγιμότητας. Ως εκ τούτου, τις τελευταίες δεκαετίες γίνεται τεράστια ερευνητική προσπάθεια για την κατασκευή υλικών, με όσο το δυνατόν υψηλότερη κρίσιμη θερμοκρασία T_c. Μέχρι σήμερα, μεταξύ των μεγαλυτέρων κρισίμων θερμοκρασιών T_c που έχουν επιτευχθεί, είναι περίπου 125 K για οξείδια κραμάτων θαλείου, βαρίου, χαλκού και ασβεστίου. Επίσης το σύνθετο οξείδιο $HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$, παρουσιάζει T_c=135 K, ενώ για κάποια εύθραυστα υλικά έχουν επιτευχθεί κρίσιμες θερμοκρασίες ακόμη και κοντά στους 160 K. Εντούτοις, δυστυχώς είμαστε ακόμη αρκετά μακριά από την δημιουργία υπεραγωγών θερμοκρασίας δωματίου, όπου θα μας έδιναν την δυνατότητα κατανάλωσης άπλετης και φθηνής ενέργειας στην καθημερινή μας ζωή.

6.5 Ρεύματα στους έμβιους οργανισμούς*

Οι ηλεκτρικές διαφορές δυναμικού και ρευμάτων παίζουν ζωτικό ρόλο στα νευρικά συστήματα των εμβίων οργανισμών. Συγκεκριμένα, οι νευρικοί παλμοί στα σώματα των οργανισμών, διαδίδονται με ηλεκτρικές διαδικασίες, όπως είναι οι ηλεκτρικοί παλμοί. Ένας νευρικός ιστός περιλαμβάνει μια πολωμένη κυτταρική μεμβράνη ανάμεσα σε δυο αγώγιμα υγρά, τα οποία ονομάζονται ηλεκτρολύτες. Τα δυο υγρά ευρίσκονται σε μια διαφορά δυναμικού ίση περίπου με 0.1 V. Όταν υπάρξει μια εξωτερική διέγερση στον νευρικό ιστό, η μεμβράνη γίνεται λεπτότερη, με αποτέλεσμα να είναι πιο διαπερατή για τα ιόντα των ηλεκτρολυτών, και επομένως η τοπική διαφορά δυναμικού να μειώνεται. Αυτή η πτώση τάσης διαδίδεται κατά μήκος του νευρικού ιστού ως ηλεκτρικός παλμός. Ο νευρικός ιστός παίρνει την αρχική διαφορά δυναμικού, όταν ο ηλεκτρικός παλμός τον διαπεράσει πλήρως. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το σχ. 6.6 απεικονίζει την μετάδοση ενός νευρικού παλμού διαμέσου ενός νευρικού ιστού. Η μεγάλη ευαισθησία του ανθρωπίνου σώματος σε ηλεκτρικά ρεύματα, οφείλεται στην ηλεκτρική φύση της μετάδοσης νευρικών παλμών. Ρεύμα έντασης 0.1 A, είναι ικανό να επιφέρει δυσλειτουργία ζωτικών οργάνων, όπως πχ η καρδιά, με κίνδυνο τελικά να επέλθει ο θάνατος. Η αντίσταση του ανθρωπίνου σώματος μπορεί να ποικίλει αρκετά από 500 kΩ για ξηρό δέρμα, έως 1000 Ω για υγρό. Εάν για παράδειγμα, η αντίσταση του σώματος είναι 1000 Ω, για ένα ρεύμα έντασης 0.1 A απαιτείται διαφορά δυναμικού 100 V. Εάν ρεύμα αυτής της έντασης διελεύσει μέσω του ανθρωπίνου σώματος για μεγάλο σχετικά χρονικό διάστημα, είναι δυνατόν να επέλθει ο θάνατος λόγω ηλεκτροπληξίας. Όμως ακόμη και μικρότερα ρεύματα της τάξης 0.01 A, είναι δυνατόν να προκαλέσουν ισχυρές συσπάσεις στα χέρια ή στα πόδια, αν διελεύσουν μέσα από αυτά. Ρεύματα παρόμοιας έντασης διαμέσου του στήθους, είναι δυνατόν να προκαλέσουν κοιλιακή

μαρμαρυγή, μια άτακτη σύσπαση των καρδιακών μυών, με αποτέλεσμα την ελάττωση παροχής του αίματος στα διάφορα μέρη του σώματος. Κατά περίεργο τρόπο, ρεύματα πολύ μεγαλύτερης έντασης δεν επιφέρουν μαρμαρυγή, αλλά σταμάτημα της καρδιάς, με μεγάλη πιθανότητα να ξαναρχίσει η λειτουργία της όταν απομακρυνθεί το ρεύμα (ηλεκτροσόκ). Παρά την επικινδυνότητά του, το ηλεκτρικό ρεύμα έχει και ευεργετικές επιπτώσεις στον ανθρώπινο οργανισμό. Συγκεκριμένα, τα εναλλασσόμενα ρεύματα μεγάλης συχνότητας (της τάξεως 10^6 Hz), μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέσω διαθερμιών για την θεραπεία παθήσεων όπως η αρθρίτιδα, η ιγμορίτιδα κ.α. Τέτοιου είδους ρεύματα, χρησιμοποιούνται επίσης και για την τοπική καταστροφή όγκων ή την κοπή ιστών σε χειρουργικές επεμβάσεις. Επιπλέον, πολύ διαδεδομένα είναι στην ιατρική τα ηλεκτροκαρδιογραφήματα και τα εγκεφαλογραφήματα, όπου με την χρήση καταλλήλων



Σχήμα 6.6 *α) Η κυτταρική μεμβράνη γύρω από ένα νευρικό ιστό με μια διαφορά δυναμικού 0.1V. β) Μια εξωτερική διέγερση μπορεί να αποπολώσει τοπικά την κυτταρική μεμβράνη, ελαττώνοντας αυτή τη διαφορά δυναμικού (V<0.1). γ) Η νέα διαφορά δυναμικού παράγει έναν ηλεκτρικό παλμό που διαδίδεται κατά μήκος του ιστού, ενώ στο αρχικό σημείο της διέγερσης επανέρχεται η αρχική διαφορά δυναμικού.*

ηλεκτροδίων, μελετώνται οι διαφορές δυναμικού στην καρδιά και τον εγκέφαλο αντιστοίχως. Με τον τρόπο αυτό, μπορούν να διαγνωσθούν δυσλειτουργίες αυτών των οργάνων, όπως είναι τα καρδιακά προβλήματα, η επιληψία, η ύπαρξη εγκεφαλικών όγκων και άλλων ανωμαλιών. Πάνω απ' όλα όμως πρέπει να γνωρίζουμε, ότι το ηλεκτρικό ρεύμα μπορεί να προκαλέσει τον θάνατο ακόμα και με μικρές ηλεκτρικές τάσεις, γι' αυτό θα πρέπει να χειριζόμαστε με προσοχή όλες τις ηλεκτρικές συσκευές.

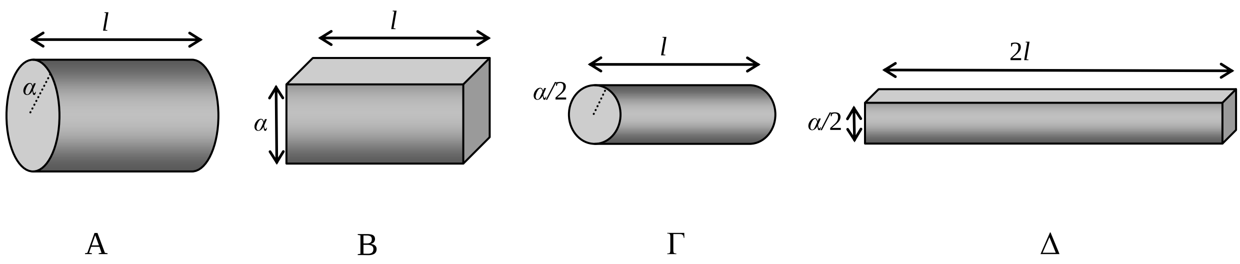
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε6.1* Διαφορά δυναμικού εφαρμόζεται στα άκρα δύο αγώγιμων συρμάτων, με το ένα σύρμα να έχει διπλάσιο μήκος από το άλλο. Τα σύρματα έχουν ίδιο σχήμα, διατομή και είναι από το ίδιο υλικό. Ποια είναι η σχέση των ρευμάτων που διαρρέουν τα δυο σύρματα; Η ειδική αντίσταση του κάθε σύρματος διαφέρει από το άλλο;

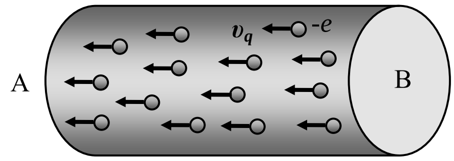
Ε6.2 Είναι δυνατόν ένας αγωγός από χαλκό να έχει την ίδια αντίσταση με έναν αγωγό από σίδηρο, στην περίπτωση που οι αγωγοί είναι ίδιου μεγέθους και σχήματος; Εξηγείστε.

Ε6.3* Ταξινομείστε τους αγωγούς από χαλκό του σχήματος 6.7, με αύξουσα σειρά ως προς την αντίσταση που παρουσιάζουν μεταξύ των ακρότατων πλευρών τους.



Σχήμα 6.7 *Ερώτηση 6.3.*

Ε6.4* Στο σχ. 6.8 φαίνεται μέρος αγωγού να διαρρέεται από κινούμενα ελεύθερα ηλεκτρόνια, μεταξύ των άκρων Α και Β. Ποιο άκρο του αγωγού έχει μεγαλύτερο ηλεκτρικό δυναμικό; Ποια είναι η κατεύθυνση του ρεύματος I, του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ στον αγωγό, και της πυκνότητας ρεύματος $\boldsymbol{J}$;



Σχήμα 6.8 *Ερώτηση 6.3.*

Ε6.5* Στους υποσταθμούς της ΔΕΗ υπάρχουν πινακίδες που προειδοποιούν: «Προσοχή! Κίνδυνος Θάνατος! Υψηλή Τάση!». Γιατί αναφέρουν την τάση και όχι το ρεύμα;

Ε6.6* Ένα σύρμα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα 50 Α, και στα άκρα του έχει τάση 30 V. Ένα άλλο σύρμα διαρρέεται από ρεύμα 0.05 Α και έχει τάση 300 V. Ποιο σύρμα μπορεί να σας προκαλέσει ηλεκτροπληξία, και γι' αυτό δεν πρέπει σε καμιά περίπτωση να το αγγίξετε;

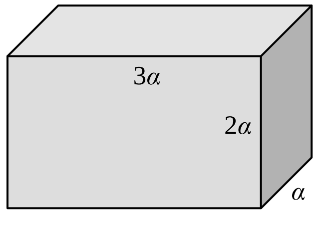
Ε6.7 Έως τώρα θεωρούσαμε ότι στο εσωτερικό ενός αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι πάντα μηδέν (βλ. κεφάλαιο 3). Στο παρόν κεφάλαιο είδαμε ότι τα ελεύθερα ηλεκτρόνια κινούνται υπό την επίδραση ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο δημιουργείται στο εσωτερικό του αγωγού. Γιατί συμβαίνει αυτό;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π6.1 Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων σε ένα σύρμα που απέχουν 8.00 m είναι 7.20 V, όταν η πυκνότητα ρεύματος είναι 3.40×10^7A/m^2. Ποια είναι α) η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στο σύρμα και β) η ειδική αντίσταση του υλικού από το οποίο είναι κατασκευασμένο το σύρμα. *Απάντηση*: α) 0.9 V/m και β) 2.64×10^{-8} Ωm.

Π6.2 Το φορτίο (σε coulomb) που διέρχεται από μια επιφάνεια εμβαδού 2.00 cm^2 μεταβάλλεται με τον χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $q=4t^3+5t+6$, όπου t σε δευτερόλεπτα. Να ευρεθεί α) η ένταση, και β) η πυκνότητα του ρεύματος τη χρονική στιγμή t=1 s. Απάντηση: α) 17 A ,και β) 8.5×10^4 A/m^2.

Π6.3 Ένας κυλινδρικός αγωγός μήκους L και διατομής A ευρίσκεται με διαφορά δυναμικού ΔV μεταξύ των άκρων του. Ξεκινώντας από τη σχέση $J=\sigma E$, όπου E το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού, J η πυκνότητα ρεύματος, και σ η αγωγιμότητα του αγωγού, υπολογίστε την αντίσταση του αγωγού R ως συνάρτηση της ειδικής αντίστασης ρ και των παραπάνω γεωμετρικών του στοιχείων.



Σχήμα 6.9 *Πρόβλημα 6.4.*

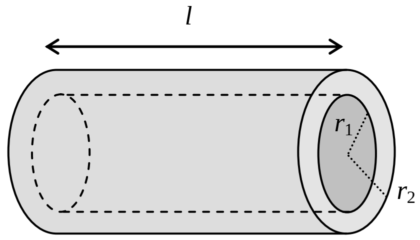
Π6.4 Έστω ένας αγωγός σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και διαστάσεων α, 2α και 3α αντιστοίχως, όπως φαίνεται στο σχ. 6.9. Να ευρεθεί μεταξύ ποιών πλευρών είναι η μέγιστη και η ελάχιστη αντίσταση του παραλληλεπιπέδου, και ποιος είναι ο λόγος των αντιστάσεων αυτών;

Π6.5 Θεωρείστε έναν κυλινδρικό αγωγό μήκους L, ακτίνας r, αντίστασης R, και πυκνότητας ελευθέρων ηλεκτρονίων n. Ο αγωγός διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I λόγω διαφοράς δυναμικού V στα άκρα του. α) Υπολογίστε την ταχύτητα ολίσθησης των ελευθέρων ηλεκτρονίων συναρτήσει των I, r, και n. β) Πώς θα μεταβληθεί η ταχύτητα ολίσθησης, εάν διπλασιασθεί το μήκος του αγωγού; γ) Διπλασιαστεί η ακτίνα του; δ) Διπλασιασθεί η τάση V;

Π6.6 Πόσος χρόνος χρειάζεται για να μεταφερθούν τα ηλεκτρόνια από την μπαταρία ενός αυτοκινήτου στη μίζα; Υποθέστε ότι το ρεύμα είναι 110 A, και ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται μέσα από ένα χάλκινο σύρμα διατομής 30 mm^2, και μήκους 90 cm. Δίνονται η πυκνότητα των ελευθέρων ηλεκτρονίων του χαλκού $n=8.49\times10^{28}$, και το φορτίο του ηλεκτρονίου $e=1.6\times10^{-19}$ C. Γιατί η μίζα ενεργοποιείται αμέσως; *Απάντηση*: 55.6 min.

Π6.7 Ένας φοιτητής συνδέει τα άκρα ενός χάλκινου καλωδίου σε τροφοδοτικό σταθερής τάσης 15 V, και με αμπερόμετρο ακριβείας μετρά το ρεύμα που διαρρέει το καλώδιο, ίσο με 0.5835 A. Η μέτρηση γίνεται νωρίς το πρωί, όπου η θερμοκρασία του δωματίου είναι 20 ^{o}C. Το μεσημέρι ο φοιτητής ξαναμετρά το ρεύμα του ίδιου καλωδίου και παρατηρεί μικρότερη ένδειξη του αμπερομέτρου, ίση με 0.5517 A. Ποια είναι η θερμοκρασία του δωματίου το μεσημέρι; *Απάντηση*: 34.9 ^{o}C.

Π6.8 Ένας κοίλος κυλινδρικός αντιστάτης με εσωτερική ακτίνα r_1 και εξωτερική r_2, αποτελείται από υλικό ειδικής αντίστασης ρ, όπως δείχνει το σχ. 6.10. Εάν το μήκος του αντιστάτη είναι l, να ευρεθεί η αντίστασή του, α) κατά μήκος των δυο άκρων του, και β) μεταξύ των δυο παραπλεύρων επιφανειών του, εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας αντίστοιχα. *Υπόδειξη*: Για το (β) ερώτημα θεωρείστε ότι ο αντιστάτης αποτελείται από διαδοχικούς κυλινδρικούς φλοιούς, ακτίνας r και πάχους dr ο καθένας. *Απάντηση*: α) $R=\rho\dfrac{l}{\pi(r_2^2-r_1^2)}$ και β) $R=\dfrac{\rho}{2\pi l}\ln(\dfrac{r_2}{r_1})$.



Σχήμα 6.10 *Πρόβλημα 6.8.*

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Ashcroft, N. W., & Mermin, N. D. (1976). *Φυσική στερεάς κατάστασης*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2012 Εκδόσεις Γ. Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-77-9.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Kittel, Ch. (1979). Εισαγωγή στη φυσική στερεάς καταστάσεως. 5η Έκδοση, Copyright © 1979, Εκδόσεις Γ.. Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΥ.

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D. & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 7

ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Σύνοψη

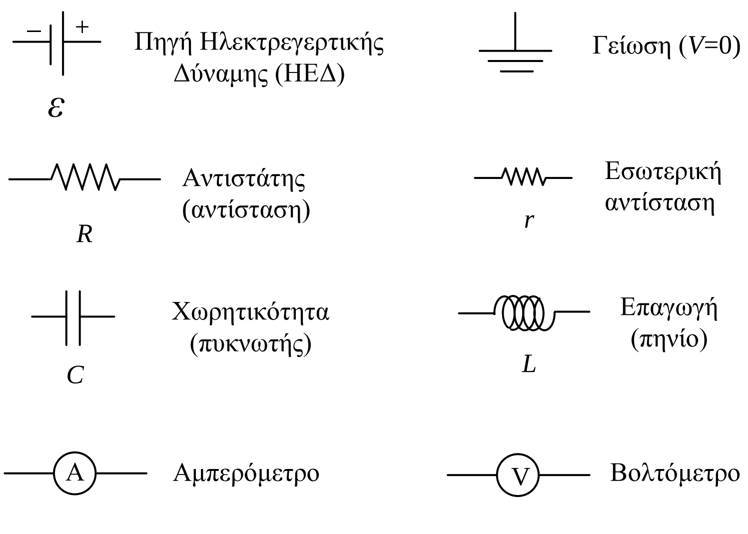
Στο έβδομο τούτο κεφάλαιο μελετώνται και αναλύονται τα ηλεκτρικά κυκλώματα συνεχούς ρεύματος με το νόμο του Ohm και τους κανόνες του Kirchhoff. Επίσης εξετάζεται η σύνδεση ωμικών αντιστάσεων σε σειρά και παράλληλα, και μελετάται το κύκλωμα αντίστασης-πυκνωτή RC κατά την φόρτιση και την εκφόρτιση του πυκνωτή.

Προαπαιτούμενη γνώση

Κανόνες παραγώγισης και ολοκληρώσεως.

7.1 Βασικές έννοιες των ηλεκτρικών κυκλωμάτων

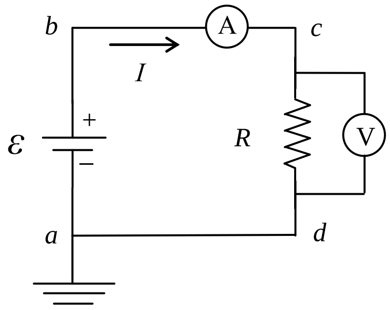
Κάθε αγώγιμος βρόχος, ή αλλιώς μια κλειστή αγώγιμη διαδρομή που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, ονομάζεται **ηλεκτρικό κύκλωμα** (Alonso & Finn, 1992), (Young & Freedman, 2010). Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα μπορεί να αποτελείται από περισσότερους του ενός βρόχου, και να περιέχει διάφορα ηλεκτρικά στοιχεία, όπου κάθε στοιχείο συμβολίζεται με ειδικό σύμβολο, όπως φαίνεται στο σχ. 7.1. Η «καρδιά» ενός ηλεκτρικού κυκλώματος είναι το στοιχείο, ή αλλιώς η πηγή που παράγει την ηλεκτρική ενέργεια, δημιουργώντας διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού (τάση) μεταξύ δύο πόλων, οι οποίοι ονομάζονται **ακροδέκτες** της πηγής. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πόλων της πηγής δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του κυκλώματος, ικανό να κινήσει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια παράγοντας **συνεχές ρεύμα**, δηλ. ρεύμα σταθερής κατεύθυνσης. Οι πηγές ηλεκτρικής ενέργειας ονομάζονται και **πηγές ηλεκτρεγερτικής δύναμης** (ΗΕΔ), και οι πιο συνήθεις από αυτές είναι τα **ηλεκτρικά στοιχεία** ή αλλιώς **μπαταρίες**, οι **ηλεκτρικές γεννήτριες**, το δίκτυο της ΔΕΗ κ.ά. Η ΗΕΔ είναι στην πραγματικότητα η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πόλων της πηγής ηλεκτρικής ενέργειας και παριστάνει το έργο ανά μονάδα φορτίου που μπορεί να παράγει η πηγή (Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010). Οι πηγές ΗΕΔ συμβολίζονται με δυο κάθετες παράλληλες και άνισου μήκους γραμμές, με το συν και πλην δυναμικό να παριστάνονται με την επιμήκη και την βραχεία γραμμή αντιστοίχως (βλ. σχ. 7.1). Έτσι δεικνύεται η πολικότητα της πηγής, η οποία εκφράζει την διαφορά δυναμικού μεταξύ των πόλων (ακροδεκτών), και επομένως καθορίζεται η κατεύθυνση του ρεύματος. Κατά σύμβαση, η φορά του ρεύματος ορίζεται από το υψηλό προς το χαμηλό δυναμικό, δηλαδή χαρακτηρίζει την κίνηση των θετικών φορτίων στο υλικό του ηλεκτρικού κυκλώματος. Η αντίσταση είναι το στοιχείο του κυκλώματος που καταναλώνει ενέργεια, μετατρέποντάς την σε εσωτερική ενέργεια (θερμική ενέργεια)[20]. Αντιθέτως ο πυκνωτής αποθηκεύει ηλεκτρική ενέργεια στους οπλισμούς του, την οποία αργότερα μπορεί να την αποδώσει ως



Σχήμα 7.1 *Συμβολισμός στοιχείων ηλεκτρικού κυκλώματος.*

[20] Συχνά αναφέρεται ότι η αντίσταση καταναλώνει ηλεκτρική ενέργεια μετατρέποντάς την σε θερμότητα. Αυτό είναι λάθος, αφού καμιά θερμότητα δεν παράγεται στην αντίσταση. Αυτό που συμβαίνει στην πραγματικότητα, είναι ότι η κατανάλωση της ηλεκτρικής ενέργειας αυξάνει την θερμοκρασία της αντίστασης, με συνέπεια να αυξάνεται η εσωτερική της ενέργεια ή αλλιώς η θερμική ενέργεια.

ωφέλιμο έργο κατά την εκφόρτισή του. Το αμπερόμετρο και το βολτόμετρο είναι δυο όργανα με τα οποία, (όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο) μετρούμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος και τη διαφορά δυναμικού αντιστοίχως. Συμβολίζονται καταλλήλως σύμφωνα με τις μονάδες μέτρησης των αντιστοίχων ποσοτήτων (A και V) που μετρούν (βλ. σχ. 7.1). Το αμπερόμετρο συνδέεται πάντα σε σειρά στα ηλεκτρικά κυκλώματα, ενώ το βολτόμετρο πάντα παράλληλα όπως δείχνει το σχ. 7.2. Το ιδανικό αμπερόμετρο πρέπει να έχει μηδαμινή ωμική αντίσταση, ενώ το ιδανικό βολτόμετρο άπειρη αντίσταση. Η γείωση είναι κάθε σημείο του κυκλώματος που έχει δυναμικό ίδιο με αυτό της γης δηλαδή μηδέν *(V*=0*)*. Δύο άλλα στοιχεία που συναντώνται σε ηλεκτρικά κυκλώματα είναι ο πυκνωτής και ο επαγωγέας (επαγωγή) ή αλλιώς πηνίο. Ο πυκνωτής συμβολίζεται (όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5), με δυο κάθετες παράλληλες ισομήκεις γραμμές, ενώ το πηνίο αναπαριστάται με ένα ελατήριο (βλ. σχ.7.1).



Σχήμα 7.2 *Ηλεκτρικό κύκλωμα abcd, με ΗΕΔ $\mathcal{E}$, αντίσταση R και γείωση.*

Ας ιδούμε όμως πώς λειτουργεί ένα απλό ηλεκτρικό κύκλωμα, όπως αυτό του σχήματος 7.2. Η πηγή ΗΕΔ, $\mathcal{E}$, είναι ένα στοιχείο ηλεκτρικής ενέργειας, (πχ μια μπαταρία) με θετικό και αρνητικό πόλο. Ο θετικός πόλος αντιστοιχεί στο υψηλό ηλεκτρικό δυναμικό, ενώ ο αρνητικός πόλος στο χαμηλό. Η μπαταρία προσφέρει στα σημεία *b* και *a* υψηλό και χαμηλό δυναμικό αντιστοίχως. Αυτό έχει ως συνέπεια τη δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου στον αγωγό, και επομένως την κίνηση των φορέων θετικού φορτίου προς το *a* και των φορέων του αρνητικού (ηλεκτρονίων) προς το *b*. Εντούτοις για να υπάρχει συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα, πρέπει τα φορτία μέσα στην μπαταρία να κινούνται από τον αρνητικό πόλο στον θετικό, ώστε να μην διακόπτεται η ροή των φορτίων. Το αίτιο που προκαλεί αυτή την κίνηση είναι η ΗΕΔ, $\mathcal{E}=V_{ab}=V$. Με άλλα λόγια, η ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) της πηγής δεν είναι κάποια δύναμη, αλλά όπως προαναφέραμε είναι η ηλεκτρική τάση που δίνει η πηγή στο κύκλωμα. Το ρεύμα του κυκλώματος βάσει του νόμου του Ohm είναι

$$I=\frac{V_{ab}}{R} \qquad (7.1)$$

Στην πραγματικότητα κάθε πηγή ΗΕΔ παρουσιάζει ωμική αντίσταση, η οποία είναι γνωστή ως **εσωτερική αντίσταση** *r* της πηγής (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Ο λόγος ύπαρξης της *r* είναι ότι, καθώς τα ηλεκτρικά φορτία κινούνται στο εσωτερικό της πηγής $\mathcal{E}$, συναντούν κάποια αντίσταση. Αυτό έχει ως συνέπεια να συμβαίνει μια πτώση τάσης, δηλαδή μια ελάττωση δυναμικού μέσα στην ίδια την πηγή, η οποία είναι ίση με το γινόμενο *Ir*. Έτσι όταν μια πηγή $\mathcal{E}$ συνδέεται σε ένα κύκλωμα, όπως για παράδειγμα αυτό του σχήματος 7.2, η πραγματική τάση (διαφορά δυναμικού) που προσφέρει στο κύκλωμα είναι

$$V_{ab}=\mathcal{E}-Ir \qquad (7.2)$$

Η πραγματική τάση που δίνει μια πηγή ΗΕΔ σ’ ένα ηλεκτρικό κύκλωμα καλείται **τάση πόλωσης** της πηγής, και είναι πάντα μικρότερη της ονομαστικής $\mathcal{E}$. Συνήθως η εσωτερική αντίσταση των πηγών ΗΕΔ είναι μικρή, οπότε και η τάση πόλωσης συμπίπτει με την ΗΕΔ της πηγής. Εσωτερική αντίσταση έχουν και τα αμπερόμετρα, καθώς επίσης και τα βολτόμετρα.

Ας εξετάσουμε όμως πιο λεπτομερειακά την κίνηση των φορτίων στο κύκλωμα του σχήματος 7.2. Κατά την κίνηση μιας ποσότητας φορτίου Δ*Q* διαμέσου της μπαταρίας από τον αρνητικό στον θετικό πόλο, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του φορτίου Δ*Q* αυξάνεται κατά Δ*Q.V,* ενώ η χημική ενέργεια της μπαταρίας (όταν πρόκειται για ξηρό στοιχείο με αλκαλικά διαλύματα) μειώνεται κατά την ίδια ποσότητα. Εάν αντί για μπαταρία έχουμε μια ηλεκτρογεννήτρια, η ενέργεια που κινεί το Δ*Q* στο εσωτερικό της πηγής από τον αρνητικό στο θετικό πόλο, είναι η μηχανική ενέργεια. Αντιστοίχως, όταν η πηγή ΗΕΔ είναι μια θερμική στήλη, η ενέργεια που κινεί τα φορτία στο ηλεκτρικό κύκλωμα είναι θερμική, ενώ όταν είναι ένα ηλιακό στοιχείο (ηλιακά κύτταρα), η ενέργεια είναι φωτεινή. Καθώς στην συνέχεια το φορτίο Δ*Q* διέρχεται διαμέσου της αντίστασης *R*, χάνει μέρος της ενέργειάς του καθώς συγκρούεται με τα άτομα της αντίστασης, αυξάνοντας την θερμική της ενέργεια. Δηλαδή με την διέλευσή του μέσα από την αντίσταση, η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια *U* του φορτίου Δ*Q*, μειώνεται από U_c σε U_d. Αυτή η ελάττωση της δυναμικής ενέργειας αντιστοιχεί σε ελάττωση του ηλεκτρικού δυναμικού στα άκρα της αντίστασης, που είναι ίση με την διαφορά V_d-V_c , η οποία είναι αρνητική και ονομάζεται **πτώση τάσης** στα άκρα της αντίστασης (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Σε κάθε αντίσταση που διαρρέεται από ρεύμα, συμβαίνει πτώση τάση στα άκρα της. Όταν το φορτίο ΔQ περάσει την αντίσταση R, θα ευρεθεί στο σημείο d, το οποίο έχει το ίδιο δυναμικό με αυτό του σημείου a δηλ. μηδέν, διότι μεταξύ των δυο σημείων δεν παρεμβάλλεται κάποια αντίσταση για να προκαλέσει νέα πτώση τάσης. Για να είμαστε πιο ακριβείς, πτώση τάσης υπάρχει και μεταξύ των σημείων d και a, διότι κάθε αγωγός με μήκος έχει την δική του ωμική αντίσταση, μιας και ισχύει η εξ. 6.14. Απλώς, επειδή συνήθως αυτή η πτώση τάσης είναι μικρή, την αγνοούμε.

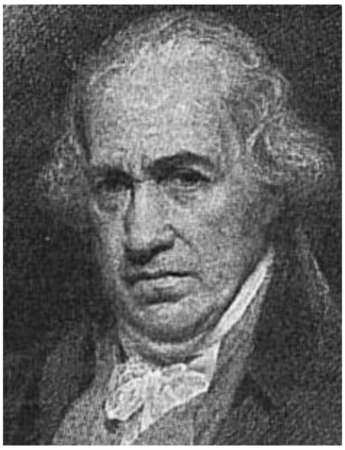
7.2 Ηλεκτρική ισχύς κυκλώματος

Ο ρυθμός με τον οποίο το φορτίο χάνει δυναμική ενέργεια καθώς διέρχεται από έναν αντιστάτη με αντίσταση R είναι

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}=\frac{\Delta Q}{\Delta t}V \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta t}=IV \qquad (7.3)$$

Ο ρυθμός απώλειας της δυναμικής ενέργειας του φορτίου διαμέσου της αντίστασης ονομάζεται **θερμική** ή **ηλεκτρική ισχύς** P του ηλεκτρικού κυκλώματος, και είναι ίση με την ενέργεια που καταναλώνεται στον αντιστάτη (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010). Άρα για την ισχύ P που καταναλώνει μία ωμική αντίσταση, ισχύει

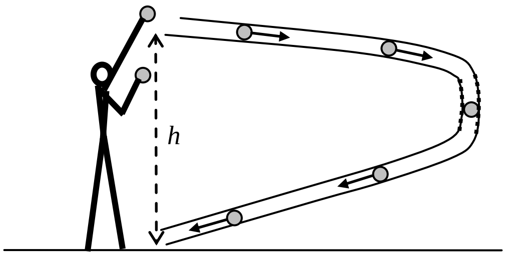
$$P=VI \overset{(6.10)}{\Rightarrow} P=I^2R=\frac{V^2}{R} \qquad (7.4)$$



James Watt (1736-1819) (https://commons.wikimedia.org/wiki/James_Watt#/media/File:James_Watt.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

Μονάδα ηλεκτρικής ισχύος στο ΔΣΜ είναι το 1 Watt (Βατ), προς τιμή του Σκοτσέζου εφευρέτη και μηχανικού James Watt (1736-1819), ο οποίος ανακάλυψε την ατμομηχανή.

Ένα μηχανικό ανάλογο του ηλεκτρικού κυκλώματος που περιγράψαμε παραπάνω, φαίνεται στο σχ. 7.3. Θεωρείστε έναν άνθρωπο να σηκώνει από το έδαφος μικρές σφαίρες και να τις αφήνει να κινηθούν από ένα ύψος h πάλι κάτω στο έδαφος μέσω ενός σωλήνα. Ο άνθρωπος συνεχώς σηκώνει και αφήνει τις σφαίρες, οι οποίες κυλούν λόγω της βαρύτητας προς τα κάτω, μέχρι να φθάσουν στο έδαφος και να αποκτήσουν μηδενική δυναμική ενέργεια. Δηλαδή, ο άνθρωπος σηκώνοντας τις σφαίρες, τους προσφέρει μηχανική δυναμική ενέργεια mgh, όπως ακριβώς η πηγή ΗΕΔ δίνει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια στα φορτία ενός ηλεκτρικού κυκλώματος. Όσο πιο γρήγορα ανεβάζει τις σφαίρες ο άνθρωπος σε ύψος h (μεγάλη ισχύς, δηλ. μεγάλη παραγωγή έργου ανά μονάδα χρόνου), τόσο πιο πολλές μπάλες διατρέχουν τον σωλήνα στη μονάδα του χρόνου (μεγαλύτερή ροή ή ρεύμα σφαιρών). Ο άνθρωπος δηλαδή παίζει το ρόλο της πηγής ηλεκτρεγερτικής δύναμης, που όσο πιο δυνατή είναι (μεγάλη τάση - πολλά Volts), τόσο περισσότερα φορτία κινεί ανά μονάδα χρόνου στο ηλεκτρικό κύκλωμα, και κατά συνέπεια τόσο πιο μεγάλο ηλεκτρικό ρεύμα δίνει. Όταν ο άνθρωπος κουραστεί και δεν μπορεί πια να ανυψώσει άλλο τις σφαίρες, τότε διακόπτεται η κίνηση των σφαιρών, όπως ομοίως σταματά το ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα όταν η πηγή ΗΕΔ εξαντληθεί (πχ. άδεια μπαταρία). Η αντιστοιχία δηλαδή που υπάρχει μεταξύ του σχήματος 7.3 και του 7.2, είναι άνθρωπος-ΗΕΔ πηγής, σφαίρες-φορτία, και σωλήνας-βρόχος κυκλώματος. Το μικρό κάθετο τμήμα του σωλήνα στο σχ. 7.3, παρουσιάζει τριβή που δυσχεραίνει την κίνηση των σφαιρών μέσα στο σωλήνα, όπως ακριβώς και ο αντιστάτης δυσχεραίνει την κίνηση των φορτίων σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα.



Σχήμα 7.3 *Μηχανικό ανάλογο ενός ηλεκτρικού κυκλώματος (βλ. κείμενο).*

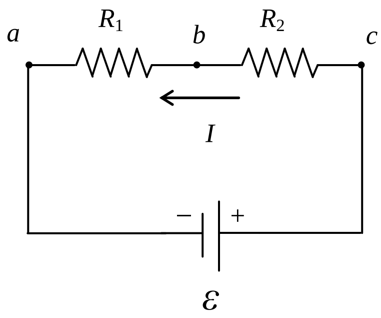
7.3 Σύνδεση αντιστάσεων σε κύκλωμα

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα μπορεί να περιέχει περισσότερες από μία αντιστάσεις. Οι αντιστάσεις συνδέονται μεταξύ τους, μέσω των άκρων τους. Οι κύριοι τρόποι συνδέσεως είναι δύο: α) σε σειρά, όπου κάθε αντίσταση έπεται της άλλης, και β) παράλληλα, όπου η κάθε αντίσταση είναι συνδεμένη παράλληλα των υπολοίπων. Σε κάθε περίπτωση, το κύκλωμα παρουσιάζει μια συνολική ωμική αντίσταση, η οποία ονομάζεται και **ισοδύναμη αντίσταση**, και ισούται με μία ωμική αντίσταση η οποία μπορεί να αντικαταστήσει το σύνολο των αντιστάσεων του κυκλώματος, χωρίς να αλλάζει την λειτουργία του (Benumof, 1961), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Θα εξετάσουμε τους δυο διαφορετικούς τρόπους σύνδεσης αντιστάσεων ευθύς αμέσως, χρησιμοποιώντας σε κάθε περίπτωση, προς χάριν απλότητος, δύο μόνο αντιστάσεις.

7.3.1 Αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά

Όταν δυο αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι συνδεδεμένες σε σειρά, τότε διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, διότι κάθε φορτίο που διαρρέει την R_1 θα διέλθει και μέσα από την R_2. Στο σχ. 7.4, δυο αντιστάσεις σε σειρά φαίνονται να τροφοδοτούνται από πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$, και να διαρρέονται από ρεύμα I. Η πτώση τάσης από το b στο a είναι IR_1, ενώ από το c στο b είναι IR_2 . Η ολική πτώση τάσης από το σημείο c στο a είναι

$$V_{ac} = V_{ab} + V_{bc} = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \Rightarrow \mathcal{E} = IR_{ολ} \qquad (7.5)$$



Σχήμα 7.4 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με δύο αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά.*

Από την εξ. 7.5, καταλαβαίνουμε ότι η ολική αντίσταση του κυκλώματος, είναι το άθροισμα των δυο αντιστάσεων. Δηλαδή ισχύει

$$R_{ολ} = R_1 + R_2 \qquad (7.6)$$

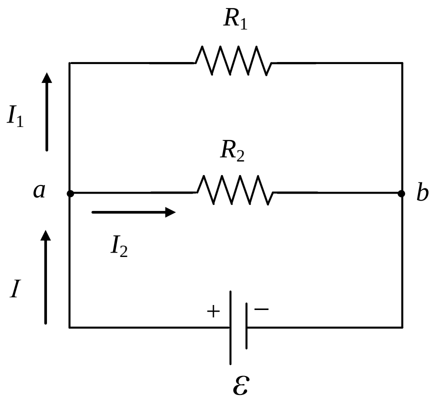
Με όμοιο τρόπο μπορούμε γενικεύσουμε την εξ. 7.6, και να συμπεράνουμε ότι για Ν αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά, η ολική αντίσταση είναι

$$R_{ολ} = R_1 + R_2 + ... + R_N \qquad (7.7)$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα, ότι η ολική ή η ισοδύναμη αντίσταση ενός κυκλώματος με Ν αντιστάσεις συνδεδεμένες σε σειρά, είναι ίση με το άθροισμα των ωμικών αντιστάσεων.

7.3.2 Αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα

Όταν δυο αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα η μια ως προς την άλλη, όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος 7.5, τότε οι αντιστάσεις έχουν στα άκρα τους την ίδια διαφορά δυναμικού $\mathcal{E} = V_{ab} = V$. Αντίθετα με το τι συμβαίνει για τις εν σειρά συνδεδεμένες αντιστάσεις, το ρεύμα που διαρρέει τις δυο αντιστάσεις δεν είναι το ίδιο. Το ρεύμα I που δημιουργεί η ΗΕΔ $\mathcal{E}$, διαχωρίζεται σε δυο επιμέρους ρεύματα I_1 και I_2, τα οποία διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1 και R_2 αντίστοιχα. Ισχύει δηλ.



Σχήμα 7.5 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα.*

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (7.8)$$

Όμως από τον νόμο του Ohm ισχύει

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} \qquad (7.9)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 7.8 μέσω της 7.9, παίρνουμε

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad (7.10)$$

Βάσει της εξ. 7.10 μπορούμε να γράψουμε για Ν αντιστάσεις σε παράλληλη σύνδεση

$$\frac{1}{R_{ολ}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+...+\frac{1}{R_N} \qquad (7.11)$$

Παρατηρούμε ότι η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ για Ν αντιστάσεις σε παράλληλη σύνδεση, είναι μικρότερη από την κάθε επιμέρους αντίσταση. Μπορούμε ποιοτικά να καταλάβουμε το γεγονός ότι συνδέοντας τις αντιστάσεις σε σειρά, καταλήγουμε σε συνολική μεγαλύτερη αντίσταση από το εάν τις συνδέσουμε παράλληλα. Πιο συγκεκριμένα, βάσει της εξίσωσης $R=\rho l/A$, όταν συνδέουμε τις αντιστάσεις σε σειρά, αυξάνουμε το μήκος l και επομένως την συνολική αντίσταση R. Αντιθέτως όταν συνδέουμε τις αντιστάσεις παράλληλα, δίνουμε στο ρεύμα περισσότερες διόδους διέλευσης (βλ. διαχωρισμό του ρεύματος I στο σχ. 7.5), το οποίο ισοδυναμεί με αύξηση της διατομής A ενός αγωγού, και επομένως καταλήγουμε σε μικρότερη συνολική αντίσταση R.

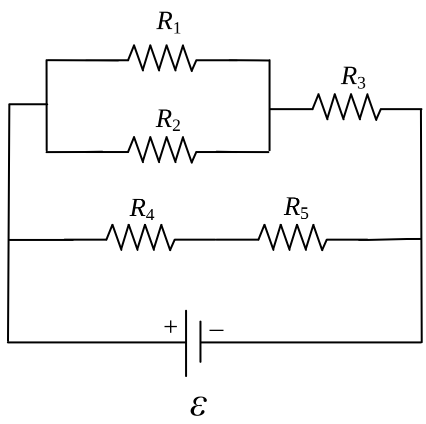
Παράδειγμα 7.1 Ισοδύναμη αντίσταση ηλεκτρικού κυκλώματος

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από πέντε αντιστάτες R_1=6 Ω, R_2=12 Ω, R_3=4 Ω, R_4=3 Ω και R_5=5 Ω, όπως φαίνεται στο σχ. 7.6, οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι με μπαταρία $\mathcal{E}$ =12 V. Να εύρετε α) την ισοδύναμη ή αλλιώς ολική αντίσταση του κυκλώματος, και β) την πτώση τάσης στα άκρα του αντιστάτη R_5.

Λύση

Στο κύκλωμα υπάρχουν κάποιοι αντιστάτες συνδεδεμένοι σε σειρά, αλλά και κάποιοι άλλοι συνδεδεμένοι παράλληλα. Η συνολική αντίσταση R_{45} είναι σε παράλληλη σύνδεση με την συνολική αντίσταση R_{123}. Έτσι μπορούμε να γράψουμε για την $R_{ολ}$ του κυκλώματος

$$\frac{1}{R_{ολ}}=\frac{1}{R_{123}}+\frac{1}{R_{45}} \qquad (1)$$



Σχήμα 7.6 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με αντιστάτες και πηγή (παράδειγμα 7.1).*

Η R_{45} αποτελείται από τις αντιστάσεις R_4 και R_5 συνδεδεμένες σε σειρά, και επομένως ισχύει

$$R_{45}=R_4+R_5 \qquad (2)$$

Η R_{123} αποτελείται από τις αντιστάσεις R_3 και R_{12} συνδεδεμένες σε σειρά. Άρα

$$R_{123}=R_3+R_{12} \qquad (3)$$

Όμως ισχύει

$$\frac{1}{R_{12}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Rightarrow R_{12}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} \qquad (4)$$

Οι εξισώσεις 2,3 και 4 στην 1, δίνουν

$$\frac{1}{R_{ολ}}=\frac{1}{R_3+\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}}+\frac{1}{R_4+R_5}=\frac{1}{4\Omega+\dfrac{6\Omega\times 12\Omega}{6\Omega+12\Omega}}+\frac{1}{3\Omega+5\Omega}=\frac{1}{4\Omega+\dfrac{72\Omega^2}{18\Omega}}+\frac{1}{8\Omega}=$$

$$\frac{1}{4\Omega+4\Omega}+\frac{1}{8\Omega}=\frac{1}{8\Omega}+\frac{1}{8\Omega}=\frac{2}{8\Omega}\Rightarrow R_{ολ}=4\Omega$$

Η πτώση τάσης στα άκρα του αντιστάτη R_5 είναι

$$V_5=IR_5 \qquad (5)$$

Το ρεύμα I που διαρρέει την R_5 είναι το ίδιο με αυτό που διαρρέει την R_4. Το ρεύμα αυτό είναι το ίδιο το οποίο διαρρέει την συνολική αντίσταση R_{45}, και επειδή υπόκειται σε τάση 12 V, έχουμε

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R_{45}}=\frac{12\text{V}}{8\Omega}\Rightarrow I=1.5\text{A}$$

Τελικά η εξ. 5 δίνει για την πτώση τάσης στα άκρα της αντίστασης R_5

$$V_5 = 1.5\text{A} \times 5\Omega \Rightarrow V_5 = 7.5\text{V}$$

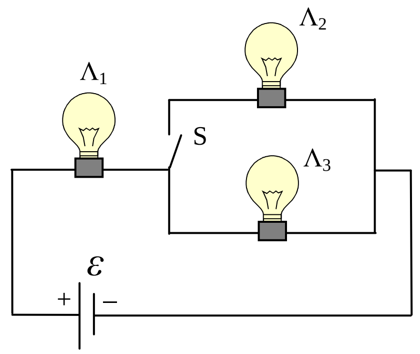
Παράδειγμα 7.2 Φωτεινότητα λαμπτήρων σε κύκλωμα

Τρεις όμοιοι λαμπτήρες αντίστασης R=2 Ω ο καθένας, συνδέονται σε ηλεκτρικό κύκλωμα με πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$=9 V, όπως δείχνει το σχ. 7.7. Αρχικά ο διακόπτης S είναι ανοικτός. Πώς μεταβάλλεται η φωτεινότητα του κάθε λαμπτήρα όταν ο διακόπτης «κλείσει»; Υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το ρεύμα του κάθε λαμπτήρα.

Λύση

Όταν ο διακόπτης S είναι ανοικτός, στο κύκλωμα συμμετέχουν μόνο οι λαμπτήρες Λ_1 και Λ_3. Επειδή αυτοί οι λαμπτήρες είναι σε σειρά συνδεδεμένοι, διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα I, το οποίο από το νόμο του Ohm δίνεται ως

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_3} = \frac{\mathcal{E}}{2R} \Rightarrow I = \frac{9\text{V}}{4\Omega} \Rightarrow I = 2.25\text{A}$$



Σχήμα 7.7 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με τρεις όμοιους λαμπτήρες (παράδειγμα 7.2).*

Εφόσον οι λαμπτήρες Λ_1 και Λ_3 διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα των 2.25 A, η φωτεινότητά τους είναι ίδια. Ο λαμπτήρας Λ_2 φυσικά δεν φωτοβολεί, διότι δεν διαρρέεται από ρεύμα.

Όταν ο διακόπτης S «κλείσει», τότε το ρεύμα I_1 που διαρρέει τον λαμπτήρα Λ_1 θα διαχωριστεί σε δύο επιμέρους ίσα ρεύματα I_2 και I_3 , τα οποία θα διαρρέουν τους λαμπτήρες Λ_2 και Λ_3 , οι οποίοι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους. Για τα ρεύματα ισχύει

$$I_1 = I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = 2I_2 \qquad (1)$$

διότι εφόσον οι λαμπτήρες Λ_2 και Λ_3 έχουν την ίδια αντίσταση, ισχύει ότι

$$I_2 = I_3 \qquad (2)$$

Εφόσον ο λαμπτήρας Λ_1 διαρρέεται από διπλάσιο ρεύμα από αυτό των Λ_2 και Λ_3 , θα είναι πιο φωτεινός από αυτούς. Οι λαμπτήρες Λ_2 και Λ_3 θα έχουν την ίδια φωτεινότητα, αλλά πιο μικρή από αυτή του Λ_1. Ας υπολογίσουμε τώρα το ρεύμα που διαρρέει τον κάθε λαμπτήρα όταν ο διακόπτης S είναι κλειστός. Σ' αυτήν την περίπτωση και οι τρεις λαμπτήρες συμμετέχουν στο κύκλωμα, και επομένως η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος R_t είναι

$$R_\text{t} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R + \frac{R^2}{2R} = R + \frac{R}{2} = \frac{2R + R}{2} = \frac{3R}{2} = \frac{3 \times 2\Omega}{2} \Rightarrow R_\text{t} = 3\Omega$$

Έτσι από τον νόμο του Ohm παίρνουμε το συνολικό ρεύμα I_t που διαρρέει το κύκλωμα, και ταυτόχρονα τον λαμπτήρα Λ_1 , το οποίο είναι

$$I_\text{t} = \frac{\mathcal{E}}{R_\text{t}} = I_1 = \frac{9\text{V}}{3\Omega} \Rightarrow I_1 = 3\text{A}$$

Παρατηρούμε ότι ο λαμπτήρας Λ_1 γίνεται πιο φωτεινός όταν «κλείσει» ο διακόπτης S, διότι το ρεύμα που τον διαρρέει 3 A, είναι μεγαλύτερο από το ρεύμα που τον διέρρεε αρχικά, δηλ. τα 2.25 A. Από τις εξισώσεις 1 και 2 παίρνουμε τα ρεύματα των λαμπτήρων Λ_2 και Λ_3, που είναι

$$I_2 = I_3 = \frac{I_1}{2} = \frac{3\text{A}}{2} \Rightarrow I_2 = I_3 = 1.50\text{A}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι ο λαμπτήρας Λ_3 όταν «κλείσει» ο διακόπτης S, φωτοβολεί λιγότερο από πριν, διότι διαρρέεται από μικρότερο ρεύμα (1.50 A < 2.25 A). Αντιθέτως, ο λαμπτήρας Λ_2 από σβηστός που ήταν, όταν «κλείσει» ο διακόπτης, φωτοβολεί.

Παράδειγμα 7.3 Ισχύς ηλεκτρικού κυκλώματος

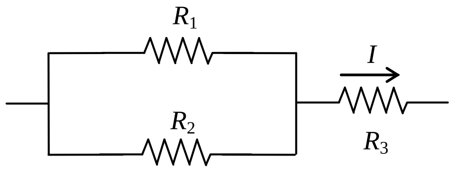
Ο καθένας από τους τρεις αντιστάτες R_1, R_2 και R_3 στο σχ. 7.8, έχει την ίδια R και μπορεί να καταναλώνει μέγιστη ισχύ 24 W χωρίς να υπερθερμαίνεται. Πόση είναι η μέγιστη ισχύς που καταναλώνει το κύκλωμα;

Λύση

Η μέγιστη ισχύς P_t που καταναλώνει το κύκλωμα είναι

$$P_t = I^2 R_t \qquad (1)$$

όπου R_t είναι η ολική αντίσταση του κυκλώματος, και I είναι η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Όμως η ένταση I είναι η μέγιστη ένταση ρεύματος που διαρρέει και τον αντιστάτη R_3, δι είναι σε σειρά συνδεδεμένος με την συνολική αντίσταση των άλλων δύο αντιστατών R_1 και R_2. Επομένως η μέγιστη ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης R_3 είναι



Σχήμα 7.8 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα και σε σειρά (παράδειγμα 7.3).*

$$P = I^2 R_3 \qquad (2)$$

Εφόσον γνωρίζουμε την μέγιστη ισχύ που καταναλώνει ο κάθε αντίστατης, μπορούμε από την εξ. 2 να ευρούμε την μέγιστη ένταση ρεύματος του αντιστάτη R_3, αλλά και του κυκλώματος. Επομένως

$$I = \sqrt{\frac{P}{R_3}} \qquad (3)$$

Η ολική αντίσταση του κυκλώματος R_t είναι

$$R_t = R_{12} + R_3 \Rightarrow \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 \qquad (4)$$

διότι οι R_1 και R_2 αντιστάτες είναι παράλληλα συνδεδεμένοι μεταξύ τους, και η συνολική τους αντίσταση R_{12} είναι συνδεδεμένη σε σειρά με τον αντιστάτη R_3. Όλοι όμως οι αντιστάτες είναι ίδιοι με αντίσταση R ο καθένας, και επομένως η εξ. 4 δίνει

$$R_t = \frac{R.R}{R+R} + R = \frac{R^2}{2R} + \frac{R^2}{R} = \frac{3R^2}{2R} \Rightarrow R_t = \frac{3}{2}R \qquad (5)$$

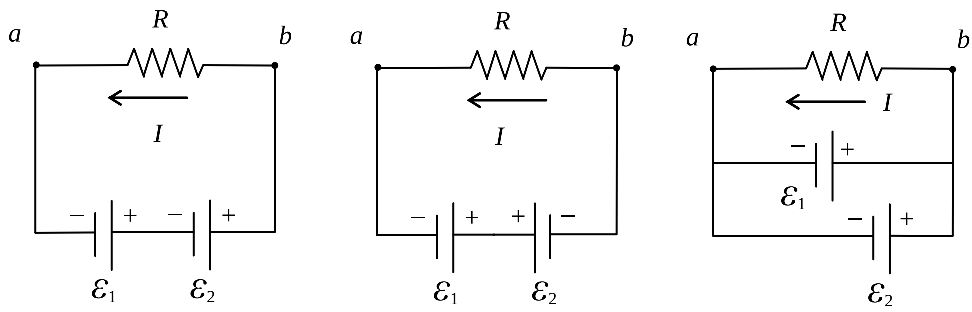
Οι εξ. 5 και 3 στην 1 δίνουν τελικά

$$P_t = \left(\sqrt{\frac{P}{R}}\right)^2 \frac{3}{2}R = \frac{3}{2}P \Rightarrow P_t = \frac{3}{2}24\text{W} \Rightarrow P_t = 36\text{W}$$

7.4 Σύνδεση πηγών ΗΕΔ σε κύκλωμα

Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα ενδέχεται να υπάρχουν περισσότερες της μιας πηγής ΗΕΔ. Αναλόγως την λειτουργία του κυκλώματος, οι πηγές μπορούν να συνδέονται μεταξύ τους, είτε σε σειρά, είτε παράλληλα, όπως δείχνει το σχ. 7.9 (Sears, 1951), (Giancoli, 2012).

Όταν οι πηγές ΗΕΔ συνδέονται σε σειρά και με ορθή πόλωση, δηλ. ο θετικός ακροδέκτης της μιας συνδέεται με τον αρνητικό ακροδέκτη της άλλης (βλ. σχ. 7.9α), τότε η συνολική τάση στα άκρα a και b της αντίστασης R, είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων των πηγών, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Αντιθέτως, εάν η σύνδεση σε σειρά είναι με αντίθετη πόλωση, δηλ. ο θετικός ακροδέκτης της μιας συνδέεται με τον θετικό ακροδέκτη της άλλης (βλ. σχ. 7.9β), τότε η συνολική τάση στα άκρα της αντίστασης είναι ίση με την διαφορά των επιμέρους τάσεων των πηγών, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$. Εάν η $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$, τότε η φορά του ρεύματος στην αντίσταση είναι αυτή του σχήματος 7.9β, διότι το δυναμικό στο σημείο b είναι υψηλότερο αυτού στο σημείο a. Αντιθέτως εάν $\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2$, τότε η φορά του ρεύματος I είναι αντίθετη αυτής του σχήματος 7.9β, διότι το δυναμικό στο σημείο *b* είναι χαμηλότερο αυτού στο σημείο *a*. Με αντίθετη πόλωση συνδέονται οι φορτιστές μπαταριών με τις μπαταρίες που χρειάζονται φόρτιση. Επίσης αντίθετη πόλωση χρησιμοποιούμε, όταν



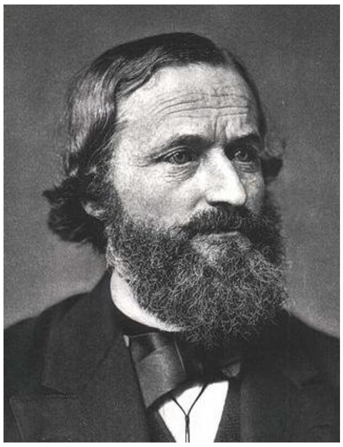
(α) (β) (γ)

Σχήμα 7.9 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με δύο πηγές ΗΕΔ συνδεδεμένες (α) σε σειρά με ορθή πόλωση, (β) σε σειρά με αντίθετη πόλωση, και (γ) παράλληλα με ίδια πόλωση.*

φορτίζουμε την άδεια μπαταρία ενός αυτοκινήτου, από την γεμάτη μπαταρία ενός άλλου. Συνδέουμε δηλαδή τον θετικό πόλο της άδειας μπαταρίας με τον θετικό πόλο της γεμάτης μπαταρίας, και επίσης συνδέουμε τους αρνητικούς πόλους μεταξύ τους. Όταν οι πηγές είναι παράλληλα συνδεδεμένες μεταξύ τους (βλ. σχ. 7.9γ), όσο μικρότερες είναι οι αντίστοιχες εσωτερικές αντιστάσεις τους, τόσο η τάση στα άκρα της αντίστασης προσεγγίζει τον μέσο όρο των $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$. Παράλληλες συνδέσεις πηγών ΗΕΔ χρησιμοποιούνται στις ηλεκτρικές διατάξεις, όπου απαιτείται παροχή σταθερού ρεύματος για μεγάλη χρονική διάρκεια. Στην παράλληλη σύνδεση, κάθε πηγή συνεισφέρει ένα μικρό μέρος της συνολικής ενέργειας, με αποτέλεσμα η διάρκεια λειτουργίας της (όπως και των υπολοίπων πηγών) να επιμηκύνεται (Giancoli, 2012).

7.5 Κανόνες του Kirchhoff

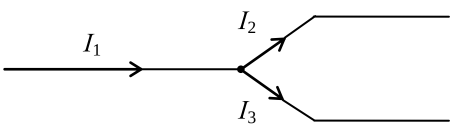
Για την μελέτη των ηλεκτρικών κυκλωμάτων χρησιμοποιούμε δυο πολύ χρήσιμους κανόνες, οι οποίοι είναι γνωστοί ως **κανόνες του Kirchhoff** (Sears, 1951), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Kraus, 1993), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Knight, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Οι κανόνες εισήχθησαν από τον Γερμανό φυσικό Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), ο οποίος μελέτησε τα ηλεκτρικά κυκλώματα. Για να περιγράψουμε τους κανόνες του Kirchhoff (Κίρκοφ) πρέπει να ορίσουμε δύο έννοιες των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, τους ηλεκτρικούς κόμβους και τους ηλεκτρικούς βρόχους. Έτσι **ηλεκτρικός κόμβος** ενός κυκλώματος είναι οποιοδήποτε σημείο του κυκλώματος, στο οποίο το ηλεκτρικό ρεύμα ή γενικότερα τα ρεύματα διακλαδίζονται ή συνενώνονται. Επίσης όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, **ηλεκτρικός βρόχος** ονομάζεται κάθε κλειστή αγώγιμη διαδρομή σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Ακολουθεί η περιγραφή των κανόνων Kirchhoff.



Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) (*https://en.wikipedia.org/wiki/Gustav_Kirchhoff#/media/File:Gustav_Robert_Kirchhoff.jpg*). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

Πρώτος κανόνας του Kirchhoff ή **κανόνας των κόμβων**: Το άθροισμα των ρευμάτων που συρρέουν προς ένα κόμβο, ισούται με το άθροισμα των ρευμάτων που απομακρύνονται από αυτόν, δηλ.

$$\sum_{\mathrm{i}} I_{\mathrm{i}} = 0 \tag{7.12}$$



Σχήμα 7.10 *Κόμβος ηλεκτρικού κυκλώματος διαρρεόμενος από ρεύμα $I_1=I_2+I_3$.*

Ο κανόνας των κόμβων είναι αποτέλεσμα του νόμου διατήρησης του φορτίου. Δηλαδή, όση ποσότητα φορτίου καταφθάνει σε έναν κόμβο, τόση ποσότητα πρέπει και να απομακρύνεται. Οι εντάσεις των ρευμάτων που εισέρχονται στον κόμβο θεωρούνται θετικές, και αυτές των ρευμάτων που απομακρύνονται από τον κόμβο αρνητικές. Παράδειγμα ηλεκτρικού κόμβου φαίνεται στο σχ. 7.10, όπου καταφθάνει ρεύμα I_1 και απομακρύνονται τα ρεύματα I_2 και I_3. Σύμφωνα με τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff, ισχύει $I_1 = I_2 + I_3$.

Δεύτερος κανόνας του Kirchhoff ή **κανόνας των βρόχων**: Το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού όλων των στοιχείων κατά μήκος οποιουδήποτε κλειστού βρόχου, είναι μηδέν. Ισχύει δηλ.

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \qquad (7.13)$$

Ο κανόνας των βρόχων στηρίζεται στην διατήρηση της ενέργειας, και στο γεγονός ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι ένα διατηρητικό πεδίο (βλ. κεφάλαιο 4). Δηλαδή ένα φορτίο καταλήγει στο δυναμικό του σημείου από το οποίο ξεκινά, διότι την ενέργεια που κερδίζει στην πηγή ΗΕΔ, την χάνει όταν διαπερνά τις αντιστάσεις. Για την εφαρμογή του νόμου των βρόχων εφαρμόζουμε για τα πρόσημα των διαφορών ηλεκτρικού δυναμικού, ή αλλιώς τάσεων κατά μήκος του βρόχου, τις εξής συμβάσεις:

1) Όταν διατρέχουμε μια αντίσταση R κατά την διεύθυνση του ρεύματος I, τότε η μεταβολή του δυναμικού είναι $-IR$, ενώ όταν την διατρέχουμε αντίθετα είναι IR, (θυμηθείτε ότι κατά μήκος της αντίστασης που διαρρέεται από ρεύμα, συμβαίνει πτώση τάσης, $\Delta V<0$).
2) Όταν διατρέχουμε μια πηγή ΗΕΔ κατά την κατεύθυνση από τον αρνητικό (–) στον θετικό (+) πόλο, τότε η τάση της θεωρείται θετική, ενώ στην αντίθετη περίπτωση αρνητική.

Σκοπός μας με την εφαρμογή των κανόνων του Kirchhoff είναι να γράψουμε τόσες εξισώσεις, όσοι και οι άγνωστοι του προβλήματος. Σημειώστε ότι για να εφαρμόσουμε τον κανόνα των βρόχων, θα πρέπει να θεωρήσουμε την φορά του ρεύματος που διαρρέει την κάθε αντίσταση του βρόχου. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτό είναι εύκολο, αφού μπορούμε να σημειώσουμε την σωστή φορά από την πολικότητα της πηγής ΗΕΔ που υπάρχει στον υπό μελέτη βρόχο. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, μπορούμε να ορίσουμε την φορά τυχαίως, αρκεί να μην παραβιάζεται σε κάποιον κόμβο ο πρώτος κανόνας του Kirchhoff.[21] Εάν η τιμή του ρεύματος σε έναν αντιστάτη ευρεθεί μετά από υπολογισμούς αρνητική, αυτό σημαίνει ότι η φορά που αρχικώς διαλέξαμε είναι αντίθετη της πραγματικής. Χαρακτηριστικά είναι τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 7.4 Κανόνες του Kirchhoff

Υπολογίστε τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 του κυκλώματος του σχήματος 7.11, αν $\mathcal{E}_1$=10 V, $\mathcal{E}_2$=14 V, R_1=6 Ω, R_2=4 Ω και R_3=2 Ω.

Λύση

Οι άγνωστοι είναι τρεις, δηλ. τα τρία ρεύματα. Γι' αυτό χρειαζόμαστε τουλάχιστον τρεις εξισώσεις για τον υπολογισμό τους. Ο κανόνας των κόμβων δίνει για τον κόμβο d

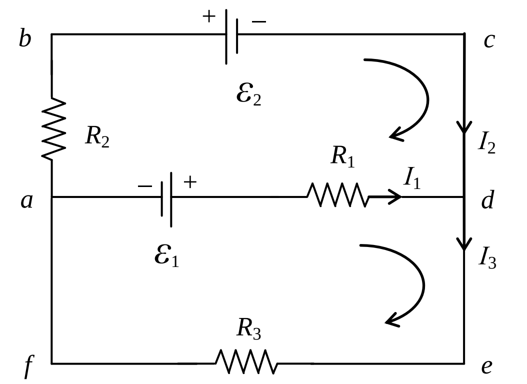
$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα των βρόχων στον βρόχο $bcdab$ παίρνουμε

$$-\mathcal{E}_2 + I_1R_1 - \mathcal{E}_1 - I_2R_2 = 0 \qquad (2)$$

Ο ίδιος κανόνας για τον βρόγχο $adefa$ δίνει

$$\mathcal{E}_1 - I_1R_1 - I_3R_3 = 0 \qquad (3)$$



Σχήμα 7.11 *Ηλεκτρικό κύκλωμα τριών βρόγχων (παράδειγμα 7.4).*

Οι εξισώσεις 1, 2 και 3 αποτελούν σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3. Αντικατάσταση των τιμών στην εξ. 2 δίνει

$$-14\text{V} + 6\Omega\times I_1 - 10\text{V} - 4\Omega\times I_2 = 0 \Leftrightarrow 6I_1 - 4I_2 = 24 \Leftrightarrow 3I_1 - 2I_2 = 12 \qquad (4)$$

ενώ η εξ. 3 γίνεται

[21] Σε έναν κόμβο δεν είναι δυνατόν όλα τα ρεύματα να εισέρχονται σ' αυτόν, όπως είναι αδύνατον και να εξέρχονται όλα από αυτόν.

$$10\mathrm{V}-6\Omega\times I_1-2\Omega\times I_3=0\Leftrightarrow -6I_1-2I_3=-10\Leftrightarrow 6I_1+2I_3=10\Leftrightarrow 3I_1+I_3=5 \qquad (5)$$

Η εξ. 1 στην 5 δίνει

$$3I_1+I_1+I_2=5\Rightarrow 4I_1+I_2=5\Rightarrow I_2=5-4I_1 \qquad (6)$$

Η εξ. 6 στην 4 δίνει

$$3I_1-2\times(5-4I_1)=12\Leftrightarrow 3I_1-10+8I_1=12\Leftrightarrow 11I_1=12+10\Rightarrow I_1=\frac{22}{11}\mathrm{A}\Rightarrow I_1=2\mathrm{A}$$

Η εξ. 6 δίνει I_2= -3 A και η εξ. 1 δίνει, I_3= -1 A. Το αρνητικό πρόσημο των I_2 και I_3, δηλώνει ότι τα ρεύματα είναι αντιθέτων κατευθύνσεων αυτών που φαίνονται στο σχ. 7.11.

Παράδειγμα 7.5 Κανόνες του Kirchhoff

Έστω το κύκλωμα του σχήματος 7.12, όπου R_1=2 Ω, R_3=5 Ω, $\mathcal{E}_1$=20 V και $\mathcal{E}_3$=36 V. Τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1 και R_2 είναι αντίστοιχα, I_1=5 A και I_2=1 A. Υπολογίστε τα I_3, R_2 και $\mathcal{E}_2$. Οι πηγές ΗΕΔ έχουν αμελητέες εσωτερικές αντιστάσεις.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον κανόνα των κόμβων για τον κόμβο *α* και έχουμε

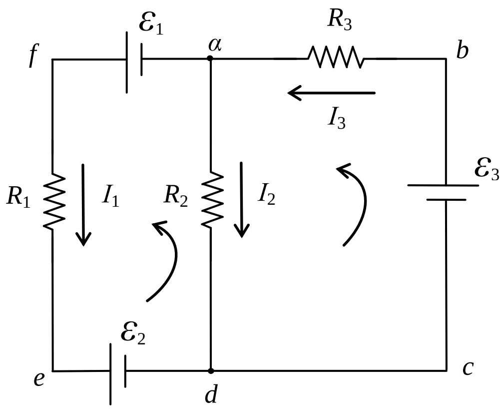
$$I_3-I_1-I_2=0\Rightarrow I_3=I_1+I_2=5\mathrm{A}+1\mathrm{A}\Rightarrow I_3=6\mathrm{A} \qquad (1)$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον κανόνα των βρόχων για τον βρόχο *adcba* και έχουμε

$$-I_2R_2+\mathcal{E}_3-I_3R_3=0\Rightarrow -1\mathrm{A}R_2+36\mathrm{V}-5\Omega I_3=0\Rightarrow$$
$$1\mathrm{A}\times R_2+5\Omega\times I_3-36\mathrm{V}=0\Rightarrow 1\mathrm{A}\times R_2+5\Omega\times I_3=36\mathrm{V} \qquad (2)$$

Η εξ. 1 στην 2 δίνει

$$5\Omega\times 6\mathrm{A}+1\mathrm{A}\times R_2=36\mathrm{V}\Rightarrow 30\mathrm{V}+1\mathrm{A}\times R_2=36\mathrm{V}\Rightarrow$$
$$1\mathrm{A}\times R_2=36\mathrm{V}-30\mathrm{V}=6\mathrm{V}\Rightarrow R_2=6\Omega$$



Σχήμα 7.12 *Ηλεκτρικό κύκλωμα τριών βρόχων (παράδειγμα 7.5).*

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στον βρόχο *afeda,* παίρνουμε

$$\mathcal{E}_1-I_1R_1-\mathcal{E}_2+I_2R_2=0\Rightarrow 20\mathrm{V}-5\mathrm{A}\times 2\Omega-\mathcal{E}_2+1\mathrm{A}\times 6\Omega=0\Rightarrow 20\mathrm{V}-10\mathrm{V}-\mathcal{E}_2+6\mathrm{V}=0\Rightarrow$$
$$16\mathrm{V}-\mathcal{E}_2=0\Rightarrow \mathcal{E}_2=16\mathrm{V}$$

7.6 Μέτρηση αντιστάσεων

Στον ηλεκτρισμό είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τις αντιστάσεις στα κυκλώματα με ακρίβεια, ώστε να επιτυγχάνεται η βέλτιστη λειτουργία τους. Αυτό απαιτεί ακριβείς τρόπους μέτρησης της αντίστασης ενός αντιστάτη. Υπάρχουν τρεις τρόποι μέτρησης αντιστάσεων, τους οποίους και αναφέρουμε συνοπτικά παρακάτω.

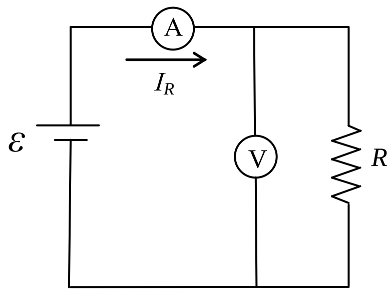
7.6.1. Μέτρηση αντίστασης με ωμόμετρο

Είναι ο πιο άμεσος τρόπος μέτρησης ωμικής αντίστασης. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το ωμόμετρο είναι ειδικό όργανο το οποίο μετρά απευθείας το μέγεθος της ωμικής αντίστασης σε Ω, με ενδείξεις μεταξύ του μηδενός και του απείρου. Το ωμόμετρο διαθέτει δύο ηλεκτρονικά κυκλώματα. Το ένα κύκλωμα προσδίδει ένα σταθερής έντασης ρεύμα διαμέσου του αντιστάτη, ενώ το άλλο μετρά την διαφορά δυναμικού στα άκρα του. Το ωμόμετρο είναι βαθμονομημένο, ώστε βάσει του νόμου του Ohm να μετρά τελικά την αντίσταση του αντιστάτη. Όπως έχουμε προαναφέρει, το ωμόμετρο συχνά είναι μέρος ενός πιο σύνθετου οργάνου, του πολυμέτρου.

7.6.2. Μέτρηση αντίστασης με τον νόμο του Ohm

Η μέτρηση της αντίστασης ενός αντιστάτη μπορεί να μετρηθεί με εφαρμογή του νόμου του Ohm, χρησιμοποιώντας ένα αμπερόμετρο και ένα βολτόμετρο, όπως δείχνει το σχ. 7.13. Συγκεκριμένα το αμπερόμετρο μετρά το ρεύμα I_R που διαρρέει την αντίσταση, και το βολτόμετρο μετρά την πτώση τάσης V_R στα άκρα της. Έτσι η αντίσταση δίνεται από τον νόμο του Ohm, ως

$$R = \frac{V_R}{I_R} \tag{7.14}$$

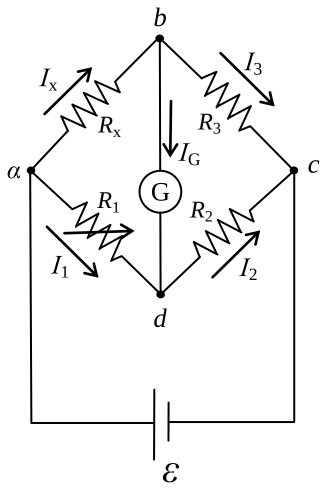


Σχήμα 7.13 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με αμπερόμετρο και βολτόμετρο για μέτρηση αντίστασης R.*

Για να είναι ακριβής η μέτρηση της αντίστασης με αυτήν την μέθοδο, πρέπει το βολτόμετρο να έχει μεγάλη εσωτερική αντίσταση, ώστε να διαρρέεται από αμελητέο ρεύμα και έτσι το μετρούμενο I_R από το αμπερόμετρο να προσεγγίζει το πραγματικό ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση. Σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να συνυπολογίσουμε και το ρεύμα διαρροής διαμέσου του βολτομέτρου.

7.6.3. Μέτρηση αντίστασης με γέφυρα Wheatstone

Για την μέτρηση μιας άγνωστης αντίστασης R_x ενός αντιστάτη με την αυτήν την μέθοδο, χρησιμοποιούνται τρεις αντιστάτες γνωστών αντιστάσεων R_1, R_2 και R_3, οι οποίοι συνδέονται με την άγνωστη αντίσταση με τον τρόπο που δείχνει το κύκλωμα του σχήματος 7.14, και το οποίο κύκλωμα είναι γνωστό ως **γέφυρα Wheatstone** (Sears, 1951), (Grant & Phillips, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Τα σημεία *a* και *c* συνδέονται με πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$, οπότε κάθε αντιστάτης διαρρέεται από αντίστοιχο ρεύμα I_1, I_2, I_3, και I_x. Μεταξύ των σημείων *b* και *d* συνδέεται ειδικό αμπερόμετρο, το οποίο μπορεί να μετρά πολύ μικρής εντάσεως ρεύματα και το οποίο είναι γνωστό ως **γαλβανόμετρο** (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Για τυχαίες τιμές των γνωστών αντιστάσεων, οι πτώσεις τάσεις στα άκρα τους είναι τέτοιες, ώστε τα δυναμικά στα σημεία *b* και *d* να είναι διαφορετικά. Έτσι δημιουργείται μια διαφορά δυναμικού μεταξύ αυτών των σημείων, με αποτέλεσμα το γαλβανόμετρο να μετρά ρεύμα I_G . Εάν όμως στην θέση του αντιστάτη R_1 χρησιμοποιήσουμε έναν **ροοστάτη**, δηλαδή έναν αντιστάτη μεταβλητής αντίστασης, τότε ρυθμίζοντας κατάλληλα την αντίσταση R_1 του ροοστάτη, μπορούμε να εξισώσουμε τα δυναμικά των σημείων *b* και *d*. Τότε η ένδειξη του γαλβανομέτρου θα μηδενιστεί (I_G=0), και ο κλάδος *bd* του κυκλώματος δεν θα διαρρέεται από ρεύμα. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται ισορροπία της γέφυρας Wheatstone (Γουίτστον), όπου ο βρόχος *abcda* διαρρέεται από δύο διαφορετικά ρεύματα, μιας και ισχύει I_x=I_3, και I_1=I_2. Εφαρμόζοντας τον κανόνα των βρόχων για τον βρόχο *abcda*, παίρνουμε



Σχήμα 7.14 *Ηλεκτρικό κύκλωμα με γέφυρας Wheatstone, για μέτρηση άγνωστης αντίστασης R_x.*

$$-I_1R_1 - I_2R_2 + I_3R_3 + I_xR_x = 0 \Rightarrow I_3R_3 + I_xR_x = I_1R_1 + I_2R_2 \tag{7.15}$$

Όμως επειδή I_x=I_3, και I_1=I_2, η εξ. 7.15 γράφεται

$$I_3(R_3 + R_x) = I_2(R_1 + R_2) \tag{7.16}$$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff για τον βρόχο *bcdb*, παίρνουμε

$$-I_3R_3 + I_2R_2 = 0 \Rightarrow I_2R_2 = I_3R_3 \Rightarrow I_2 = I_3\frac{R_3}{R_2} \tag{7.17}$$

Η εξ. 3 στην 2 δίνει

$$I_3(R_3+R_x)=I_3\frac{R_3}{R_2}(R_1+R_2)\Rightarrow R_3+R_x=\frac{R_3}{R_2}(R_1+R_2)\Rightarrow R_x=\frac{R_3}{R_2}R_1+R_3-R_3$$

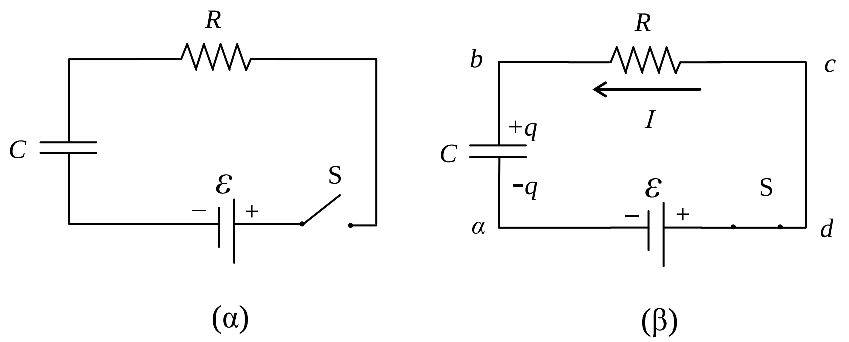
$$\Rightarrow R_x=\frac{R_3}{R_2}R_1 \qquad (7.18)$$

Έτσι λοιπόν, χρησιμοποιώντας δυο γνωστούς αντιστάτες και έναν ροοστάτη σε μια γέφυρα Wheatstone, μπορούμε εύκολα να μετρήσουμε την άγνωστη αντίσταση ενός αντιστάτη.

7.7 Κύκλωμα αντιστάτη-πυκνωτή *RC*

7.7.1 Φόρτιση πυκνωτή

Θεωρήστε το κύκλωμα στο σχ. 7.15 με τον αντιστάτη R και τον πυκνωτή χωρητικότητας C. Τέτοιου είδους κυκλώματα, τα οποία περιέχουν αντιστάσεις και χωρητικότητες, ονομάζονται **κυκλώματα *RC***. Αρχικά όταν ο διακόπτης S είναι ανοικτός, το κύκλωμα δεν διαρρέεται από ρεύμα. Όταν ο διακόπτης κλείσει, το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα I και ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται αποθηκεύοντας φορτίο q στους οπλισμούς του. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **φόρτιση πυκνωτή** (Sears, 1951), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Τη στιγμή που «κλείνει» ο διακόπτης, δηλαδή για t=0 s, η τάση στα άκρα του αντιστάτη είναι $V_{bc}=\mathcal{E}$ και το ρεύμα είναι $I(0)=V_{bc}/R=\mathcal{E}/R$. Καθώς φορτίζεται ο πυκνωτής, η τάση V_{ab} στα άκρα του αυξάνεται και η τάση V_{bc} στα άκρα του αντιστάτη ελαττώνεται με ταυτόχρονη μείωση του ρεύματος. Το μέγιστο φορτίο φόρτισης Q του πυκνωτή εξαρτάται από την ΗΕΔ της πηγής. Όταν ο πυκνωτής φορτιστεί με το μέγιστο φορτίο, το ρεύμα στο κύκλωμα μηδενίζεται μιας και δεν μπορεί να υπάρξει κίνηση φορτίου προς τους οπλισμούς του. Τότε η τάση στα άκρα του πυκνωτή, είναι ίση με την ΗΕΔ της πηγής, δηλαδή $V_{ab}=\mathcal{E}$. Εφαρμόζοντας τον νόμο των βρόχων στο κύκλωμα για τυχαίο χρόνο t, όπου η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή είναι V_c , παίρνουμε



Σχήμα 7.15 *(α) Κύκλωμα RC με τον διακόπτη ανοικτό. (β) Όταν ο διακόπτης κλείνει το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, και ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται.*

$$\mathcal{E}-IR-V_C=0\Rightarrow\mathcal{E}-IR-\frac{q}{C}=0 \qquad (7.19)$$

Για t=0 s το φορτίο q=0 C, άρα η εξ. 7.19 δίνει για το ρεύμα $I(0)=\mathcal{E}/R$. Για τον χρόνο της πλήρους φόρτισης του πυκνωτή $t=t_o$, το $q=Q$, το ρεύμα I=0, και η εξ. 7.19 δίνει

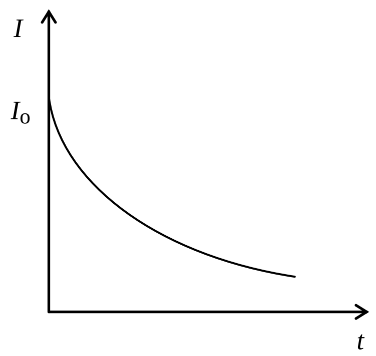
$$q=\mathcal{E}C=Q \qquad (7.20)$$

Για να εύρουμε μια αναλυτική σχέση για την εξάρτηση του φορτίου και του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου, κατά την φόρτιση του πυκνωτή, παραγωγίζουμε την εξ. 7.19 ως προς τον χρόνο και παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}-IR-\frac{q}{C}\right)=0-R\frac{dI}{dt}-\frac{1}{C}\frac{dq}{dt}=0\Rightarrow R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=0 \qquad (7.21)$$

Η εξ. 7.21 μπορεί να γραφτεί

$$\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}dt \qquad (7.22)$$



Σχήμα 7.16 *Μεταβολή του ρεύματος σε ηλεκτρικό κύκλωμα RC κατά την φόρτιση του πυκνωτή.*

Ολοκληρώνοντας την εξ. 7.22 από t=0 s έως τυχαία χρονική στιγμή t, παίρνουμε

$$\int_{I_o}^{I}\frac{dI}{I}=-\frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \ln I\Big|_{I_o}^{I}=-\frac{1}{RC}t \Rightarrow \ln\left(\frac{I}{I_o}\right)=-\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{I}{I_o}=e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7.23)$$

ή τελικά

$$I=I_o e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7.24)$$

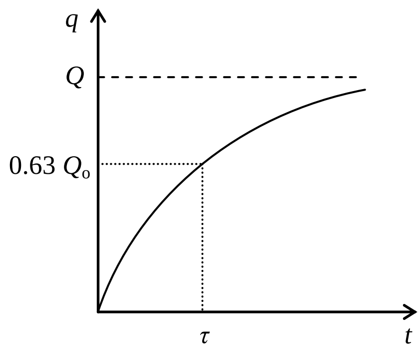
Η παραπάνω εξίσωση δηλώνει ότι κατά την φόρτιση του πυκνωτή, το ρεύμα είναι μια εκθετική φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Για t=0 s το ρεύμα $I=I_o$, το οποίο είναι το μέγιστο ρεύμα. Για $t \to \infty$ το ρεύμα $I \to 0$. Η εξ. 7.24 αναπαριστάται γραφικά στο σχ. 7.16. Από αυτήν την εξίσωση μπορούμε να εύρουμε πώς μεταβάλλεται το φορτίο q στον πυκνωτή κατά την διάρκεια της φόρτισής του. Πράγματι θεωρώντας ότι το ρεύμα είναι η μεταβολή του φορτίου ως προς τον χρόνο, η εξ. 7.24 δίνει

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow dq=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}dt \quad (7.25)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. 7.25 από t=0 s έως t, παίρνουμε

$$\int_0^q dq=\int_0^t\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{t}{RC}}dt \Rightarrow q=\frac{\varepsilon}{R}\int_0^t e^{-\frac{t}{RC}}dt=-\frac{\varepsilon}{R}(RC)e^{-\frac{t}{RC}}\Big|_0^t=\varepsilon C(-e^{-\frac{t}{RC}}+1)=\varepsilon C(1-e^{-\frac{t}{RC}})\overset{(7.20)}{\Rightarrow}$$

$$q=Q(1-e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (7.26)$$



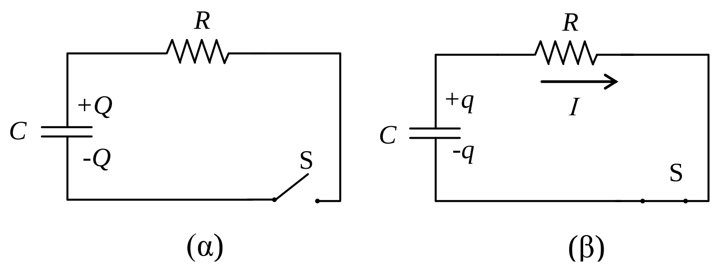
Σχήμα 7.17 *Η μεταβολή του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή, ως συνάρτηση του χρόνου κατά την διάρκεια της φόρτισής του.*

Η εξ. 7.26 περιγράφει την μεταβολή του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή ως συνάρτηση του χρόνου, κατά την διάρκεια της φόρτισής του, μεταβολή που φαίνεται γραφικά στο σχ. 7.17. Για $t=RC$, η εξ. 7.26 δίνει τιμή φορτίου q=0.63Q. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται **χωρητική σταθερά χρόνου** ή **χρονική σταθερά** του κυκλώματος RC, και συμβολίζεται ως τ (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Giancoli, 2012). Από την εξ. 7.24, το ρεύμα I σε χρόνο τ υπολογίζεται ίσο με 0.37 I_o.

7.7.2 Εκφόρτιση πυκνωτή

Όταν ο πυκνωτής φορτιστεί πλήρως με φορτίο Q, το ρεύμα I στο κύκλωμα RC είναι μηδέν. Ο πυκνωτής έχει αποθηκεύσει ηλεκτροστατική ενέργεια, η οποία μπορεί να αποδοθεί ως ωφέλιμη ενέργεια στο κύκλωμα του σχήματος 7.18, όταν ο διακόπτης S «κλείσει». Με άλλα λόγια, ο πυκνωτής παίζει στο κύκλωμα τον ρόλο της πηγής ηλεκτρεγερτικής δύναμης.

Αν σε χρόνο t=0 s ο διακόπτης S «κλείσει», τότε αρχίζει η κίνηση των ελευθέρων ηλεκτρονίων του βρόχου του κυκλώματος προς τον θετικό οπλισμό του πυκνωτή. Αυτό έχει ως συνέπεια την δημιουργία ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα. Το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή μειώνεται με το χρόνο,



Σχήμα 7.18 *(α) Το κύκλωμα RC δεν διαρρέεται από ρεύμα όταν ο διακόπτης S είναι «ανοικτός». (β) Ο πλήρως φορτισμένος πυκνωτής δίνει ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα όταν ο διακόπτης S «κλείσει».*

διαδικασία η οποία είναι γνωστή ως **εκφόρτιση πυκνωτή** (Sears, 1951), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Όπως ακριβώς ελαττώνεται το φορτίο στον πυκνωτή, το ίδιο συμβαίνει και για το ρεύμα του κυκλώματος, ώσπου τελικά μηδενίζονται και οι δύο ποσότητες. Όλη η ηλεκτρική ενέργεια δαπανάται τελικά στον αντιστάτη *R*. Επειδή ο πυκνωτής εκφορτίζεται μόνο μέσω του αντιστάτη, από τον κανόνα των βρόχων παίρνουμε

$$V_C - IR = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} - IR = 0 \Rightarrow \frac{q}{C} = IR \qquad (7.27)$$

Όμως το ρεύμα του κυκλώματος είναι ίσο με τον ρυθμό μείωσης του φορτίου στον πυκνωτή, οπότε ισχύει

$$I = -\frac{dq}{dt} \qquad (7.28)$$

Προσέξτε το αρνητικό πρόσημο, το οποίο δηλώνει την μείωση του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή κατά την διάρκεια της εκφόρτισης. Η εξ. 7.28 στην 7.27 δίνει

$$\frac{q}{C} = -\frac{dq}{dt}R \Rightarrow \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt}R = 0 \Rightarrow \frac{dq}{dt}R = -\frac{q}{C} \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt \qquad (7.29)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. 7.29 από t=0 s έως κάποια τυχαία χρονική στιγμή t, και λαμβάνοντας υπόψη ότι το φορτίο στον πυκνωτή για αυτούς τους χρόνους είναι Q και q αντιστοίχως, παίρνουμε

$$\int_Q^q \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{1}{RC}dt \Rightarrow \ln q\Big|_Q^q = -\frac{1}{RC}t \Rightarrow \ln q - \ln Q = -\frac{1}{RC}t \Rightarrow \ln(\frac{q}{Q}) = -\frac{1}{RC}t \Rightarrow \frac{q}{Q} = e^{-\frac{1}{RC}t}$$

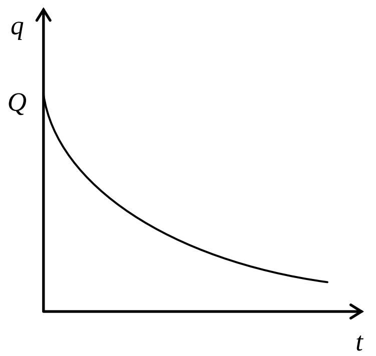
ή τελικά

$$q = Qe^{-\frac{1}{RC}t} \qquad (7.30)$$

Η εξ. 7.30 εκφράζει την εκφόρτιση του πυκνωτή, η οποία περιγράφεται με φθίνουσα εκθετική συνάρτηση και αναπαριστάται γραφικά στο σχ. 7.19. Το ρεύμα του κυκλώματος κατά την διάρκεια της εκφόρτισης του πυκνωτή ευρίσκεται από την παραγώγιση της εξ. 7.30, ίσο με

$$I = -I_o e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (7.31)$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της φόρτισης του πυκνωτή, με την μόνη διαφορά το εμφανιζόμενο αρνητικό πρόσημο. Αυτό εκφράζει την αντίθετη φορά του ρεύματος σε σύγκριση με αυτήν που έχει το ρεύμα κατά την φόρτιση του πυκνωτή, (βλ. σχήματα 7.15β και 7.18β).



Σχήμα 7.19 *Μεταβολή του φορτίου στους οπλισμούς του πυκνωτή κατά την διάρκεια της εκφόρτισης.*

Παράδειγμα 7.6 Κύκλωμα *RC*

Θεωρείστε το κύκλωμα *RC* του σχήματος 7.20, όταν ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος. Εάν $\mathcal{E}$ =6V, R_1=100 Ω, R_2=80 Ω, C=2 μF και I_3=50 mA, να ευρείτε την αντίσταση R_3, το φορτίο Q, και την τάση στα άκρα του πυκνωτή V_C.

Λύση

Από τον κανόνα των κόμβων έχουμε για τον κόμβο *α*

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \Rightarrow I_3 = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

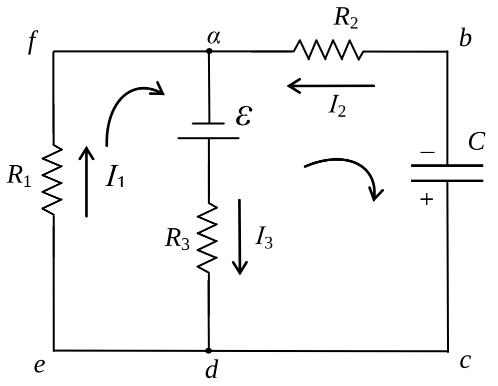
Από τον κανόνα των βρόχων έχουμε για τον βρόχο *adefa*

$$\mathcal{E} - I_3R_3 - I_1R_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = I_1R_1 + I_3R_3 \qquad (2)$$

ενώ για τον βρόχο *abcda* γράφουμε

$$I_2R_2 + V_C + I_3R_3 - \mathcal{E} = 0 \qquad (3)$$

Όταν ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος, τότε η αντίσταση R_2 δεν διαρρέεται από ρεύμα, δηλαδή I_2=0. Η εξ. 1 δίνει τότε I_1=I_3 , και επομένως η εξ. 2 γράφεται



Σχήμα 7.20 *Ηλεκτρικό κύκλωμα δύο βρόχων (παράδειγμα 7.6).*

$$\mathcal{E} - I_3(R_3 + R_1) = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - I_3R_3 + I_3R_1) \Rightarrow$$

$$I_3R_3 = \mathcal{E} - I_3R_1 \Rightarrow R_3 = \frac{\mathcal{E} - I_3R_1}{I_3} \Rightarrow$$

$$R_3 = \frac{6\text{V} - (50\text{mA} \times 100\Omega)}{50\text{mA}} \Rightarrow R_3 = 20\Omega$$

Η εξ. 3 γράφεται

$$V_C + I_3R_3 - \mathcal{E} = 0 \Rightarrow V_C = \mathcal{E} - I_3R_3 \Rightarrow$$

$$V_C = 6\text{V} - (50\text{mA} \times 20\Omega) = 6\text{V} - 1\text{V} \Rightarrow V_C = 5\text{V}$$

Το φορτίο που έχει αποθηκευθεί στον πυκνωτή είναι

$$Q = CV_C \Rightarrow Q = 2\mu\text{F} \times 5\text{V} \Rightarrow Q = 10\mu\text{C}$$

Παράδειγμα 7.7 Εκφόρτιση πυκνωτή

Πυκνωτής χωρητικότητας C=2.50×10^{-10} F είναι φορτισμένος με φορτίο Q=6×10^{-8} C, και συνδέεται με βολτόμετρο εσωτερικής αντίστασης r=4×10^{5} Ω, όπως φαίνεται στο σχ. 7.21. α) Πόσο είναι το ρεύμα που διαρρέει το βολτόμετρο αμέσως μόλις γίνει η σύνδεση; β) Πόση είναι η σταθερά χρόνου τ του κυκλώματος; γ) Σε πόσο χρόνο το ρεύμα θα πέσει στη μισή τιμή της αρχικής;

Λύση

Μόλις το βολτόμετρο συνδεθεί με τα άκρα του πυκνωτή, ένα ρεύμα αρχίζει να διαρρέει την εσωτερική αντίστασή του, του οποίου η ένταση ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου, μιας και ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται. Η σχέση ρεύματος και χρόνου κατά την εκφόρτιση είναι

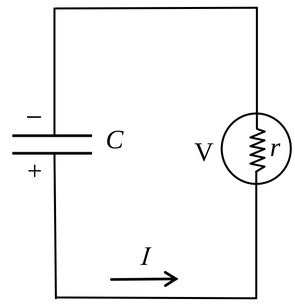
$$I = I_o e^{-\frac{t}{rC}} \qquad (1)$$

Για χρόνο t=0s έχουμε το μέγιστο ρεύμα διέλευσης

$$I_o = \frac{V_C}{r} \qquad (2)$$

Όμως ισχύει

$$C = \frac{Q}{V_C} \Rightarrow V_C = \frac{Q}{C} \Rightarrow V_C = \frac{6\times10^{-8}\text{C}}{2.50\times10^{-10}\text{F}} \Rightarrow V_C = 240\text{V}$$



Σχήμα 7.21 *Ηλεκτρικό κύκλωμα ενός βρόχου (παράδειγμα 7.7).*

Η εξ. 2 δίνει τελικά

$$I_o = \frac{240\text{V}}{4\times10^5\Omega} \Rightarrow I_o = 6\times10^{-4}\text{A}$$

β) Η σταθερά χρόνου τ του κυκλώματος είναι

$$\tau = rC \Rightarrow \tau = 4\times10^5\Omega\times2.50\times10^{-10}\text{F} \Rightarrow \tau = 1\times10^{-4}\text{s}$$

γ) Από την εξ. 1 έχουμε για I=I_o/2

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t}{rC}} \Rightarrow -\frac{t}{rC} = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{t}{rC} = \ln1 - \ln2 \Rightarrow -\frac{t}{rC} = 0 - \ln2 \Rightarrow \frac{t}{rC} = \ln2 \Rightarrow t = rC\ln2 \Rightarrow$$

$$t = 0.69\tau = 0.69\times1\times10^{-4}\text{s} \Rightarrow t = 6.9\times10^{-5}\text{s}$$

Παράδειγμα 7.8 Ενέργεια πυκνωτή

Εάν η ενέργεια ενός πυκνωτή σε πλήρη φόρτιση είναι $U_{\max}$, σε πόσο χρόνο αποθηκεύει το ένα τρίτο της ενέργειάς του κατά την φόρτισή του σε ένα απλό κύκλωμα *RC* (βλ. σχ. 7.15); Θεωρείστε ότι το μέγιστο φορτίο που μπορεί να αποθηκεύει ο πυκνωτής είναι *Q*, η χωρητικότητά του είναι *C* και η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι *τ*.

Λύση

Η ενέργεια του πυκνωτή κατά την πλήρη φόρτισή του είναι

$$U_{\max} = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow U_{\max} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{1}$$

Κατά την φόρτιση του πυκνωτή, έστω ότι το φορτίο του είναι *q* όταν η ενέργειά του είναι $U_{\max}/3$. Τότε ισχύει

$$\frac{U_{\max}}{3} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \Rightarrow q^2 = \frac{2}{3}CU_{\max} \tag{2}$$

Η εξ. 1 στην 2 δίνει

$$q^2 = \frac{2}{3}C \times \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Rightarrow q^2 = \frac{Q^2}{3} \Rightarrow q = \frac{Q}{\sqrt{3}} \tag{3}$$

Το φορτίο του πυκνωτή κατά την φόρτιση δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου ως

$$q = Q(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \tag{4}$$

Η εξ. 4 λόγω της 3 γράφεται

$$q = q\sqrt{3}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \Rightarrow$$

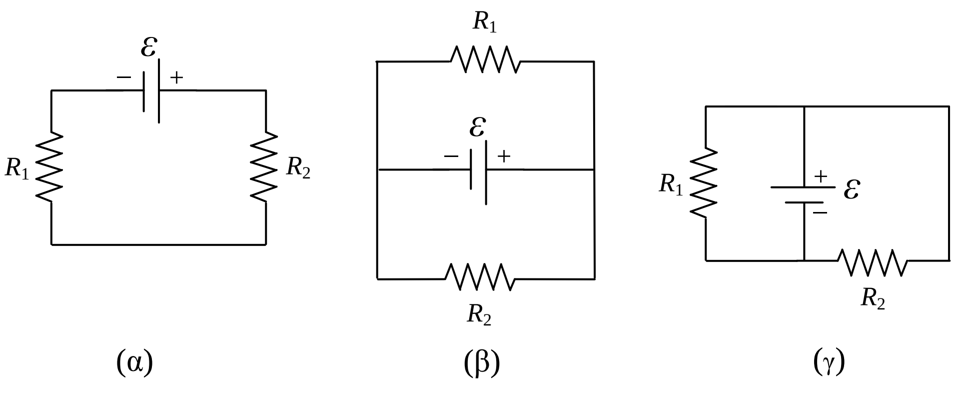
$$\frac{t}{RC} = -\ln(1 - 0.58) = -\ln 0.42 = 0.87 \Rightarrow t = 0.87RC \Rightarrow t = 0.87\tau$$

Άρα ο πυκνωτής αποκτά το ένα τρίτο της μέγιστης ενέργειάς του σε χρόνο 0.87 της σταθεράς χρόνου του *RC* κυκλώματος.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 7

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε7.1 Να προσδιορίσετε την σύνδεση των αντιστάσεων R_1 και R_2 (σε σειρά ή παράλληλη), για κάθε ένα από τα κυκλώματα του σχήματος 7.22.



Σχήμα 7.22 *Ερώτηση 7.1.*

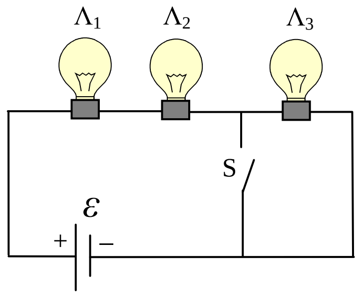
Ε7.2 Ένας αντιστάτης σε ηλεκτρικό κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή ΗΕΔ, με αποτέλεσμα να διαρρέεται από σταθερό ρεύμα. Εάν συνδέσουμε έναν όμοιο αντιστάτη σε σειρά με τον πρώτο, τί θα συμβεί στην τιμή του ρεύματος, και τί στην τιμή της πτώσης τάσης στα άκρα του αντιστάτη; Απαντήστε στα ίδια ερωτήματα αν οι αντιστάτες συνδεθούν παράλληλα.

Ε7.3 Έχοντας στην διάθεσή σας μια γραμμή δικτύου με τάση 240 V, πώς μπορείτε να λειτουργήσετε σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα λαμπτήρων 8 V ο καθένας, ώστε να μην καούν; Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός λαμπτήρων που μπορούν να λειτουργήσουν ταυτόχρονα;

Ε7.4 Για ποια χρήση θα συνδέαμε πηγές ΗΕΔ σε σειρά η μία με την άλλη; Για ποια χρήση θα τις συνδέαμε παράλληλα;

Ε7.5 Πολλές φορές βλέπουμε πουλιά να κάθονται πάνω σε καλώδια υψηλής τάσης, χωρίς να παθαίνουν ηλεκτροπληξία. Πώς εξηγείται αυτό;

Ε7.6 Τρεις πανομοιότυποι λαμπτήρες είναι συνδεδεμένοι σε κύκλωμα όπως φαίνεται στο σχ. 7.23. Αρχικά ο διακόπτης είναι ανοιχτός. Ξαφνικά ο διακόπτης κλείνει. α) Τι θα συμβεί τότε στην φωτεινότητα του λαμπτήρα $Λ_2$; 1) Θα αυξηθεί. 2) Θα μειωθεί. 3) Θα παραμείνει σταθερή. 4) Θα μηδενιστεί. Στα επόμενα ερωτήματα απαντήστε τί θα συμβεί μετά το κλείσιμο του διακόπτη, με ένα από τα παραπάνω ενδεχόμενα. β) Τί θα συμβεί στην φωτεινότητα του λαμπτήρα $Λ_3$; γ) Τί θα συμβεί στο ρεύμα που περνά από την πηγή ΗΕΔ; δ) Τί θα συμβεί στην τιμή της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του λαμπτήρα $Λ_1$; ε) Τί θα συμβεί στην τιμή της διαφοράς δυναμικού στα άκρα του λαμπτήρα $Λ_3$; στ) Τί θα συμβεί στην συνολική ισχύ που αποδίδει η πηγή ΗΕΔ στους λαμπτήρες;



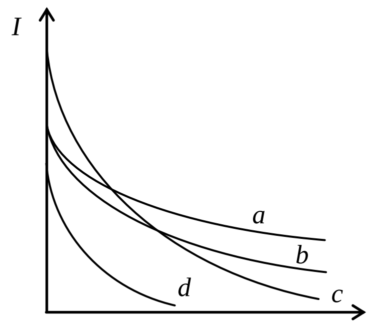
Σχήμα 7.23 *Ερώτηση 7.8.*

Ε7.7 Ποια είναι η βασική διαφορά μεταξύ ενός αναλογικού βολτομέτρου και ενός αντιστοίχου αμπερομέτρου;

Ε7.8 Ένα βολτόμετρο μετρά την πτώση τάσης στα άκρα ενός αντιστάτη, σε τιμή πάντα μικρότερη της πραγματικής, δηλ. αυτής που υπάρχει όταν το βολτόμετρο δεν είναι συνδεδεμένο. Εξηγείστε γιατί συμβαίνει αυτό.

Ε7.9 Μία πηγή ΗΕΔ, ένας αντιστάτης και ένας πυκνωτής, συνδέονται σε σειρά σ'ένα κύκλωμα *RC*. Ο αντιστάτης επηρεάζει το μέγιστο φορτίο που αποθηκεύεται στον πυκνωτή; Ναι ή όχι και γιατί; Τί σκοπό εξυπηρετεί ο αντιστάτης στο κύκλωμα;

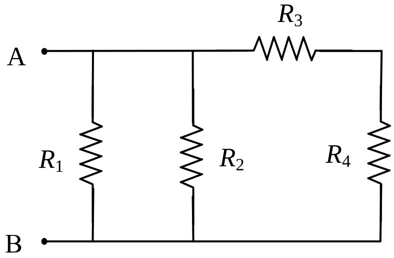
Ε7.10 Θεωρείστε τέσσερα κυκλώματα *RC* όπως αυτό του σχήματος 7.15. Η καμπύλη φόρτισης του πυκνωτή κάθε κυκλώματος φαίνεται στο σχ. 7.24. Κατατάξτε τα κυκλώματα με αύξουσα σειρά βάσει του μεγέθους της σταθεράς χρόνου *τ* του κάθε κυκλώματος (ξεκινήστε από την μικρότερη *τ*). Επίσης κατατάξτε τα με αύξουσα σειρά βάσει του μεγέθους της ωμικής αντίστασή τους.



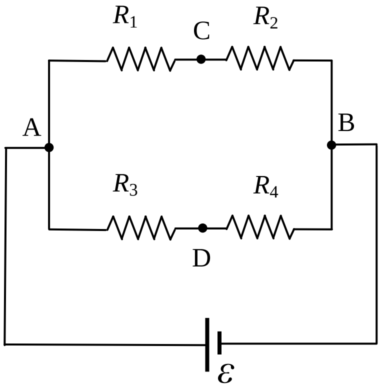
Σχήμα 7.24 *Ερώτηση 7.10.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π7.1 Συνολική αντίσταση. Υπολογίστε την συνολική αντίσταση του ηλεκτρικού κυκλώματος στο σχ. 7.25, μεταξύ των σημείων A και B. *Απάντηση*: $R_{\mathrm{AB}} = \dfrac{R_1R_2(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2}$.



Σχήμα 7.25 *Πρόβλημα 7.1.*

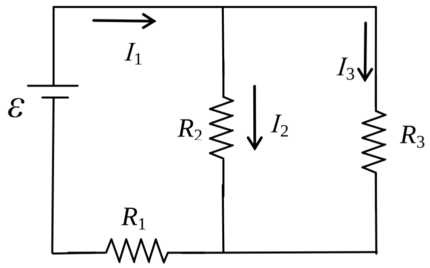


Σχήμα 7.26 *Πρόβλημα 7.2.*

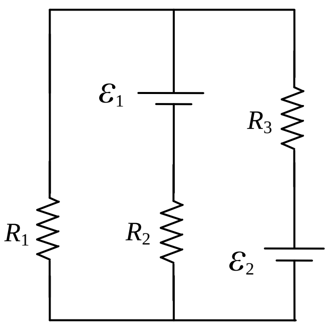
Π7.2 Ηλεκτρικό κύκλωμα αντιστάσεων. Στο κύκλωμα των τεσσάρων αντιστάσεων του σχήματος 7.26 να εύρετε: α) την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος μεταξύ των σημείων A και B, β) το ρεύμα που διαρρέει την κάθε αντίσταση, και γ) την διαφορά δυναμικού στα άκρα της κάθε αντίστασης. Δίνονται, R_1=3 Ω, R_2=6 Ω, R_3=2 Ω, και R_4=4 Ω, ενώ η τάση της πηγής είναι $\mathcal{E}$=90 V.

Π7.3 Κανόνες του Kirchhoff. Έστω το κύκλωμα του σχήματος 7.27. Εάν $\mathcal{E}$=5 V, R_1=2 Ω, R_2=4 Ω και R_3=6 Ω. Να ευρεθούν α) η ολική αντίσταση του κυκλώματος, και β) τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3. *Απάντηση:* α) 4.4 Ω, και β) I_1=1.125 A, I_2=0.675 A και I_3=0.45 A.

Π7.4 Εσωτερική αντίσταση. Ένας άνθρωπος με αντίσταση μεταξύ των άκρων των χεριών του 10 kΩ, πιάνει τυχαία τους πόλους ενός τροφοδοτικού τάσης 20 kV. α) Αν η εσωτερική αντίσταση του τροφοδοτικού είναι 2000 Ω, πόσο ρεύμα θα διαρρεύσει διαμέσου του σώματος του ανθρώπου; β) Πόση ισχύς καταναλίσκεται στο σώμα του; γ) Αν το τροφοδοτικό πρόκειται να κατασκευασθεί ώστε να είναι ασφαλές αυξάνοντας την εσωτερική του αντίσταση, ποια θα πρέπει να είναι η εσωτερική του αντίσταση, ώστε το μέγιστο ρεύμα διαμέσου του σώματος να είναι 1 mA; *Απάντηση*: α) 1.67 A, β) 2.78×10^4 W, και γ) 2×10^7 Ω.



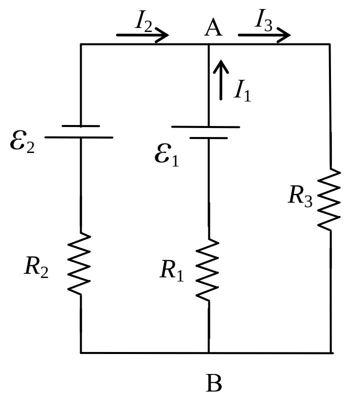
Σχήμα 7.27 *Πρόβλημα 7.3.*



Σχήμα 7.28 *Πρόβλημα 7.5.*

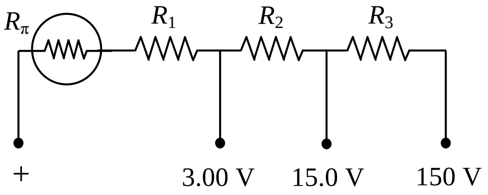
Π7.5 Κανόνες του Kirchhoff. Έστω το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 7.28. Αν οι πηγές ηλεκτρεργετικής δύναμης $\mathcal{E}_1$=20 V και $\mathcal{E}_2$=10 V έχουν μηδενικές εσωτερικές αντιστάσεις, και οι ωμικές αντιστάσεις R_2=2 Ω και R_3=4 Ω διαρρέονται από ρεύματα I_2 και I_3 αντίστοιχα, να υπολογιστούν τα ρεύματα αυτά, καθώς επίσης και η ωμική αντίσταση R_1, η οποία διαρρέεται από ρεύμα I_1=4 A. *Απάντηση:* I_2=4.33 A, I_3=0.33 A και R_1=2.84 Ω.

Π7.6 Κανόνες του Kirchhoff. Να εύρετε τα ρεύματα I_1, I_2 και I_3 του κυκλώματος στο σχ. 7.29, εάν R_1=6 Ω, R_2=4 Ω, R_3=2 Ω, $\mathcal{E}_1$=20 V και $\mathcal{E}_2$=14 V. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων A και B; *Απάντηση*: 2 V.



Σχήμα 7.29 *Πρόβλημα 7.6.*

Π7.7 Βολτόμετρο με διάφορες κλίμακες. Ένα βολτόμετρο έχει τρεις διαφορετικές κλίμακες μέτρησης με μέγιστη τάση η κάθε μία 3.00 V, 15.0 V και 150 V αντίστοιχα. Η εσωτερική συνδεσμολογία του βολτομέτρου φαίνεται στο σχ. 7.30, με τις αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3, ενώ περιέχει επίσης και ένα πηνίο με αντίσταση R_π=50 Ω, το οποίο όταν το βολτόμετρο μετρά



Σχήμα 7.30 *Πρόβλημα 7.7.*

την μέγιστη ένδειξη τάσης σε κάθε μια κλίμακα, διαρρέεται από ρεύμα 1 mA. Το βολτόμετρο μετρά τις τάσεις με τον έναν ακροδέκτη συνδεδεμένο στη θέση + , και τον άλλο στη θέση της κάθε φορά επιλεγμένης κλίμακας. Να ευρεθούν οι αντιστάσεις R_1 , R_2 και R_3 , αλλά και η ολική αντίσταση του βολτομέτρου για κάθε μία κλίμακα μετρήσεων.

Π7.8 Φόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα *RC*. Έστω ένας αφόρτιστος πυκνωτής χωρητικότητας *C* σε κύκλωμα *RC*. Υπολογίστε την συνολική ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να φορτίσουμε τον πυκνωτή με φορτίο $2Q/3$, όπου *Q* το μέγιστο φορτίο που μπορεί να αποθηκεύσει ο πυκνωτής. Υπολογίστε τον χρόνο στον οποίο συμβαίνει αυτή η φόρτιση, εάν C=2 μFκαι R=1 μΩ. *Υπόδειξη:* Θεωρείστε ότι φορτίζοντας τον πυκνωτή με φορτίο *dq* δαπανούμε ενέργεια $dW=dq.V$, όπου *V* η αντίστοιχη διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή.

Π7.9 Εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα *RC*. Αντιστάτης 9 kΩ συνδέεται με φορτισμένο πυκνωτή που έχει χωρητικότητα 5×10^{-10} F. Αν το αρχικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα *RC* είναι 0.750 A, ποιά είναι η μέγιστη ποσότητα ηλεκτρικού φορτίου που έχει αρχικά αποθηκευμένη ο πυκνωτής; Να εύρετε την ποσότητα φορτίου στον πυκνωτή μετά από χρόνο 0.5 s, αφότου αρχίσει η διέλευση ρεύματος.

Π7.10 Εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα *RC*. Αντιστάτης με R=670 Ω συνδέεται με τους οπλισμούς φορτισμένου πυκνωτή με χωρητικότητα C=5.38 μF. Μόλις πριν την σύνδεση το φορτίο του πυκνωτή είναι 7.66 mC. α) Ποια είναι η αρχική ενέργεια του πυκνωτή; β) Ποια είναι η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης αμέσως μόλις γίνει η σύνδεση; γ) Ποια είναι η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης, τη στιγμή που η αποθηκευμένη ενέργεια στον πυκνωτή έχει την μισή τιμή της αρχικής;

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 8

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΗ

Σύνοψη

Στο όγδοο τούτο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή των μαγνητικών ποσοτήτων και δυνάμεων. Επίσης ορίζονται οι ποσότητες της μαγνητικής επαγωγής και της μαγνητικής ροής. Επιπλέον, περιγράφεται η μαγνητική δύναμη σε κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο και ρευματοφόρο αγωγό. Ακόμη, μελετάται η κίνηση ηλεκτρικών φορτίων σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, και παρουσιάζονται πρακτικές εφαρμογές, όπως είναι το φίλτρο ταχυτήτων, ο φασματογράφος μάζας και το φαινόμενο Hall (Χόλ). Τέλος ορίζονται οι έννοιες της διπολικής μαγνητικής ροπής και της μαγνητικής δυναμικής ενέργειας.

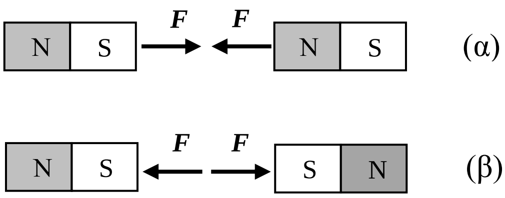
Προαπαιτούμενη γνώση

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Κυκλική κίνηση και κεντρομόλος δύναμη. Ροπή δυνάμεως.

8.1 Εισαγωγικά

Τα μαγνητικά φαινόμενα είναι γνωστά από την αρχαιότητα, όπου στην περιοχή της Μαγνησίας [22] στην Μικρά Ασία, παρατηρήθηκε για πρώτη φορά ότι το ορυκτό μετάλλευμα του **μαγνητίτη** ή αλλιώς επιτεταρτοξείδιο του σιδήρου (Fe_2O_4), μπορούσε να έλκει μικρά μεταλλικά κομμάτια. Ένα μεταλλικό σώμα που έλκει ή απωθεί άλλα μεταλλικά σώματα, ονομάζεται **μαγνήτης**. Κάθε μαγνήτης αποτελείται από δυο μαγνητικούς πόλους, οι οποίοι ονομάζονται **βόρειος** και **νότιος μαγνητικός πόλος** αντίστοιχα. Στην πραγματικότητα δηλαδή, ο κάθε μαγνήτης είναι ένα **μαγνητικό δίπολο**. Οι δυο μαγνητικοί πόλοι αλληλεπιδρούν όπως και τα ηλεκτρικά φορτία, δηλ. οι ομώνυμοι πόλοι απωθούνται, ενώ οι ετερώνυμοι έλκονται, όπως απεικονίζει το σχ. 8.1 (Alonso & Finn, 1992), (Giancoli, 2012). Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των μαγνητών ονομάζονται **μαγνητικές δυνάμεις**, και η επιστήμη που μελετά τις μαγνητικές αλληλεπιδράσεις ονομάζεται **μαγνητισμός**. Το 1600 ο Άγγλος φυσικός και φιλόσοφος William Gilbert (1544-1603), κάνοντας πειράματα με μαγνήτες και γνωρίζοντας τον προσανατολισμό της μαγνητικής βελόνης ως προς τον γεωγραφικό Βορρά, διατύπωσε πρώτος την ιδέα ότι η Γη είναι ένας τεράστιος μαγνήτης με τους δικούς της μαγνητικούς πόλους. Το 1750 ο Άγγλος γεωλόγος και φιλόσοφος John Michell (1724-1793), για να μελετήσει τις μαγνητικές δυνάμεις χρησιμοποίησε έναν στροφικό ζυγό, και απέδειξε ότι η μαγνητική δύναμη μεταξύ δυο μαγνητών είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης που τους χωρίζει. Ισχύει δηλαδή για τις μαγνητικές δυνάμεις, ότι και για τις ηλεκτρικές και βαρυτικές δυνάμεις. Εντούτοις υπάρχει μια σημαντική διαφορά μεταξύ των μαγνητικών διπόλων και των ηλεκτρικών φορτίων. Είναι αδύνατο να απομονώσουμε ένα μαγνητικό πόλο από κάποιον ετερώνυμό του. Οι μαγνητικοί πόλοι υπάρχουν πάντα σε ζεύγη. Δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα στη Φύση (Knight, 2010).

William Gilbert
(1544-1603)
(http://wellcomeimages.org/indexplus/image/M0002634.html).



Σχήμα 8.1 *Μαγνητικά φαινόμενα μεταξύ μαγνητών. (α) Οι ετερώνυμοι μαγνητικοί πόλοι έλκονται, ενώ (β) οι ομώνυμοι πόλοι απωθούνται.*

Ο μαγνητισμός συνδέεται άμεσα με τον ηλεκτρισμό. Η σχέση μεταξύ μαγνητισμού και ηλεκτρισμού ανακαλύφθηκε το 1820 από τον Δανό Hans Oersted (1777-1851), ο οποίος παρατήρησε ότι η

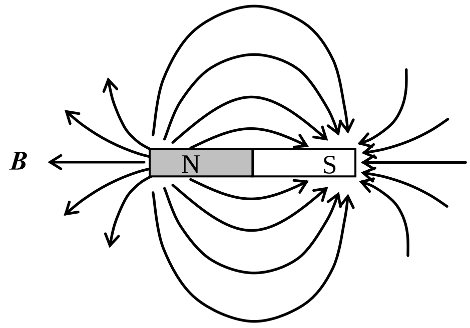
[22] Το όνομα μαγνήτης και γενικότερα μαγνητισμός, προέρχεται από το όνομα του ορυκτού μαγνητίτη, το οποίο στην αρχαιότητα εξορύσσονταν στην Μαγνησία της Μικράς Ασίας.

μαγνητική βελόνη εκτρέπονταν, όταν αυτή ήταν κοντά σε αγωγό που τον διέρρεε ηλεκτρικό ρεύμα. Την ίδια περίπου εποχή ο Άγγλος Michael Faraday και ο Αμερικανοσκωτσέζος Joseph Henry (1797-1878), μετά από μεγάλο αριθμό πειραμάτων και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, απέδειξαν την στενή σχέση μαγνητισμού-ηλεκτρισμού παράγοντας ηλεκτρικό πεδίο από ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Αργότερα ο Maxwell απέδειξε ότι ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί μαγνητικό πεδίο.

8.2 Μαγνητικό πεδίο

Όπως ένα ηλεκτρικό φορτίο δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο γύρω του, έτσι και ένας μαγνήτης δημιουργεί μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο, δηλαδή, είναι η φυσική συνέπεια της ύπαρξης κάθε μαγνήτη. Εντούτοις, πιο κάτω θα ιδούμε, ότι το πραγματικό αίτιο δημιουργίας μαγνητικού πεδίου είναι η κίνηση ηλεκτρικών φορτίων, είτε αυτή γίνεται μακροσκοπικά με την ύπαρξη ρευμάτων, είτε σε ατομικό επίπεδο με την κίνηση ηλεκτρονίων και άλλων σωματιδίων στο εσωτερικό μαγνητικών υλικών. Έτσι λοιπόν, ενώ η ύπαρξη μαγνήτη στο χώρο συνεπάγεται αυτομάτως και την δημιουργία μαγνητικού πεδίου, αντιστρόφως, ή ύπαρξη ενός μαγνητικού πεδίου στο χώρο, δεν συνεπάγεται και την ύπαρξη μαγνήτη σ’ αυτόν.

Το μαγνητικό πεδίο ορίζεται από το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου, η οποία ονομάζεται **μαγνητική επαγωγή**, και συμβολίζεται με ***B*** (Young & Freedman, 2010). Η μαγνητική επαγωγή *B*, συχνά αναφέρεται και ως ένταση του μαγνητικού πεδίου (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992). Το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου ***B***, μπορεί να περιγραφεί με τρόπο ανάλογο του ηλεκτρικού πεδίου ***E***, θεωρώντας δυναμικές γραμμές στον τριγύρω χώρο, οι οποίες ονομάζονται **μαγνητικές δυναμικές γραμμές** (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές ξεκινούν πάντα από τον βόρειο πόλο του μαγνήτη, και καταλήγουν στο νότιο πόλο, όπως φαίνεται στο σχ. 8.2. Το διάνυσμα ***B*** του μαγνητικού πεδίου είναι πάντα εφαπτόμενο των δυναμικών γραμμών.



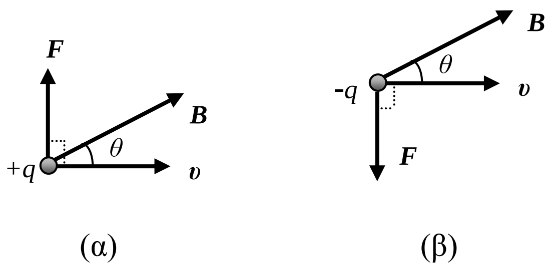
Σχήμα 8.2 *Μαγνητικές δυναμικές γραμμές ενός μαγνητικού διπόλου.*

Όταν ένα μαγνητικό δίπολο δηλ. ένας ραβδόμορφος φυσικός μαγνήτης, ή ένα κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο με ταχύτητα ***υ***, ευρεθεί μέσα στο χώρο ενός μαγνητικού πεδίου, ασκείται πάνω του μια μαγνητική δύναμη. Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης πάνω σε κινούμενο φορτίο μέσα σε μαγνητικό πεδίο επαγωγής ***B***, είναι ανάλογο της ταχύτητας *υ* του φορτίου *q*, και της έντασης του μαγνητικού πεδίου *B*, ενώ εξαρτάται επίσης και από την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα ***υ*** και ***B***. Η κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα ***υ*** και ***B***, με φορά αυτή του δεξιόστροφου κοχλία (δεξιόστροφη βίδα). Οι παραπάνω ιδιότητες της μαγνητικής δύναμης, εκφράζονται μαθηματικά από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων ***υ*** και ***B***. Συγκεκριμένα, το διάνυσμα της μαγνητικής δύναμης ***F*** ορίζεται ως

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B} \qquad (8.1)$$

(Benumof, 1961), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Grant & Phillips, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Kraus, 1993), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Βάσει της εξίσωσης 8.1, η κατεύθυνση της δύναμης εξαρτάται από τον προσανατολισμό του διανύσματος ***υ*** ως προς το μαγνητικό πεδίο ***B***, έτσι όπως φαίνεται στο σχ. 8.3. Το μέτρο της μαγνητικής δύναμης *F* πάνω στο φορτίο *q*, εξαρτάται από το μέγεθος του φορτίου *q*, το μέτρο των ***υ*** και ***B***, και την μεταξύ τους γωνία *θ*, μέσω της σχέσης

$$F = q\upsilon B\sin\theta \qquad (8.2)$$



Σχήμα 8.3 *(α) Το διάνυσμα της μαγνητικής δύναμης πάνω σε ηλεκτρικό φορτίο είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα **υ** και **B**. (β) Η μαγνητική δύναμη πάνω σε αρνητικό φορτίο, είναι αντίθετη απ’ αυτή πάνω σε θετικό.*

Η μέγιστη μαγνητική δύναμη πάνω στο φορτίο συμβαίνει για την περίπτωση που η ταχύτητα είναι κάθετη στην μαγνητική επαγωγή ($\boldsymbol{\upsilon} \perp \boldsymbol{B}$, sin$\theta$=1). Αντιθέτως, όταν η ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ είναι παράλληλη του $\boldsymbol{B}$, ($\boldsymbol{\upsilon} \| \boldsymbol{B}$, sin$\theta$=0) η μαγνητική δύναμη είναι μηδέν.

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να επισημάνουμε μερικές βασικές διαφορές μεταξύ της ηλεκτρικής και της μαγνητικής δύναμης.

1) Η ηλεκτρική δύναμη είναι παράλληλη ή αντιπαράλληλη του διανύσματος της έντασης $\boldsymbol{E}$ του πεδίου, ενώ η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στο διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής $\boldsymbol{B}$.
2) Η μαγνητική δύναμη ασκείται μόνο πάνω σε κινούμενα φορτία, και ποτέ σε ακίνητα. Αντιθέτως η ηλεκτρική δύναμη ασκείται πάνω σε όλα τα φορτία, κινούμενα και ακίνητα.
3) Η μαγνητική δύναμη που προέρχεται από σταθερό πεδίο $\boldsymbol{B}$ δεν παράγει έργο, διότι η $\boldsymbol{F}$ είναι πάντα κάθετη στην $\boldsymbol{\upsilon}$, και επομένως και στην μετατόπιση του φορτίου. Αντιθέτως, η ηλεκτρική δύναμη πάντα είτε καταναλώνει, είτε παράγει έργο πάνω στα φορτία.

Η μονάδα μέτρησης του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ στο ΔΣΜ, είναι το Tesla (T), προς τιμήν του Αμερικανοσέρβου φυσικού και εφευρέτη Nikola Tesla (1856-1943), ο οποίος μεταξύ άλλων, εισήγαγε την εφαρμογή του εναλλασσομένου ρεύματος, αλλά εφηύρε και την ασύρματη επικοινωνία. Πεδίο έντασης 1 T είναι το μαγνητικό πεδίο, το οποίο ασκεί δύναμη 1 N σε ηλεκτρικό φορτίο 1 C, που κινείται με ταχύτητα 1 m/s και διεύθυνση κάθετη στο μαγνητικό πεδίο. Μια άλλη μονάδα μέτρησης του μαγνητικού πεδίου είναι το Gauss (G), όπου 1 T = 10^4 G. Το μαγνητικό πεδίο της Γης, η οποία όπως γνωρίζουμε είναι ένας τεράστιος φυσικός μαγνήτης, κυμαίνεται μεταξύ 25 και 65 mT. Ο νότιος μαγνητικός πόλος της Γης είναι κοντά στο βόρειο γεωγραφικό, και αντιθέτως ο βόρειος μαγνητικός πόλος είναι κοντά στο νότιο γεωγραφικό πόλο στην Ανταρτική (Serway & Jewett, 2013). Το γήινο μαγνητικό πεδίο είναι μία από τις αιτίες ύπαρξης ζωής, μιας και εκτρέπει την θανατηφόρα για μας κοσμική ακτινοβολία, η οποία φθάνει στη Γη από το σύμπαν.

8.3 Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

Ένας ρευματοφόρος αγωγός περιέχει στο εσωτερικό του πολλά κινούμενα φορτία (ελεύθερα ηλεκτρόνια), και επομένως όταν ευρεθεί μέσα σε μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$, πάνω σε κάθε φορτίο, αλλά κατά συνέπεια και πάνω στον αγωγό, ασκείται συνολικά μια μαγνητική δύναμη. Εάν ο αγωγός έχει μήκος l, διατομή A, και διαρρέεται από ρεύμα I, τότε ο ολικός αριθμός των φορέων φορτίου του αγωγού είναι nAl, όπου n είναι ο αριθμός των φορέων φορτίου ανά μονάδα όγκου. Η ολική μαγνητική δύναμη στον αγωγό είναι το άθροισμα των μαγνητικών δυνάμεων πάνω σε όλα τα κινούμενα φορτία του. Δηλαδή, εάν η δύναμη πάνω σε ένα φορτίο του αγωγού δίνεται από την εξ. 8.1, τότε η ολική μαγνητική δύναμη $\boldsymbol{F}$ πάνω στον αγωγό είναι

$$\boldsymbol{F} = (q\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B})nAl \qquad (8.3)$$

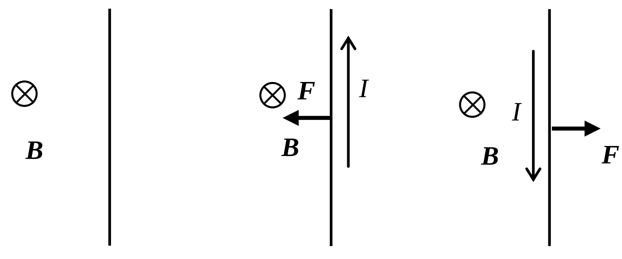
Από την πυκνότητα ρεύματος $\boldsymbol{J}$ (εξ. 6.5) ενός αγωγού διατομής A που διαρρέεται από ρεύμα I, μπορούμε να γράψουμε

$$I = nq\upsilon_q A \qquad (8.4)$$

Τότε η μαγνητική δύναμη πάνω στον αγωγό γράφεται ως

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \qquad (8.5)$$

διότι η ταχύτητα υ_q έχει την διεύθυνση του μήκους του αγωγού l (Sears, 1951), (Kraus, 1993), (Halliday, Resnick & Krane, 2009) (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Το διάνυσμα $\boldsymbol{l}$ είναι το διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση του ρεύματος I, δηλαδή ίδια με της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$, και μέτρο ίσο με το μήκος l του αγωγού (βλ. σχ. 6.1). Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για ευθύγραμμο αγωγό σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Η δύναμη είναι πάντα κάθετη στον ρευματοφόρο αγωγό, και η φορά της εξαρτάται από την φορά του ρεύματος, όπως φαίνεται στο σχ. 8.4. Η κατεύθυνση της $\boldsymbol{F}$ μπορεί να ευρεθεί με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία, ή αλλιώς τον κανόνα του δεξιού χεριού. Προσέξτε ότι, εάν το ρεύμα έχει



Σχήμα 8.4 *Δύναμη πάνω σε ρευματοφόρο αγωγό ο οποίος ευρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, κάθετο στον αγωγό. Η φορά της μαγνητικής δύναμης εξαρτάται από την φορά του ρεύματος.*

αντίθετη φορά, η φορά της μαγνητικής δύναμης είναι επίσης αντίθετη.

Παράδειγμα 8.1 Μαγνητική δύναμη σε ρευματοφόρο αγωγό

Μια ευθύγραμμη αγώγιμη ράβδος έχει μάζα m=40.0 g και μήκος l=0.50 m. Η ράβδος είναι οριζόντια και μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε δύο κατακόρυφους οδηγούς από μονωτικό υλικό, όπως δείχνει το σχ. 8.5. Τα άκρα Κ και Λ της ράβδου συνδέονται με πηγή ΗΕΔ, οπότε διαρρέεται από ρεύμα έντασης I=10.0 A. Όλο το σύστημα ευρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$, κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τον ΚΛ και τους κατακόρυφους οδηγούς. α) Ποια είναι η φορά και το μέτρο του μαγνητικού πεδίου ώστε ο αγωγός ΚΛ να ισορροπεί; β) Ποιο πρέπει να είναι το μέτρο του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$, ώστε η ράβδος να κινείται προς τα κάτω με επιτάχυνση α=2.00 m/s^2.

Λύση

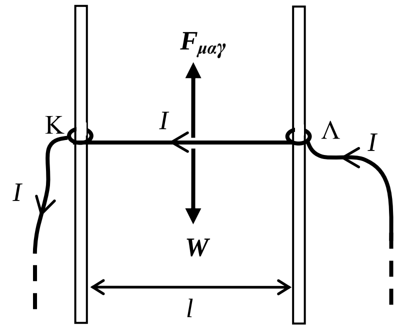
α) Για να ισορροπεί η ράβδος, πρέπει η μαγνητική δύναμη να αναιρεί την δύναμη του βάρους, όπως φαίνεται στο σχ. 8.5. Έτσι στην κατάσταση ισορροπίας της ράβδου, ισχύει

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}} + \boldsymbol{W} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}} = -\boldsymbol{W} \Rightarrow$$

$$F_{\mu\alpha\gamma\nu} = W \Rightarrow F_{\mu\alpha\gamma\nu} = mg \qquad (1)$$

Η μαγνητική δύναμη που ασκείται πάνω στον αγωγό είναι

$$\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \Rightarrow F_{\mu\alpha\gamma\nu} = IlB \qquad (2)$$



Σχήμα 8.5 *Οριζόντια ρευματοφόρα ράβδος μπορεί να κινείται ελεύθερα κατακόρυφα μέσα σε κάθετο μαγνητικό πεδίο (παράδειγμα 8.1).*

Για να είναι η μαγνητική δύναμη αντίθετη της βαρυτικής, δηλ. να έχει φορά προς «επάνω», το μαγνητικό πεδίο πρέπει, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, να έχει διεύθυνση κάθετη στον αγωγό και την δύναμη $F_{\mu\alpha\gamma\nu}$, δηλαδή κάθετη στη σελίδα και με φορά προς τα «έξω» (προς τον αναγνώστη).
Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$IlB = mg \Rightarrow B = \frac{mg}{Il} \Rightarrow B = \frac{40\times10^{-3}\text{kg}\times9.81\text{m/s}^2}{10\text{A}\times0.5\text{m}} \Rightarrow B = 7.85\times10^{-2}\text{T}$$

β) Για να κινείται η ράβδος προς τα κάτω με επιτάχυνση α, πρέπει να ισχύει από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}} + \boldsymbol{W} = m\boldsymbol{a} \Rightarrow W - F_{\mu\alpha\gamma\nu} = ma \Rightarrow F_{\mu\alpha\gamma\nu} = W - ma = mg - ma = m(g-a) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$IlB = m(g-a) \Rightarrow B = \frac{m(g-a)}{Il} \Rightarrow B = \frac{40\times10^{-3}\text{kg}(10-2)\text{m/s}^2}{10\text{A}\times0.5\text{m}} \Rightarrow B = 6.24\times10^{-2}\text{T}$$

Το $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετο στην σελίδα και προς τον αναγνώστη.

8.4 Μαγνητική ροή

Όταν δυναμικές μαγνητικές γραμμές ενός πεδίου $\boldsymbol{B}$ διαρρέουν μια επιφάνεια, τότε κατά αναλογία με την ηλεκτρική ροή μπορεί να ορισθεί η **μαγνητική ροή** Φ_B, ως

$$\Phi_B = \int \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dS} \qquad (8.6)$$

ή διαφορετικά

$$\Phi_B = \int BdS\cos\theta \qquad (8.7)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{dS}$ (Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Η μονάδα μέτρησης της μαγνητικής ροής στο ΔΣΜ είναι το 1

Weber (1 Wb), προς τιμήν του Γερμανού φυσικού Wilhelm Eduard Weber (1804–1891). Ισχύει ότι 1 Wb=1 $T \cdot m^2$.

Αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss στον μαγνητισμό όπως και στον ηλεκτρισμό, τότε θα συμπεράνουμε ότι η μαγνητική ροή μέσα από μια κλειστή επιφάνεια είναι πάντοτε ίση με μηδέν, μιας και όσες μαγνητικές δυναμικές γραμμές εξέρχονται της επιφανείας, τόσες και εισέρχονται σ' αυτή. Αυτό συμβαίνει διότι οι μαγνήτες αποτελούνται πάντα από δίπολα (βόρειος και νότιος πόλος), και ποτέ από μονόπολα. Διαφορετικά μπορούμε να ειπούμε ότι είναι αδύνατον να απομονώσουμε έναν βόρειο μαγνητικό πόλο από έναν νότιο, δηλ. δεν μπορούμε να δημιουργήσουμε μονόπολα, ούτε υπάρχουν τέτοια στην Φύση. Έτσι μπορούμε να γράψουμε τον νόμο του Gauss για τον μαγνητισμό ως

$$\Phi_B = \oiint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dS} = 0 \qquad (8.8)$$

Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) (*https://en.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Eduard_Weber#/media/File:Wilhelm_Eduard_Weber_II.jpg*). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

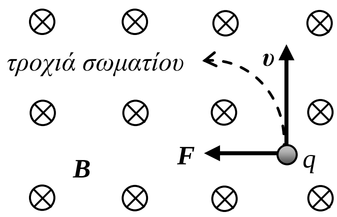
8.5 Κίνηση φορτισμένων σωματίων μέσα σε μαγνητικό πεδίο

Όταν ένα φορτισμένο σωμάτιο $+q$, εισέλθει μέσα σε ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ κάθετη στο πεδίο, τότε βάσει της εξίσωσης 8.1, ασκείται πάνω του μαγνητική δύναμη $\boldsymbol{F}$, η οποία είναι κάθετη στην διεύθυνση κίνησης του σωματίου, όπως φαίνεται στο σχ. 8.6. Η μαγνητική δύναμη μπορεί να αλλάζει την διεύθυνση κίνησης του σωματίου, χωρίς όμως να αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας. Έτσι η μαγνητική δύναμη δρα ως κεντρομόλος δύναμη, και η τροχιά του σωματίου είναι κύκλος. Ισχύει τότε

$$F = q\upsilon B = m\frac{\upsilon^2}{R} \qquad (8.9)$$

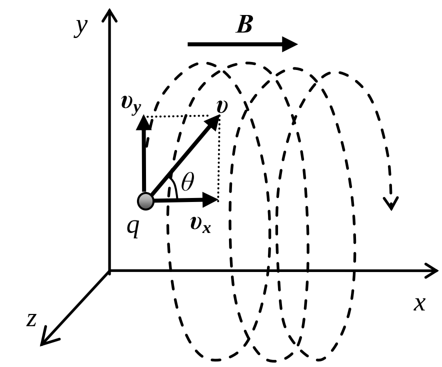
και επομένως η ακτίνα της κυκλικής κίνησης είναι

$$R = \frac{m\upsilon}{qB} \qquad (8.10)$$



Σχήμα 8.6 *Κίνηση θετικά φορτισμένου σωματίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο, το οποίο είναι κάθετο στην ταχύτητα του σωματίου.*

Δηλαδή, η ακτίνα της τροχιάς είναι ανάλογη της ορμής και αντιστρόφως ανάλογη του φορτίου και της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Η γωνιακή συχνότητα περιστροφής δίνεται από τη σχέση



Σχήμα 8.7 *Ελικοειδής κίνηση φορτισμένου σωματίου σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, όπου η ταχύτητα του σωματίου* $\boldsymbol{\upsilon}$ *σχηματίζει γωνία* θ *με το πεδίο* $\boldsymbol{B}$.

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} \overset{(8.10)}{\Rightarrow} \omega = \upsilon\frac{qB}{m\upsilon} \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m} \qquad (8.11)$$

και η περίοδος της περιστροφής είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \overset{(8.11)}{\Rightarrow} T = \frac{2\pi m}{qB} \qquad (8.12)$$

Εάν η ταχύτητα δεν είναι κάθετη στο πεδίο $\boldsymbol{B}$, τότε η κίνηση του σωματίου δεν είναι κυκλική, αλλά ελικοειδής. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχει μια συνιστώσα της ταχύτητας $\upsilon_x = \upsilon\cos\theta$, παράλληλη με το B, η οποία παραμένει σταθερή, και κινεί το σωμάτιο ευθύγραμμα ομαλά προς την διεύθυνση του $\boldsymbol{B}$ (βλ. σχ. 8.7). Αντιθέτως, η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας $\upsilon_y = \upsilon\sin\theta$, είναι κάθετη στο πεδίο $\boldsymbol{B}$, και επομένως πάνω στο φορτίο ασκείται μια κάθετη μαγνητική δύναμη, ίση με

$$F = qv_yB = m\frac{{v_y}^2}{R} \tag{8.13}$$

η οποία παίζει το ρόλο της κεντρομόλου και εξαναγκάζει το φορτίο σε κυκλική κίνηση στο επίπεδο *yz*. Τελικά ο συνδυασμός της κυκλικής κίνησης και της ευθύγραμμης ομαλής κατά μήκος του *x* άξονα, δίνει την ελικοειδή κίνηση που φαίνεται στο σχ. 8.7.

Παράδειγμα 8.2 Κίνηση ηλεκτρονίων σε μαγνητικό πεδίο

Μια δέσμη ηλεκτρονίων της οποίας η κινητική ενέργεια είναι *K*, εξέρχεται από μικρή οπή η οποία ευρίσκεται στο άκρο σωλήνα επιτάχυνσης. Σε απόσταση *d* από το σημείο εξόδου είναι τοποθετημένη μια μεταλλική πλάκα, κάθετα στην διεύθυνση της δέσμης, όπως φαίνεται στο σχ. 8.8. α) Δείξτε ότι τα ηλεκτρόνια δεν φτάνουν στην πλάκα, εάν εφαρμόσουμε μαγνητικό πεδίο τέτοιο ώστε $B > \sqrt{2m_eK/e^2d^2}$, όπου m_e και e είναι η μάζα και το φορτίο του ηλεκτρονίου αντίστοιχα. β) Ποια πρέπει να είναι η διεύθυνση και φορά του πεδίου ***B***;

Λύση

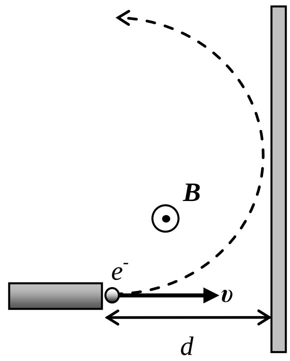
α) Τα ηλεκτρόνια καθώς βγαίνουν από τον σωλήνα επιτάχυνσης έχουν κινητική ενέργεια

$$K = \frac{1}{2}m_e v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m_e}} \tag{1}$$

Για να μην φθάσουν τα ηλεκτρόνια στην κάθετη πλάκα, θα πρέπει μια δύναμη να τα εκτρέπει από την αρχική τους πορεία. Εάν εφαρμόσουμε ένα μαγνητικό πεδίο κάθετο στην ταχύτητα *υ*, όπως δείχνει το σχ. 8.8, μια μαγνητική δύναμη μέτρου

$$F_B = evB \tag{2}$$

θα ασκηθεί πάνω στα ηλεκτρόνια. Επειδή η δύναμη είναι σταθερή και πάντα κάθετη στην ταχύτητα, δρα ως κεντρομόλος δύναμη, αναγκάζοντας τα ηλεκτρόνια να πραγματοποιήσουν κυκλική ομαλή κίνηση. Η μαγνητική δύναμη είναι δηλαδή κεντρομόλος δύναμη, οπότε ισχύει



Σχήμα 8.8 *Κίνηση ηλεκτρονίων με ταχύτητα υ μέσα σε μαγνητικό πεδίο B που τα εκτρέπει σε κυκλική τροχιά (παράδειγμα 8.2).*

$$F_B = m_e\frac{v^2}{r} \overset{(2)}{\Rightarrow} evB = m_e\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m_e v}{eB} \tag{3}$$

Για να μην φθάνουν ηλεκτρόνια στην μεταλλική πλάκα, η ακτίνα *r* πρέπει να είναι μικρότερη της απόστασης *d*. Άρα πρέπει να ισχύει

$$r < d \Rightarrow \frac{m_e v}{eB} < d \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{m_e}{eB}\sqrt{\frac{2K}{m_e}} < d \Rightarrow \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_eK}{e^2}} < d \Rightarrow \frac{1}{d}\sqrt{\frac{2m_eK}{e^2}} < B \Rightarrow B > \sqrt{\frac{2m_eK}{e^2d^2}}$$

β) Η διεύθυνση του ***B*** πρέπει να είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα ***υ*** των ηλεκτρονίων, ανεξαρτήτου φοράς. Για παράδειγμα προσέξτε, ότι αν το πεδίο είχε αντίθετη φορά από αυτή του σχήματος 8.8, τα ηλεκτρόνια θα διέγραφαν ξανά κυκλική τροχιά, κάτω όμως από τον οριζόντιο σωλήνα. Ομοίως υπάρχουν άπειρες κυκλικές τροχιές στο χώρο, οι οποίες δεν επιτρέπουν στα ηλεκτρόνια να φθάσουν στην πλάκα για μέτρο του μαγνητικού πεδίου $B > \sqrt{2m_eK/e^2d^2}$. Αυτό συμβαίνει επειδή υπάρχουν άπειρες διευθύνσεις, όπου το ***B*** είναι κάθετο στην ταχύτητα ***υ***.

8.6 Κίνηση φορτισμένων σωματίων σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Υπάρχουν περιπτώσεις που ένα φορτισμένο σωμάτιο κινείται σε χώρο όπου υπάρχουν ταυτοχρόνως ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, ***E*** και ***B*** αντιστοίχως. Ο συνδυασμός ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ονομάζεται **ηλεκτρομαγνητικό πεδίο**. Τότε το φορτισμένο σωμάτιο υπόκειται ταυτοχρόνως σε ηλεκτρική και μαγνητική δύναμη την επονομαζόμενη **ηλεκτρομαγνητική δύναμη** (Feynman, Leighton & Sands, 2009). Η ηλεκτρομαγνητική δύναμη η οποία ασκείται πάνω στο φορτισμένο σωμάτιο είναι

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{\upsilon} \times \boldsymbol{B} \qquad (8.14)$$

και ονομάζεται **δύναμη Lorentz** προς τιμήν του Ολλανδού φυσικού Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), ο οποίος το 1902 βραβεύτηκε με το βραβείο Nobel για τις μελέτες του στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (Grant & Phillips, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Serway & Jewett, 2013). Η δύναμη Lorentz συμβάλει σημαντικά σε αρκετές τεχνολογικές εφαρμογές, όπως είναι ο διαχωριστής ταχυτήτων σωματίων, και ο φασματογράφος μάζας (Bainbridge), τα οποία θα περιγραφθούν εν συντομία παρακάτω.

Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jan_Veth05.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

8.7 Εφαρμογές της κίνησης φορτισμένων σωματίων σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

8.7.1 Επιλογέας ταχυτήτων- πείραμα Thomson

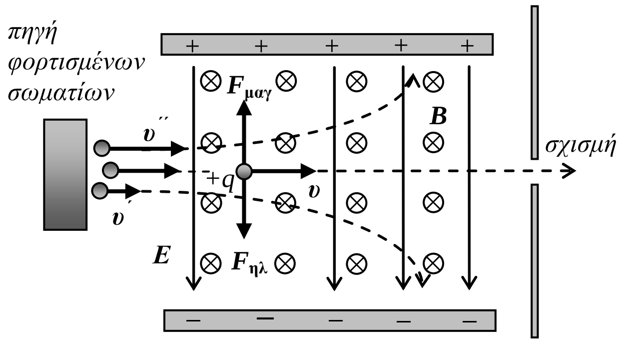
Σε κάποια πειράματα φυσικής είναι αναγκαίος ο διαχωρισμός φορτισμένων σωματίων αναλόγως με την ταχύτητά τους. Γι' αυτό τον σκοπό χρησιμοποιούμε μια διάταξη με ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο κάθετα μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο σχ. 8.9. Όταν ένα θετικό φορτίο με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ εισέλθει καθέτως στα πεδία $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$, τότε η ηλεκτρική δύναμη qE το εκτρέπει προς τα κάτω, ενώ η μαγνητική δύναμη $q\upsilon B$ το εκτρέπει προς τα επάνω. Εάν ρυθμίζοντας τις τιμές των πεδίων E και B, καταφέρουμε να αντισταθμίσουμε τις δυο αντίθετες αυτές δυνάμεις, τότε ισχύει

$$\boldsymbol{F}_{\eta\lambda} + \boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma} = 0 \qquad (8.15)$$

και επομένως

$$qE = q\upsilon B \Rightarrow \upsilon = \frac{E}{B} \qquad (8.16)$$

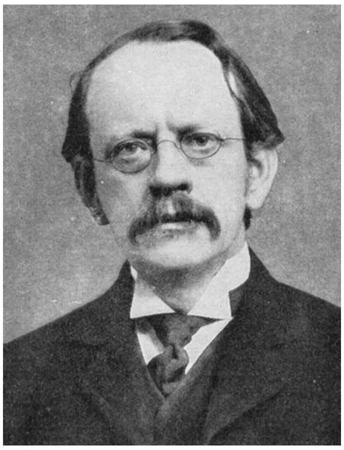
Τα σωμάτια με ταχύτητα υ κινούνται ευθύγραμμα, δίχως να αποκλίνουν από τα πεδία. Αλλάζοντας καταλλήλως το πηλίκο E/B, μπορούμε να παίρνουμε σωμάτια με ταχύτητα της δικής μας επιλογής. Με άλλα λόγια ο συνδυασμός των πεδίων E και B αποτελεί ένα φίλτρο επιλογής ταχυτήτων των σωματίων, μιας και σωμάτια με διαφορετική ταχύτητα από την υ, δεν μπορούν να κινηθούν ευθύγραμμα και να βγουν από τον χώρο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, περνώντας από την σχισμή του πετάσματος του σχήματος 8.9. Συγκεκριμένα, εάν ένα φορτίο έχει ταχύτητα $\upsilon'' > \upsilon$, τότε η μαγνητική δύναμη υπερισχύει της ηλεκτρικής και το φορτισμένο σωμάτιο αποκλίνει προς τα επάνω, χωρίς να φθάνει ποτέ στην σχισμή. Αντιθέτως, εάν το φορτίο έχει ταχύτητα $\upsilon' < \upsilon$, τότε η ηλεκτρική δύναμη υπερισχύει της μαγνητικής και το φορτίο αποκλίνει προς τα κάτω.



Σχήμα 8.9 *Διαχωριστής φορτισμένων σωματίων με βάση τις ταχύτητές τους. Τα σωματίδια με $\upsilon = E/B$ διαπερνούν τον διαχωριστή ευθύγραμμα. Τα σωμάτια με ταχύτητες $\upsilon'' > \upsilon$ αποκλίνουν προς τα επάνω, ενώ αυτά με $\upsilon' < \upsilon$ αποκλίνουν προς τα κάτω. Οι δυνάμεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου αλλάζουν φορά εάν τα σωματίδια έχουν αρνητικό φορτίο.*

Το 1897, ο Άγγλος φυσικός Joseph John Thomson (1856-1940), χρησιμοποίησε έναν επιλογέα ταχυτήτων για να μετρήσει τον λόγο e/m_e του ηλεκτρονίου. Τα ηλεκτρόνια εκπέμπονταν από ένα θερμαινόμενο μεταλλικό νήμα και επιταχύνονταν από ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο δημιουργούνταν μεταξύ δύο επιπέδων πλακών. Η όλη διάταξη ευρισκόταν μέσα σε γυάλινο σωλήνα υπό κενό, ώστε τα ηλεκτρόνια να μην αλληλεπιδρούν με τον αέρα, και να αποκτούν κινητική ενέργεια ίση με την ηλεκτρική δυναμική eV και τελική ταχύτητα *υ*. Τότε από την αρχή διατήρηση της ενέργειας μπορεί να γραφθεί ότι

$$\frac{1}{2}m_e\upsilon^2 = eV \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{2eV}{m_e} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} \qquad (8.17)$$



Joseph John Thomson (1856-1940) (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:J.J_Thomson.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

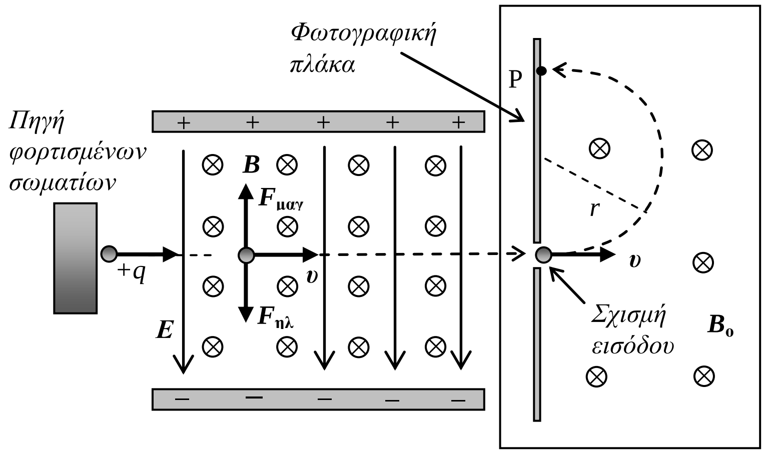
Στη συνέχεια η ηλεκτρονιακή δέσμη κατευθυνόταν σε έναν επιλογέα ταχυτήτων, όπως αυτόν του σχήματος 8.9, με δύο κάθετα προς την δέσμη πεδία· ένα μαγνητικό πεδίο *B* και ένα ηλεκτρικό *E*. Αναλόγως ποιά δύναμη ήταν πιο ισχυρή, η ηλεκτρονιακή δέσμη απέκλινε κατακόρυφα προς τα κάτω για $\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma} > \boldsymbol{F}_{\eta\lambda}$, ή προς τα πάνω για $\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma} < \boldsymbol{F}_{\eta\lambda}$. Η απόκλιση φαινόταν πάνω σε φθορίζουσα οθόνη, όπου τα ηλεκτρόνια προσέπιπταν σε σημείο από όπου στην συνέχεια εκπέμπονταν φως. Ρυθμίζοντας τα πεδία ***E*** και ***B***, έτσι ώστε η ηλεκτρική και η μαγνητική δύναμη να αντισταθμίζει η μία την άλλη, τα ηλεκτρόνια δεν απέκλιναν αλλά δημιουργούσαν μια οριζόντια ηλεκτρονιακή δέσμη. Για μη απόκλιση της ηλεκτρονιακής δέσμης, ισχύει η σχέση $\upsilon = E/B$, οπότε η εξ. 8.17 δίνει

$$\frac{E}{B} = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}} \Rightarrow \left(\frac{E}{B}\right)^2 = \frac{2eV}{m_e} \Rightarrow \frac{e}{m_e} = \frac{E^2}{2VB^2} \qquad (8.18)$$

Επειδή όλα τα φυσικά μεγέθη στο δεξιό μέρος της εξ. 8.18 καθορίζονται πειραματικώς, είναι εφικτός ο υπολογισμός του λόγου του φορτίου του ηλεκτρονίου προς την μάζα του. Ο λόγος e/m_e που υπολόγισε ο Thomson, είναι ίσος με 1.7×10^{11} C/kg, και η μέτρησή του αποτέλεσε στην ουσία την ανακάλυψη του πρώτου υποατομικού σωματιδίου, το οποίο ονομάστηκε **ηλεκτρόνιο**. Για αυτήν την ανακάλυψή του ο Thomson τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ της Φυσικής, το 1906. Ο ίδιος συνέβαλε επίσης στην παραγωγή ηλεκτρισμού με χρήση αερίων, και επιπλέον εφηύρε τον φασματογράφο μάζας που παρουσιάζουμε αμέσως πιο κάτω. Ο Thomson εκτός της εξαίρετης ερευνητικής του συνεισφοράς στην επιστήμη, ήταν και ένας εξαίρετος διδάσκαλος, μιας και αρκετοί μαθητές του όπως οι Bragg, Barkla, Bohr, Wilson, Richardson και Born τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ στη Φυσική. Κάποιοι άλλοι, όπως οι Rutherford και Aston τιμήθηκαν με βραβείο Νόμπελ στην Χημεία. Ο ίδιος ο υιός του ο George Paget Thomson, τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ στη Φυσική το 1937.

8.7.2 Φασματογράφος μάζας

Ο **φασματογράφος μάζας** είναι συσκευή που διαχωρίζει τα ατομικά και μοριακά ιόντα αναλόγως τον λόγο *m/q* (Sears, 1951), (Alonso & Finn, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Αποτελείται από έναν διαχωριστή ταχυτήτων με ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο *E* και *B* αντίστοιχα, και από ένα επιπλέον μαγνητικό πεδίο B_o , όπως φαίνεται στο σχ. 8.10. Τα φορτισμένα σωμάτια (ιόντα), εφόσον περάσουν την σχισμή εξόδου του διαχωριστή ταχυτήτων με ταχύτητα $\upsilon = E/B$, εισέρχονται με την ίδια σταθερή ταχύτητα *υ* κάθετα στο πεδίο $\boldsymbol{B}_o$. Τότε λόγω της νέας μαγνητικής δύναμης που ασκείται πάνω τους, εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση με την μαγνητική δύναμη να παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Στην πραγματικότητα τα ιόντα διαγράφουν ημικυκλική κίνηση, διότι όταν προσκρούσουν στην φωτογραφική



Σχήμα 8.10 *Φασματογράφος μάζας φορτισμένων σωματίων. Τα φορτισμένα σωμάτια (ιόντα), αφού περάσουν από έναν διαχωριστή ταχυτήτων, εισέρχονται καθέτως σε μαγνητικό πεδίο B_o, όπου διαγράφουν κυκλική τροχιά και τελικά ανιχνεύονται σε φωτογραφική πλάκα (σημείο P).*

πλάκα [23], η οποία και τα ανιχνεύει, σταματούν (σημείο P στο σχ. 8.10). Ισχύει λοιπόν ότι

$$F_{\kappa} = \frac{m\upsilon^2}{r} = q\upsilon B_{o} \Rightarrow r = \frac{m\upsilon}{qB_{o}} \qquad (8.19)$$

Η εξ. 8.19 από την 8.16 γίνεται

$$r = \frac{mE}{qBB_{o}} \qquad (8.20)$$

Από την εξ. 8.20 συμπεραίνουμε ότι, στην διάταξη του φασματογράφου μάζας, μεταξύ ιόντων ίσου φορτίου, αυτά με την μεγαλύτερη μάζα διαγράφουν πορείες με μεγαλύτερες ακτίνες. Από την εξ. 8.20 παίρνουμε

$$\frac{m}{q} = \frac{rBB_{o}}{E} \qquad (8.21)$$

Μετρώντας λοιπόν πειραματικά την ακτίνα απόκλισης r ενός ιόντος από το ίχνος που αυτό αφήνει πάνω στην πλάκα και γνωρίζοντας τα πεδία E,B και B_o, μπορούμε να καθορίσουμε το λόγο m/q του ιόντος. Στην πράξη με τον φασματογράφο μάζας ανιχνεύουμε ιόντα διαφορετικής μάζας και ίσου φορτίου, όπως πχ είναι τα ισότοπα στοιχείων. Ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε το q, μπορούμε να μετρήσουμε τον λόγο των μαζών των ισοτόπων μετρώντας τον λόγο των ακτινών τους.

Παράδειγμα 8.3 Ανίχνευση ιόντων νέου

Το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα στις πλάκες ενός επιλογέα ταχυτήτων σε ένα φασματογράφο μάζας Bainbridge, είναι E=1.2×10^6 V/m, ενώ το μαγνητικό πεδίο και στις δυο περιοχές, είναι 0.60 T. Μια δέσμη ιόντων νέου με φορτίο $+e$, κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας 0.728 m μέσα στο μαγνητικό πεδίο του φασματογράφου. Προσδιορίστε την μάζα ενός ιόντος νέου και τον μαζικό αριθμό αυτού του ισοτόπου.

Λύση

Για να περνά η δέσμη των ιόντων από τον επιλογέα ταχυτήτων, πρέπει η μαγνητική δύναμη να είναι ίση με την ηλεκτρική

$$\boldsymbol{F}_{\eta\lambda} = \boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma} \Rightarrow eE = e\upsilon B \Rightarrow \upsilon = \frac{E}{B} \qquad (1)$$

Όταν τα ιόντα εισέρχονται στο χώρο του φασματογράφου κάθετα στο πεδίο B, διαγράφουν ημικυκλική τροχιά, έτσι ώστε να ισχύει

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = e\upsilon B \Rightarrow m = \frac{eBr}{\upsilon} \qquad (2)$$

Η εξ. 1 στην 2 δίνει

$$m = \frac{eB^2 r}{E} \Rightarrow m = \frac{1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times(0.6\mathrm{T})^2\times0.728\mathrm{m}}{1.2\times10^6\,\mathrm{N/m}} \Rightarrow m = 3.49\times10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

Γνωρίζουμε ότι η μάζα του πρωτονίου είναι περίπου ίση με αυτή του νετρονίου. Έτσι διαιρώντας την μάζα του ισοτόπου με αυτή του πρωτονίου, m_p=1.67×10^{-26} kg, μπορούμε να εύρουμε τον μαζικό αριθμό του ισοτόπου του νέου. Άρα

$$M = \frac{m}{m_p} \Rightarrow M = \frac{3.49\times10^{-26}\,\mathrm{kg}}{1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}} \Rightarrow M = 20.9 \approx 21$$

Το άτομο του νέου έχει ατομικό αριθμό Z=10, δηλαδή έχει 10 πρωτόνια. Επομένως το ισότοπο της ιοντικής δέσμης έχει 11 νετρόνια.

[23] Οι σύγχρονοι φασματογράφοι δεν χρησιμοποιούν πλέον φωτογραφικές πλάκες για την ανίχνευση, αλλά ειδικές ηλεκτρονικές διατάξεις από δυνόδους, οι οποίες αποτελούν τους λεγόμενους πολλαπλασιαστές ηλεκτρονίων (chaneltrons – τσάνελτρονς).

Παράδειγμα 8.4 Ανίχνευση ισοτόπων ουρανίου

Ένας φασματογράφος μάζας τύπου Bainbridge (Μπέινμπρίτζ) χρησιμοποιείται για την μελέτη των ισοτόπων του ουρανίου. Τα μονοσθενή θετικά ιόντα ουρανίου, εξέρχονται από το φίλτρο ταχυτήτων με ταχύτητα ίση με 3×10^5 m/s, και εισέρχονται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο 0.6 T, το οποίο έχει διεύθυνση κάθετη προς την ταχύτητα των ιόντων, όπως φαίνονται στο σχ. 8.9. Ποια είναι η απόσταση μεταξύ των ιχνών που σχηματίζονται στην φωτογραφική πλάκα του φασματογράφου, από τις κρούσεις των μονοσθενών ιόντων ^{235}U και ^{238}U; Δίνονται η μάζα του πρωτονίου $m_p=1.67\times10^{-27}$ kg και το φορτίο του $e=1.6\times10^{-19}$ C.

Λύση

Τα ιόντα κάνουν ομαλή κυκλική κίνηση μέσα στο μαγνητικό πεδίο B του φασματογράφου, με την μαγνητική δύναμη να παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου. Ισχύει δηλ.

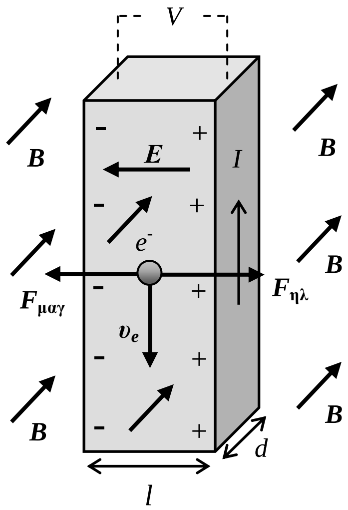
$$e\upsilon B = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m\upsilon}{qB}$$

Το ίχνος που αφήνει κάθε ιόν πάνω στην φωτογραφική πλάκα σε απόσταση d από το σημείο εισόδου του στο μαγνητικό πεδίο, δίνεται από την διάμετρο της ημικυκλικής τροχιάς $d=2r$. Άρα η απόσταση μεταξύ των ιχνών των δυο δεσμών ισοτόπων, θα είναι

$$d_2 - d_1 = 2(r_2 - r_1) = 2(m_{^{238}U} - m_{^{235}U})\frac{\upsilon}{eB} \Rightarrow d_2 - d_1 = \frac{2\times3\times1.67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}\times3\times10^5\,\mathrm{m/s}}{1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}\times0.60\,\mathrm{T}} \Rightarrow d_2 - d_1 = 0.0313\,\mathrm{m}$$

8.7.3 Φαινόμενο Hall*

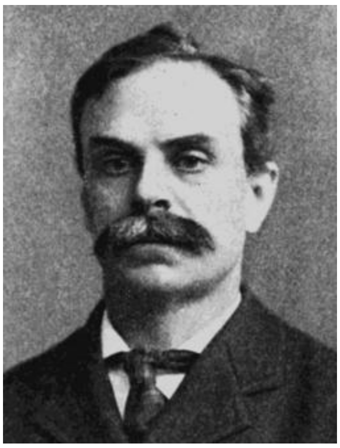
Είδαμε πιο πάνω ότι το μαγνητικό πεδίο μπορεί να εκτρέψει δέσμες ηλεκτρονίων τα οποία κινούνται σε κενό. Το ερώτημα που προκύπτει τώρα, είναι εάν το μαγνητικό πεδίο μπορεί να εκτρέψει ηλεκτρόνια που κινούνται εντός της ύλης, όπως για παράδειγμα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια των αγώγιμων υλικών. Έστω λοιπόν ότι ένα αγώγιμο στερεό ορθογωνίου σχήματος, πλάτους l και πάχους d, διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα I, όπως δείχνει το σχ.8.11. Τα ηλεκτρόνια κινούνται με μια ταχύτητα διολίσθησης $\boldsymbol{\upsilon_q}$ (βλ. κεφάλαιο 6), αντίθετα από την συμβατική φορά του ρεύματος. Εάν το στερεό ευρεθεί μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$, το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια του στερεού, μια μαγνητική δύναμη θα ασκηθεί πάνω στα ηλεκτρόνια ίση με



Σχήμα 8.11 *Αγώγιμο στερεό πάχους d και πλάτους l, ευρίσκεται μέσα σε κάθετο σ' αυτό ομογενές μαγνητικό πεδίο B. Όταν το υλικό διαρρέεται από ρεύμα I, μια τάση V δημιουργείται μεταξύ των άκρων του πλάτους l, η οποία ονομάζεται τάση Hall.*

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{\upsilon_q}\times\boldsymbol{B} \qquad (8.22)$$

Αυτό θα έχει ως συνέπεια τα ηλεκτρόνια να αποκλίνουν προς την μία πλευρά του στερεού, (αριστερή στο σχ. 8.11), φορτίζοντάς την αρνητικά. Αυτομάτως όμως η άλλη πλευρά του στερεού (δεξιά πλευρά), φορτίζεται επαγωγικά θετικά, έτσι ώστε μεταξύ των δύο πλευρών του στερεού να δημιουργείται μια διαφορά δυναμικού, η οποία είναι γνωστή ως **διαφορά δυναμικού Hall** ή **τάση Hall** (Young & Freedman, 2010), (Knight, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Η δημιουργία αυτής της τάσης στα υλικά, ονομάζεται γενικότερα **φαινόμενο Hall**, προς τιμήν του Αμερικανού φυσικού Edwin H. Hall (1855-1938), ο οποίος το 1879, στην προσπάθειά του να μετρήσει το πρόσημο και την πυκνότητα των φορέων φορτίου σε έναν ρευματοφόρο αγωγό, πρώτος παρατήρησε το φαινόμενο (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Ashcroft & Mermin, 1976), (Kittel, 2005), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Η τάση Hall έχει ως συνέπεια την δημιουργία ενός ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ μέσα στο στερεό, το οποίο σταδιακά αντιτίθεται στην εκτροπή των



Edwin Herbert Hall (1855-1938)

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PSM_V64_D380_Edwin_H_Hall.png). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

ηλεκτρονίων προς την αριστερή πλευρά με το αρνητικό δυναμικό. Με άλλα λόγια, όσο περισσότερα ηλεκτρόνια καταφθάνουν στην αρνητικά φορτισμένη πλευρά του στερεού, τόσο μεγαλώνει το πεδίο ***E***, και τόσο πιο δύσκολο είναι για τα επόμενα ηλεκτρόνια να φθάσουν στην αριστερή πλευρά. Στην πραγματικότητα, τα ηλεκτρόνια υπόκεινται σε μια δύναμη Lorentz (εξ. 8.14), που αποτελείται από δυο αντίθετες δυνάμεις μεταξύ τους, μια μαγνητική και μια ηλεκτρική (βλ. σχ. 8.11). Καθώς μεγαλώνει σταδιακά το ηλεκτρικό πεδίο, σε κάποια χρονική στιγμή, η ηλεκτρική δύναμη γίνεται ίση και αντίθετη της μαγνητικής, οπότε ισχύει

$$\boldsymbol{F} = e^{-}\boldsymbol{E} + e^{-}\boldsymbol{\upsilon_e} \times \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow -e\boldsymbol{E} - e\boldsymbol{\upsilon_e} \times \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow e\boldsymbol{E} = -e\boldsymbol{\upsilon_e} \times \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\upsilon_e} \times \boldsymbol{B} \qquad (8.23)$$

Επειδή η ταχύτητα διολίσθησης των ηλεκτρονίων είναι πάντα κάθετη στο μαγνητικό πεδίο, από την εξ. 8.23 μπορούμε να γράψουμε για το ηλεκτρικό πεδίο

$$E = \upsilon_e B \qquad (8.24)$$

Ας ιδούμε τώρα πως ο Hall υπολόγισε την πυκνότητα n των φορέων ηλεκτρικού ρεύματος, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι η πυκνότητα των ελευθέρων ηλεκτρονίων του στερεού. Στο κεφάλαιο 6 είδαμε ότι η πυκνότητα του ρεύματος σ’ ένα ρευματοφόρο αγωγό δίνεται από την εξ. 6.5, $J = nq\upsilon_q$, η οποία για την περίπτωση των ελευθέρων ηλεκτρονίων γίνεται

$$J = ne\upsilon_e \qquad (8.25)$$

Γράφοντας τώρα την πυκνότητα ρεύματος ως το πηλίκο έντασης ρεύματος προς διατομή του αγωγού, έχουμε

$$J = \frac{I}{ld} \qquad (8.26)$$

Από την εξ. 8.24 παίρνουμε για την ταχύτητα διολίσθησης των ελευθέρων ηλεκτρονίων

$$\upsilon_e = \frac{E}{B} \qquad (8.27)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 8.26 και 27 στην εξ. 8.25, παίρνουμε

$$\frac{I}{ld} = ne\frac{E}{B} \Rightarrow n = \frac{IB}{eEld} \qquad (8.28)$$

Εάν μετρήσουμε την τάση Hall V με ένα βολτόμετρο, και την θεωρήσουμε ως

$$V = El \qquad (8.29)$$

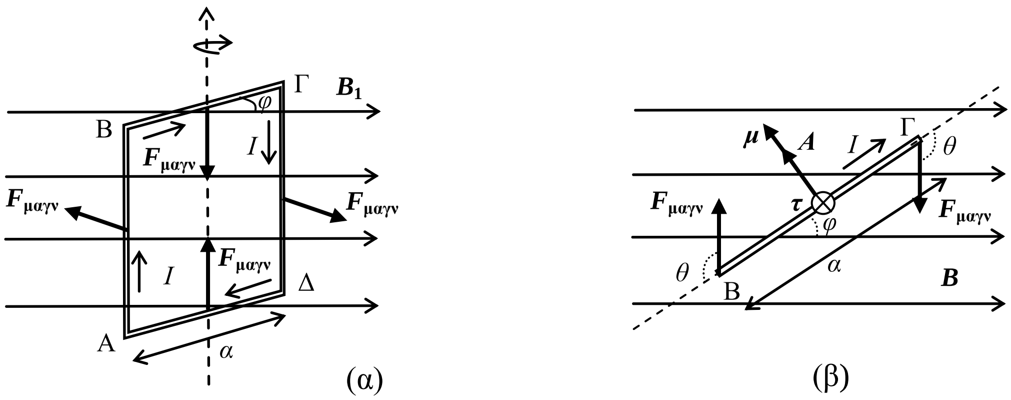
τότε αντικαθιστώντας την εξ. 8.29 στην 8.28, παίρνουμε για την πυκνότητα των ελευθέρων ηλεκτρονίων του αγωγού

$$n = \frac{IB}{eVd} \qquad (8.30)$$

Όλες οι παράμετροι στην εξ. 8.30 είναι πειραματικά μετρήσιμες, οπότε ο υπολογισμός της πυκνότητας των ελευθέρων ηλεκτρονίων του υλικού του αγωγού είναι εφικτός. Γενικά το φαινόμενο Hall είναι εξαιρετικά χρήσιμο στην κατανόηση της ηλεκτρικής αγωγιμότητας, τόσο στους αγωγούς, όσο και στους ημιαγωγούς. Για κάποια μονοατομικά μέταλλα όπως το νάτριο, το κάλιο, ο χαλκός, ο άργυρος κ.α., το φαινόμενο Hall υποδεικνύει ότι κάθε άτομο του υλικού συνεισφέρει ένα ηλεκτρόνιο στην αγωγιμότητα. Για κάποια άλλα μέταλλα, ο αριθμός των συνεισφερομένων ηλεκτρονίων ανά άτομο, μπορεί να είναι μεγαλύτερος ή και μικρότερος της μονάδας. Επίσης για μερικά μέταλλα, όπως το βηρύλλιο και ο ψευδάργυρος, η τάση Hall δείχνει ότι οι φορείς φορτίου έχουν θετικό πρόσημο, δηλ. στην αγωγιμότητα συνεισφέρουν περισσότερο οι ηλεκτρικές οπές παρά τα ηλεκτρόνια. Επιπλέον είναι γεγονός, ότι στην αγωγιμότητα κάποιων υλικών αλλά και στους ημιαγωγούς, συνεισφέρουν τόσο τα ηλεκτρόνια όσο και οι οπές. Σ’ αυτές τις περιπτώσεις για την ερμηνεία της αγωγιμότητας, το κλασσικό φαινόμενο Hall δεν είναι αρκετό, αλλά απαιτείται και η κβαντική θεώρηση του φαινομένου (Kittel, 2005), (Halliday, Resnick & Krane, 2009).

8.8 Ροπή σε ρευματοφόρο βρόχο και μαγνητική διπολική ροπή*

Στο κεφάλαιο 4 είδαμε ότι, όταν ένα ηλεκτρικό δίπολο ευρεθεί εντός ηλεκτρικού πεδίου, ασκείται πάνω του ροπή $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$, η οποία τείνει να το περιστρέψει και τελικά να το ευθυγραμμίσει με το ηλεκτρικό πεδίο. Την διανυσματική ποσότητα $\boldsymbol{p}$ την ονομάσαμε ηλεκτρική διπολική ροπή. Εντελώς αντίστοιχα, ένα μαγνητικό δίπολο ή ένας ρευματοφόρος βρόχος, όταν ευρεθεί εντός μαγνητικού πεδίου θα ασκηθεί επάνω του μαγνητική δύναμη, η οποία υπό προϋποθέσεις μπορεί να δημιουργήσει ροπή, τέτοια ώστε να περιστρέψει το μαγνητικό δίπολο [24] ή τον ρευματοφόρο βρόχο. Ας αναλύσουμε αυτήν την περιστροφή στην περίπτωση του ρευματοφόρου βρόχου ΑΒΓΔ, ο οποίος για ευκολία έχει ένα τετραγωνικό σχήμα με πλευρά μήκους α, και ευρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$, όπως δείχνει το σχ. 8.12α. Ο βρόχος είναι κατακόρυφα προσανατολισμένος μέσα στο πεδίο, ενώ το επίπεδό του σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα $\boldsymbol{B}$.



Σχήμα 8.12 *(α) Τετραγωνικός ρευματοφόρος βρόχος ΑΒΓΔ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο **B**, το οποίο σχηματίζει γωνία φ με την επιφάνεια του βρόχου. Οι μαγνητικές δυνάμεις πάνω στον βρόχο, είναι τέτοιες ώστε να ασκούν ροπή, η οποία περιστρέφει τον βρόχο γύρω από κατακόρυφο νοητό άξονα. (β) Κάτοψη του ρευματοφόρου βρόχου, όπου διακρίνεται το ρευματοφόρο τμήμα ΒΓ, το ζεύγος των μαγνητικών δυνάμεων που δημιουργεί την ροπή **τ**, και η διπολική μαγνητική ροπή **μ** του βρόχου.*

Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα του ρευματοφόρου βρόχου ασκείται μαγνητική δύναμη, η οποία δίνεται από την εξ. 8.5. Έτσι τα κατακόρυφα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, υπόκεινται σε ίσες και αντίθετης φοράς μεταξύ τους μαγνητικές δυνάμεις, ίσες με

$$\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \Rightarrow F_{\mu\alpha\gamma\nu} = I\alpha B \tag{8.31}$$

μιας και η μαγνητική δύναμη είναι πάντα κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα πάντα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $\boldsymbol{l}$ και $\boldsymbol{B}$. Αυτές οι μαγνητικές δυνάμεις δημιουργούν ζεύγος δυνάμεων, το οποίο ασκεί ροπή πάνω στον βρόχο, με αποτέλεσμα να περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα περιστροφής, με φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού. Η περιστροφή είναι η μόνη κίνηση του βρόχου μέσα στο πεδίο, μιας και οι μαγνητικές δυνάμεις που ασκεί το πεδίο B στα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και ΑΔ αντίστοιχα, είναι αντίθετες μεταξύ τους και αλληλοεξουδετερώνονται, μη προκαλώντας κάποια κατακόρυφη μετατόπιση (βλ. σχ. 8.12α). Επίσης οι δυνάμεις αυτές δεν προκαλούν κάποια ροπή διότι είναι συνευθειακές. Η ροπή $\boldsymbol{\tau}$ του ζεύγους των μαγνητικών δυνάμεων πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ, διακρίνεται στο σχ. 8.12β, όπου συμβολίζεται με διάνυσμα κάθετο στη σελίδα, με φορά προς το εσωτερικό της, και διεύθυνση αυτή του κατακόρυφου άξονος περιστροφής. Υπολογίζοντας την ροπή $\boldsymbol{\tau}$ του ζεύγους των μαγνητικών δυνάμεων έχουμε

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} \overset{(8.32)}{\Rightarrow} \tau = \frac{a}{2} IaB\sin\theta + \frac{a}{2} IaB\sin\theta \Rightarrow \tau = Ia^2 B\sin\theta \tag{8.32}$$

Προσέξτε ότι ο μοχλοβραχίονας της ροπής είναι $\dfrac{\alpha\sin\theta}{2}$, διότι η δύναμη $\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}$ απέχει απόσταση $\alpha/2$ από τον άξονα περιστροφής, και σχηματίζει γωνία θ με αυτήν (βλ. σχ. 8.12β). Η γωνία θ ευρίσκεται σε άμεση σχέση

[24] Σκεφτείτε για παράδειγμα την περιστροφή της μαγνητικής πυξίδας μέσα στο γήινο μαγνητικό πεδίο, με αποτέλεσμα να ευθυγραμμίζεται μ' αυτό, ώστε να δείχνει πάντα τον βόρειο μαγνητικό πόλο.

με την γωνία φ, διότι $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$. Επίσης παρατηρούμε ότι η ποσότητα α^2 στην εξ. 8.32, είναι το εμβαδόν του ρευματοφόρου βρόχου, οπότε μπορούμε να γράψουμε την ροπή με την πιο γενική μορφή

$$\tau = IAB\sin\theta \qquad (8.33)$$

όπου A είναι το εμβαδόν του βρόχου. Αποδεικνύεται ότι η εξ. 8.33, ισχύει για ρευματοφόρο βρόχο όχι μόνο τετραγωνικού σχήματος, αλλά και οποιουδήποτε άλλου σχήματος, αρκεί βεβαίως το εμβαδόν του να είναι σε ένα μόνο επίπεδο (βρόχος δύο διαστάσεων). Θεωρώντας την επιφάνεια του ρευματοφόρου βρόχου ως ένα διάνυσμα $\boldsymbol{A}$, μέτρου A και κατεύθυνσης κάθετης στην επιφάνεια του βρόχου [25], η γωνία θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{A}$ (βλ. σχ. 12β). Έτσι η γωνία θ περιγράφει τον προσανατολισμό της επιφάνειας του βρόχου ως προς το μαγνητικό πεδίο. Βάσει των παραπάνω, η εξ. 8.33 μπορεί να γραφθεί διανυσματικά ως

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \qquad (8.34)$$

Στην τελευταία σχέση, η διανυσματική ποσότητα $I\boldsymbol{A}$ ορίζεται ως η **μαγνητική διπολική ροπή** του ρευματοφόρου βρόχου, και μετράται σε Αμπερ×μέτρα^2 ($A \cdot m^2$), ή ακόμη και σε J/T, οπότε έχουμε

$$\boldsymbol{\mu} = I\boldsymbol{A} \qquad (8.35)$$

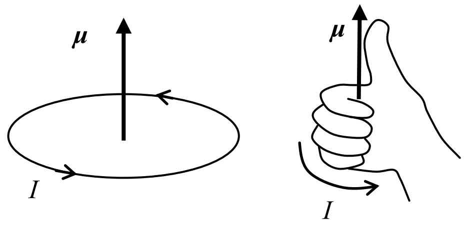
(Benumof, 1961), (Grant & Phillips, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Τελικά, η ροπή του βρόχου γράφεται ως

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \qquad (8.36)$$

δηλαδή η ροπή που ασκείται πάνω σε ρευματοφόρο βρόχο από ένα μαγνητικό πεδίο, είναι το εξωτερικό γινόμενο της μαγνητικής διπολικής ροπής του βρόχου, με το μαγνητικό πεδίο (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Προσέξτε τον προσανατολισμό του διανύσματος $\boldsymbol{\mu}$, ο οποίος είναι όμοιος με αυτόν του διανύσματος $\boldsymbol{A}$, (βλ. σχ. 12β), δηλ. κάθετος στην επιφάνεια του βρόχου. Γενικά η κατεύθυνση της μαγνητικής διπολικής ροπής ενός ρευματοφόρου βρόχου ή γενικότερα πηνίου με N σπείρες, καθορίζεται από την φορά του ρεύματος και τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως δείχνει το σχ. 8.13. Για την απλή περίπτωση ενός κυκλικού βρόχου, εφαρμόζοντας τον κανόνα του δεξιού χεριού (κανόνας δεξιόστροφου κοχλία), εάν τα ακροδάκτυλα δείχνουν την φορά του ρεύματος, ο αντίχειρας δείχνει την κατεύθυνση της μαγνητική διπολικής ροπής. Για την γενικότερη περίπτωση του πηνίου, το οποίο αποτελείται από N σπείρες ανεξαρτήτου σχήματος, η μαγνητική του διπολική ροπή δίνεται από την σχέση

$$\boldsymbol{\mu} = NI\boldsymbol{A} \qquad (8.37)$$

αφού το συνολικό εμβαδόν του πηνίου είναι N φορές το εμβαδόν μιας σπείρας (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013).



Σχήμα 8.13 *Η μαγνητική διπολική ροπή κυκλικού ρευματοφόρου βρόχου, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.*

Αρκετά συστήματα και σωμάτια στη Φύση έχουν μαγνητική διπολική ροπή, όπως πχ οι ραβδόμορφοι μαγνήτες, οι ρευματοφόροι βρόχοι και πηνία, τα άτομα, τα ηλεκτρόνια, τα πρωτόνια, τα στοιχειώδη σωμάτια, ακόμη και η ίδια η Γη. Πράγματι, κάποιος μπορεί να φανταστεί το ηλεκτρόνιο να διαγράφει την κυκλική τροχιά του σχήματος 8.13, αλλά με την αντίθετη φορά, (η συμβατική φορά του ρεύματος είναι αντίθετη της κίνησης των ηλεκτρονίων), ώστε να δημιουργεί ρεύμα και συνεπώς να δημιουργείται ένας νοητός ρευματοφόρος βρόχος και επομένως μια μαγνητική διπολική ροπή. Γενικά, όπως θα δείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, οι μαγνητικές ιδιότητες της ύλης, και συνεπώς τα μαγνητικά υλικά, οφείλονται κατά κύριο λόγο στις μαγνητικές διπολικές ροπές των ηλεκτρονίων των ατόμων των υλικών.

8.9 Μαγνητική δυναμική ενέργεια*

Παρατηρούμε μια αναλογία μεταξύ της ροπής ενός μαγνητικού διπόλου μέσα σε μαγνητικό πεδίο, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$, και της ροπής ενός ηλεκτρικού διπόλου μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$. Εάν εξετάσουμε από

[25] Ίδια διανυσματική περιγραφή της επιφάνειας, διατυπώσαμε στο κεφάλαιο 3 για την περιγραφή της ηλεκτρικής ροής.

ενεργειακή άποψη την περιστροφή του ρευματοφόρου βρόχου του σχήματος 8.12, ή ενός μαγνητικού διπόλου μέσα σ' ένα μαγνητικό πεδίο, είναι φανερό ότι η ροπή παράγει έργο

$$W=\int_{\theta_o}^{\theta}\tau d\theta \overset{(8.35)}{\Rightarrow} W=\int_{\theta_o}^{\theta} IAB\sin\theta d\theta=-IAB\cos\theta\Big|_{\theta_o}^{\theta}=-IAB\cos\theta-(-IAB\cos\theta_o)\Rightarrow$$

$$W=IAB(\cos\theta_o-\cos\theta) \qquad (8.38)$$

όπου θ_o είναι η αρχική γωνία μεταξύ $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{B}$, και θ η τελική. Στην περίπτωση του ηλεκτρικού πεδίου εδείξαμε ότι το έργο που παράγει το ηλεκτρικό πεδίο κατά την περιστροφή ενός ηλεκτρικού διπόλου, είναι ίσο με την διαφορά των ηλεκτρικών δυναμικών ενεργειών, μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης (εξ. 4.38) , όπου η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια είναι $U=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-pE\cos\theta$. Σε πλήρη αντιστοιχία μπορούμε βάσει της εξίσωσης 8.38, να ορίσουμε την **μαγνητική δυναμική ενέργεια** ενός ρευματοφόρου βρόχου, ή μαγνητικού διπόλου μέσα σε μαγνητικό πεδίο, ως

$$U=-IAB\cos\theta \overset{(8.35)}{\Rightarrow} U=-\mu B\cos\theta \Rightarrow U=-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (8.39)$$

(Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013). Έτσι για το έργο που παράγει ή καταναλώνει το μαγνητικό πεδίο, η εξ. 8.38 λόγω της 8.39, γράφεται

$$W=-(IAB\cos\theta-IAB\cos\theta_o)\Rightarrow W=-\Delta U=-(U_{\tau\varepsilon\lambda}-U_{\alpha\rho\chi}) \qquad (8.40)$$

Δηλαδή, το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται από το μαγνητικό πεδίο κατά την περιστροφή ενός μαγνητικού διπόλου, ή ρευματοφόρου βρόχου ή πηνίου, είναι ίσο με την αρνητική μεταβολή της μαγνητικής δυναμικής ενέργειας μεταξύ της τελικής και αρχικής θέσης. Ας διερευνήσουμε την εξ. 8.40. Έστω ότι ο ρευματοφόρος βρόχος ή το μαγνητικό δίπολο είναι σε θέση τέτοια, ώστε η αρχική γωνία μεταξύ $\boldsymbol{\mu}$ και $\boldsymbol{B}$, να είναι θ, όπως δείχνει το σχ. 8.12β. Εάν ο βρόχος αφεθεί ελεύθερος να περιστραφεί, η τελική γωνία θ θα πάρει την τιμή, $\theta=0^o$ ($\varphi=90^o$), έτσι ώστε το μαγνητικό δίπολο να ευθυγραμμιστεί πλήρως με το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ ($\boldsymbol{\mu}//\boldsymbol{B}$). Για $\theta=0^o$, η δυναμική ενέργεια γίνεται ελάχιστη ($U_{min}=-\mu B$), ενώ η αρχική δυναμική ενέργεια ήταν θετική (οι αμβλίες γωνίες έχουν αρνητικό συνημίτονο). Τελικά, από την εξ. 8.40, το έργο της αυθόρμητης περιστροφής είναι θετικό, που σημαίνει ότι το μαγνητικό πεδίο παράγει έργο πάνω στο δίπόλο. Η θέση $\theta=0^o$, είναι για το μαγνητικό δίπολο θέση ευσταθούς ισορροπίας, μιας και η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη. Αντιθέτως, εάν ασκήσουμε εμείς μηχανική ροπή πάνω στο μαγνητικό δίπολο, για να το περιστρέψουμε από την γωνία $\theta=0^o$, σε μια τυχαία θέση γωνίας θ, το έργο θα είναι αρνητικό. Αυτό είναι λογικό, μιας και δαπανούμε ενέργεια για την περιστροφή του διπόλου από μια θέση ευσταθούς ισορροπίας, σε μια νέα ασταθούς ισορροπίας.

Το ερώτημα το οποίο τώρα κάποιος μπορεί να θέσει, είναι αν μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του μαγνητικού δυναμικού για να περιγράψουμε το μαγνητικό πεδίο, κατά αναλογία της περιγραφής του ηλεκτρικού πεδίου από το ηλεκτρικό δυναμικό. Η απάντηση είναι αρνητική, διότι αντιθέτως με το ηλεκτρικό πεδίο και την ηλεκτρική δύναμη, το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική δύναμη δεν είναι διατηρητικές ποσότητες. Η μαγνητική δύναμη εξαρτάται από την ταχύτητα του φορτίου, μια ποσότητα που δεν είναι ιδιότητα του χώρου. Γενικά δεν μπορούμε να ορίσουμε μια «μαγνητική δυναμική ενέργεια» ενός ηλεκτρικού φορτίου, ή το «μαγνητικό δυναμικό» ενός μαγνητικού πεδίου όπως κάναμε στην περίπτωση του ηλεκτρικού πεδίου. Μαγνητική δυναμική ενέργεια ορίζεται μόνο για ένα μαγνητικό δίπολο μέσα σε μαγνητικό πεδίο, όπου η ροπή εξαρτάται μόνο από την θέση του μέσα στο χώρο του μαγνητικού πεδίου.

Παράδειγμα 8.5 Μαγνητική διπολική ροπή του ηλεκτρονίου

Θεωρώντας το ατομικό μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου, όπου το ηλεκτρόνιο διαγράφει κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα με ακτίνα 0.529×10^{-10} m, υπολογίστε την μαγνητική διπολική ροπή του ηλεκτρονίου. Η ηλεκτρική σταθερά είναι $K=8.99\times10^{9}$ Nm^2/C^2, ενώ το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου είναι $e=-1.60\times10^{-19}$ C και $m_e=9.11\times10^{-31}$ kg αντιστοίχως.

Λύση

Η κυκλική κίνηση του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα, μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κυκλικός βρόχος ρεύματος, οποίος παρουσιάζει μαγνητική διπολική ροπή με μέτρο

$$\mu = IA \qquad (1)$$

όπου I είναι το ρεύμα που δημιουργεί η περιστροφική κίνηση του ηλεκτρονίου, και A είναι το εμβαδόν της κυκλικής τροχιάς πr^2. Το ρεύμα όμως ορίζεται ως το πηλίκο του φορτίου προς τον χρόνο περιστροφής του, ο οποίος είναι ίσος με την περίοδο T της κυκλικής κίνησης, δηλ. ισχύουν

$$I = \frac{e}{T} \qquad (2)$$

και

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις 2 και 3 στην 1 δίνουν για την διπολική μαγνητική ροπή

$$\mu = \frac{e\upsilon}{2\pi r}\pi r^2 \Rightarrow \mu = \frac{e\upsilon r}{2} \qquad (4)$$

Το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται γύρω από τον πυρήνα του ατόμου, λόγω της ηλεκτρικής δύναμης, η οποία λειτουργεί ως κεντρομόλος δύναμη. Έτσι ισχύει

$$F_{\eta\lambda} = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} \Rightarrow K\frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e \upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{K\frac{e^2}{m_e r}} \qquad (5)$$

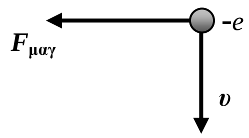
Αντικατάσταση της εξίσωσης 5 στην 4 δίνει

$$\mu = \frac{er}{2}\sqrt{\frac{Ke^2}{m_e r}} = \sqrt{\frac{Ke^4 r^2}{4m_e r}} \Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{Ke^4 r}{4m_e}} \Rightarrow \mu = \sqrt{\frac{(8.99\times10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2})(1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C})^4(0.529\times10^{-10}\,\mathrm{m})}{4\times9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}}} \Rightarrow$$
$$\mu = 9.27\times10^{-24}\,\mathrm{Am^2}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 8

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

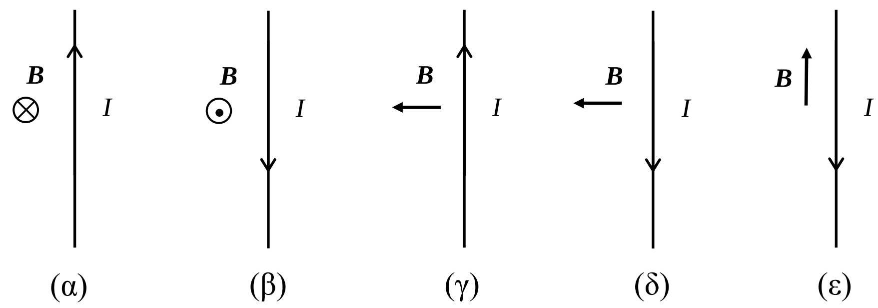
Ε8.1 Ένα ηλεκτρόνιο κινείται κάθετα σε ένα μαγνητικό πεδίο B, έτσι ώστε πάνω του να ασκείται μαγνητική δύναμη, όπως φαίνεται στο σχ. 8.14. Ποια είναι η κατεύθυνση του B; α) Αριστερά, β) δεξιά, γ) προς το εσωτερικό της σελίδας, δ) προς τα «έξω» της σελίδας; Δικαιολογείστε.



Σχήμα 8.14 *Ερώτηση 8.1.*

Ε8.2 Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να ασκήσει δύναμη σε ένα φορτισμένο σωμάτιο; α) Το σωμάτιο κινείται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. β) Το σωμάτιο κινείται παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο. γ) Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται με το χρόνο. δ) Το σωμάτιο είναι ακίνητο. ε) Το σωμάτιο κινείται με φορά αντίθετη του μαγνητικού πεδίου.

Ε8.3 Σχεδιάστε την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης (εφόσον αυτή υπάρχει), σε κάθε περίπτωση προσανατολισμού ενός ρευματοφόρου ευθύγραμμου αγωγού μέσα σε μαγνητικό πεδίο, όπως φαίνεται στο σχ. 8.15.



Σχήμα 8.15 *Πρόβλημα 8.3.*

Ε8.4 Εάν ένα ηλεκτρόνιο κινείται ευθύγραμμα σε μια περιοχή του χώρου, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι στον χώρο δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο;

Ε8.5 Εάν ένα φορτισμένο σωματίδιο εισέλθει σε περιοχή ομογενούς μαγνητικού πεδίου με ταχύτητα κάθετη στο πεδίο, η κινητική του ενέργεια θα αυξηθεί, θα μειωθεί ή θα παραμείνει η ίδια;

Ε8.6 Ένας αγωγός, παρότι διαρρέεται από ρεύμα έχει συνολικό ηλεκτρικό φορτίο μηδέν. Γιατί τότε ένα μαγνητικό πεδίο του ασκεί δύναμη;

Ε8.7 Εάν θέλατε να θέσετε σε κίνηση ένα ακίνητο φορτισμένο σωμάτιο, θα προτιμούσατε την εφαρμογή στο χώρο του σωματίου ενός μαγνητικού πεδίου ή ενός ηλεκτρικού πεδίου; Εξηγείστε.

Ε8.8 Ένα φορτισμένο σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά υπό την επίδραση ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Εάν εφαρμόσουμε ξαφνικά ένα ηλεκτρικό πεδίο ομόρροπο του μαγνητικού, περιγράψτε την κίνηση του σωματιδίου.

Ε8.9 Δυο ιόντα έχουν την ίδια μάζα, αλλά το ένα είναι απλά ιονισμένο ενώ το άλλο είναι διπλά ιονισμένο. Τι διαφορές θα παρουσιάζουν οι θέσεις των κηλίδων ανίχνευσής τους, στην φωτογραφική πλάκα ενός φασματογράφου, όπως αυτός του σχήματος 8.10;

Ε8.10 Ένας τετραγωνικός βρόχος διαρρέεται από ρεύμα με φορά αυτή των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφη). Το επίπεδο του βρόχου είναι παράλληλο και οριζόντιο με την επιφάνεια ενός τραπεζιού, πάνω στο οποίο ευρίσκεται. Ποια είναι η κατεύθυνση της μαγνητικής διπολικής ροπής του βρόχου;

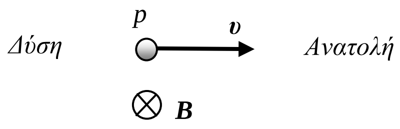
Ε8.11 Η εξίσωση $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$, μάς υπαγορεύει ότι δεν εμφανίζεται ροπή σε ρευματοφόρο βρόχο, όπως αυτόν του σχήματος 8.12, αν η γωνία μεταξύ της διπολικής ροπής και του μαγνητικού πεδίου είναι 0^o ή 180^o. Εξετάστε το είδος της ισορροπίας αυτών των δύο θέσεων, αν δηλαδή υπάρχει ευσταθής ή ασταθής ισορροπία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π8.1 Κίνηση ηλεκτρονίων σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. α) Ποια είναι η ταχύτητα των ηλεκτρονίων μιας δέσμης όταν αυτά δεν αποκλίνουν κάτω από την ταυτόχρονη επίδραση ενός ηλεκτρικού πεδίου E=3.40×10^5 V/m και ενός μαγνητικού πεδίου B=5.00×10^{-2} T, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους αλλά και στη δέσμη των ηλεκτρονίων; β) Δείξτε σε ένα διάγραμμα τους σχετικούς προσανατολισμούς των διανυσμάτων $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$. γ) Ποια είναι η ακτίνα της τροχιάς των ηλεκτρονίων όταν αφαιρεθεί το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$; Δίδονται: m_e=9.11×10^{-31} kg και e=-1.60×10^{-19} C. *Απάντηση*: α) 6.8×10^6 m/s, και γ) 7.7×10^{-4} m.

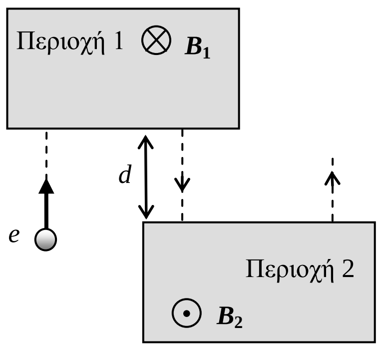
Π8.2 Κίνηση πρωτονίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Πρωτόνιο κινείται με ταχύτητα υ=1×10^6 m/s μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διαγράφοντας ευθύγραμμη τροχιά από την Δύση στην Ανατολή, όπως φαίνεται στο σχ. 8.16. Το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ έχει κατεύθυνση κάθετη στην διεύθυνση κίνησης του πρωτονίου και μέτρο

B=0.5 T. α) Να εύρετε την ένταση και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$. β) Περιγράψτε την τροχιά κίνησης του πρωτονίου αν υπήρχε μόνο το μαγνητικό πεδίο (υπολογίστε τυχόν χαρακτηριστικά της κίνησης). Δίδονται: m_p=1.67×10^{-27} kg, e=1.60×10^{-19} C (φορτίο του πρωτονίου). *Απάντηση*: 2.1×10^{-2} m.



Σχήμα 8.16 *Πρόβλημα 8.2.*

Π8.3 Κίνηση ηλεκτρονίου σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Στο σχ. 8.17, ένα ηλεκτρόνιο εισέρχεται με κινητική ενέργεια 3.50 keV στην περιοχή 1, η οποία έχει ομογενές μαγνητικό πεδίο B_1=0.020 T με κατεύθυνση κάθετη προς «μέσα» της σελίδας. Το ηλεκτρόνιο εισέρχεται στην περιοχή 1 με ταχύτητα κάθετη στο μαγνητικό πεδίο B_1, και αφού διαγράψει ημικυκλική τροχιά, στη συνέχεια βγαίνει από την περιοχή 1 και κατευθύνεται σε μια άλλη περιοχή 2, διαμέσου ενός διάκενου 30.0 cm. Στο διάκενο μεταξύ των περιοχών 1 και 2, υπάρχει διαφορά δυναμικού ΔV=1700 V, τέτοιας πολικότητας ώστε το ηλεκτρόνιο να επιταχύνεται ομαλά καθώς βγαίνει από την περιοχή 1 και εισέρχεται στην περιοχή 2. Στην περιοχή 2 υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο B_2=0.040 T, του οποίου η κατεύθυνση είναι κάθετη στη σελίδα προς τα «έξω». Το ηλεκτρόνιο διαγράφει μια νέα ημικυκλική τροχιά εντός της περιοχής 2, και εξέρχεται από αυτή, όπως δείχνει το σχ. 8.17. α) Υπολογίστε ποια χρονική στιγμή το ηλεκτρόνιο εξέρχεται από την περιοχή 2, εάν εισέρχεται στην περιοχή 1, την χρονική στιγμή t=0 s. β) Υπολογίστε το μήκος της συνολικής διαδρομής του ηλεκτρονίου, από την χρονική στιγμή 0 s, έως την χρονική στιγμή εξόδου από την περιοχή 2, την οποία υπολογίσατε στο πρώτο ερώτημα. Δίνονται μάζα και φορτίο ηλεκτρονίου, m_e=9.11×10^{-31} kg και e=-1.60×10^{-19} C αντίστοιχα.

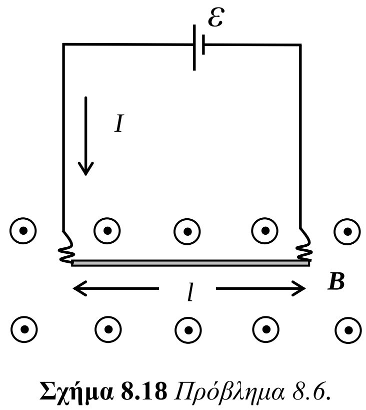


Σχήμα 8.17 *Πρόβλημα 8.3.*

Π8.4 Μαγνητική δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό. Ένα ευθύγραμμο σύρμα μήκους 2.80 m διαρρέεται από ρεύμα 5 A και ευρίσκεται σε περιοχή ομογενούς μαγνητικού πεδίου μέτρου ίσου με 0.39 T. Υπολογίστε το μέτρο της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στο σύρμα, αν η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου και της διεύθυνσης του ρεύματος είναι α) φ=60^o, β) φ=90^o και γ) φ=120^o. *Απάντηση*: α) 4.72 N, β) 5.46 N, και γ) 4.72 N.

Π8.5 Κίνηση ρευματοφόρου ράβδου σε μαγνητικό πεδίο. Μια μεταλλική ράβδος με μάζα 0.300 kg διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα έντασης 8.00 A. Η ράβδος μπορεί να κινείται επάνω σε δυο οριζόντιους παράλληλους μεταλλικούς οδηγούς, οι οποίοι απέχουν απόσταση 0.600 m μεταξύ τους. Εάν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ της ράβδου και των οδηγών είναι 0.150, πόσο είναι το μέτρο ενός κατακόρυφου μαγνητικού πεδίου, ώστε η ράβδος να κινείται συνεχώς με σταθερή ταχύτητα επάνω στους οδηγούς; *Απάντηση*: 0.0920 T.

Π8.6 Μαγνητική δύναμη σε αγωγό ηλεκτρικού κυκλώματος. Ένα ευθύγραμμο σύρμα μάζας m=10.0 gr και μήκους l=5.00 cm, αναρτάται από δυο όμοια ελατήρια τα οποία είναι τμήματα ενός κλειστού ηλεκτρικού κυκλώματος με πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$=24 V, όπως φαίνεται στο σχ. 8.18. Τα ελατήρια επιμηκύνονται κατά x_1=0.50 cm υπό την επίδραση του βάρους του σύρματος. Το κύκλωμα έχει ισοδύναμη αντίσταση R=12.0 Ω. Όταν εφαρμοστεί μαγνητικό πεδίο B με κατεύθυνση προς τα «έξω» ως προς το επίπεδο της σελίδας, τα ελατήρια εκτείνονται επί πλέον κατά Δx_1=0.30 cm. Να ευρείτε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου B. Δίνεται: g=9.81 m/s^2. *Απάντηση*: 0.6 T.



Σχήμα 8.18 *Πρόβλημα 8.6.*

Π8.7 Φασματογράφος μάζας. Έστω ο φασματογράφος μάζας του σχήματος 8.10, με ηλεκτρικό πεδίο E=1.50×10^4 V/m και μαγνητικό πεδίο B=0.600 T και στις δυο περιοχές του. Εάν μια δέσμη με τριών ειδών ιόντα, τα ισότοπα των ^{24}Mg, ^{25}Mg και ^{26}Mg, κινείται με ταχύτητα υ και το φορτίο κάθε ιόντος είναι +e, να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των ιχνών που αφήνουν τα τρία διαφορετικά ισότοπα στην φωτογραφική πλάκα του φασματογράφου. Υποθέστε ότι οι ατομικές μάζες των ισοτόπων (σε μονάδες ατομικής μάζας) είναι ίσες με τους μαζικούς αριθμούς. Μια μονάδα ατομικής μάζας =1 amu =1 u $=1.66\times10^{-27}$ kg. Επίσης δίνεται $e=1.60\times10^{-19}$ C. *Απάντηση*: 9×10^{-4} m.

Π8.8 Φαινόμενο Hall. Δείξτε ότι ο λόγος του ηλεκτρικού πεδίου Hall E προς το ηλεκτρικό πεδίο E_C, το οποίο είναι υπεύθυνο για το ρεύμα, δίνεται από την σχέση $\frac{E}{E_C}=\frac{B}{ne\rho}$, όπου ρ είναι η ειδική αντίσταση του υλικού.

Π8.9 Ροπή και μαγνητική δυναμική ενέργεια ρευματοφόρου βρόχου. Ένας συρμάτινος κυκλικός βρόχος ακτίνας 10.0 cm διαρρέεται από ρεύμα 0.30 A. Η μαγνητική διπολική ροπή του βρόχου έχει κατεύθυνση στο χώρο που περιγράφεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\boldsymbol{n}} = 0.50\hat{\boldsymbol{i}} - 0.75\hat{\boldsymbol{j}}$. Εάν ο βρόχος είναι μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο το οποίο δίνεται σε T, από την σχέση $\boldsymbol{B} = 0.35\hat{\boldsymbol{i}} + 0.40\hat{\boldsymbol{j}}$, να ευρεθούν α) η ροπή πάνω στον βρόχο, και β) η μαγνητική δυναμική ενέργεια του βρόχου.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Ashcroft, N. W., & Mermin, N. D. (1976). *Φυσική στερεάς κατάστασης*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2012 Εκδόσεις Γ. Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-77-9.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Kittel, Ch. (2005). *Introduction to Solid State Physics*. 8th Edition, Copyright © 2005 by John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0 471 41526-X.

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 9

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Σύνοψη

Στο ένατο τούτο κεφάλαιο γίνεται η περιγραφή και ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου, το οποίο δημιουργείται από ηλεκτρικό ρεύμα, αρχικά με το νόμο των Biot και Savart και μετέπειτα με το νόμο του Ampere. Επίσης μελετάται η μαγνητική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών, ενώ ορίζεται το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό σωληνοειδούς. Τέλος περιγράφονται οι κατηγορίες των υλικών, αναλόγως της αλληλεπίδρασής τους με το μαγνητικό πεδίο.

Προαπαιτούμενη γνώση

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Κυκλική κίνηση και κεντρομόλος δύναμη. Ροπή δυνάμεως.

9.1 Εισαγωγικά

Έως τώρα θεωρήσαμε άλλοτε φανερά και άλλοτε σιωπηρά, ότι ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ παράγεται από φυσικούς μαγνήτες (μαγνητικά δίπολα). Εντούτοις γνωρίζουμε ότι μαγνητικά πεδία δημιουργούνται και από κινούμενα ηλεκτρικά φορτία, ή αλλιώς από ηλεκτρικά ρεύματα. Η πρώτη φορά που παρατηρήθηκε πειραματικά η δημιουργία μαγνητικού πεδίου από ηλεκτρικό ρεύμα, ήταν το 1820 από τον Δανό φυσικό Hans Christian Oersted (1777-1851). Ο Oersted παρατήρησε ότι μια μαγνητική βελόνη που ευρισκόταν κοντά σ' έναν ρευματοφόρο αγωγό, μετέβαλε τον αρχικό προσανατολισμό της, ώστε να μην δείχνει ακριβώς τον βόρειο μαγνητικό πόλο της Γης.[26] Τούτο σήμαινε την ύπαρξη μαγνητικής δύναμης πάνω στην μαγνητική βελόνη, πέραν αυτής του γήινου μαγνητικού πεδίου, και επομένως την δημιουργία μαγνητικού πεδίου από το ηλεκτρικό ρεύμα που διέρρεε τον αγωγό. Αντιθέτως, εάν το ηλεκτρικό ρεύμα διεκόπτετο, η αλληλεπίδραση με την βελόνη τερματίζονταν, οπότε αυτή έπαιρνε την γνωστή ευθυγράμμισή της με το μαγνητικό πεδίο της Γης. Η ανακάλυψη του Oersted ήταν θεμελιώδους σημασίας, διότι απετέλεσε την αφετηρία συνένωσης δυο σημαντικών κλάδων της Φυσικής, του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, σε έναν κλάδο, αυτόν του ηλεκτρομαγνητισμού. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε πιο λεπτομερειακά την δημιουργία μαγνητικών πεδίων από ηλεκτρικά ρεύματα, δηλαδή από κινούμενα ηλεκτρικά φορτία.

Hans Christian Oersted (1777-1851) (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HC_%C3%98rsted.jpg). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

9.2 Μαγνητικό πεδίο κινουμένου ηλεκτρικού φορτίου

Αναφέραμε πιο πάνω, ότι το ηλεκτρικό ρεύμα παράγει μαγνητικό πεδίο στον τριγύρω χώρο. Εφόσον πολλά κινούμενα φορτία παράγουν μαγνητικό πεδίο, τότε και ένα μόνο κινούμενο φορτίο θα παράγει το δικό του μαγνητικό πεδίο, το οποίο φυσικά θα είναι αρκετά ασθενέστερο από εκείνο ολοκλήρου του ρεύματος ενός αγωγού. Προς χάριν απλότητας, ας εξετάσουμε αρχικά το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ένα μόνο κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο q, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\boldsymbol{v}$ στο χώρο. Είναι πειραματικά αποδεδειγμένο, ότι το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ που παράγεται από ένα κινούμενο φορτίο σε ένα σημείο του χώρου, είναι ανάλογο του φορτίου q και της ταχύτητάς του $\boldsymbol{v}$, ενώ είναι αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης r που χωρίζει το σημείο από την θέση του φορτίου. Επίσης το μέτρο του πεδίου $\boldsymbol{B}$ είναι ανάλογο του ημιτόνου της γωνίας θ, που ορίζεται από τα διανύσματα της ταχύτητας και της διεύθυνσης της απόστασης r. Η διεύθυνση

[26] Κάποιοι υποστηρίζουν ότι ο Ιταλός Gian Domenico Romagnosi (1761-1835), ανακάλυψε πρώτος την σχέση ηλεκτρισμού-μαγνητισμού δυο δεκαετίες πριν τον Oersted, αλλά η ανακάλυψή του πέρασε απαρατήρητη από την επιστημονική κοινότητα της εποχής, επειδή ο Romagnosi την δημοσίευσε σε δυο ιταλικές εφημερίδες!

του πεδίου $\boldsymbol{B}$, είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από τις διευθύνσεις των διανυσμάτων της ταχύτητας και της απόστασης $\boldsymbol{\upsilon}$ και $\boldsymbol{r}$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται στο σχ. 9.1α. Η πιο πάνω περιγραφή και εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ ενός κινουμένου ηλεκτρικού φορτίου, η οποία είναι αποτέλεσμα πειραματικής μελέτης, δύναται να εκφρασθεί μαθηματικώς από την διανυσματική σχέση

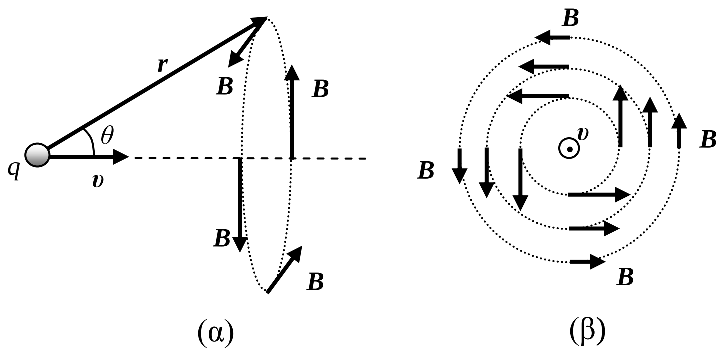
$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{\upsilon}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \tag{9.1}$$

όπου το μέτρο της μαγνητικής επαγωγής είναι

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{q\upsilon\sin\theta}{r^2} \tag{9.2}$$

και η κατεύθυνσή της είναι κάθετη στο επίπεδο των $\boldsymbol{\upsilon}$ και $\boldsymbol{r}$ (Sears, 1951), (Alonso & Finn, 1992), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010). Βλέπουμε ότι υπάρχει μια σταθερά αναλογίας $\mu_o/4\pi$, όπου μ_o ονομάζεται **μαγνητική διαπερατότητα του κενού**, και ισούται με $4\pi\times10^{-7}$ T·m/A, ή αλλιώς με 1.26×10^{-6} henry/meter.

Το μαγνητικό πεδίο του κινουμένου ηλεκτρικού φορτίου, περιγράφεται από μαγνητικές δυναμικές γραμμές, οι οποίες λόγω αξονικής συμμετρίας, είναι ομόκεντροι κύκλοι γύρω από την διεύθυνση κίνησης του φορτίου. Το διάνυσμα $\boldsymbol{B}$ είναι πάντα εφαπτομενικό των μαγνητικών δυναμικών γραμμών, και στην περίπτωση θετικού φορτίου, η φορά του δίνεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία (δεξιού χεριού), όπως φαίνεται στο σχ. 9.1β. Προσέξτε ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{B}$ γίνεται μικρότερο όσο αυξάνεται η απόσταση r, δηλ. απομακρυνόμαστε από το φορτίο. Επίσης, εάν το φορτίο είναι αρνητικό, το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{\upsilon}\times\hat{\boldsymbol{r}}$ στην εξ. 9.1 αλλάζει φορά, με αποτέλεσμα οι δυναμικές γραμμές του φορτίου να έχουν την αντίθετη φορά από αυτήν του σχήματος 9.1.



Σχήμα 9.1 *(α) Μαγνητικό πεδίο κινουμένου θετικού ηλεκτρικού φορτίου. (β) Κάτοψη δυναμικών γραμμών μαγνητικού πεδίου από κινούμενο ηλεκτρικό φορτίο με ταχύτητα* $\boldsymbol{\upsilon}$.

Επειδή για το μαγνητικό πεδίο ισχύει η αρχή της επαλληλίας, όπως ακριβώς ισχύει για το ηλεκτρικό πεδίο, προεκτείνοντας την πιο πάνω συζήτηση μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο $\boldsymbol{B}$ που δημιουργεί ένα σύνολο κινουμένων ηλεκτρικών φορτίων μέσα σ' έναν αγωγό. Προσθέτοντας δηλαδή, τα επιμέρους μαγνητικά πεδία όλων των κινουμένων φορτίων ενός ρευματοφόρου αγωγού, μπορούμε να υπολογίσουμε το συνολικό μαγνητικό πεδίο που παράγεται από έναν ρευματοφόρο αγωγό.

9.3 Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού – Νόμος των Biot και Savart

Έστω ότι ένας αγωγός διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα εντάσεως I. Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του με μήκος dl. Εάν η πυκνότητα όγκου του αριθμού των ηλεκτρικών φορτίων στον αγωγό είναι n, τότε το στοιχειώδες φορτίο dQ που κινείται στον στοιχειώδες όγκο dV, ο οποίος αντιστοιχεί στο επίσης στοιχειώδες μήκος dl, είναι

$$dQ = nqAdl \tag{9.3}$$

όπου A είναι η διατομή του αγωγού, και q το μέγεθος κάθε κινουμένου φορτίου. Τα κινούμενα φορτία με ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ στο μήκος dl, ισοδυναμούν με φορτίο dQ, οπότε το αντίστοιχο στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{dB}$ σε απόσταση $\boldsymbol{r}$ δίνεται ως

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{dQ\boldsymbol{\upsilon}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \Rightarrow \boldsymbol{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{dQ\upsilon\sin\theta}{r^2}\hat{\boldsymbol{n}} \tag{9.4}$$

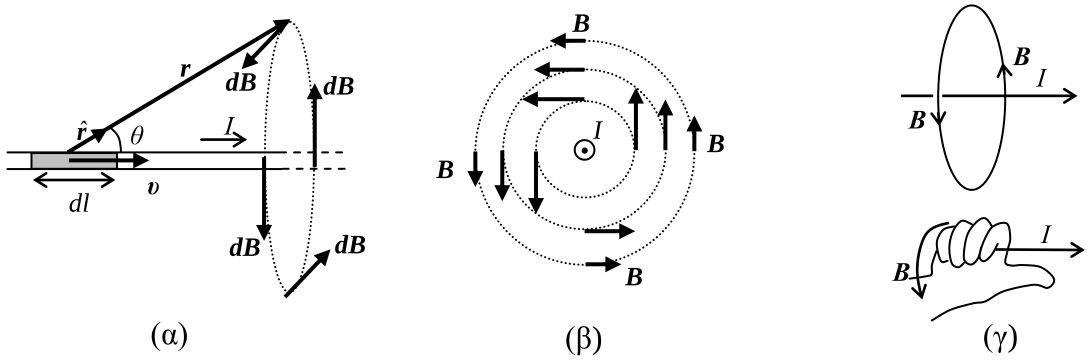
με διεύθυνση $\hat{\boldsymbol{n}}$ πάντα κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\boldsymbol{\upsilon}$ και $\boldsymbol{r}$ διανύσματα, όπως φαίνεται στο σχ. 9.2α. Η κάτοψη του σχήματος 9.2β, μάς βοηθά να κατανοήσουμε καλύτερα την κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου, που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός. Ο γενικός κανόνας ευρέσεως των δυναμικών γραμμών του μαγνητικού πεδίου, δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού ή του δεξιόστροφου κοχλία, έτσι όπως αναπαριστάται στο σχ. 9.2γ. Σύμφωνα μ' αυτόν, εάν ο αντίχειρας του δεξιού χεριού, δείχνει την φορά του ρεύματος, τα λυγισμένα ακροδάκτυλα δείχνουν την κατεύθυνση των κυκλικών ομόκεντρων μαγνητικών δυναμικών γραμμών.Η εξ. 9.4 μέσω της εξ. 9.3 δίνει για το μέτρο του στοιχειώδους πεδίου *dB*

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{nq\upsilon Adl sin\theta}{r^2} \qquad (9.5)$$

Όμως η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος δίνεται ως

$$I = \frac{dQ}{dt} \overset{(9.3)}{\Rightarrow} I = nq\upsilon A \qquad (9.6)$$

διότι ισχύει για την ταχύτητα ότι *υ=dl/dt*.



Σχήμα 9.2 *(α) Στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο* ***dB****, που προκαλείται από στοιχειώδες τμήμα ρευματοφόρου αγωγού μήκους dl. (β) Κάτοψη των δυναμικών γραμμών μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός. (γ) Ο κανόνας του δεξιού χεριού, ή του δεξιόστροφου κοχλία, για την εύρεση της κατεύθυνσης των μαγνητικών δυναμικών γραμμών που δημιουργεί ένα ηλεκτρικό ρεύμα.*

Jen-Baptiste Biot (1774-1862) (https://en.wikipedia.org/wiki/JeanBaptiste_Biot#/media/File:Jean_baptiste_biot.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

Τότε η εξ. 9.5 γίνεται

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl sin\theta}{r^2} \qquad (9.7)$$

ή σε διανυσματική μορφή

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{dl}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad (9.8)$$

όπου το ***dl*** είναι διάνυσμα μήκους *dl* και κατεύθυνσης αυτής του ηλεκτρικού ρεύματος *I* εντός του αγωγού (Benumof, 1961), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Kraus, 1993), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Ολοκληρώνοντας την εξ. 9.8 ως προς το μήκος *l*, παίρνουμε

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o}{4\pi}I\int\frac{\boldsymbol{dl}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad (9.9)$$

Η εξ. 9.9, υπολογίζει το συνολικό μαγνητικό πεδίο ***B*** που δημιουργεί ο ρευματοφόρος αγωγός, στο σημείο του χώρου που ορίζεται από την απόσταση ***r***, και είναι γνωστή ως **νόμος των Biot και Savart**. Οι Γάλλοι Jean Baptiste Biot (1774-1862) και Felix Savart (1791-1841), μελέτησαν την σχέση του μαγνητισμού με τα ηλεκτρικά ρεύματα, και το 1820 ανακοίνωσαν (όπως και ο Δανός Hans Christian Oersted) ότι ένας ρευματοφόρος αγωγός ασκεί δύναμη πάνω σε μαγνήτες.

9.3.1 Μαγνητικό πεδίο ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού

Ας προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο ενός ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού, με το νόμο των Biot και Savart. Έστω $2L$ το μήκος του αγωγού. Ζητάμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ στην μεσοκάθετο του αγωγού, και σε απόσταση x_o απ' αυτόν, στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο σχ. 9.3. Έστω λοιπόν στοιχειώδες μήκος dl του αγωγού, το οποίο είναι στην κάθετη διεύθυνση y. Ισχύει δηλαδή $dy=dl$. Εφαρμόζοντας το νόμο των Biot και Savart, έχουμε για το μέτρο του $\boldsymbol{dB}$

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idy\sin\theta}{r^2} \qquad (9.10)$$

όπου

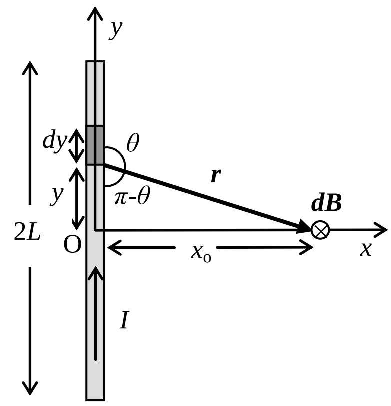
$$r = \sqrt{x_o^{\,2} + y^2} \qquad (9.11)$$

Επομένως έχουμε

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idy\sin\theta}{x_o^{\,2} + y^2} \qquad (9.12)$$

Όμως ισχύει,

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{x_o}{\sqrt{x_o^{\,2} + y^2}} \qquad (9.13)$$



Σχήμα 9.3 *Μαγνητικό πεδίο **B** στην μεσοκάθετο ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού, σε απόσταση x_o απ' αυτόν.*

οπότε από την εξ. 9.12 παίρνουμε

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Ix_o dy}{(x_o^{\,2} + y^2)^{3/2}} \qquad (9.14)$$

Για να εύρουμε το συνολικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ του αγωγού στο σημείο x, πρέπει να ολοκληρώσουμε την εξ. 9.14 ως προς y σε όλο το μήκος του αγωγού, δηλ. από $-L$ σε L. Επομένως γράφουμε

$$B = \int_{-L}^{L}\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Ix_o dy}{(x_o^{\,2} + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_{-L}^{L}\frac{x_o dy}{(x_o^{\,2} + y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\left.\frac{x_o y}{x_o^{\,2}\sqrt{x_o^{\,2} + y^2}}\right|_{-L}^{L} \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{2L}{x_o\sqrt{x_o^{\,2} + L^2}} \qquad (9.15)$$

Όταν το μήκος του αγωγού είναι πολύ μεγάλο, δηλ. $L >> x_o$, η εξ. 9.15 γίνεται

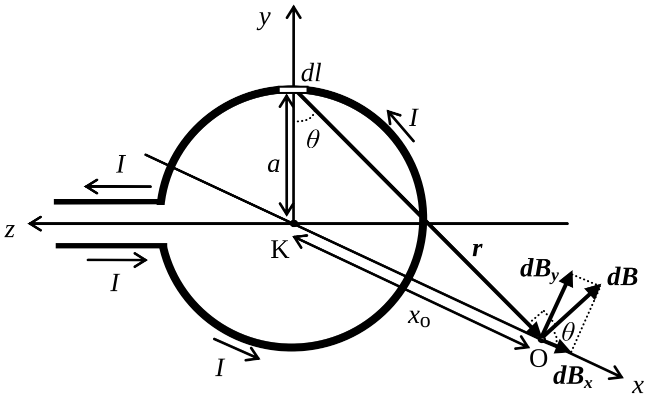
$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi x_o} \qquad (9.16)$$

Η εξ. 9.16 δίνει το μαγνητικό πεδίο ενός ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού σε απόσταση x_o απ' αυτόν, όταν το μήκος του είναι αρκετά μεγαλύτερο απ' αυτήν την απόσταση. Λόγω αξονικής συμμετρίας, το μέτρο του πεδίου $\boldsymbol{B}$ είναι σταθερό σε κάθε σημείο του χώρου που απέχει απόσταση x_o , ενώ η διεύθυνση του $\boldsymbol{B}$ είναι πάντα εφαπτομενική του κύκλου ακτίνας x, με φορά αυτή του δεξιόστροφου κοχλία (βλ. σχήμα 9.2β).

9.3.2 Μαγνητικό πεδίο κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού *

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε έναν κυκλικό αγωγό (βρόχο) ακτίνας a, και ζητάμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ στο σημείο Ο, το οποίο απέχει απόσταση x_o από το κέντρο Κ του βρόχου. Το σημείο Ο ανήκει στην κάθετη ευθεία στο επίπεδο του βρόχου, η οποία περνά από το Κ, όπως φαίνεται στο σχ. 9.4. Από το νόμο των Biot και Savart, (εξ. 9.8), εφόσον $\boldsymbol{dl} \perp \hat{\boldsymbol{r}}$ και επομένως $\boldsymbol{dl} \times \hat{\boldsymbol{r}} = dl\hat{\boldsymbol{n}}$, και επίσης λαμβάνοντας υπόψη ότι $r^2 = a^2 + x_o^{\ 2}$, όπου r είναι η απόσταση του dl από σημείο Ο, παίρνουμε τελικά για το μέτρο του στοιχειώδους πεδίου $\boldsymbol{dB}$

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl}{a^2 + x_o^{\ 2}} \tag{9.17}$$



Σχήμα 9.4 *Μαγνητικό πεδίο **B** ενός κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού, σε απόσταση x_o από το κέντρο και πάνω στην κάθετη ευθεία που περνά από αυτό.*

όπου η κατεύθυνση του πεδίου $\boldsymbol{dB}$ είναι κάθετη στη διεύθυνση της απόστασης r. Το διάνυσμα $\boldsymbol{dB}$ αναλύεται σε δυο συνιστώσες, τις $\boldsymbol{dB_x}$ και $\boldsymbol{dB_y}$, όπου $dB_x = dB\cos\theta$ και $dB_y = dB\sin\theta$. Επειδή για κάθε στοιχειώδες μήκος $\boldsymbol{dl}$ υπάρχει ένα αντιδιαμετρικό που δίνει αντίθετο $\boldsymbol{dB_y}$, το πρόβλημα παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία γύρω από τον άξονα x. Όμως τα αντιδιαμετρικά $\boldsymbol{dl}$ δίνουν το ίδιο $\boldsymbol{dB_x}$, οπότε τελικά θα υπάρχει μαγνητικό πεδίο μόνο στην οριζόντια συνιστώσα. Για την γωνία θ ισχύει ότι

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{\sqrt{(x_o^{\ 2} + \alpha^2)}} \tag{9.18}$$

Για να υπολογίσουμε το συνολικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ του κυκλικού ρευματοφόρου αγωγού, σε απόσταση x_o από το κέντρο του πάνω στην κάθετη διεύθυνση που περνά απ' αυτό, πρέπει να ολοκληρώσουμε την εξ. 9.17 ως προς dl, πάνω σ' όλη την περιφέρεια του αγωγού. Επομένως παίρνουμε

$$B = \int dB_x = \int \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{dl}{a^2 + x_o^{\ 2}}\frac{a}{\sqrt{(a^2 + x_o^{\ 2})}} = \frac{\mu_o Ia}{4\pi}\int\frac{dl}{(a^2 + x_o^{\ 2})^{3/2}} = \frac{\mu_o Ia}{4\pi(a^2 + x_o^{\ 2})^{3/2}}\int dl =$$

$$= \frac{\mu_o Ia}{4\pi(a^2 + x_o^{\ 2})^{3/2}}2\pi a \Rightarrow B = \frac{\mu_o Ia^2}{2(a^2 + x_o^{\ 2})^{3/2}} \tag{9.19}$$

Το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του βρόχου, και φορά αυτή του $\boldsymbol{dB_x}$ στο σχ. 9.4.

Εάν έχουμε έναν ρευματοφόρο αγωγό με N βρόχους (σπείρες), όπως συμβαίνει στην περίπτωση ενός **επαγωγέα** ή αλλιώς **πηνίου**, τότε ο κάθε βρόχος θα συνεισφέρει το ίδιο στο συνολικό πεδίο B, οπότε έχουμε

$$B = \frac{\mu_o NIa^2}{2(a^2 + x_o^{\ 2})^{3/2}} \tag{9.20}$$

Στο κέντρο της σπείρας, όπου x_o=0, το πεδίο θα είναι

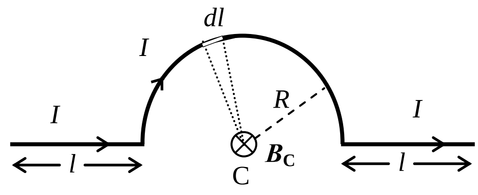
$$B = \frac{\mu_o I}{2a} \tag{9.21}$$

ενώ στο κέντρο του πηνίου θα είναι

$$B = \frac{\mu_o NI}{2a} \tag{9.22}$$

Παράδειγμα 9.1 Μαγνητικό πεδίο ημικυκλικού ρευματοφόρου αγωγού

Το σύρμα του σχήματος 9.5 διαρρέεται από ρεύμα *I*. Ποια είναι η μαγνητική επαγωγή $\boldsymbol{B}$ στο κέντρο C του ημικυκλικού τμήματος ακτίνας *R*, η οποία προέρχεται από, α) καθένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους *l*, β) το ημικυκλικό τμήμα, και γ) ολόκληρο το σύρμα.



Σχήμα 9.5 *Ρευματοφόρος αγωγός που αποτελείται από ημικύκλιο ακτίνας R, και δυο ευθύγραμμα τμήματα μήκους l το καθένα (παράδειγμα 9.1).*

Λύση

α) Από το νόμο των Biot και Savart, το κάθε ευθύγραμμο τμήμα μήκους *l* δημιουργεί στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{dB_l}$, ίσο με

$$\boldsymbol{dB_l} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{dl}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \qquad (1)$$

Όμως για τα ευθύγραμμα τμήματα, ισχύει $\boldsymbol{dl} // \hat{\boldsymbol{r}}$, οπότε $\boldsymbol{dl}\times\hat{\boldsymbol{r}} = 0$. Άρα στο σημείο C το $\boldsymbol{dB_l}=0$, και επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα δεν δημιουργούν μαγνητικό πεδίο σ' αυτό το σημείο.

β) Εφαρμόζοντας την εξ. 1 για στοιχειώδες τμήμα $\boldsymbol{dl}$ του ημικυκλίου ακτίνας *R*, έχουμε

$$\boldsymbol{dB_l} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{dl}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{R^2} \Rightarrow dB_l = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl\sin 90^o}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}\int_0^{\pi R} dl = \frac{\mu_o I}{4\pi R^2}\pi R \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{4R}$$

γ) Το ολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο C θα είναι το άθροισμα του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί κάθε τμήμα του σύρματος. Επειδή όμως τα ευθύγραμμα τμήματα δίνουν μηδενικό πεδίο, θα έχουμε συνολικό πεδίο στο C ίσο με

$$B_C = \frac{\mu_o I}{4R}$$

με κατεύθυνση προς τα «μέσα» της σελίδας, όπως φαίνεται στο σχ. 9.5 (κανόνας δεξιού χεριού, βλ. σχ. 9.2γ).

Παράδειγμα 9.2 Μαγνητικό πεδίο τετραγωνικού ρευματοφόρου αγωγού

Τετράγωνος βρόχος από σύρμα πλευράς *α* διαρρέεται από ρεύμα *I*, όπως δείχνει το σχ. 9.6. Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο *B* στο κέντρο του βρόχου, δίνεται από την σχέση

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_o I}{\pi\alpha}.$$

Λύση

Για να εύρουμε το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ στο κέντρο του τετραγωνικού βρόχου, αρκεί να υπολογίσουμε το $\boldsymbol{B}$ κάθε πλευράς του τετραγώνου και να τα προσθέσουμε. Έτσι θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_\alpha}$ που σχηματίζει η πλευρά *α* στο κέντρο. Ένα στοιχειώδες μήκος *dl* της πλευράς, δημιουργεί πεδίο $\boldsymbol{dB_\alpha}$ στο κέντρο του βρόχου, που δίνεται από το νόμο των Biot-Savart ως

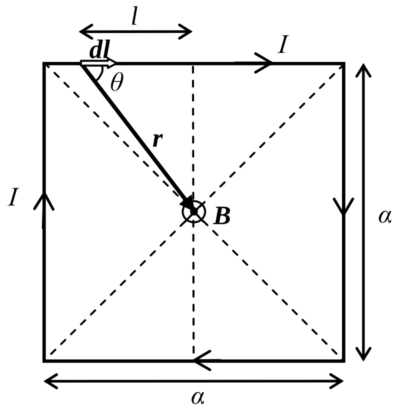
$$\boldsymbol{dB_\alpha} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{dl}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \Rightarrow dB_\alpha = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2} \qquad (1)$$

Όμως

$$\sin\theta = \frac{\alpha/2}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\alpha}{2r} \qquad (2)$$

και

$$r^2 = (\frac{\alpha}{2})^2 + l^2 \qquad (3)$$



Σχήμα 9.6 *Τετράγωνος ρευματοφόρος βρόχος διαρρέεται από ρεύμα I και σχηματίζει μαγνητικό πεδίο B στο κέντρο του (παράδειγμα 9.2).*

Οι εξισώσεις 2 και 3 στην 1, δίνουν

$$dB_\alpha = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Iadl}{2[(\frac{a}{2})^2+l^2]^{1/2}\times[(\frac{a}{2})^2+l^2]} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Iadl}{2[(\frac{a}{2})^2+l^2]^{3/2}} \Rightarrow dB_\alpha = \frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\frac{a}{2}dl}{[(\frac{a}{2})^2+l^2]^{3/2}} \qquad (4)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. 4 ως προς l, από $-l/2$ έως $l/2$, παίρνουμε

$$B_\alpha = \int_{-a/2}^{a/2}\frac{\mu_o I}{4\pi}\frac{\frac{a}{2}dl}{[(\frac{a}{2})^2+l^2]^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{4\pi}(\frac{a}{2})\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dl}{[(\frac{a}{2})^2+l^2]^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{4\pi}(\frac{a}{2})\left.\frac{dl}{(\frac{a}{2})^2[(\frac{a}{2})^2+l^2]^{1/2}}\right|_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= \frac{\mu_o I}{4\pi(\frac{a}{2})}\left\{\frac{\frac{a}{2}}{[(\frac{a}{2})^2+(\frac{a}{2})^2]^{1/2}} - \frac{(-\frac{a}{2})}{[(\frac{a}{2})^2+(-\frac{a}{2})^2]^{1/2}}\right\} = \frac{\mu_o I}{4\pi(\frac{a}{2})}\frac{a}{[2(\frac{a}{2})^2]^{1/2}} = \frac{2\mu_o I}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{2}\frac{a}{2}} \Rightarrow$$ [27]

$$B_\alpha = \frac{\mu_o I}{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{a} \qquad (5)$$

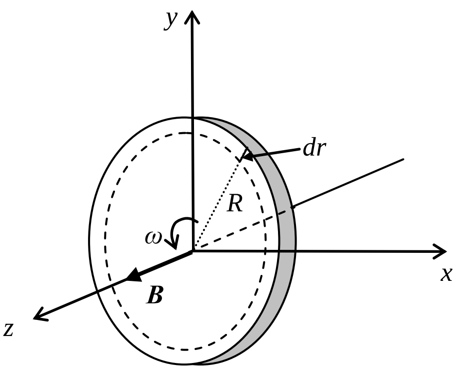
Επειδή όλες οι πλευρές του τετραγωνικού βρόχου είναι ισοδύναμες, για να βρούμε το ολικό μαγνητικό πεδίο στο κέντρο, πολλαπλασιάζουμε την εξ. 5 επί 4. Έτσι παίρνουμε

$$B = 4B_a = 4\frac{\mu_o I}{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{a} \Rightarrow B = \frac{2\sqrt{2}\mu_o I}{\pi a}$$

Η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη στο επίπεδο της σελίδας και προς τα «μέσα».

Παράδειγμα 9.3 Μαγνητικό πεδίο περιστρεφομένου φορτισμένου δίσκου

Θεωρείστε ότι ένας λεπτός δίσκος ακτίνας *R*, είναι τοποθετημένος έτσι ώστε να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα *z* κάθετο στο επίπεδο *xy*, όπως φαίνεται στο σχ. 9.7. Ο δίσκος έχει θετική σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου σ και γωνιακή ταχύτητα ω. Αποδείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του δίσκου είναι $B = \frac{1}{2}\mu_o\sigma\omega R$.



Σχήμα 9.7 *Φορτισμένος λεπτός δίσκος ακτίνας R περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (παράδειγμα 9.3).*

Λύση

Καταρχήν, εφόσον ο δίσκος είναι λεπτός, θα θεωρήσουμε ότι είναι δισδιάστατος, δηλ. έχει μηδενικό πάχος. Έστω τώρα ένα στοιχειώδες τμήμα του κυκλικού δίσκου με πλάτος *dr*, έτσι ώστε να δημιουργείται ένας κυκλικός δακτύλιος, ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω. Λόγω της περιστροφής του δακτυλίου, το φορτίο *dQ* του δακτυλίου κινείται σε κυκλική τροχιά, ώστε να δημιουργείται ένα ρεύμα *I*, όπου

$$I = \frac{dQ}{dt} \qquad (1)$$

Το φορτίο *dQ* του δακτυλίου είναι

---

[27] Το αόριστο ολοκλήρωμα της μορφής $\int\frac{dx}{(x^2+k^2)^{3/2}}$, όπου *k* μια σταθερά, έχει λύση $\frac{x}{k^2(x^2+k^2)^{1/2}}$. Εδώ έχουμε $k=\alpha/2$.

$$dQ = \sigma dA \qquad (2)$$

ενώ το εμβαδόν του είναι

$$dA = 2\pi r dr \qquad (3)$$

Η εξ. 2 από την 3, γίνεται

$$dQ = \sigma 2\pi r dr \qquad (4)$$

Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου ορίζεται ως

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} \Rightarrow \upsilon = \omega r \qquad (5)$$

Θεωρώντας τον δακτύλιο σαν έναν κυκλικό ρευματοφόρο αγωγό με ρεύμα I, γράφουμε για ένα στοιχειώδες μήκος του dl

$$\boldsymbol{dB} = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{I\boldsymbol{dl}\times\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{Idl\sin 90^o}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{dQ}{dt}\frac{dl}{r^2} \qquad (6)$$

Η ταχύτητα του φορτίου dQ στον κυκλικό δακτύλιο, είναι

$$\upsilon = \frac{dl}{dt} \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{dl}{dt} = \omega r \qquad (7)$$

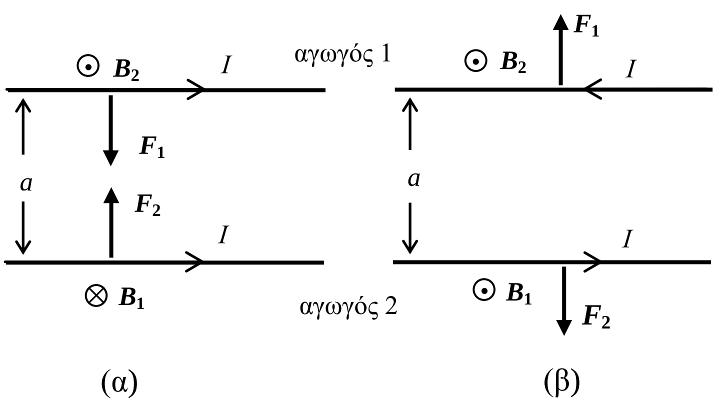
Η εξ. 6 λόγω των 4 και 7, γίνεται

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\frac{\sigma 2\pi r^2 \omega dr}{r^2} \Rightarrow dB = \frac{\mu_o}{4\pi}\sigma 2\pi\omega dr \qquad (8)$$

Το στοιχειώδες πεδίο $\boldsymbol{dB}$ δημιουργείται από τον κυκλικό δακτύλιο πάχους dr, και είναι κάθετο στο επίπεδο του δίσκου στο κέντρο του, (σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού), όπως φαίνεται στο σχ. 9.7. Για να υπολογίσουμε το συνολικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ όλου του δίσκου, πρέπει να ολοκληρώσουμε την εξ. 8, ως προς την ακτίνα r. Έτσι έχουμε

$$dB = \int_0^R \frac{\mu_o}{4\pi}\sigma 2\pi\omega dr \Rightarrow B = \frac{\mu_o \sigma\omega R}{2}$$

Η διεύθυνση του πεδίου $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετη στο επίπεδο του περιστρεφομένου δίσκου, και περνά από το κέντρο του, όπως δείχνει το σχ. 9.7.



Σχήμα 9.8 *Δύο παράλληλοι ευθύγραμμοι ρευματοφόροι αγωγοί, δημιουργούν τέτοια μαγνητικά πεδία στο χώρο, ώστε οι μαγνητικές δυνάμεις που ασκούνται πάνω στον κάθε αγωγό, να έχουν ως αποτέλεσμα οι αγωγοί, (α) να έλκονται όταν τα ρεύματα είναι ομόρροπα, και (β) να απωθούνται όταν τα ρεύματα είναι αντίρροπα.*

9.4 Μαγνητική δύναμη μεταξύ παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών

Είδαμε προηγουμένως, ότι ένας ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός μεγάλου μήκους παράγει μαγνητικό πεδίο, το οποίο δίνεται από την εξ. 9.16. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε δυο παράλληλους ρευματοφόρους αγωγούς 1 και 2, οι οποίοι διαρρέονται από ομόρροπα ρεύματα I_1 και I_2 αντιστοίχως, όπως φαίνεται στο σχ. 9.8α. Οι αγωγοί απέχουν μεταξύ τους απόσταση α, και το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο ένας αγωγός στο χώρο θα εξασκεί μια μαγνητική δύναμη $\boldsymbol{F}$ στον άλλο αγωγό και αντιστρόφως. Έτσι λοιπόν, το πεδίο που δημιουργεί ο αγωγός 1 στην περιοχή του αγωγού 2, είναι $B_1 = \dfrac{\mu_o I_1}{2\pi a}$, οπότε η δύναμη $\boldsymbol{F_2}$ που ασκείται στον αγωγό 2, είναι $\boldsymbol{F}_2 = I_2 \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B_1} \Rightarrow F_2 = I_2 l B_1$, ή αλλιώς $F_2 = \dfrac{\mu_o I_1 I_2 l}{2\pi a}$, όπου l είναι το μήκος του αγωγού. Η δύναμη ανά μονάδα μήκους που ασκείται από τον αγωγό 1 στον αγωγό 2, είναι $F_2 = \dfrac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a}$. Με ανάλογο τρόπο ο αγωγός 2 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_2}$ στο χώρο του αγωγού 1, με μέτρο $B_2 = \dfrac{\mu_o I_2}{2\pi a}$. Η μαγνητική δύναμη $\boldsymbol{F_1}$ που ασκείται πάνω στον αγωγό 1 από το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_2}$ του αγωγού 2, είναι $\boldsymbol{F_1} = I_1 \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B_2} \Rightarrow F_1 = I_1 l B_2 = \dfrac{\mu_o I_1 I_2 l}{2\pi a}$. Δηλαδή, η δύναμη $\boldsymbol{F_1}$ είναι ίση και αντίθετη της δύναμης $\boldsymbol{F_2}$, η οποία ασκείται στον αγωγό 2 από το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_1}$ του αγωγού 1. Η ισότητα αυτή στηρίζεται στο νόμο των δυνάμεων, δράσης-αντίδρασης. Αποδείξαμε λοιπόν, ότι όταν τα ρεύματα των αγωγών είναι ομόρροπα, οι αγωγοί έλκονται (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Αναλόγως μπορεί να αποδειχθεί ότι, όταν τα ρεύματα των αγωγών είναι αντίρροπα, οι αγωγοί απωθούνται, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.8β (Kraus, 1993), (Giancoli, 2012).

Παράδειγμα 9.4 Άπωση ρευματοφόρων αγωγών

Δυο παράλληλοι αγωγοί μήκους 0.50 m ο καθένας, διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα μέτρου 10 A όπως στο σχ. 9.8β. α) Πόση είναι η απόσταση a μεταξύ των αγωγών, εάν απωθούνται με δύναμη 1 N; *Υπόδειξη*: Υποθέστε ότι η απόσταση a είναι αρκετά μικρή, ώστε το μήκος των αγωγών να δύναται να θεωρηθεί πολύ μεγάλο, οπότε να ισχύει η εξ. 9.16. Δίνεται μ_o=4π×10^{-7} Wb/A.

Λύση

Ο κάθε αγωγός δημιουργεί στη θέση του άλλου μαγνητικό πεδίο ίσο με

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a} \qquad (1)$$

Έτσι, ο κάθε αγωγός ασκεί στον άλλο δύναμη μέτρου

$$F = BIl \qquad (2)$$

Η δύναμη F είναι αμοιβαίως απωστική, λόγω των αντιρρόπων ρευμάτων. Έτσι η εξ. 1 στη 2, δίνει

$$F = \frac{\mu_o I}{2\pi a} Il \Rightarrow F = \frac{\mu_o I^2 l}{2\pi a} \Rightarrow a = \frac{\mu_o I^2 l}{2\pi F} \Rightarrow a = \frac{4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{Wb/A.m} \times 10^2\,\mathrm{A} \times 0.5\mathrm{m}}{2\pi \times 1\mathrm{N}} \Rightarrow a = 10\mu\mathrm{m}$$

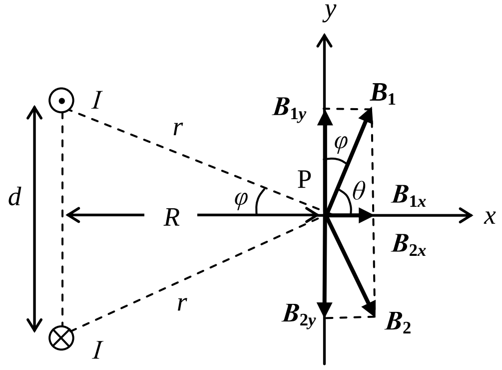
Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα δικαιώνει την υπόθεσή μας, μιας και τα 10 μικρόμετρα είναι πολύ μικρότερα του μήκους των αγωγών.

Παράδειγμα 9.5 Μαγνητικό πεδίο στη μεσοκάθετο παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών

Δυο μακριά ευθύγραμμα σύρματα, τα οποία απέχουν απόσταση d, διαρρέονται από ίσα αντιπαράλληλα ρεύματα I, όπως φαίνεται στην κάθετη άποψη του σχήματος 9.9. Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ στο σημείο P που ισαπέχει από τα σύρματα, δίνεται από την σχέση $B = \dfrac{2\mu_o I d}{\pi(4R^2 + d^2)}$.

Λύση

Ας θεωρήσουμε τους δύο ευθύγραμμους αγωγούς κάθετους στο επίπεδο της σελίδας, όπως φαίνεται στο σχ. 9.9. Τότε στο σημείο P, ο κάθε αγωγός δημιουργεί μαγνητικό πεδίο B, κάθετο στην απόσταση r στο επίπεδο xy,. Τα πεδία των δυο αγωγών είναι B_1 και B_2, και έχουν ίσα μέτρα που



Σχήμα 9.9 *Μαγνητικό πεδίο δυο παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών (κάθετη άποψη), σε απόσταση R και πάνω στην μεσοκάθετο της απόστασής τους d (παράδειγμα 9.5).*

δίνονται από την σχέση

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad (1)$$

Για να ευρούμε το συνολικό πεδίο στο σημείο P, προσθέτουμε διανυσματικά τα $\boldsymbol{B_1}$ και $\boldsymbol{B_2}$ και έχουμε:

Στον άξονα *x*: $\boldsymbol{B_x} = \boldsymbol{B_{1x}} + \boldsymbol{B_{2x}} \Rightarrow B_x = B_1\cos\theta + B_2\cos\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} B_x = 2B_1\cos\theta$. (2)

Στον άξονα *y*: $\boldsymbol{B_y} = \boldsymbol{B_{1y}} + \boldsymbol{B_{2y}} \Rightarrow B_y = B_1\sin\theta - B_2\sin\theta \overset{(1)}{\Rightarrow} B_y = 0$ (3)

Έτσι στο σημείο P, για το μαγνητικό πεδίο B υπάρχει μόνο B_x συνιστώσα, όπου

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}2\cos\theta \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{\pi r}\cos\theta \qquad (4)$$

Από την γεωμετρία του σχήματος 9.9, συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi + \theta = 90^o \Rightarrow \cos\theta = \sin\varphi \qquad (5)$$

Ισχύει όμως

$$\sin\varphi = \frac{d/2}{r} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{d}{2r} \qquad (6)$$

Οι εξισώσεις 5 και 6 στην 4 δίνουν

$$B = \frac{\mu_o I d}{2\pi r^2} \qquad (7)$$

Ξανά από την γεωμετρία του σχήματος παίρνουμε

$$r^2 = (\frac{d}{2})^2 + R^2 \Rightarrow r^2 = \frac{d^2}{4} + R^2 \qquad (8)$$

Η εξ. 8 στην 7 δίνει

$$B = \frac{\mu_o I d}{2\pi(\frac{d^2}{4} + R^2)} = \frac{\mu_o I d}{2\pi(\frac{d^2 + 4R^2}{4})} \Rightarrow B = \frac{2\mu_o I d}{\pi(d^2 + 4R^2)}$$

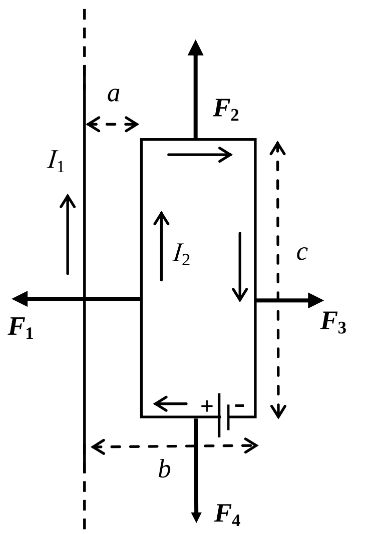
Το πεδίο $\boldsymbol{B}$ είναι στην κατεύθυνση του ημιάξονα +*x*.

Παράδειγμα 9.6 Μαγνητική δύναμη σε ορθογώνιο ρευματοφόρο βρόχο

Το ευθύγραμμο σύρμα μεγάλου μήκους του σχήματος 9.10, διαρρέεται από ρεύμα I_1=20 A. Ο ορθογώνιος βρόχος του οποίου οι μεγάλες πλευρές είναι παράλληλες στο σύρμα, διαρρέεται από ρεύμα I_2=8.00 A. Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στον βρόχο από το μαγνητικό πεδίο του σύρματος. Δίνονται οι αποστάσεις a=1.20 cm, b=3.80 cm και c=6.20 cm.

Λύση

Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί ο ευθύγραμμος αγωγός είναι $B = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r}$, όπου r είναι η απόσταση από τον αγωγό. Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στον βρόχο από το μαγνητικό πεδίο B του αγωγού, είναι το άθροισμα των τεσσάρων δυνάμεων που ασκούνται στα τέσσερα τμήματα του ορθογωνίου βρόχου, οπότε ισχύει



Σχήμα 9.10 *Ορθογώνιος βρόχος που διαρρέεται από ρεύμα σε περιοχή μαγνητικού πεδίου ενός ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού μεγάλου μήκους (παράδειγμα 9.6).*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{F_4} \qquad (1)$$

Γενικά, η δύναμη πάνω σε κάθε τμήμα του βρόχου είναι $\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$. Επειδή το $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετο σε κάθε τμήμα μήκους l, ισχύει $F = IlB$. Τα δυο κάθετα στον αγωγό τμήματα του βρόχου δεν συνεισφέρουν στην συνισταμένη δύναμη, διότι οι δυνάμεις τους είναι αντίθετες και εξουδετερώνονται, δηλ. $\boldsymbol{F_2} = -\boldsymbol{F_4}$. Επομένως η εξ. 1 γίνεται

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_3} \qquad (2)$$

όπου η $\boldsymbol{F_1}$ είναι αντίθετης κατεύθυνσης από την $\boldsymbol{F_3}$.
Ισχύει όμως

$$F_1 = I_2 l_1 B_1 \Rightarrow F_1 = \frac{\mu_o I_1 I_2 c}{2\pi a} \qquad (3)$$

όπου l_1=c=6.2 cm και a=1.2 cm.
Ομοίως

$$F_3 = I_2 l_3 B_3 \Rightarrow F_3 = \frac{\mu_o I_1 I_2 c}{2\pi b} \qquad (4)$$

όπου l_3=c=6.2 cm και b=3.8 cm.
Άρα λόγω των εξισώσεων 3 και 4, η εξ. 2 δίνει

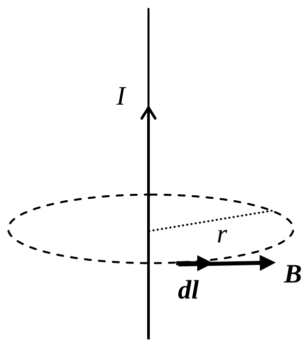
$$F = \frac{\mu_o I_1 I_2 c}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

Τελικά παίρνουμε

$$F = \frac{\mu_o I_1 I_2 c}{2\pi}\left(\frac{b-a}{ab}\right) = \frac{4\pi \times 10^{-7}\,(\mathrm{W/Am^2}) \times 20 \times 8\mathrm{A}^2 \times 6.2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{2\pi} \times \frac{(3.8-1.2)\times 10^{-2}\,\mathrm{m}}{4.56 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} \Rightarrow F = 1.13 \times 10^{-4}\,\mathrm{N}$$

9.5 Ο νόμος του Ampere

Στην περίπτωση του ηλεκτρισμού, είδαμε ότι για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο γύρω από κάποιες συμμετρικές κατανομές φορτίου, ο νόμος του Gauss είναι πολύ πιο εύχρηστος από το νόμο του Coulomb. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και στον μαγνητισμό. Σε περιπτώσεις μεγάλης συμμετρίας των ηλεκτρικών ρευμάτων, τα μαγνητικά πεδία που σχηματίζονται μπορούν να υπολογιστούν πιο εύκολα εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere, αντί του νόμου των Biot-Savart.



Σχήμα 9.11 *Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου ρευματοφόρου αγωγού σε σταθερή απόσταση r από αυτόν.*

Ο νόμος του Ampere εκφράζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ σε μια κλειστή διαδρομή, δηλαδή $\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl}$. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος αυτού, μπορεί να γίνει σχετικά εύκολα για ορισμένα απλά και συμμετρικά ηλεκτρικά ρεύματα. Για παράδειγμα, είδαμε πιο πάνω ότι για τον μεγάλου μήκους ευθύγραμμο αγωγό, (εδάφιο 9.3.1), το μαγνητικό πεδίο παρουσιάζει μια κυκλική συμμετρία γύρω από τον αγωγό, όπως φαίνεται στο σχ. 9.11. Οι δυναμικές μαγνητικές γραμμές σχηματίζουν ομόκεντρους κύκλους, όπου το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής σε κάθε σημείο του χώρου, δίνεται από το εφαπτομενικό διάνυσμα στη μαγνητική δυναμική γραμμή που περνά από το συγκεκριμένο σημείο, διάνυσμα που έχει κατεύθυνση, η οποία δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού (βλ. σχ.9.11). Για μεγάλο μήκος αγωγού, το μέτρο του μαγνητικού πεδίου B εξαρτάται μόνο από το ρεύμα I και την απόσταση r από τον αγωγό (βλ. εξ. 9.16). Έτσι, εάν υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl}$ για κύκλο ακτίνας r γύρω από ευθύγραμμο αγωγό μεγάλου μήκους, έχουμε

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint Bdl\cos 0 = \oint Bdl = \oint \frac{\mu_o I}{2\pi r}dl = \frac{\mu_o I}{2\pi r}2\pi r = \mu_o I \Rightarrow \oint d\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_o I \qquad (9.23)$$

Η εξ. 9.23 είναι γνωστή ως ο **νόμος του Ampere**, ο οποίος μας πληροφορεί ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου του μαγνητικού πεδίου και της απόστασης κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης, είναι ανάλογο του ρεύματος που διαπερνά την κλειστή καμπύλη (Grant & Phillips, 1975), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Kraus, 1993), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013). Παρότι στην προκειμένη περίπτωση εφαρμόσαμε τον νόμο του Ampere για κύκλο, όπως θα δείξουμε παρακάτω, αυτός ισχύει για οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή. Ο νόμος ανακαλύφθηκε από τον Γάλλο φυσικό και μαθηματικό André-Marie Ampère (1775–1836) το 1826, γι' αυτό και φέρει το όνομά του. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 6, προς τιμήν του μεγάλου Γάλλου επιστήμονα, η μονάδα του ηλεκτρικού ρεύματος ορίστηκε να είναι το Ampere (A).

Αντιστρόφως, εάν γνωρίζουμε την ισχύ του νόμου του Ampere, μπορούμε να υπολογίσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο κάθετος ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός του σχήματος 9.11 σε απόσταση *r*. Λόγω της κυκλικής συμμετρίας του προβλήματος, για σταθερό *r*, δεν θα πρέπει να αλλάζει η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$. Έτσι επιλέγοντας την κλειστή κυκλική διαδρομή ακτίνας *r* γύρω από τον αγωγό (σχ. 9.11), και εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere, έχουμε

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_o I \Rightarrow \oint Bdl\cos 0 = \mu_o I \Rightarrow \oint Bdl = \mu_o I \Rightarrow B\oint dl = \mu_o I \Rightarrow B2\pi r = \mu_o I \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

Παρατηρούμε, ότι η σχέση για το πεδίο *B* που καταλήξαμε εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere, είναι η ίδια με αυτήν που καταλήξαμε για το ίδιο πρόβλημα εφαρμόζοντας τον νόμο των Biot και Savart (βλ. εξ. 9.16). Η διαφορά με την εφαρμογή του νόμου του Ampere, είναι ότι οδηγηθήκαμε στο ίδιο συμπέρασμα αρκετά πιο εύκολα. Αυτό δυστυχώς δεν ισχύει πάντα, αλλά εξαρτάται από την φυσική του προβλήματος και τον βαθμό συμμετρίας που αυτό παρουσιάζει.

Στην προηγούμενη περίπτωση για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$ διαλέξαμε μια συγκεκριμένη συμμετρική διαδρομή γύρω από τον αγωγό, η οποία ήταν κυκλική. Ας δοκιμάσουμε τώρα να υπολογίσουμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$, για μια τυχαία κλειστή διαδρομή, όπως δείχνει το σχ. 9.12. Τότε θα έχουμε

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint Bdl\cos\theta \qquad (9.24)$$

όπου

$$\cos\theta = \frac{ds}{dl} \qquad (9.25)$$

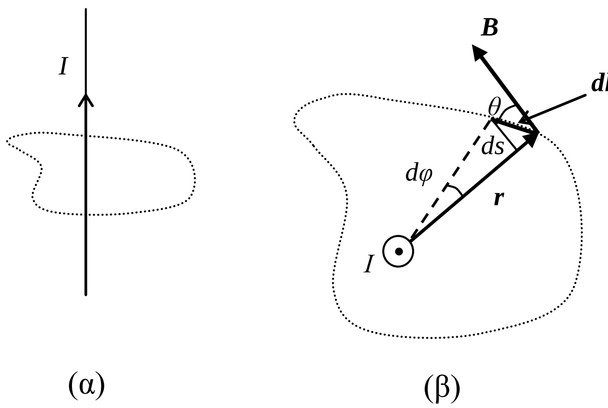
με την $d\varphi$ να είναι η γωνία με την οποία φαίνεται η απόσταση *dl* από τον αγωγό. Επειδή όμως η απόσταση *ds* είναι απειροελάχιστη, ισχύει

$$ds = rd\varphi \qquad (9.26)$$

Η εξ. 9.25 λόγω της 9.26 δίνει

$$\cos\theta = \frac{rd\varphi}{dl} \qquad (9.27)$$

οπότε η εξ. 9.24 γράφεται ως



Σχήμα 9.12 *α) Τυχαία κλειστή διαδρομή γύρω από ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μεγάλου μήκους. β) Η ίδια διαδρομή σε κάθετη άποψη. Το μαγνητικό πεδίο B ορίζεται σε τυχαία απόσταση r από τον ρευματοφόρο αγωγό.*

$$\oint d\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \oint Brd\varphi = \oint \frac{\mu_o I}{2\pi r}rd\varphi = \frac{\mu_o I}{2\pi}\oint d\varphi = \frac{\mu_o I}{2\pi}2\pi \Rightarrow \oint d\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_o I$$

Επομένως καταλήγουμε, ότι το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}$ στην κλειστή διαδρομή γύρω από έναν ρευματοφόρο αγωγό, δεν εξαρτάται από την καμπύλη ολοκλήρωσης, ούτε και από την σχετική του θέση ως προς τον αγωγό, αλλά είναι πάντα ίσο με το γινόμενο της διαπερατότητας του κενού επί το περικλείον ρεύμα $I_{περ}$ που διαρρέει τον αγωγό. Αυτή είναι και η ακριβής διατύπωση του **νόμου του Ampere**, που μαθηματικά εκφράζεται από την εξίσωση

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o I_{\text{περικλείον}} \tag{9.28}$$

Πρέπει να σημειώσουμε, ότι ο νόμος του Ampere όπως διατυπώθηκε παραπάνω, ισχύει μόνο για σταθερά ρεύματα και μαγνητικά πεδία, τα οποία δεν μεταβάλλονται με το χρόνο, και επίσης όταν στον χώρο δεν υπάρχουν μαγνητικά υλικά (Giancoli, 2012). Επίσης, εάν η κλειστή διαδρομή που επιλέγουμε να εφαρμόσουμε τον νόμο του Ampere περιέχει περισσότερους από έναν ρευματοφόρους αγωγούς, το συνολικό περικλείον ρεύμα θα είναι το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων, όπου ομόρροπα ρεύματα προστίθενται και αντίρροπα αφαιρούνται. Ακολουθούν κάποια παραδείγματα, στα οποία γίνεται υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου που δημιουργούν ρευματοφόροι αγωγοί, με εφαρμογή του νόμου του Ampere.

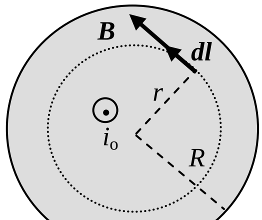
Παράδειγμα 9.7 Μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό κυλινδρικού αγωγού

Να ευρεθεί η έκφραση του μαγνητικού πεδίου *B* σε απόσταση *r* από το κέντρο μακρού κυλινδρικού συρμάτινου αγωγού ακτίνας *R*, για $r<R$. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα i_o ομοιόμορφα κατανεμημένο στην κάθετη τομή του, όπως φαίνεται στο σχ. 9.13.

Λύση

Εφόσον το ρεύμα στον αγωγό είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην διατομή του, η πυκνότητα ρεύματος *J* είναι σταθερή, και ίση με

$$J = \frac{i_o}{A} \Rightarrow J = \frac{i_o}{\pi R^2} \tag{1}$$



Σχήμα 9.13 *Κάθετη τομή κυλινδρικού αγωγού που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα i_o. Κυκλικός δρόμος ακτίνας r για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου B σε απόσταση r από το κέντρο του αγωγού (παράδειγμα 9.7)*

Ζητάμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου *B* σε απόσταση *r* από το κέντρο του αγωγού, για $r<R$. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, η τιμή του πεδίου εξαρτάται μόνο από την απόσταση *r*. Για την κλειστή κυκλική διαδρομή ακτίνας *r*, το πεδίο *B* είναι σταθερού μέτρου και εφαπτόμενο πάντα στην περιφέρεια (κανόνας δεξιού χεριού, βλ. σχ. 9.13). Εφαρμόζοντας το νόμο του Ampere και λόγω της κυκλικής συμμετρίας, γράφουμε

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o i \tag{2}$$

όπου *i* είναι το περικλείον ρεύμα στην κλειστή κυκλική διαδρομή ακτίνας *r*. Το ρεύμα *i* που διαπερνά την κυκλική διατομή ακτίνας r και εμβαδού $A' = \pi r^2$, μπορεί να υπολογιστεί από την πυκνότητα ρεύματος, γράφοντας

$$J = \frac{i}{A'} \Rightarrow J = \frac{i}{\pi r^2} \Rightarrow i = J\pi r^2 \tag{3}$$

Η εξ. 3 λόγω της 1, δίνει

$$i = \frac{i_o}{\pi R^2}\pi r^2 \Rightarrow i = \frac{i_o r^2}{R^2} \tag{4}$$

Η εξ. 2 γράφεται τελικά

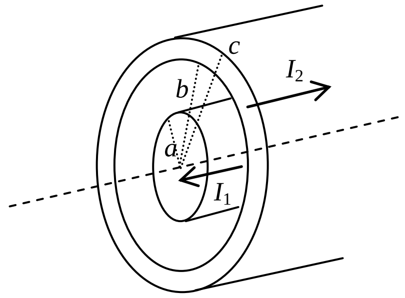
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o i \Rightarrow B 2\pi r = \mu_o \frac{i_o r^2}{R^2} \Rightarrow B = \mu_o \frac{i_o r}{2\pi R^2}$$

Παρατηρούμε ότι για $r=R$, η μαγνητική επαγωγή δίνεται από την γνωστή σχέση 9.16, δηλ.

$$B = \frac{\mu_o i_o}{2\pi R}$$

Παράδειγμα 9.8 Ομοαξονικό καλώδιο με αντίρροπα ρεύματα

Συμπαγής κυλινδρικός αγωγός ακτίνας *α*, περιβάλλεται από μονωτικό περίβλημα ακτίνων *a* και *b*, το οποίο με τη σειρά του περιβάλλεται από αγώγιμο περίβλημα ακτίνων *b* και *c*, σχηματίζοντας ένα ομοαξονικό καλώδιο, όπως δείχνει το σχήμα 9.14. Αν ο κεντρικός αγωγός διαρρέεται από ρεύμα I_1 , και το αγώγιμο περίβλημα από ρεύμα I_2 σε αντίθετες κατευθύνσεις το ένα ως προς το άλλο, να ευρείτε μια σχέση για το μέτρο του μαγνητικού πεδίου, α) σε σημεία που απέχουν από το κέντρο απόσταση *r*, όπου $a<r<b$, και β) σε σημεία έξω από το ομοαξονικό καλώδιο, $r>c$. γ) Εάν τα δύο ρεύματα είναι της ίδιας φοράς, πώς είναι η απάντηση των α και β ερωτημάτων;



Σχήμα 9.14 *Ομοαξονικό καλώδιο που διαρρέεται από αντίρροπα ρεύματα (παράδειγμα 9.8).*

Λύση

α) Για $a<r<b$ θεωρούμε κυκλική διαδρομή ακτίνας *r*, και εφαρμόζουμε το νόμο Ampere, όπου

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o I_1 \Rightarrow \oint B dl = \mu_o I_1 \Rightarrow B\oint dl = \mu_o I_1 \Rightarrow B2\pi r = \mu_o I_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r}$$

β) Για $r>c$ εφαρμόζουμε ξανά τον νόμο του Ampere για κυκλική διαδρομή ακτίνας *r* και έχουμε

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o I_{\text{περικλείον}} \Rightarrow \oint B dl = \mu_o |I_1 - I_2| \Rightarrow B\oint dl = \mu_o |I_1 - I_2| \Rightarrow B2\pi r = \mu_o |I_1 - I_2| \Rightarrow B = \frac{\mu_o |I_1 - I_2|}{2\pi r}$$

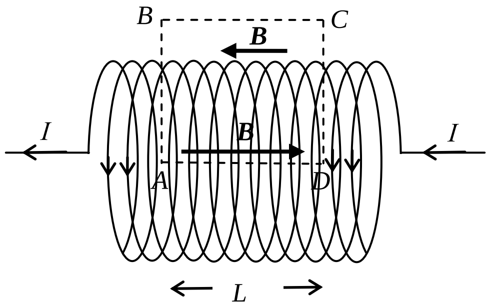
Έτσι λοιπόν το μέτρο και η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου του ομοαξονικού καλωδίου, για σημεία που ισχύει $r>c$, εξαρτάται από το μέγεθος των ρευμάτων I_1 και I_2. Η φορά του $\boldsymbol{B}$ ευρίσκεται σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, για το ρεύμα με την μεγαλύτερη ένταση.

γ) Όταν οι κατευθύνσεις των δυο ρευμάτων I_1 και I_2 είναι ίδιες, τότε η απάντηση στο (α) ερώτημα δεν αλλάζει, ενώ για το (β) ερώτημα τα ρεύματα προστίθενται επειδή είναι ομόρροπα, και τελικά παίρνουμε

$$B = \frac{\mu_o (I_1 + I_2)}{2\pi r}$$

9.6 Μαγνητικό πεδίο ιδανικού σωληνοειδούς (πηνίου)

Ας θεωρήσουμε το σωληνοειδές του σχήματος 9.15, το οποίο διαρρέεται από σταθερό ρεύμα *I* και έχει γραμμική πυκνότητα σπειρών ίση με *n*. Έχουμε ήδη υπολογίσει παραπάνω, ότι το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο μιας κυκλικής σπείρας, δίνεται από την εξ. 9.21. Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, και μακριά από τα άκρα του, μπορούμε να εφαρμόσουμε το νόμο του Ampere διαλέγοντας τη διαδρομή *ABCD* του σχήματος 9.15.



Σχήμα 9.15 *Σωληνοειδές με γραμμική πυκνότητα σπειρών n διαρρέεται από ρεύμα I. Θεωρώντας κλειστή διαδρομή ABCD, και εφαρμόζοντας τον νόμο του Ampere, μπορούμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο* **B** *στο εσωτερικό του σωληνοειδούς.*

Έτσι λοιπόν, έχουμε

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o I_{\text{περικλείον}} \Rightarrow \int_A^B \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} + \int_B^C \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} + \int_C^D \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} + \int_D^A \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} = 0+0+0+BL = \mu_o I_{\text{περικλείον}}$$

διότι

$$\int_A^B \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} = \int_C^D \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} = 0, \text{ εφόσον } \boldsymbol{B}\perp \boldsymbol{dl}$$

και

$$\int_{B}^{C} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = 0$$

μιας και σε μεγάλη απόσταση «έξω» από το σωληνοειδές, (AB και DC πολύ μεγάλα) το πεδίο σχεδόν μηδενίζεται, δηλ. $\boldsymbol{B}$=0. Σημειώστε ότι την πλευρά *BC* του δρόμου *ABCD*, μπορούμε να την θεωρήσουμε όσο μακριά θέλουμε από το πηνίο. Το ηλεκτρικό ρεύμα λοιπόν, το οποίο διαρρέει τον βρόχο *ABCD*, είναι το ρεύμα που διαρρέει κάθε σπείρα επί τον αριθμό των σπειρών που αντιστοιχούν στο μήκος *L* του μήκους *AD* του βρόχου. Εάν το σωληνοειδές περιέχει *n* σπείρες ανά μονάδα μήκους, και *I* είναι το ρεύμα που διαρρέει την κάθε σπείρα, τότε το συνολικό ρεύμα που περικλείεται στον κλειστό δρόμο *ABCD*, είναι

$$I_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda\varepsilon\acute{\iota}o\nu} = nLI$$

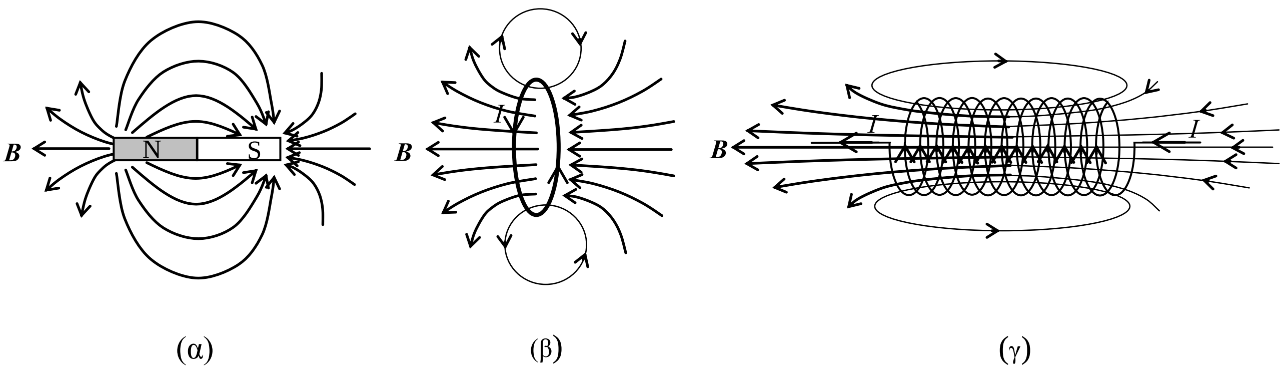
οπότε

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o I_{\pi\varepsilon\rho\iota\kappa\lambda\varepsilon\acute{\iota}o\nu} \Rightarrow BL = \mu_o nLI \Rightarrow B = \mu_o nI \qquad (9.29)$$

Η εξ. 9.29 εκφράζει το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό μέρος του σωληνοειδούς (Alonso & Finn, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Εάν η πυκνότητα των σπειρών είναι μεγάλη, και το μήκος του σωληνοειδούς είναι αρκετά μεγαλύτερο από την ακτίνα των σπειρών, τότε το σωληνοειδές ονομάζεται ιδανικό ή πηνίο, και το πεδίο $\boldsymbol{B}$ είναι σταθερό σ' όλο το εσωτερικό του, εξαιρουμένων των περιοχών κοντά στα άκρα του. Επίσης στο εξωτερικό μέρος του ιδανικού σωληνοειδούς, επειδή οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές είναι πολύ αραιές, το πεδίο *B* είναι πολύ μικρό, ώστε πρακτικά να το θεωρούμε μηδέν (βλ. σχ. 9.16γ). Συμπερασματικά λοιπόν, το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ ενός σωληνοειδούς το οποίο διαρρέεται από ρεύμα *I*, είναι μηδενικό εκτός του σωληνοειδούς, και ομογενές στο εσωτερικό του, με διεύθυνση αυτή του άξονα συμμετρίας του σωληνοειδούς, και φορά αυτήν που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, με τα δάκτυλα να δείχνουν την φορά του ρεύματος και τον αντίχειρα αυτή του πεδίου. Στη συνέχεια θα θεωρούμε τα πηνία ιδανικά, ώστε το μαγνητικό τους πεδίο σε κάθε σημείο του εσωτερικού τους, να δίνεται από την εξ. 9.29.

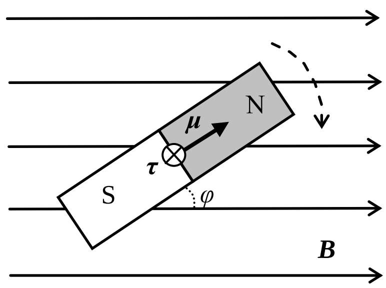
9.7 Οι βρόχοι και τα πηνία ως μαγνήτες

Ένας ρευματοφόρος βρόχος και κατά επέκταση ένα σωληνοειδές που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, δημιουργούν τα δικά τους μαγνητικά πεδία, τα οποία ομοιάζουν με τα μαγνητικά πεδία των μαγνητών. Στο σχ. 9.16 φαίνεται η ομοιότητα των μαγνητικών πεδίων που σχηματίζονται από έναν ραβδόμορφο μαγνήτη, έναν ρευματοφόρο κυκλικό βρόχο και ένα ρευματοφόρο πηνίο (Knight, 2010). Είναι φανερό, ότι οι βρόχοι και τα πηνία που διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα, συμπεριφέρονται σαν μαγνήτες, αφού αναλόγως



Σχήμα 9.16 *Μαγνητικές δυναμικές γραμμές (α) ενός μαγνητικού διπόλου, (β) ενός ρευματοφόρου βρόχου, και (γ) ενός ρευματοφόρου πηνίου. Προσέξτε την ομοιότητα όλων των μαγνητικών πεδίων.*

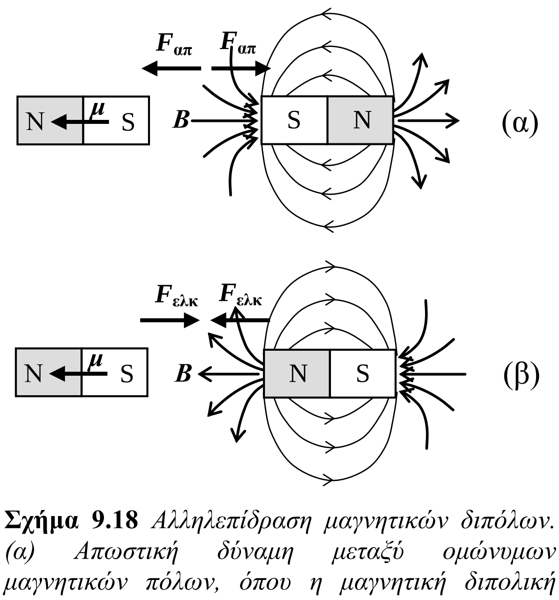
την κατεύθυνση των μαγνητικών δυναμικών γραμμών του μαγνητικού τους πεδίου στο χώρο, μπορούμε να ορίσουμε τους μαγνητικούς τους πόλους (βλ. σχ. 9.16). Κατά συνέπεια, εάν ένας ρευματοφόρος βρόχος ή πηνίο ευρεθούν μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο *B*, η συμπεριφορά τους θα είναι όμοια με αυτή των φυσικών μαγνητών, δηλ. θα ασκηθεί πάνω τους ροπή, η οποία θα τείνει να ευθυγραμμίσει το μαγνητικό τους πεδίο με αυτό του ***B***, όπως δείχνει το σχ. 9.17, για την περίπτωση ενός ραβδόμορφου φυσικού μαγνήτη. Με άλλα λόγια η μαγνητική διπολική ροπή ***μ*** του μαγνήτη (βρόχου ή πηνίου), τείνει να ευθυγραμμιστεί με το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ***B***, διότι ασκεί ροπή πάνω τους (βλ. εδάφιο 8.8).



Σχήμα 9.17 *Μαγνήτης σε τυχαίο προσανατολισμό μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο **B**. Η ασκούμενη ροπή **τ** πάνω του, τείνει να τον περιστρέψει ώστε η μαγνητική διπολική ροπή του **μ**, να ευθυγραμμιστεί με το μαγνητικό πεδίο **B**.*

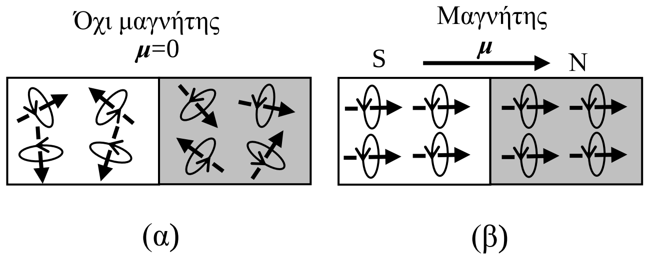
9.8 Αλληλεπίδραση μαγνητών

Η εικόνα του φυσικού ραβδόμορφου μαγνήτη με την μαγνητική διπολική ροπή ***μ*** να είναι διάνυσμα, το οποίο κατευθύνεται από τον νότιο μαγνητικό πόλο στον αντίστοιχο βόρειο (βλ. σχ. 9.17), βοηθά να καταλάβουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαγνητών, δηλ την άπωση και έλξη των μαγνητών, τις οποίες περιγράψαμε ποιοτικά στο εδάφιο 8.1. Έτσι, όταν δυο μαγνήτες πλησιάσουν αρκετά μεταξύ τους, ώστε ο νότιος πόλος του ενός να προσεγγίζει τον νότιο πόλο του άλλου, η διπολική μαγνητική ροπή του ενός μαγνήτη ευρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο του άλλου. Σ' αυτήν την περίπτωση, η μαγνητική διπολική ροπή ***μ*** του ενός μαγνήτη είναι αντιπαράλληλη με το μαγνητικό πεδίο ***B*** που δημιουργεί ο έτερος μαγνήτης, όπως δείχνει το σχ. 9.18α. Ο αντιπαράλληλος προσανατολισμός των ***μ*** και ***B***, δημιουργεί μια απωστική δύναμη μεταξύ των μαγνητών, διότι δεν είναι ενεργειακά προτιμητέος, μιας και αντιστοιχεί σε θετική μαγνητική δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο μαγνητών, ίση με $U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ (βλ. εξ. 8.41). Έτσι για αντιπαράλληλο προσανατολισμό των ***μ*** και ***B*** (*U* θετική), όσο μικρότερη είναι η απόσταση των δύο μαγνητών, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η μαγνητική δυναμική ενέργεια (πιο θετική) του συστήματός τους, διότι το πεδίο ***B*** αυξάνεται όσο μειώνεται η απόσταση μεταξύ των μαγνητών. Το σύστημα των μαγνητών αντιτίθεται στην μεγιστοποίηση της δυναμικής του ενέργειας, και τείνει να την μειώσει, απωθώντας ο ένας μαγνήτης τον άλλο. Ανάλογη εξήγηση μπορεί να δοθεί και για την άπωση μεταξύ βορείων μαγνητικών πόλων, μιας και σε αυτή την περίπτωση η μαγνητική διπολική ροπή του ενός μαγνήτη είναι αντιπαράλληλη με το μαγνητικό πεδίο του άλλου μαγνήτη. Έτσι λοιπόν εξηγείται, γιατί οι ομώνυμοι μαγνητικοί πόλοι πάντα απωθούνται. Αντιθέτως, όταν δυο μαγνήτες πλησιάσουν αρκετά μεταξύ τους, ώστε ο νότιος μαγνητικός πόλος του ενός, να προσεγγίζει τον βόρειο μαγνητικό πόλο του άλλου, τότε η μαγνητική διπολική ροπή ***μ*** του ενός μαγνήτη, είναι παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο ***B*** που δημιουργεί ο άλλος μαγνήτης, όπως δείχνει το σχ.9.18β. Τότε μια ελκτική δύναμη δημιουργείται μεταξύ των μαγνητών, διότι ο παράλληλος προσανατολισμός των ***μ*** και ***B*** (*U* αρνητική), είναι ενεργειακά προτιμητέος, μιας και αντιστοιχεί σε ελάχιστη μαγνητική δυναμική ενέργεια (βλ. εξ. 8.41). Όσο μικρότερη είναι η απόσταση μεταξύ των μαγνητών, τόσο μικρότερη θα είναι η μαγνητική δυναμική ενέργεια του συστήματος (πιο αρνητική), διότι το μαγνητικό πεδίο ***B*** αυξάνεται περισσότερο, όσο η απόσταση μεταξύ των μαγνητών μικραίνει. Έτσι λοιπόν εξηγείται γιατί οι ετερώνυμοι μαγνητικοί πόλοι πάντα έλκονται μεταξύ τους, μέχρι να έρθει ο ένας σε επαφή με τον άλλο, όπου και ηρεμούν, διότι τότε η μαγνητική δυναμική ενέργεια ελαχιστοποιείται (μέγιστη αρνητική τιμή). Με τον ίδιο τρόπο που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους οι μαγνήτες, αλληλεπιδρούν και οι ρευματοφόροι βρόχοι και τα πηνία.



Σχήμα 9.18 *Αλληλεπίδραση μαγνητικών διπόλων. (α) Απωστική δύναμη μεταξύ ομώνυμων μαγνητικών πόλων, όπου η μαγνητική διπολική ροπή **μ** του ενός μαγνήτη είναι αντιπαράλληλη με το μαγνητικό πεδίο **B** που δημιουργεί ο άλλος μαγνήτης. (β) Ελκτική δύναμη μεταξύ ετερώνυμων μαγνητικών πόλων, όπου ο προσανατολισμός των **μ** και **B** είναι παράλληλος (βλ. κείμενο).*

9.9 Μαγνητικά υλικά*



Σχήμα 9.19 *(α) Οι τυχαίοι προσανατολισμοί των ατομικών μαγνητικών διπολικών ροπών, δεν προσδίδουν μαγνητικές ιδιότητες στο υλικό. (β) Οι προσανατολισμένες μαγνητικές διπολικές ροπές των ατόμων ενός υλικού, τού προσδίδουν την μακροσκοπική μαγνητική διπολική ροπή* ***μ****, καθιστώντας το μαγνήτη.*

Το ερώτημα που μπορεί κάποιος να θέσει τώρα είναι, γιατί κάποια υλικά είναι μαγνήτες και δημιουργούν μαγνητικό πεδίο στο χώρο, και κάποια άλλα όχι; Είδαμε στο εδάφιο 9.7 την ομοιότητα που παρουσιάζει το μαγνητικό πεδίο ενός ραβδόμορφου μαγνήτη, με τα αντίστοιχα μαγνητικά πεδία ενός ρευματοφόρου βρόχου και ενός πηνίου. Ο βρόχος και το πηνίο δεν μπορούν να δημιουργήσουν μαγνητικό πεδίο, όταν δεν διαρρέονται από ηλεκτρικό ρεύμα. Μήπως τελικά η δημιουργία κάθε μαγνητικού πεδίου και συνεπώς η ύπαρξη των μαγνητών στη Φύση, οφείλεται αποκλειστικά στο ηλεκτρικό ρεύμα; Η απάντηση είναι καταφατική, αρκεί να θεωρήσουμε τα υλικά ως ένα σύνολο ατόμων. Πράγματι, εάν εξετάσουμε μικροσκοπικά τα άτομα ενός υλικού, θα ιδούμε τα ηλεκτρόνια να κινούνται γύρω από τους πυρήνες των ατόμων. Η κίνηση αυτή των ηλεκτρονίων δημιουργεί ένα μεγάλο πλήθος μικροσκοπικών (στην πραγματικότητα νανοσκοπικών) ρευματοφόρων βρόχων, ο καθένας των οποίων δημιουργεί μια μαγνητική διπολική ροπή ***μ***, σύμφωνα με το σχ. 8.13, και το παράδειγμα 8.5.[28] Στην ουσία οι βρόχοι αυτοί είναι νοητοί και αντιστοιχούν τόσοι βρόχοι ανά άτομο του υλικού, όσα είναι τα ηλεκτρόνια του ατόμου. Το διανυσματικό άθροισμα των μαγνητικών διπολικών ροπών των ηλεκτρονίων ενός ατόμου, προσδίδει μια συνολική μαγνητική διπολική ροπή σε κάθε άτομο του υλικού.[29] Το άθροισμα όλων αυτών των ατομικών μαγνητικών διπολικών ροπών, μπορεί να προσδώσει στο υλικό μια συνολική μακροσκοπική μαγνητική διπολική ροπή ***μ*** (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Εάν το πλήθος των ατομικών μαγνητικών διπολικών ροπών είναι τυχαίως προσανατολισμένες μεταξύ τους, ή είναι μηδενικές, η συνολική μαγνητική διπολική ροπή ***μ*** του υλικού είναι μηδέν, και το υλικό δεν δημιουργεί μαγνητικό πεδίο στο χώρο, δηλ. δεν είναι μαγνήτης, όπως δείχνει το σχ. 9.19α (Knight, 2010). Αυτό ισχύει για τα περισσότερα υλικά στην Φύση, τα οποία παρατηρούμε ότι δεν είναι μαγνήτες. Εάν όμως η πλειονότητα των ατομικών μαγνητικών διπολικών ροπών είναι προσανατολισμένες μεταξύ τους, ή προσανατολιστούν με την εφαρμογή ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, τότε το άθροισμά τους δίνει στο υλικό μια μακροσκοπική μαγνητική διπολική ροπή ***μ***, μη μηδενική, η οποία καθιστά το υλικό μαγνήτη, όπως δείχνει το σχ. 9.19β (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010). Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι η αιτία για τις μαγνητικές ιδιότητες των υλικών, και επομένως για την ύπαρξη των μαγνητών, είναι το ηλεκτρικό ρεύμα, δηλ. η κίνηση φορτίων σε ατομική κλίμακα.

Βάσει της ευθυγράμμισης των ατομικών μαγνητικών διπολικών ροπών, μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί ορισμένα υλικά αποκτούν μαγνητικές ιδιότητες, όταν ευρεθούν εντός μαγνητικού πεδίου. Συγκεκριμένα, εάν ένα υλικό το οποίο δεν είναι μαγνήτης πλησιάσει στο χώρο ενός ισχυρού μαγνήτη, οι ατομικές μαγνητικές διπολικές ροπές θα αλληλεπιδράσουν με το μαγνητικό πεδίο του μαγνήτη, και θα ευθυγραμμιστούν με αυτό, έτσι ώστε το μή μαγνητικό αρχικά υλικό να αποκτήσει μαγνητικές ιδιότητες, δηλ. να συμπεριφέρεται και αυτό ως μαγνήτης. Εάν στη συνέχεια, το υλικό απομακρυνθεί από το μαγνητικό πεδίο του ισχυρού μαγνήτη, και εξακολουθεί να έχει προσανατολισμένα τα ατομικά μαγνητικά του δίπολα (βλ. σχ.9.19β), ώστε να αποτελεί το ίδιο έναν μαγνήτη, τότε το υλικό ονομάζεται **σιδηρομαγνητικό υλικό** και το φαινόμενο **σιδηρομαγνητισμός** (Sears, 1951), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Knight, 2010). Ο σιδηρομαγνητισμός οφείλεται στο κβαντομηχανικό φαινόμενο της **σύζευξης εναλλαγής**, κατά το οποίο τα σπιν των ηλεκτρονίων ενός ατόμου αλληλεπιδρούν με τα σπιν των ηλεκτρονίων των γειτονικών ατόμων, έτσι ώστε η ευθυγράμμιση των ατομικών μαγνητικών ροπών να αποδίδει στα σιδηρομαγνητικά υλικά έναν μόνιμο μαγνητικό χαρακτήρα (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Σιδηρομαγνητικά υλικά είναι ορισμένα μέταλλα όπως ο σίδηρος, το κοβάλτιο, το νικέλιο και κράματα αυτών των στοιχείων. Αν για κάποιο λόγο, σ’ ένα

[28] Στην πραγματικότητα η συνολική διπολική μαγνητική ροπή ενός ηλεκτρονίου, είναι το διανυσματικό άθροισμα δύο επιμέρους μαγνητικών διπολικών ροπών, μία λόγω της κίνησής του γύρω από τον πυρήνα, και μία δεύτερη λόγω της ιδιοστροφορμής του, που εκφράζεται με το σπιν του ηλεκτρονίου.

[29] Μια συνεισφορά στην ατομική μαγνητική ροπή του ατόμου, προέρχεται από τον πυρήνα, διότι και αυτός παρουσιάζει μαγνητική ροπή, λόγω της μαγνητικής ροπής των πρωτονίων και των νετρονίων. Η πυρηνική μαγνητική ροπή όμως, είναι μερικές τάξεις μεγέθους μικρότερη αυτής των ηλεκτρονίων, και συχνά παραλείπεται.

σιδηρομαγνητικό υλικό πάψει να υπάρχει ο προσανατολισμός των ατομικών μαγνητικών διπόλων, τότε το υλικό παύει να είναι μαγνήτης και συνεπώς οι μακροσκοπικές μαγνητικές του ιδιότητες χάνονται. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί με θέρμανση του υλικού σε θερμοκρασίες πάνω από μια συγκεκριμένη θερμοκρασία, η οποία ονομάζεται **θερμοκρασία Curie** (Κιουρί). Στη θερμοκρασία Curie και πάνω από αυτή, η θερμική ενέργεια των μαγνητικών διπόλων είναι τέτοια, ώστε ο μεταξύ τους παράλληλος προσανατολισμός να είναι αδύνατος. Ένας άλλος τρόπος για την απομαγνήτιση ενός σιδηρομαγνητικού υλικού, είναι η τοποθέτησή του σε κατάλληλο μαγνητικό πεδίο, τέτοιας κατεύθυνσης ώστε να επέλθει αποπροσανατολισμός των ατομικών διπολικών ροπών.

Εάν με την απομάκρυνση του υλικού από ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, οι ατομικές μαγνητικές διπολικές ροπές του αποπροσανατολιστούν, έτσι ώστε να πάψει να είναι μαγνήτης, το υλικό ονομάζεται **παραμαγνητικό υλικό** και το φαινόμενο **παραμαγνητισμός** (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Grant & Phillips, 1975), Halliday, Resnick & Walker, 2013). Επίσης, εάν ένα υλικό, του οποίου τα άτομα ή μόρια δεν εμφανίζουν μόνιμες μαγνητικές διπολικές ροπές, ευρεθεί εντός μαγνητικού πεδίου ώστε το υλικό να αποκτήσει μακροσκοπική μαγνητική διπολική ροπή με κατεύθυνση αντίθετη του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, τότε το υλικό ονομάζεται **διαμαγνητικό υλικό** και το φαινόμενο **διαμαγνητισμός** (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Το φαινόμενο του διαμαγνητισμού οφείλεται στο νόμο της μαγνητικής επαγωγής του Faraday, και πιο συγκεκριμένα στον κανόνα του Lenz, οι οποίοι αμφότεροι θα μελετηθούν στο επόμενο κεφάλαιο. Όλα τα μαγνητικά φαινόμενα του σιδηρομαγνητισμού, παραμαγνητισμού και διαμαγνητισμού, είναι επαγωγικά φαινόμενα που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου με ένα υλικό. Η πλήρης κατανόηση και περιγραφή των μαγνητικών φαινομένων του παραμαγνητισμού και διαμαγνητισμού, δεν μπορεί να γίνει στα πλαίσια της κλασσική μηχανικής, αλλά μόνο σ’ αυτά της κβαντικής μηχανικής, (Feynman, Leighton & Sands, 2009). Κάτι τέτοιο ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος συγγράμματος, γι’ αυτό και δεν θα επεκταθούμε περισσότερο.

Γενικά, κάθε υλικό στη Φύση παρουσιάζει μαγνητικές ιδιότητες, έστω και σε κάποιο μικρό βαθμό. Υπάρχει μια φυσική ποσότητα η οποία μάς βοηθά να περιγράψουμε ποσοτικά τις μαγνητικές ιδιότητες ενός σώματος, η οποία ονομάζεται **μαγνήτιση *M***, είναι διάνυσμα, και το μέτρο της ορίζεται ως το πηλίκο της μαγνητικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{\mu}$ του σώματος, με τον όγκο του V, δηλ. ισχύει

$$\boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{V} \qquad (9.30)$$

(Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012). Ευρίσκεται πειραματικώς, ότι η μαγνήτιση ενός παραμαγνητικού υλικού είναι ανάλογη του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ μέσα στο οποίο τοποθετείται ένα υλικό, ενώ είναι αντιστρόφως ανάλογη της θερμοκρασίας T του υλικού. Αυτού του είδους η εξάρτηση είναι λογική, αν κάποιος σκεφτεί ότι το μαγνητικό πεδίο προσανατολίζει τις ατομικές μαγνητικές διπολικές ροπές του υλικού, ενώ η θερμοκρασία του τείνει να τις αποπροσανατολίσει, λόγω της τυχαίας θερμικής κίνησης των ατόμων ή μορίων. Η εξάρτηση της μαγνήτισης από το μαγνητικό πεδίο και την θερμοκρασία, εκφράζεται από τον **νόμο του Curie**, προς τιμή του Γάλλου φυσικού Γάλλου Pierre Curie (1859-1906), ο οποίος πρώτος τον ανακάλυψε. Σύμφωνα λοιπόν με το νόμο του Curie ισχύει ότι

$$M = C\frac{B}{T} \qquad (9.31)$$

όπου C είναι μια σταθερά που ονομάζεται **σταθερά Curie**, η τιμή της οποίας εξαρτάται από το υλικό (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Giancoli, 2012). Καθώς αυξάνεται η ένταση του πεδίου B, αυξάνεται και η μαγνήτιση μέχρι μια μέγιστη τιμή, η οποία ονομάζεται **μαγνήτιση κόρου**, όπου όλες οι ατομικές μαγνητικές διπολικές ροπές ευθυγραμμίζονται πλήρως με το πεδίο (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young & Freedman, 2010). Τότε, περαιτέρω αύξηση του μαγνητικού πεδίου δεν μπορεί να αυξήσει πλέον την μαγνήτιση του υλικού. Στην πραγματικότητα ο νόμος του Curie, δηλ. η γραμμική σχέση μεταξύ των M και B, ισχύει για τιμές του M αρκετά μικρότερες της μαγνήτισης κόρου, ή γενικότερα για μικρές τιμές του λόγου B/T.

Pierre Curie (1859-1906) (https://en.wikipedia.org/wiki/Pierre_Curie). *Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

Τελειώνοντας, πρέπει να επισημάνουμε ότι τα μαγνητικά υλικά και η μελέτη των ιδιοτήτων τους, αποτελούν ένα ξεχωριστό και ευρύ κλάδο της Φυσικής. Τα μαγνητικά υλικά είναι εξαιρετικά χρήσιμα μιας και χρησιμοποιούνται σε πολλές τεχνολογικές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στους ηλεκτρομαγνήτες, στους μετασχηματιστές, στους κινητήρες των αυτοκινήτων, στους σκληρούς δίσκους των υπολογιστών, στις μαγνητικές ταινίες των πιστωτικών καρτών, σε ιατρικά διαγνωστικά μηχανήματα, κ.ά.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 9

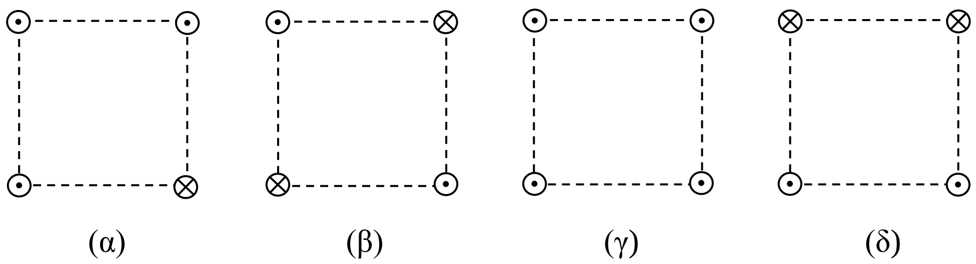
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε9.1 Υπάρχει τρόπος να δημιουργήσουμε ένα μαγνητικό πεδίο στο χώρο, χωρίς να αναγκάσουμε σε κίνηση ηλεκτρικά φορτία, δηλ. δίχως την ύπαρξη ηλεκτρικού ρεύματος;

Ε9.2 Έστω δύο ηλεκτρικά φορτία, τα οποία κινούνται παράλληλα το ένα ως προς το άλλο με την ίδια ταχύτητα. Συγκρίνετε τις κατευθύνσεις των αμοιβαίων ηλεκτρικών και μαγνητικών δυνάμεων όταν, α) τα φορτία έχουν το ίδιο πρόσημο φορτίου, και β) τα φορτία έχουν αντίθετο πρόσημο φορτίου.

Ε9.3 Συγκρίνετε τον νόμο των Biot-Savart με τον νόμο του Coulomb. Ποιες ομοιότητες και διαφορές παρατηρείτε;

Ε9.4 Το σχ. 9.20 δείχνει την κάτοψη τεσσάρων τετραγωνικών διατάξεων, στις οποίες παράλληλα σύρματα μεγάλου μήκους διαρρέονται από ρεύματα ίσης εντάσεως *I*, με κατεύθυνση είτε προς το εσωτερικό της σελίδας (⊗), είτε από την σελίδα προς τα «έξω» (⊙). Κατατάξτε τις διατάξεις των συρμάτων σύμφωνα με το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του κάθε τετραγώνου, με φθίνουσα σειρά, δηλ. ξεκινώντας από την διάταξη με το μέγιστο πεδίο και καταλήγοντας σ' αυτήν με το μικρότερο.



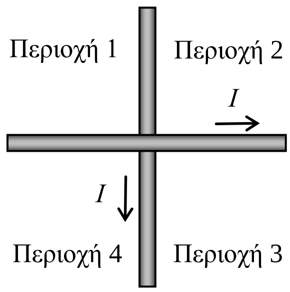
Σχήμα 9.20 *Ερώτηση 9.4.*

Ε9.5 Δύο ευθύγραμμα μεγάλου μήκους σύρματα διασταυρώνονται κάθετα, έτσι ώστε ίσα να μην ακουμπούν μεταξύ τους, όπως δείχνει το σχ. 9.21. Κάθε σύρμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα *I*. Σε ποιες περιοχές του χώρου υπάρχουν σημεία στα οποία το συνολικό μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν;

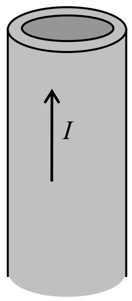
Ε9.6 Για τα σύρματα της παραπάνω ερώτησης (σχ. 9.21), να περιγραφούν οι μαγνητικές δυνάμεις που ασκεί το ένα σύρμα στο άλλο.

Ε9.7 Εντοπίστε ποιοτικά τις αναλογίες και τις διαφορές μεταξύ των νόμων Gauss και Ampere.

Ε9.8. Ένας μακρύς χάλκινος σωλήνας διαρρέεται από σταθερό ρεύμα, όπως δείχνει το σχ. 9.22. Δημιουργείται μαγνητικό πεδίο α) στο εσωτερικό, και β) στο εξωτερικό χώρο του σωλήνα; Εξηγείστε τις απαντήσεις σας με το νόμο του Ampere**.**



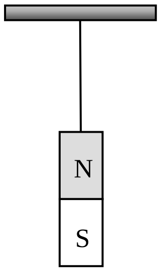
Σχήμα 9.21 *Ερώτηση 9.5.*



Σχήμα 9.22 *Ερώτηση 9.8.*

Ε9.9 Ένα ελικοειδές πηνίο, το οποίο είναι ταυτοχρόνως και ελατήριο, διαρρέεται ξαφνικά από ηλεκτρικό ρεύμα. Παρατηρούμε ότι το ελατήριο συστέλλεται, δηλ. οι σπείρες του πλησιάζουν η μία την άλλη. Εξηγείστε γιατί συμβαίνει αυτό.

Ε9.10 Έχουμε τρία ιδανικά σωληνοειδή: το Α με μήκος L και N σπείρες, το Β με μήκος $2L$ και επίσης N σπείρες, και το Γ με μήκος $L/2$ και $2N$ σπείρες. Αν όλα τα σωληνοειδή φέρουν το ίδιο ηλεκτρικό ρεύμα, ταξινομείστε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του καθενός. Ξεκινήστε από την μεγαλύτερη τιμή του B και καταλήξτε στην μικρότερη.

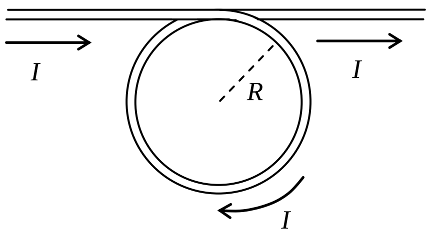


Σχήμα 9.23 *Ερώτηση 9.11.*

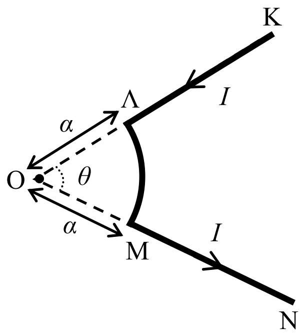
Ε9.11 Ένας απλός ραβδόμορφος μαγνήτης κρέμεται από ένα νήμα, όπως φαίνεται στο σχ. 9.23. Εφαρμόζουμε ξαφνικά στο χώρο ένα ομογενές οριζόντιο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ με φορά προς τα δεξιά. Σχεδιάστε την θέση του νήματος και του μαγνήτη στο χώρο μέσα στο πεδίο. Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για την φορά του $\boldsymbol{B}$ προς τα αριστερά.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π9.1 Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού. Ένας ρευματοφόρος αγωγός έχει την μορφή που φαίνεται στο σχ. 9.24. Συγκεκριμένα αποτελείται από έναν κυκλικό βρόχο ακτίνας 20.0 cm, και δύο ευθύγραμμα τμήματα μεγάλου μήκους. Ο αγωγός φέρει ηλεκτρικό ρεύμα 1.50 A, με φορά αυτή που δείχνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε το μαγνητικό πεδίο (μέτρο και κατεύθυνση) στο κέντρο του βρόχου. Δίνεται η διαπερατότητα του κενού μ_o=με $4\pi\times10^{-7}$ Tm/A. *Απάντηση*: B=6.21 μT.



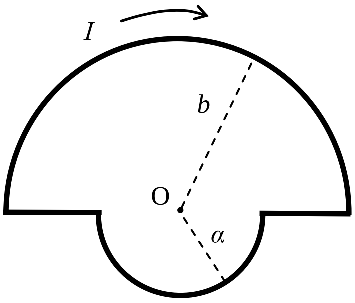
Σχήμα 9.24 *Πρόβλημα 9.1.*



Σχήμα 9.25 *Πρόβλημα 9.2.*

Π9.2 Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου αγωγού. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στο σημείο Ο, από το ρευματοφόρο τμήμα του αγωγού ΚΛΜΝ του σχήματος 9.25. Το τμήμα ΛΜ είναι τμήμα κύκλου ακτίνας α και επίκεντρης γωνίας θ. Το ρεύμα του αγωγού είναι I. *Απάντηση*: $B=\dfrac{\mu_o I}{4\pi\alpha}\theta$.

Π9.3 Κίνηση ηλεκτρονίου σε μαγνητικό πεδίο ευθυγράμμου ρευματοφόρου αγωγού. Μακρύ ευθύγραμμο σύρμα διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα 23.0 A. Ένα ηλεκτρόνιο βάλλεται παράλληλα προς αυτό το σύρμα σε απόσταση 1.50 cm, με ταχύτητα 230 km/s και ίδιας φοράς με αυτήν του ρεύματος. Να ευρεθούν α) η αρχική επιτάχυνση (μέτρο και φορά) του ηλεκτρονίου, και β) η κατεύθυνση και το μέτρο ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο θα επέτρεπε στο ηλεκτρόνιο να συνεχίσει την παράλληλη προς το σύρμα πορεία του. γ) Χρειάζεται να ληφθεί υπόψη η επίδραση της βαρύτητας στο ηλεκτρόνιο; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.. Δίνονται μάζα και φορτίο ηλεκτρονίου, m_e=9.11×10^{-31} kg και e=-1.60×10^{-19} C αντίστοιχα

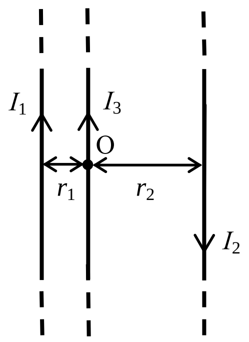


Σχήμα 9.26 *Πρόβλημα 9.4.*

Π9.4 Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου βρόχου – Νόμος των Biot και Savart. Στο σχ. 9.26 φαίνεται ρευματοφόρος βρόχος που αποτελείται από δυο ευθύγραμμα και δυο ημικυκλικά τμήματα ακτίνων, a=4.00 cm και

b=7.50 cm αντιστοίχως, με κοινό κέντρο το σημείο O. Το ρεύμα του βρόχου είναι έντασης I=52.3 mA. α) Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο βρόχος στο σημείο O. β) Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής διπολικής ροπής του βρόχου.

Π9.5 Μαγνητική δύναμη μεταξύ παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών. Δύο παράλληλα ευθύγραμμα ρευματοφόρα σύρματα, απέχουν μεταξύ τους απόσταση 5.00 cm, και απωθούνται μεταξύ τους με δύναμη ανά μονάδα μήκους, ίση με 3.50×10^{-4} N/m. Το ρεύμα στο ένα σύρμα είναι 6.30 A. α) Να υπολογίσετε το ρεύμα στο άλλο σύρμα. β) Τα ρεύματα των δύο συρμάτων έχουν τις ίδιες ή διαφορετικές φορές; γ) Τί θα συνέβαινε αν η ένταση του ρεύματος του ενός σύρματος διπλασιαζόταν, και η κατεύθυνσή του αντιστρεφόταν;

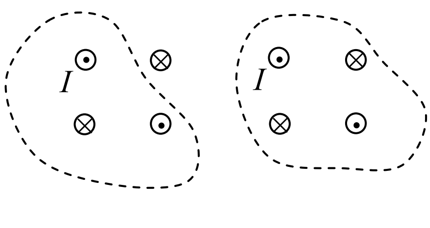


Σχήμα 9.27 *Πρόβλημα 9.6.*

Π9.6 Μαγνητικό πεδίο παραλλήλων ρευματοφόρων αγωγών. Δυο ευθύγραμμοι μεγάλου μήκους ρευματοφόροι αγωγοί είναι παράλληλοι μεταξύ τους, όπως δείχνει το σχ. 9.27. Τα ρεύματά τους είναι αντιπαράλληλα με I_1=5.00 A και I_2=10.0 A. Να ευρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο σημείο O, όπου r_1=5.00 cm και r_2=15.0 cm. Εάν στο σημείο O τοποθετηθεί ένας τρίτος παράλληλος ευθύγραμμος αγωγός μήκους 2.00 m, με ρεύμα εντάσεως I_3=2.00 A και φοράς προς τα «επάνω», να ευρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης που θα ασκηθεί πάνω του. Δίνεται η διαπερατότητα του κενού ίση με μ_o=4π ×10^{-7} T·m/A. *Απάντηση*: 1.32×10^{-4} N.

Π9.7 Μαγνητικό πεδίο κοίλου κυλινδρικού αγωγού. Κοίλος κυλινδρικός αγωγός έχει εσωτερική και εξωτερική ακτίνα a και b αντιστοίχως, και διαρρέεται από ρεύμα I ομοιόμορφα κατανεμημένο στην διατομή του. Να ευρεθούν οι εκφράσεις για το μαγνητικό πεδίο $B(r)$ στις περιοχές α) $r<a$, β) $a<r<b$ και γ) $r>b$. *Απάντηση*: α) 0, β) $B=\dfrac{\mu_o I(r^2-a^2)}{2\pi(b^2-a^2)r}$, και γ) $B=\dfrac{\mu_o I}{2\pi r}$.

Π9.8 Νόμος του Ampere. Κάθε ένας από τους οκτώ αγωγούς του σχήματος 9.28, διαρρέεται από ρεύμα 2.00 A με φορά, είτε προς τα «μέσα», είτε προς τα «έξω» της σελίδας. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl}$ για κάθε μια από τις διαδρομές α και β. Δίνεται μ_o=4π×10^{-7} T·m/A.



(α) (β)

Σχήμα 9.28 *Πρόβλημα 9.8.*

Π9.9 Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς. Ένα σωληνοειδές πηνίο με μήκος 1.33 m και διάμετρο 2.60 cm, διαρρέεται από ρεύμα 17.8 A. Το μαγνητικό πεδίο μέσα στο πηνίο είναι 22.4 mT. Να ευρείτε το μήκος του σύρματος που χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευασθεί το πηνίο. Δίνεται μ_o=4π×10^{-7} T·m/A. *Απάντηση*: 109 m.

Π9.10 Μαγνητικό πεδίο ρευματοφόρου κυλινδρικού αγωγού. Η πυκνότητα ρεύματος J μέσα σ' έναν συμπαγή κυλινδρικό αγωγό μεγάλου μήκους και ακτίνας R=7.68 mm, ακολουθεί την κατεύθυνση του κεντρικού άξονα συμμετρίας και το μέτρο της μεταβάλλεται γραμμικά με την ακτινική απόσταση r από τον άξονα, σύμφωνα με την σχέση $J=J_o r/R$, όπου J_o=280 A/m^2. Υπολογίσετε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί ο αγωγός στις αποστάσεις, α) r=0, β) $r=R/2$, και γ) $r=R$.

Π9.11 Μαγνητικές ιδιότητες ύλης. Μια ορθογώνια ράβδος σιδήρου με διαστάσεις μήκους 8.00 cm, πλάτους 1.50 cm, και πάχους 1.00 cm, είναι 100% καθαρή χωρίς προσμίξεις. Κάθε άτομο σιδήρου έχει μαγνητική διπολική ροπή ίση περίπου με 1.8×10^{-23} A.m^2, και η πυκνότητα των ατόμων του σιδήρου είναι περίπου 8.50×10^{28} άτομα/m^3. Υπολογίσετε α) την μέγιστη μαγνήτιση που μπορεί να αποκτήσει το κομμάτι σιδήρου, και β) την ροπή που θα ασκηθεί πάνω στη ράβδο, εάν μαγνητικό πεδίο έντασης 0.90 T εφαρμοστεί καθέτως στη ράβδο.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 10

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Σύνοψη

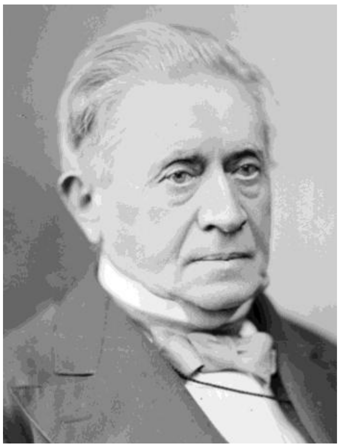
Στο δέκατο τούτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής, το οποίο περιγράφεται από το νόμο του Faraday. Επεξηγείται ο κανόνας του Lenz και πώς αυτός καθορίζει την εξέλιξη των επαγωγικών φαινομένων. Επίσης περιγράφεται το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο και κάποιες εφαρμογές του.

Προαπαιτούμενη γνώση

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Μαγνητική ροή.

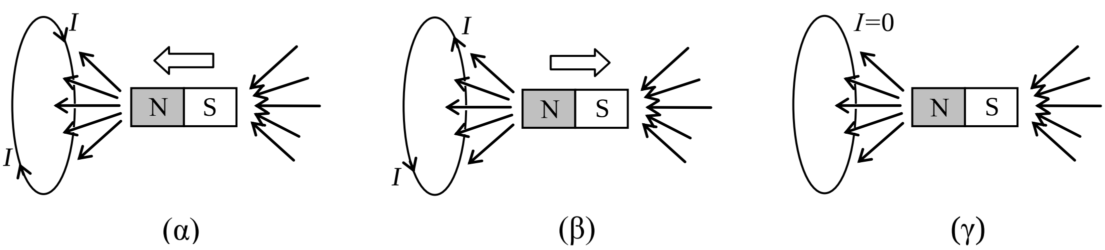
10.1 Εισαγωγικά

Στις αρχές της δεκαετίας του 1830, ο Michael Faraday (1791-1867) στην Αγγλία, και ο Joseph Henry (1797-1878) στις ΗΠΑ, έκαναν πολλά πειράματα πάνω σε μαγνητικά πεδία και ηλεκτρικά ρεύματα. Οι δύο επιστήμονες, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον,[30] κατέληξαν σε ένα συνταρακτικό για την εποχή συμπέρασμα, κατά το οποίο, όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή Φ_B που διαρρέει έναν αγώγιμο βρόχο, τότε παρατηρείται η δημιουργία ηλεκτρικού ρεύματος στον βρόχο, το οποίο ονομάζεται **επαγωγικό** ή **επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα**, και διαρκεί όσο χρονικό διάστημα διαρκεί η μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου του βρόχου. Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει και για τους επαγωγείς. Προσέξτε το καταπληκτικό του φαινομένου του επαγωγικού ρεύματος, κατά το οποίο ένα κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, χωρίς την ύπαρξη πηγής ΗΕΔ σ' αυτό! Το επαγωγικό ηλεκτρικό ρεύμα, σε αντιστοιχία με το σύνηθες ρεύμα που παράγεται από μια πηγή ΗΕΔ, σχετίζεται με την δημιουργία μιας ηλεκτρεργετικής δύναμης ή αλλιώς ηλεκτεργετικής τάσης, η οποία αναπτύσσεται στον βρόχο ή το πηνίο, και ονομάζεται **ηλεκτρομαγνητική επαγωγή** ή **επαγόμενη ΗΕΔ**. Αυτή η επαγόμενη τάση, η οποία υπάρχει μόνο κατά την διάρκεια της μεταβολής της μαγνητικής ροής στο κύκλωμα, είναι η αιτία της ύπαρξης του επαγωγικού ηλεκτρικού ρεύματος. Η επαγωγική τάση διαφέρει από την έννοια της τάσης, δηλ. της διαφοράς δυναμικού που παρέχει μια συνήθης πηγή ΗΕΔ (πχ. μπαταρία) σ' ένα κύκλωμα,. Γι' αυτόν τον λόγο, στο παρόν σύγγραμμα, προτιμούμε συνήθως τον όρο **επαγωγική ΗΕΔ**, αντί επαγωγική τάση. Παρακάτω θα εξετάσουμε πιο διεξοδικά την διαφορά της επαγωγικής ΗΕΔ, από την ηλεκτροστατική τάση (διαφορά δυναμικού).



Joseph Henry (1797-1878) (https://commons.wikimedia.org/wiki/Joseph_Henry#/media/File:Joseph_Henry_-_Brady-Handy.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

Όπως προαναφέραμε, είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα διαρρέει το



Σχήμα 10.1 *Κίνηση μαγνήτη, (α) προς κλειστό βρόχο αυξάνοντας την μαγνητική ροή και δημιουργώντας επαγωγικό ρεύμα I. (β) Απομάκρυνση του μαγνήτη από τον βρόχο, μειώνει την μαγνητική ροή και δημιουργεί επαγωγικό ρεύμα I αντίθετης φοράς από την (α) περίπτωση. (γ) Όταν ο μαγνήτης είναι ακίνητος ως προς τον βρόχο, δεν παρατηρείται δημιουργία επαγωγικού ρεύματος.*

[30] Ο Faraday ανακάλυψε το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής το 1831, ενώ ο Henry το 1932. Ο Faraday δημοσίευσε πρώτος το νόμο, γι' αυτό και φέρει το όνομά του.

κύκλωμα του πηνίου ή του βρόχου, μόνο το χρονικό διάστημα κατά το οποίο συμβαίνει κάποια μεταβολή της μαγνητικής ροής. Για σταθερή γεωμετρία του κυκλώματος, η μεταβολή της μαγνητικής ροής συμβαίνει μόνο με μεταβολή του διανύσματος του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$. Μια απλή διάταξη ανάπτυξης επαγωγικού ρεύματος φαίνεται στο σχ. 10.1, όπου ένας μαγνήτης κινείται ως προς έναν αγώγιμο βρόχο. Καθώς ο βόρειος μαγνητικός πόλος του μαγνήτη πλησιάζει τον βρόχο (σχ. 10.1α), περισσότερες μαγνητικές δυναμικές γραμμές του πεδίου $\boldsymbol{B}$ διαπερνούν την επιφάνεια που ορίζει ο βρόχος, και επομένως η μαγνητική ροή διαμέσου του βρόχου αυξάνεται, δημιουργώντας επαγωγικό ρεύμα I σ' αυτόν. Αντιθέτως, εάν ο μαγνήτης απομακρύνεται από τον βρόχο (σχ. 10.1β), τότε όλο και λιγότερες δυναμικές γραμμές του πεδίου $\boldsymbol{B}$ διαπερνούν την επιφάνεια του βρόχου, και επομένως η μαγνητική ροή μειώνεται, δημιουργώντας επαγωγικό ρεύμα I στον βρόχο, με αντίθετη φορά από αυτή του ρεύματος της πρώτης περίπτωσης. Πιο κάτω, στο εδάφιο 10.3, θα εξηγήσουμε πώς η φορά του ρεύματος εξαρτάται από την μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου του βρόχου, και πώς αυτή καθορίζεται αναλόγως την φορά κίνησης του μαγνήτη. Εάν ο μαγνήτης δεν κινείται ως προς τον βρόχο, τότε δεν παρατηρείται ηλεκτρικό ρεύμα σ' αυτόν (βλ. σχ. 10.1γ). Αυτό συμβαίνει διότι η μαγνητική ροή διαμέσου του βρόχου δεν μεταβάλλεται, μιας και ο αριθμός των μαγνητικών δυναμικών γραμμών του μαγνήτη που διαρρέουν την επιφάνεια που ορίζει ο βρόχος είναι σταθερός. Η ένταση του επαγωγικού ρεύματος I, είναι ανάλογη της ταχύτητας με την οποία ο μαγνήτης πλησιάζει ή απομακρύνεται από τον βρόχο. Επίσης η δημιουργία επαγωγικού ρεύματος είναι ίδια, εάν ο βρόχος κινείται και ο μαγνήτης ακινητεί. Σημασία δηλ. για την παρατήρηση επαγωγικού ρεύματος στο βρόχο, έχει η σχετική κίνηση του βρόχου ως προς τον μαγνήτη και αντίστροφα, μιας και με αμφότερους τους τρόπους επιτυγχάνεται μεταβολή της μαγνητικής ροής Φ_B. Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις δημιουργίας επαγωγικών ρευμάτων, ισχύουν και αν στη θέση του βρόχου τοποθετήσουμε επαγωγέα σε κλειστό κύκλωμα.

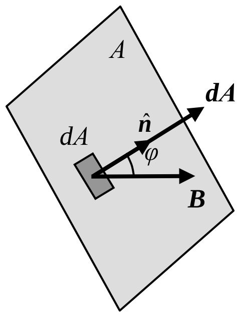
10.2 Ο νόμος του Faraday

Ας θεωρήσουμε τώρα την μαγνητική ροή που περνά από μια στοιχειώδη επιφάνεια dA. Όπως είδαμε στο εδάφιο 8.4, η μαγνητική ροή Φ_B ορίζεται με ανάλογο τρόπο όπως η ηλεκτρική, δηλ. αντί του ηλεκτρικού πεδίου έχουμε μαγνητικό πεδίο. Επομένως η στοιχειώδης μαγνητική ροή $d\Phi_B$ για την στοιχειώδη επιφάνεια dA, είναι

$$d\Phi_B = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dA} = BdA\cos\varphi \qquad (10.1)$$

όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{dA}$, όπου $\boldsymbol{dA}=dA\,\boldsymbol{\hat{n}}$, όπως φαίνεται στο σχ. 10.2. Γενικώς, η στοιχειώδης επιφάνεια dA είναι μέρος μιας συνολικής επιφάνειας εμβαδού A. Η συνολική μαγνητική ροή διαμέσου της επιφάνειας A, είναι το ολοκλήρωμα της εξ. 10.1 σε όλη την επιφάνεια, δηλ.

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int BdA\cos\varphi \qquad (10.2)$$



Σχήμα 10.2 *Μαγνητικό πεδίο* $\boldsymbol{B}$ *διαρρέει στοιχειώδη επιφάνεια* $\boldsymbol{dA}$ *υπό γωνία* φ*, δημιουργώντας μαγνητική ροή* $d\Phi_B$*. Το ίδιο πεδίο* $\boldsymbol{B}$ *διαρρέει ομοιογενώς ολόκληρη την επιφάνεια* A*.*

Για ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ σε κάθε σημείο της επιφάνειας A, έχουμε

$$\Phi_B = BA\cos\varphi \qquad (10.3)$$

Είδαμε στο προηγούμενο εισαγωγικό εδάφιο, ότι η μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου της επιφάνειας ενός βρόχου, δημιουργεί μία επαγόμενη ΗΕΔ και κατά συνέπεια ένα επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα στο βρόχο. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως ηλεκτρομαγνητική επαγωγή, και περιγράφεται ποσοτικά από το **νόμο του Faraday**, ο οποίος ορίζει ότι η επαγόμενη ΗΕΔ $\mathcal{E}$ σε ένα κύκλωμα, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά το κύκλωμα, και μαθηματικώς εκφράζεται από την σχέση

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d(BA\cos\varphi)}{dt} \qquad (10.4)$$

(Faraday, 1839), (Sears, 1951), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Kraus, 1993), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Η σημασία του αρνητικού προσήμου στην εξ. 10.4

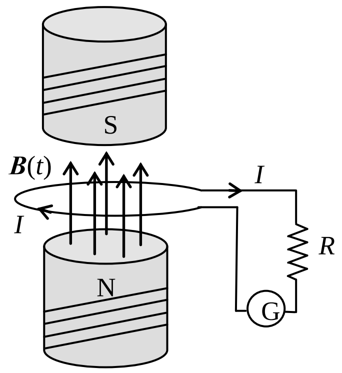
εξηγείται με τον κανόνα του Lenz, και σχετίζεται με τη φορά που έχει το επαγωγικό ρεύμα λόγω της μεταβολής της μαγνητικής ροής. Θα αναφερθούμε σ' αυτόν τον κανόνα πιο διεξοδικά παρακάτω.

Το μέγεθος της μαγνητικής ροής Φ_B μπορεί να αλλάξει με τρεις τρόπους: Με την μεταβολή: α) του μέτρου του πεδίου B, β) του εμβαδού A, και γ) της γωνίας φ μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{B}$ και $\boldsymbol{A}$. Για έναν αγώγιμο βρόχο ισχύει η εξ. 10.4, ενώ για πηνίο με N όμοιες σπείρες, ισχύει

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (10.5)$$

Παράδειγμα 10.1 Επαγωγικό ρεύμα από ηλεκτρομαγνήτη

Το μαγνητικό πεδίο ηλεκτρομαγνήτη -ενός μαγνήτη του οποίου το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από ηλεκτρικό ρεύμα σύρματος πολλών σπειρών- (βλ. σχ. 10.3), αυξάνεται με ρυθμό $\frac{dB}{dt} = 0.020\text{T/s}$. Η επιφάνεια που ορίζει ένας βρόχος είναι A=120 cm^2, και είναι κάθετη στο πεδίο $\boldsymbol{B}$, όπως φαίνεται στο σχ. 10.3. Ο βρόχος είναι μέρος ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, το οποίο περιλαμβάνει ένα γαλβανόμετρο G και έναν αντιστάτη. Η ολική αντίστασή του κυκλώματος είναι R=5.00 Ω. Πόσο είναι το επαγόμενο ρεύμα που μετράει το γαλβανόμετρο;



Σχήμα 10.3 *Επαγωγικό ρεύμα I δημιουργείται σε κλειστό βρόχο από χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο ηλεκτρομαγνήτη (παράδειγμα 10.1).*

Λύση

Σύμφωνα με το νόμο του Faraday, η επαγόμενη ΗΕΔ που αναπτύσσεται στον βρόχο, είναι ίση με την μεταβολή της μαγνητικής ροής. Δηλ. ισχύει

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{dB}{dt}A\cos\varphi = -\frac{dB}{dt}A = -0.020\text{T / s}\times 120\times 10^{-4}\text{cm}^2 =$$
$$-2.40\times 10^{-4}\text{V} \Rightarrow \mathcal{E} = -0.240\text{mV}$$

Αυτή η επαγόμενη ΗΕΔ δημιουργεί ένα επαγόμενο ρεύμα I , ίσο με

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \frac{0.24\times 10^{-3}\text{V}}{5.00\Omega} = 0.048\times 10^{-3}\text{A} \Rightarrow I = 0.048\text{mA}$$

Παράδειγμα 10.2 Επαγωγικό ρεύμα σε κυκλικό βρόχο

Ομογενές μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται κατά μέτρο με σταθερό ρυθμό dB/dt. Δίνεται χαλκός μάζας m, ο οποίος πρόκειται να γίνει σύρμα διαμέτρου d και μήκους l. Το σύρμα τελικά θα σχηματίσει κυκλικό βρόχο εμβαδού S και ακτίνας r. Δείξτε ότι το επαγωγικό ρεύμα I στο βρόχο, δεν εξαρτάται από το μέγεθος του σύρματος ή του βρόχου, και θεωρώντας ότι το πεδίο B είναι κάθετο στο βρόχο, το ρεύμα δίδεται από την σχέση $I = \frac{m}{4\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt}$, όπου ρ και δ είναι η ειδική αντίσταση και η πυκνότητα του χαλκού αντιστοίχως.

Υπόδειξη: Για την αντίσταση του σύρματος ισχύει $R = \rho\frac{l}{A}$, όπου l και A είναι το μήκος και η διατομή του σύρματος αντιστοίχως.

Λύση

Από το νόμο του Faraday ισχύει

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BS)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -S\frac{dB}{dt} \qquad (1)$$

Όμως ισχύει

$$S = \pi r^2 \qquad (2)$$

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$\mathcal{E} = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \qquad (3)$$

Το ρεύμα που διαρρέει το βρόχο είναι

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \qquad (4)$$

Η εξ. 4 λόγω της 3 δίνει

$$I = -\frac{\pi r^2}{R}\frac{dB}{dt} \qquad (5)$$

Για την αντίσταση του σύρματος ισχύει

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow R = \rho\frac{l}{\pi(\frac{d}{2})^2} \Rightarrow R = \rho\frac{4l}{\pi d^2} \qquad (6)$$

Η εξ. 5 λόγω της 6 δίνει

$$I = -\frac{\pi r^2}{\rho\frac{4l}{\pi d^2}}\frac{dB}{dt} \Rightarrow I = \frac{\pi^2 d^2 r^2}{4\rho l}\frac{dB}{dt} \qquad (7)$$

Η μάζα του σύρματος είναι

$$m = \delta V = \delta\pi r^2 l \Rightarrow l = \frac{m}{\delta\pi(\frac{d}{2})^2} \Rightarrow l = \frac{4m}{\delta\pi d^2} \qquad (8)$$

Η εξ. 8 στην 7 δίνει

$$I = \frac{\pi^3 d^4 r^2 \delta}{16 m\rho}\frac{dB}{dt} \qquad (9)$$

Επίσης το μήκος του σύρματος είναι

$$l = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{l}{2\pi} \overset{(8)}{\Rightarrow} r = \frac{4m}{2\pi^2\delta d^2} \qquad (10)$$

Τελικώς η εξ. 10 στην 9 δίνει

$$I = \frac{\pi^3 d^4 16 m^2 \delta}{16 m\rho 4\pi^4\delta^2 d^4}\frac{dB}{dt} \Rightarrow I = \frac{m}{4\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt}$$

Παράδειγμα 10.3 Επαγωγικό ηλεκτρικό ρεύμα σε πηνίο

Πηνίο με N=500 σπείρες, με ακτίνα σπειρών r=20.0 cm, και αντίσταση R=500 Ω, είναι τοποθετημένο σε χρονικώς μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, $B=at+ct^3$, όπου $a=1.00\times10^{-2}$ T/s, $c=2.00\times10^4$ T/s^3, και t είναι ο χρόνος σε sec. Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο των σπειρών. α) Να ευρεθεί η απόλυτη τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ στο πηνίο συναρτήσει του χρόνου. β) Πόσο ρεύμα διαπερνά το πηνίο την χρονική στιγμή t=10 s;

Λύση

α) Το συνολικό εμβαδόν του πηνίου είναι

$$S = N\pi r^2 \qquad (1)$$

και επομένως η συνολική μαγνητική ροή ορίζεται ως

$$\Phi_B = BS\cos 0^{\mathrm{o}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \Phi_B = \mathrm{N}B\pi r^2 \qquad (2)$$

Η μαγνητική ροή Φ_B μεταβάλλεται με τον χρόνο, διότι μεταβάλλεται το μαγνητικό πεδίο. Έτσι σύμφωνα με τον νόμο του Faraday, έχουμε

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \overset{(2)}{\Rightarrow} \mathcal{E} = -\frac{d(NB\pi r^2)}{dt} = -N\pi r^2 \frac{dB}{dt} = -N\pi r^2 \frac{d(at+ct^3)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -N\pi r^2(a+3ct^2)$$

Η απόλυτη τιμή της $\mathcal{E}$ συναρτήσει του χρόνου είναι

$$\mathcal{E}(t) = 3.14\times(2\times10^{-2}\mathrm{m})^2\times500\times[1\times10^{-2}\mathrm{T/s}+(3\times2\times10^{-4}\mathrm{T/s^3})t^2] \Rightarrow$$
$$\mathcal{E}(t) = 6.28\times10^{-3}\mathrm{m^2}\cdot\mathrm{T/s}+(3.77\times10^{-4}\mathrm{m^2}\cdot\mathrm{T/s^3})t^2$$

β) Το ρεύμα στο πηνίο την χρονική στιγμή 10 s, είναι

$$I = \frac{\mathcal{E}(10\mathrm{s})}{R} \Rightarrow I = \frac{6.28\times10^{-3}\mathrm{m^2}\cdot\mathrm{T/s}+(3.77\times10^{-4}\mathrm{m^2}\cdot\mathrm{T/s^3})\times100\mathrm{s^2}}{500\Omega} \Rightarrow I = 8.00\times10^{-5}\,\mathrm{A}$$

10.3 Επαγωγική ΗΕΔ σε ευθύγραμμο αγωγό που κινείται σε μαγνητικό πεδίο

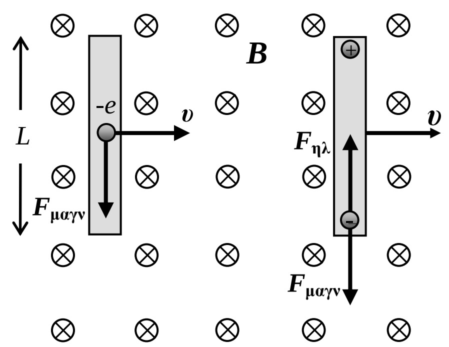
Έστω ότι μια αγώγιμη ράβδος μήκους L κινείται με σταθερή ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$ μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$, όπως δείχνει το σχ. 10.4. Η κατεύθυνση της ταχύτητας $\boldsymbol{\upsilon}$ είναι κάθετη σε αυτήν του $\boldsymbol{B}$. Λόγω της ταχύτητας της ράβδου, τα ελεύθερα ηλεκτρόνιά της έχουν επίσης ταχύτητα $\boldsymbol{\upsilon}$, και επομένως θα ασκηθεί πάνω τους μαγνητική δύναμη σύμφωνα με την σχέση

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}} = q\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B} \qquad (10.6)$$

Συγκεκριμένα, εάν η ράβδος κινείται προς τα δεξιά, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια θα κινηθούν προς τα κάτω λόγω της δύναμης

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}} = -e\boldsymbol{\upsilon}\times\boldsymbol{B} \Rightarrow F_{\mu\alpha\gamma\nu} = e\upsilon B \qquad (10.7)$$

Η κίνηση αυτή των ηλεκτρονίων αφήνει το πάνω μέρος της ράβδου θετικά φορτισμένο. Έτσι, το αποτέλεσμα είναι η ράβδος να αποκτήσει προοδευτικά θετικό δυναμικό στο επάνω άκρο, και αρνητικό στο κάτω, με συνέπεια να αναπτυχθεί στο εσωτερικό της και κατά μήκος της, ένα ηλεκτρικό πεδίο με δυναμικές ηλεκτρικές γραμμές από επάνω προς τα κάτω. Όσο πληθαίνουν τα φορτία στα άκρα της ράβδου, τόσο μεγαλώνει η διαφορά δυναμικού και το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ στο εσωτερικό της ράβδου. Η ηλεκτρική δύναμη έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή της μαγνητικής, και καθώς σταδιακά μεγαλώνει (εφόσον μεγαλώνει το ηλεκτρικό πεδίο), τελικά κάποια στιγμή γίνεται ίση σε μέτρο με την μαγνητική. Τότε ισχύει η σχέση

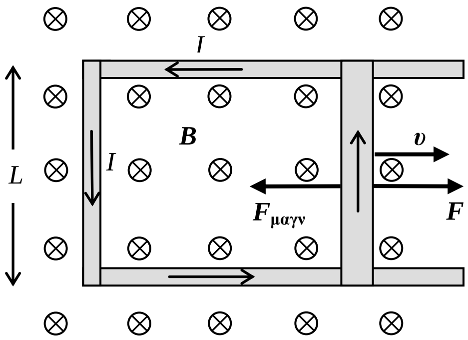


Σχήμα 10.4 *Αγώγιμη ράβδος μήκους L κινείται με σταθερή ταχύτητα* $\boldsymbol{\upsilon}$ *μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο* $\boldsymbol{B}$. *Η μαγνητική δύναμη πάνω στα φορτία της ράβδου έχει ως αποτέλεσμα την πόλωση των άκρων της ράβδου, και την δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου* $\boldsymbol{E}$ *κατά μήκος της.*

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\eta\lambda}} = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}} \Rightarrow F_{\eta\lambda} = F_{\mu\alpha\gamma\nu} \Rightarrow eE = e\upsilon B \Rightarrow E = \upsilon B \qquad (10.8)$$

και η εγκάρσια μετατόπιση των ηλεκτρονίων προς το άκρο της ράβδου παύει, μιας και η συνισταμένη δύναμη πάνω τους είναι μηδέν. Η διαφορά δυναμικού V που δημιουργεί το ηλεκτρικό πεδίο E μεταξύ των δύο άκρων της ράβδου, είναι

$$V = EL \Rightarrow V = \upsilon BL \qquad (10.9)$$



Σχήμα 10.5 *Αγώγιμη ράβδος μήκους L κινείται με σταθερή ταχύτητα* ***υ*** *μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο* ***B****, σχηματίζοντας κλειστό κύκλωμα με αγωγό σχήματος ⊂. Η μαγνητική δύναμη* $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}}$ *επάνω στη ράβδο που διαρρέεται από ρεύμα I, αναιρείται από εξωτερική δύναμη* ***F*** *που κινεί την ράβδο.*

η οποία μπορεί να αποτελέσει πηγή ηλεκτρικής ενέργειας, για όσο χρονικό διάστημα κινείται η ράβδος μέσα στο μαγνητικό πεδίο ***B***. Θα ιδούμε τώρα μια τέτοια περίπτωση.

10.4 Ο κανόνας του Lenz

Στο προηγούμενο εδάφιο αναλύσαμε τί συμβαίνει κατά την κίνηση ενός ευθυγράμμου αγωγού μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο. Ας θεωρήσουμε τώρα μία ευθύγραμμη αγώγιμη ράβδο μήκους *L*, να κινείται με σταθερή ταχύτητα ***υ*** κατά μήκος ενός ακινήτου αγωγού σχήματος ⊂ και αντίστασης *R*, δημιουργώντας έναν κλειστό ορθογώνιο βρόχο, όπως φαίνεται στο σχ. 10.5. Εφόσον η ράβδος κινείται με ταχύτητα *υ*, το εμβαδόν του ορθογωνίου βρόχου αυξάνεται και επομένως μεγαλώνει η μαγνητική ροή Φ_B , η οποία ορίζεται ως

$$\Phi_B = BLx \tag{10.10}$$

με συνέπεια να αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ στα άκρα της ράβδου, ίση με

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BLx)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -BL\upsilon \tag{10.11}$$

(Knight, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Το πλην (-) που εμφανίζεται στο νόμο του Faraday, δηλώνει ότι το επαγωγικό ρεύμα *I* που αναπτύσσεται από την επαγωγική ΗΕΔ $\mathcal{E}$ στο βρόχο, έχει τέτοια φορά, ώστε να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο αντίθετο του *B*, ούτως ώστε να αναιρεί την αύξηση της μαγνητικής ροής που προκαλείται στο βρόχο, με την κίνηση της ράβδου προς τα δεξιά. Η δημιουργία επαγωγικού ρεύματος μιας τέτοιας κατεύθυνσης, είναι απόρροια της αρχής της διατήρησης την ενεργείας, η οποία για τα επαγωγικά φαινόμενα εκφράζεται με τον κανόνα του Lenz, που διατυπώθηκε από τον Γερμανό φυσικό Heinrich Lenz (1804-1865). Ο **κανόνας** ή **νόμος του Lenz**, ορίζει ότι κάθε επαγωγικό φαινόμενο τείνει να αντισταθεί και να αναιρέσει το αίτιο που το προκάλεσε (Young & Freedman, 2010). Έτσι για κάθε αύξηση (μείωση) της μαγνητικής ροής που προκαλείται σε ένα σύστημα από εξωτερικό αίτιο, η επαγωγική ΗΕΔ δημιουργεί τέτοιας κατεύθυνσης επαγωγικό ρεύμα, ούτως ώστε το μαγνητικό του πεδίο να μειώνει (αυξάνει) την μαγνητική ροή, με αποτέλεσμα να τείνει να αναιρέσει την μεταβολή της μαγνητικής ροής που προκαλείται από το εξωτερικό αίτιο (Sears, 1951), (Grant & Phillips, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορεί τώρα ευκόλως να εξηγηθεί η φορά των επαγωγικών ρευμάτων στα σχήματα 10.1 και 10.3.

Heinrich Lenz
(1804-1865)
(https://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Lenz#/media/File:Heinrich_Friedrich_Emil_Lenz.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

Ξαναγυρνώντας τώρα στην κινούμενη ράβδο του σχήματος 10.5, λόγω της επαγωγικής ΗΕΔ $\mathcal{E}$ στο ορθογώνιο βρόχο, δημιουργείται επαγωγικό ρεύμα

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \frac{BL\upsilon}{R} \tag{10.12}$$

(Benumof, 1961), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Serway & Jewett, 2013). Εφόσον όμως η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα και κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, θα ασκείται πάνω της μαγνητική δύναμη, ίση με

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\mu\alpha\gamma\nu}} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \Rightarrow F_{\mu\alpha\gamma\nu} = BIL \tag{10.13}$$

και η κατεύθυνσή της είναι τέτοια, ώστε να αντιστέκεται στην κίνηση της ράβδου προς τα δεξιά (σχ. 10.5). Για να κινείται με σταθερή ταχύτητα η ράβδος, πρέπει να ασκείται πάνω της εξωτερική δύναμη ***F***, τέτοια ώστε να αντισταθμίζεται η δράση της μαγνητικής δύναμης $\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}$, η οποία την έλκει προς τα οπίσω. Δηλαδή, πρέπει να ισχύει

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu} \tag{10.14}$$

Στην πραγματικότητα, η ***F*** είναι το εξωτερικό αίτιο που τα προκαλεί όλα, όπως την μεταβολή της Φ_B, την επαγωγική τάση $\mathcal{E}$, το ρεύμα *I*, και τελικά την δύναμη $\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}$. Φανταστείτε το ρεύμα *I* να είχε αντίθετη φορά από αυτή που προστάζει ο κανόνας του Lenz. Τότε η μαγνητική δύναμη θα ήταν ομόρροπη με την εξωτερική δύναμη ***F***, και η ράβδος θα επιταχυνόνταν ανεξέλεγκτα, με την ενέργεια της ράβδου να αυξάνεται απεριόριστα. Με άλλα λόγια, για ένα συγκεκριμένο έργο, δηλ. ποσό ενεργείας που προσδίδουμε εμείς στη ράβδο, αυτή θα αποκτούσε ένα πολύ μεγαλύτερο ποσό ενεργείας, το οποίο μάλιστα θα αυξανόταν συνεχώς, γεγονός που αντιβαίνει στο νόμο διατήρησης της ενέργειας. Αυτή είναι και η φυσική σημασία του κανόνα του Lenz, δηλ. η διατήρηση της ενέργειας των ηλεκτρομαγνητικών συστημάτων.

Από τις εξισώσεις 10.13 και 14, συμπεραίνουμε ότι η εξωτερική δύναμη που κινεί την ράβδο ώστε τελικά αυτή να κινείται με σταθερή ταχύτητα ***υ***, είναι

$$F = BIL \overset{(10.12)}{\Rightarrow} F = \frac{B^2L^2\upsilon}{R} \tag{10.15}$$

Η μηχανική ισχύς $P_{\mu\eta\chi}$ που παράγεται πάνω στη ράβδο από την δύναμη ***F***, είναι

$$P_{\mu\eta\chi} = F\upsilon \overset{(10.15)}{\Rightarrow} P_{\mu\eta\chi} = \frac{B^2L^2\upsilon^2}{R} \tag{10.16}$$

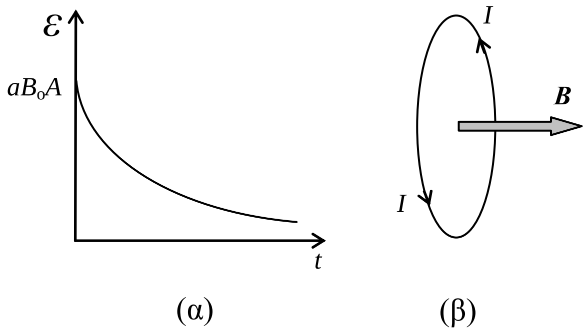
Επιπλέον, η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται στην αντίσταση *R* λόγω του ρεύματος που διαρρέει τη ράβδο, και γενικότερα το κύκλωμα, είναι

$$P_{\eta\lambda} = I^2R \overset{(10.12)}{\Rightarrow} P_{\eta\lambda} = \frac{B^2L^2\upsilon^2}{R} \tag{10.17}$$

(Benumof, 1961), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Serway & Jewett, 2013).Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 10.16 και 17, συμπεραίνουμε ότι η μηχανική ισχύς είναι ίση με την ηλεκτρική ισχύ που παράγεται στο κύκλωμα της ράβδου με τον αγωγό σχήματος ⊂. Επίσης, εφόσον η ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα, το παραγόμενο έργο της δύναμης ***F*** πρέπει να ισούται με την απώλεια ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία τελικώς δαπανάται στην ωμική αντίσταση του κυκλώματος.

Παράδειγμα 10.4 Επαγωγική ΗΕΔ και ρεύμα σε κυκλικό βρόχο.

Μαγνητικό πεδίο φθίνει εκθετικώς με τον χρόνο, σύμφωνα με την σχέση $B=B_o e^{-at}$. Το πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο συρμάτινου κυκλικού βρόχου με εμβαδόν *A*. Να ευρείτε την επαγωγική ΗΕΔ $\mathcal{E}$ που αναπτύσσεται στον βρόχο, και να σχεδιάσετε γραφικώς την $\mathcal{E}=f(t)$. Επίσης εφαρμόζοντας τον κανόνα του Lenz, να ευρείτε την κατεύθυνση του ρεύματος στο βρόχο.



Σχήμα 10.6 *(α) Η μεταβολή της επαγωγικής τάσης με τον χρόνο, και (β) η κατεύθυνση του επαγωγικού ρεύματος I που δημιουργείται στον κυκλικό βρόχο, στον οποίο ένα κάθετο μαγνητικό πεδίο B φθίνει με τον χρόνο (παράδειγμα 10.4).*

Λύση

Η μαγνητική ροή που διαρρέει τον βρόχο την χρονική στιγμή *t*, είναι

$$\Phi_B = B_o e^{-at} A$$

Επομένως από το νόμο του Faraday, η επαγωγική ΗΕΔ είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(B_o e^{-at} A)}{dt} = -B_o A\frac{d(e^{-at})}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = aB_o A e^{-at}$$

Δηλαδή, η επαγωγική ΗΕΔ στον βρόχο φθίνει εκθετικώς, όπως και το πεδίο $\boldsymbol{B}$. Η γραφική παράσταση $\mathcal{E}=f(t)$, φαίνεται στο σχ. 10.6α. Στο σχ. 10.6β φαίνεται η φορά του επαγωγικού ρεύματος, το οποίο δημιουργείται στον κυκλικό βρόχο λόγω της ελάττωσης του πεδίου $\boldsymbol{B}$. Το ρεύμα έχει τέτοια φορά, ώστε να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, το οποίο να αντιτίθεται στην εκθετική ελάττωσή του $\boldsymbol{B}$.

Παράδειγμα 10.5 Κίνηση αγώγιμης ράβδου

Μια αγώγιμη ράβδος AB είναι σε επαφή με τις μεταλλικές γραμμές AD και CB που απέχουν απόσταση l=50.0 cm, και ευρίσκονται μέσα σε μαγνητικό πεδίο B=1.00 T, όπως φαίνεται στο σχ. 10.7. Η ολική αντίσταση ράβδου και γραμμών θεωρείται συνεχώς σταθερή R=0.40 Ω. α) Ποιο είναι το ρεύμα I που διαρρέει την ράβδο, και ποια είναι η φορά του, εάν αυτή κινείται προς τα αριστερά με σταθερή ταχύτητα υ=6.00 m/s; β) Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης F που χρειάζεται να ασκήσουμε στη ράβδο, για να συνεχίζει να κινείται προς τα αριστερά με την ίδια σταθερή ταχύτητα υ;

Λύση

α) Το ρεύμα που διαρρέει την ράβδο είναι

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R} \qquad (1)$$

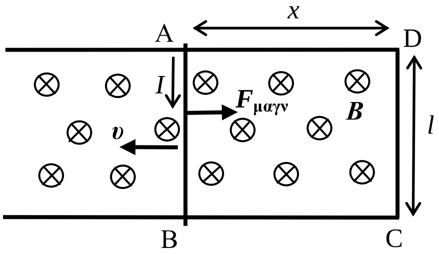
όπου $\mathcal{E}$ είναι η επαγωγική ΗΕΔ στο κύκλωμα ABCD λόγω του νόμου του Faraday, μιας και το εμβαδόν του βρόχου ABCD μεγαλώνει με τον χρόνο, και συνεπώς μεγαλώνει η μαγνητική ροή διαμέσου του ορθογωνίου βρόχου. Επομένως ισχύει

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{d(BS)}{dt}=-B\frac{dS}{dt}=-B\frac{d(xl)}{dt}=-Bl\frac{dx}{dt}\Rightarrow$$

$$\mathcal{E}=-Bl\upsilon \qquad (2)$$

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$I=-\frac{Bl\upsilon}{R}\Rightarrow I=-\frac{1.00\text{T}\times 0.50\text{m}\times 6.00\text{m/s}}{0.40\Omega}\Rightarrow I=-7.50\text{A}$$



Σχήμα 10.7 *Αγώγιμη ράβδος AB ευρίσκεται σε επαφή με τις παράλληλες μεταλλικές γραμμές AD και CB, και κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τα αριστερά, κάθετη σε μαγνητικό πεδίο* ***B****. Επαγωγικό ρεύμα I αναπτύσσεται στο κύκλωμα, ώστε να δημιουργείται μαγνητική δύναμη στη ράβδο που τείνει να εμποδίσει την κίνησή της (παράδειγμα 10.5).*

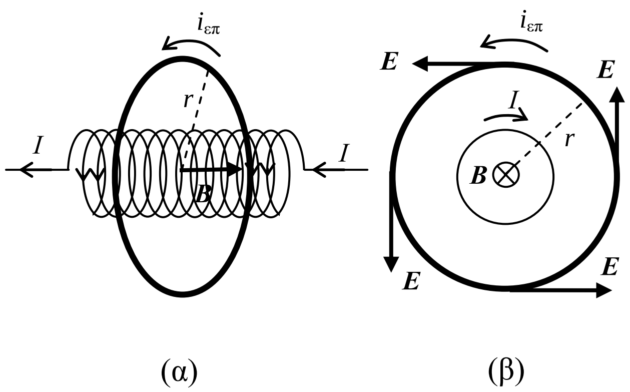
Το πλην (-) δηλώνει ότι το ρεύμα έχει τέτοια φορά, ώστε να εναντιώνεται στο αίτιο που το προκαλεί, δηλ. την τάση $\mathcal{E}$ και επομένως την ταχύτητα υ. Άρα το ρεύμα I έχει τέτοια φορά, ώστε στον ρευματοφόρο αγωγό AB που ευρίσκεται μέσα στο πεδίο $\boldsymbol{B}$, να ασκείται μαγνητική δύναμη με αντίθετη φορά από αυτήν της $\boldsymbol{\upsilon}$ (βλ σχ.10.7). Επομένως η δύναμη πάνω στην ράβδο AB, είναι

$$F=BIl=1.00\text{T}\times 0.50\text{m}\times 6.00\text{m/s}\Rightarrow F=3.75\text{N}$$

Συνεπώς, για να συνεχίσει να κινείται η ράβδος με ταχύτητα υ προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο σχ. 10.7, πρέπει να ασκήσουμε πάνω της μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ με φορά προς τα αριστερά, όπου $\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{F}_{\mu\alpha\gamma\nu}$, δηλ. αντίθετη της μαγνητικής που το έλκει προς τα δεξιά (η $\boldsymbol{F}$ δεν σημειώνεται στο σχ. 10.7).

10.5 Επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο

Γνωρίζουμε από το νόμο του Faraday ότι, όταν σ' έναν αγώγιμο βρόχο μεταβληθεί η μαγνητική ροή που περνά μέσα απ' αυτόν, τότε παρατηρούμε την δημιουργία μιας επαγωγικής ΗΕΔ και συνεπώς ενός επαγωγικού ρεύματος στον βρόχο. Η δημιουργία ηλεκτρικού ρεύματος σημαίνει την ύπαρξη ηλεκτρικού πεδίου στο εσωτερικό του αγώγιμου βρόχου. Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται επαγωγικά, ονομάζεται **επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο**, και έχει (όπως θα ιδούμε παρακάτω), διαφορετικές ιδιότητες από το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο δημιουργείται από ακίνητα ηλεκτρικά φορτία, δηλ. το ηλεκτροστατικό πεδίο. Το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει στο χώρο ακόμα και όταν δεν υπάρχει ο αγώγιμος βρόχος (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010). Υπάρχει παντού στο χώρο, εφόσον υπάρχει μεταβολή του μαγνητικού πεδίου σ' αυτόν. Ας εξετάσουμε όμως, ένα παράδειγμα δημιουργίας επαγόμενου ρεύματος για να καταλάβουμε καλύτερα την ιδιαιτερότητά του. Έστω ένας κυκλικός αγωγός ακτίνας r, ο οποίος είναι κάθετος σε μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$, το οποίο παράγεται από ένα σωληνοειδές, όπως δείχνει το σχ. 10.8α.



Σχήμα 10.8 *(α) Επαγωγικό ρεύμα $i_{επ}$ σε κυκλικό βρόχο ακτίνας r, στο κέντρο του οποίου υπάρχει σωληνοειδές N σπειρών διαρρεόμενο από ρεύμα I, το οποίο δημιουργεί κάθετο μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο **B**. (β) Κάθετη άποψη της ίδιας διάταξης. Η φορά του επαγωγικού ρεύματος $i_{επ}$ έχει σχεδιαστεί για την περίπτωση που το I αυξάνεται με τον χρόνο.*

Το μαγνητικό πεδίο του πηνίου δίνεται από την σχέση

$$B = \mu_o nI \qquad (10.18)$$

όπου n οι σπείρες ανά μονάδα μήκους του σωληνοειδούς, (n=N/L, βλ. εδάφιο 9.6). Όταν το ρεύμα I του σωληνοειδούς μεταβάλλεται με τον χρόνο, τότε και το μαγνητικό πεδίο B μεταβάλλεται ως

$$\frac{dB}{dt} = \mu_o n \frac{dI}{dt} \qquad (10.19)$$

Όταν όμως μεταβάλλεται το $\boldsymbol{B}$, μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή Φ_B διαμέσου του κυκλικού βρόχου εμβαδού A, όπου

$$A = \pi r^2 \qquad (10.20)$$

με αποτέλεσμα λόγω του νόμου του Faraday, να δημιουργείται στο βρόχο επαγωγική ΗΕΔ, η οποία από τις εξισώσεις 10.19 και 10.20, είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BA)}{dt} = -A\frac{dB}{dt} = -A\mu_o n\frac{dI}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -\pi r^2 \mu_o n \frac{dI}{dt} \qquad (10.21)$$

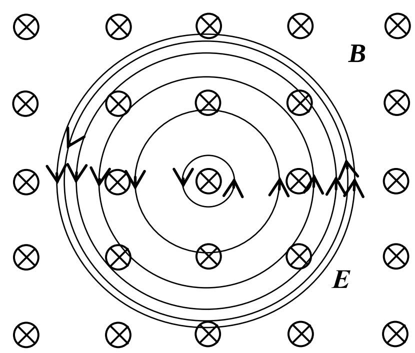
Η επαγωγική ΗΕΔ δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο επαγωγικό ρεύμα $i_{επ}$ στον κυκλικό βρόχο, το οποίο λόγω του κανόνα του Lenz, προσπαθεί να ακυρώσει την μεταβολή της Φ_B , δημιουργώντας ένα αντίθετης ή ιδίας φοράς μαγνητικό πεδίο με αυτό του σωληνοειδούς, αναλόγως εάν η μαγνητική ροή Φ_B στο σωληνοειδές αυξάνεται ή μειώνεται αντιστοίχως. Εάν R είναι η αντίσταση του βρόχου, τότε το ρεύμα $i_{επ}$ είναι

$$i_{επ} = \frac{\mathcal{E}}{R} \overset{(10.21)}{\Rightarrow} i_{επ} = -\frac{\pi r^2 \mu_o n}{R}\frac{dI}{dt} \qquad (10.22)$$

Όπως βλέπουμε, το επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα στο βρόχο δημιουργείται από χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα στο σωληνωειδές. Το ερώτημα που γεννιέται είναι: Ποια δύναμη κινεί τα φορτία στον βρόχο και παράγεται το επαγόμενο ρεύμα $i_{επ}$; Ένα φορτίο όπως γνωρίζουμε μπορεί να κινηθεί, είτε με μια ηλεκτρική δύναμη, είτε με μια μαγνητική. Θα πρέπει να αποκλείσουμε την μαγνητική δύναμη μιας και ο βρόχος δεν κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο, και επομένως η δημιουργία μιας δύναμης Lorenz δεν είναι εφικτή. Συνεπώς, ένα ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να δημιουργείται επαγωγικά στο εσωτερικό του κυκλικού βρόχου και να κινεί τα φορτία. Το πεδίο αυτό που φαίνεται στο σχ. 10.8β, δημιουργείται από την μεταβολή της μαγνητικής ροής λόγω της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$. Δηλαδή, ένα ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να δημιουργηθεί εκτός από την ύπαρξη στατικών ηλεκτρικών φορτίων, και με την μεταβολή ενός μαγνητικού πεδίου, και όπως αναφέραμε παραπάνω, ονομάζεται **επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο**, ή **μη ηλεκτροστατικό ηλεκτρικό πεδίο** (Knight, 2010), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Έτσι, λόγω του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου, μια ηλεκτρική δύναμη $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ ασκείται στα φορτία του αγώγιμου βρόχου. Το παραγόμενο έργο από το επαγόμενο πεδίο $\boldsymbol{E}$ σε μια πλήρη περιστροφή ενός φορτίου μέσα στο βρόχο ακτίνας r, είναι

$$W_q = Fl \Rightarrow W_q = qE2\pi r \qquad (10.23)$$

Από την εξ. 10.23 συμπεραίνουμε ότι, το έργο του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου σε μια κλειστή διαδρομή, είναι διάφορο του μηδενός. Αντιθέτως έχουμε δει ότι, το έργο του ηλεκτροστατικού πεδίου για κλειστή διαδρομή του φορτίου, είναι πάντα μηδέν (βλ. εδάφιο 4.1), διότι είναι διατηρητικό πεδίο. Άρα, μία σημαντική διαφορά μεταξύ του επαγόμενου και του ηλεκτροστατικού ηλεκτρικού πεδίου, είναι ότι το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι μη διατηρητικό πεδίο. Μια ακόμη διαφορά μεταξύ των δύο πεδίων, σχετίζεται με τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές τους. Το ηλεκτροστατικό ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από δυναμικές γραμμές, οι οποίες ξεκινούν πάντα από τα θετικά φορτία και καταλήγουν στα αρνητικά, δηλ. οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτροστατικού πεδίου έχουν πάντα αρχή και τέλος. Αντιθέτως, οι δυναμικές γραμμές του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου, σχηματίζουν κλειστές γραμμές, (ομόκεντρους κύκλους) δίχως αρχή και τέλος (βλ. σχ. 10.8β και 10.9). Οι διαφορές μεταξύ του ηλεκτροστατικού και επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου, διαφοροποιούν και την ηλεκτροστατική τάση από την επαγόμενη ΗΕΔ. Τη διαφορά αυτή την αναφέραμε και στην εισαγωγή του παρόντος κεφαλαίου. Πράγματι, η ηλεκτροστατική τάση δημιουργεί διατηρητικό ηλεκτρικό πεδίο, που περιγράφεται επίσης από την έννοια του ηλεκτρικού δυναμικού και της ηλεκτρικής δυναμικής ενέργειας του φορτίου σε κάθε σημείο του χώρου του. Αντιθέτως οι έννοιες του δυναμικού και της δυναμικής ενέργειας δεν μπορούν να ορισθούν για την επαγωγική ΗΕΔ και το παραγόμενο επαγωγικό ηλεκτρικό πεδίο, διότι το πεδίο όπως αναφέραμε δεν είναι διατηρητικό (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Giancoli, 2012).



Σχήμα 10.9 *Επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο E ως συνέπεια ενός μεταβαλλόμενου ομογενούς μαγνητικού πεδίου* ***B***. *Το πεδίο* ***E*** *περιγράφεται από τις κλειστές δυναμικές του γραμμές, οι οποίες είναι ομόκεντροι κύκλοι. Η φορά των γραμμών εξαρτώνται από την μεταβολή του B (αύξηση ή μείωση). Στην προκειμένη περίπτωση το B αυξάνεται.*

Είδαμε λοιπόν ότι, το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο, με κλειστές δυναμικές γραμμές, ακόμα και αν δεν υπάρχει σ' αυτόν κάποιος αγωγός, όπως δείχνει το σχ. 10.9. Η φορά των δυναμικών ηλεκτρικών γραμμών, καθορίζεται από την χρονική μεταβολή του πεδίου $\boldsymbol{B}$ (αύξηση ή μείωση) και την κατεύθυνσή του στο χώρο, βάσει του κανόνα του Lenz.

Το έργο του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου, το οποίο είναι προϊόν της επαγωγικής ΗΕΔ, είναι ίσο με το γινόμενο της επαγωγικής ΗΕΔ $\mathcal{E}$ επί το φορτίο q. Δηλαδή ισχύει

$$W_q = q\mathcal{E} \tag{10.24}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις 10.23 και 10.24, παίρνουμε

$$q\mathcal{E} = qE2\pi r \Rightarrow \mathcal{E} = E2\pi r \tag{10.25}$$

Η εξ. 10.25 λόγω του νόμου του Faraday, δίνει

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = E2\pi r \Rightarrow E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{10.26}$$

η οποία περιγράφει το επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο E κατά μήκος μιας κλειστής κυκλικής διαδρομής ακτίνας r (σχ. 10.8β). Το μέτρο του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου λόγω αξονικής συμμετρίας από το κέντρο του πηνίου, δεν μεταβάλλεται και παραμένει σταθερό. Έτσι η εξ. 10.25 παριστάνει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, ώστε να ισχύει

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dl} = E2\pi r \tag{10.27}$$

Η εξ. 10.27 σε συνδυασμό με την 10.26, δίνει

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \tag{10.28}$$

η οποία είναι μια διαφορετική μορφή γραφής του νόμου του Faraday (Grant & Phillips, 1975), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Serway & Jewett, 2013), και αποτελεί όπως θα ιδούμε αργότερα μία από τις τέσσερις θεμελιώδεις εξισώσεις του Maxwell στον ΗΜ. Η εξ. 10.28 ισχύει για κάθε κλειστή διαδρομή, οποιασδήποτε γεωμετρίας.

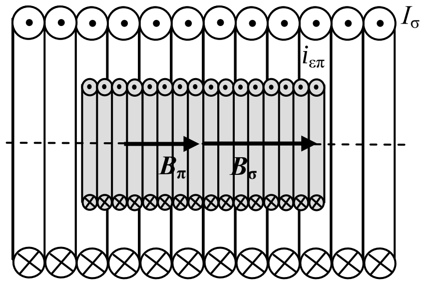
Υπολογίζοντας τώρα την μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου της κυκλικής διαδρομής $2\pi r$, η ένταση E του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου από την εξ. 10.26, γράφεται

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d(B\pi r^2)}{dt} = -\frac{\pi r^2}{2\pi r}\frac{dB}{dt} \Rightarrow E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \tag{10.29}$$

η οποία μας πληροφορεί ότι για δεδομένη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου, η ένταση του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου αυξάνεται με την απόσταση *r*, με αποτέλεσμα οι κυκλικές δυναμικές γραμμές του να πυκνώνουν για μεγαλύτερα *r*, όπως δείχνει το σχ. 10.9.

Παράδειγμα 10.6 Επαγόμενο ρεύμα σε πηνίο

Ένα μακρύ σωληνοειδές έχει $n_σ$=200 σπείρες/cm και διαρρέεται από ρεύμα $I_σ$=1.50 A. Στο κέντρο του σωληνοειδούς τοποθετείται βραχύ πηνίο *N*=100 σπειρών με διάμετρο $d_π$=2.00 cm η κάθε μια, όπως φαίνεται στο σχ. 10.10. Το πηνίο τοποθετείται έτσι ώστε το πεδίο $\boldsymbol{B_σ}$ στο κέντρο του σωληνοειδούς να είναι παράλληλο προς τον άξονα συμμετρίας του πηνίου. Το ρεύμα στο σωληνοειδές μειώνεται στο μηδέν με σταθερό ρυθμό σε χρόνο 0.050 sec. α) Ποια είναι η εξ επαγωγής ΗΕΔ που εμφανίζεται στο πηνίο κατά την μεταβολή του ρεύματος; β) Ποιο είναι το επαγόμενο ρεύμα $i_{επ}$ που δημιουργείται στο πηνίο, αν η αντίστασή του είναι 5.00 Ω; Δίνεται $μ_ο=4π×10^{-7}$ W/A·m.



Σχήμα 10.10 *Κάθετη τομή πηνίου στο εσωτερικό σωληνοειδούς. Επαγόμενο ρεύμα $i_π$ παράγεται στο πηνίο λόγω μεταβολής του ρεύματος $I_σ$ στο σωληνοειδές (παράδειγμα 10.6).*

Λύση

Η επαγωγή στο κέντρο του σωληνοειδούς δίνεται ως

$$B_σ = μ_ο n_σ I_σ \tag{1}$$

Το εμβαδόν του πηνίου $S_π$ είναι

$$S_π = Nπr_π^2 = Nπ(\frac{d_π}{2})^2 \Rightarrow S_π = Nπ\frac{d_π^2}{4} \tag{2}$$

Η μεταβολή της μαγνητικής ροής στο πηνίο είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{dΦ_B}{dt} = -\frac{d(B_σ S_π)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -S_π\frac{dB_σ}{dt} \tag{3}$$

Η εξ. 3 λόγω των 1 και 2 γίνεται

$$\mathcal{E} = -Nπ\frac{d_π^2}{4}\frac{d(μ_ο n_σ I_σ)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E} = -Nπ\frac{d_π^2}{4}μ_ο n_σ\frac{dI_σ}{dt} \tag{4}$$

Η μεταβολή του ρεύματος $I_σ$ στο σωληνοειδές είναι $ΔI_σ$ =0-1.50 A=-1.50 A σε χρονικό διάστημα 0.050 s. Αντικαθιστώντας τις τιμές στην εξ. 4 παίρνουμε

$$\mathcal{E} = -100\times3.14\times\frac{(2.00\times10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{4}\times4π\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A\cdot m}}\times200\times10^{-2}\,\mathrm{m}\frac{-1.5\mathrm{A}}{0.050\mathrm{s}} \Rightarrow \mathcal{E} = 2.36\times10^{-6}\,\mathrm{V}$$

Το επαγόμενο ρεύμα στο κύκλωμα του πηνίου είναι

$$i_{επ} = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow i_{επ} = \frac{2.36\times10^{-6}\,\mathrm{V}}{5.00Ω} \Rightarrow i_{επ} = 4.72\times10^{-7}\,\mathrm{A}$$

Η φορά του ρεύματος $i_π$ είναι τέτοια, που να δημιουργεί στο εσωτερικό του πηνίου ένα ομόρροπο μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_π}$ με εκείνο του σωληνοειδούς $\boldsymbol{B_σ}$, ώστε να αντιτίθεται στη μείωση της μαγνητικής ροής διαμέσου του πηνίου, την οποία επιφέρει η μείωση του $\boldsymbol{B_σ}$.

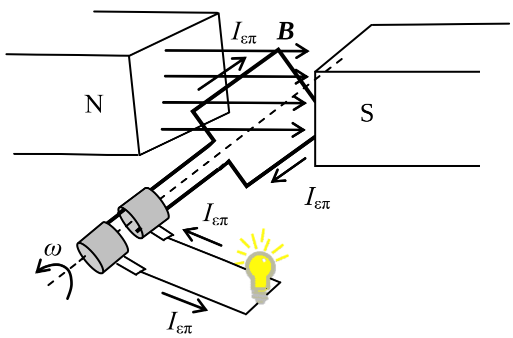
10.6 Γεννήτρια εναλλασσομένου ηλεκτρικού ρεύματος

Τα επαγωγικά ρεύματα και κατά επέκταση ο νόμος του Faraday παρουσιάζουν σημαντικές εφαρμογές στην τεχνολογία, όπως οι ηλεκτρικές γεννήτριες, οι μετασχηματιστές ηλεκτρικού ρεύματος, οι ανιχνευτές μετάλλων κ.α. Ας ιδούμε για παράδειγμα, πώς λειτουργεί μια γεννήτρια ρεύματος, η οποία μετατρέπει την μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική (Sears, 1951), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Giancoli, 2012). Έστω ένα περιστρεφόμενο αγώγιμο πλαίσιο μέσα σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, όπως φαίνεται στο σχ. 10.11. Εφόσον το πλαίσιο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, η μαγνητική ροή διαμέσου του πλαισίου μεταβάλλεται με τον χρόνο, μιας και κατά την περιστροφή, ο προσανατολισμός του πλαισίου ως προς το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ αλλάζει. Ισχύει δηλ.

$$\Phi_B = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = BA\cos\varphi \qquad (10.30)$$

όπου

$$\varphi = \omega t \qquad (10.31)$$

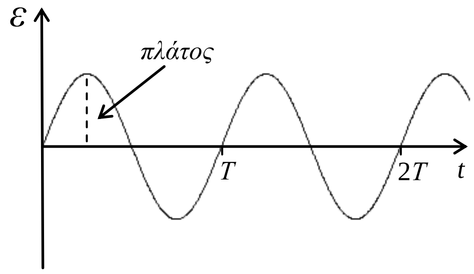


Σχήμα 10.11 *Αρχή λειτουργίας της γεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος.*

Έτσι σύμφωνα με το νόμο του Faraday έχουμε την δημιουργία επαγωγικής ΗΕΔ στα άκρα του πλαισίου, ίση με

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BA\cos\omega t)}{dt} = -BA\frac{d(\cos\omega t)}{dt} =$$
$$-BA(-\omega)\sin\omega t \Rightarrow \mathcal{E} = BA\omega\sin\omega t \qquad (10.32)$$

Η εξ. 10.32 μας δείχνει ότι, η επαγωγική τάση $\mathcal{E}$ μεταβάλλεται αρμονικώς λόγω του ημιτόνου, παίρνοντας τιμές από $BA\omega$ έως $-BA\omega$, όπως δείχνει το σχ. 10.12. Επειδή η τάση εναλλάσσεται ως προς το πρόσημο αρμονικά με τον χρόνο, αρμονικά εναλλάσσεται και το επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα που δημιουργείται στο πλαίσιο, αλλά και στο εξωτερικό κύκλωμα όπου υπάρχει ο λαμπτήρας (σχ. 10.11). Γι' αυτόν τον λόγο, το περιστρεφόμενο πλαίσιο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο ονομάζεται **γεννήτρια εναλλασσομένου ρεύματος**, μιας και μετατρέπει την μηχανική ενέργεια (περιστροφική ενέργεια του πλαισίου), σε ηλεκτρική (ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα και λειτουργία του λαμπτήρα). Η τάση που παράγεται επαγωγικά στα άκρα του περιστρεφομένου πλαισίου και τροφοδοτεί το εξωτερικό ηλεκτρικό κύκλωμα, ονομάζεται **εναλλασσόμενη τάση**. Η τροφοδοσία του εξωτερικού κυκλώματος γίνεται από τα περιστρεφόμενα άκρα του πλαισίου (ρότορας), μέσω δύο περιστρεφομένων μονωμένων δακτυλίων, που ευρίσκονται σε διαρκή ωμική επαφή με ακίνητες ψήκτρες (καρβουνάκια). Με γεννήτριες εναλλασσομένου ρεύματος λειτουργούν τα υδροηλεκτρικά εργοστάσια, όπου η μηχανική ενέργεια του προσπίπτοντος νερού, (το οποίο περιστρέφει ρότορα εντός μαγνητικού πεδίου), μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια. Με την ίδια αρχή λειτουργούν και οι ανεμογεννήτριες, οι οποίες μετατρέπουν την αιολική ενέργεια (ενέργεια του ανέμου), σε ηλεκτρική. Επίσης άλλες μορφές ενέργειας, όπως η πυρηνική, μπορεί να θερμάνουν νερό και στη συνέχεια από τον παραγόμενο ατμό, να τεθούν σε κίνηση κατάλληλοι ρότορες για την παραγωγή επαγωγικής ηλεκτρικής ενέργειας. Με ανάλογο τρόπο η καύση γαιανθράκων (λιγνίτη, πετρελαίου, κ.α.) μπορεί να παράγει ηλεκτρική ενέργεια από την παραγωγή θερμότητας, μέσω της αρχής της επαγωγής. Τέτοιου είδους ηλεκτρική ενέργεια παράγεται στα θερμοηλεκτρικά εργοστάσια, όπως αυτά που υπάρχουν στην Ελλάδα, στην περιοχή της Πτολεμαΐδας.



Σχήμα 10.12 *Εναλλασσόμενη επαγωγική τάση από περιστρεφόμενο πλαίσιο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο (βλ. σχ. 10.11). Σημειώνεται το πλάτος της τάσης και η περίοδός της.*

Η συχνότητα και το πλάτος του εναλλασσομένου ρεύματος, μπορεί να διαφέρει αναλόγως τον τόπο που παράγεται και καταναλώνεται. Για παράδειγμα, στην Ευρώπη η συχνότητα εναλλασσομένου ρεύματος είναι 50 Hz (50 κύκλοι ανά δευτερόλεπτο), ενώ στις ΗΠΑ και στον Καναδά είναι 60 Hz. Το πλάτος της εναλλασσομένης τάσης στην Ευρώπη είναι περίπου 310 V, ενώ στις ΗΠΑ, Καναδά και Βρετανία είναι 170 V. Θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά τα εναλλασσόμενα ρεύματα και τα χαρακτηριστικά τους στο κεφάλαιο 12.

Παράδειγμα 10.7 Παραγωγή εναλλασσομένης τάσης

Πηνίο με N σπείρες ορθογώνιου σχήματος διαστάσεων μήκους a και πλάτους b, περιστρέφεται με γωνιακή συχνότητα ω μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο επαγωγής B. Το περιστρεφόμενο πηνίο είναι συνδεδεμένο σε σειρά με αντίσταση R. Να ευρεθεί η εναλλασσόμενη επαγωγική ΗΕΔ $\mathcal{E}$, η οποία αναπτύσσεται στο κύκλωμα του περιστρεφομένου πηνίου, το επαγωγικό ρεύμα στο κύκλωμα βρόχου-αντίστασης, και η ισχύς που καταναλώνεται σε αυτό.

Λύση

Το εμβαδόν κάθε ορθογωνίας σπείρας του πηνίου είναι $A=ab$. Εφόσον το πηνίο διαθέτει N σπείρες, το συνολικό εμβαδόν είναι

$$S = NA \Rightarrow S = Nab$$

Από το νόμο του Faraday η επαγωγική τάση του περιστρεφομένου πηνίου είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(BS\cos\omega t)}{dt} = -\frac{d(NBab\cos\omega t)}{dt} = -NBab\frac{d(\cos\omega t)}{dt} =$$
$$= -NBab(-\omega)\sin\omega t \Rightarrow \mathcal{E} = NBab\omega\sin\omega t$$

Η επαγωγική τάση $\mathcal{E}$ είναι εναλλασσόμενη όπως και το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση. Έτσι ισχύει

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \frac{NBab\omega\sin\omega t}{R}$$

Η ηλεκτρική ισχύς που καταναλώνεται στο κύκλωμα είναι

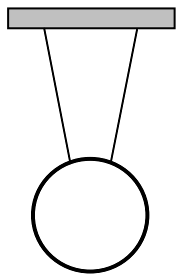
$$P = I^2R \Rightarrow P = \frac{(NBab\omega\sin\omega t)^2}{R}$$

Παρατηρούμε ότι η ηλεκτρική ισχύς μεταβάλλεται με τον χρόνο, γι' αυτό και στην πραγματικότητα με την παραπάνω εξίσωση αναφερόμαστε την στιγμιαία ισχύ. Στο κεφάλαιο 12, θα ιδούμε ότι για πρακτικούς λόγους, στο εναλλασσόμενο ρεύμα ορίζεται η μέση ισχύς.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 10

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

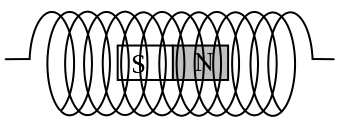
Ε10.1 Ένας χάλκινος δακτύλιος κρέμεται από σταθερό βραχίονα με δύο λεπτά νήματα, όπως δείχνει το σχ. 10.13. Έχοντας στην διάθεσή σας έναν ραβδόμορφο μαγνήτη, πώς μπορείτε να θέσετε τον δακτύλιο σε κίνηση μπρος-πίσω χωρίς να τον ακουμπήσετε;



Σχήμα 10.13 *Ερώτηση 10.1.*

Ε10.2 Δύο κυκλικοί αγώγιμοι βρόχοι είναι ο ένας απέναντι από τον άλλο, με τα επίπεδά αμφοτέρων παράλληλα μεταξύ τους. Ο ένας βρόχος είναι συνδεδεμένος με πηγή ΗΕΔ, ώστε να διαρρέεται από ρεύμα, ενώ ο άλλος είναι απλώς ένας κυκλικός λεπτός δακτύλιος. Εάν το ρεύμα στον πρώτο βρόχο αυξάνεται με το χρόνο, το επαγωγικό ρεύμα που δημιουργείται στον δεύτερο έχει την ίδια ή αντίθετη φορά με το ρεύμα του πρώτου βρόχου; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση αν το ρεύμα του πρώτου βρόχου, μειώνεται με τον χρόνο. Αναπτύσσονται δυνάμεις μεταξύ των βρόχων; Εξηγείστε σε κάθε περίπτωση.

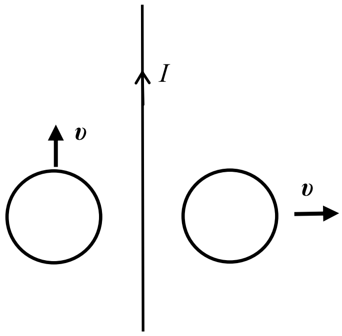
Ε10.3 Ένας μακρύς ευθύγραμμος αγωγός περνά από το κέντρο ενός μεταλλικού δακτυλίου και κάθετα στο επίπεδό του. Εάν το ρεύμα του αγωγού αυξηθεί ξαφνικά, θα παρατηρηθεί επαγωγικό ρεύμα στον δακτύλιο; Εξηγείστε.



Σχήμα 10.14 *Ερώτηση 10.4.*

Ε10.4 Ένας μικρού μήκους ραβδόμορφος μαγνήτης, ευρίσκεται στο εσωτερικό μακρού σωληνοειδούς κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του, όπως δείχνει το σχ. 10.14. Κινώντας τον μαγνήτη εμπρός-πίσω κατά μήκος του άξονα, θα παρατηρήσετε επαγωγικό ρεύμα στο σωληνοειδές; Ναι ή όχι και γιατί;

Ε10.5 Ένα αεροπλάνο πετά πάνω από τον νότιο μαγνητικό πόλο της Γης, όπου το μαγνητικό πεδίο έχει κυρίως φορά προς τα «κάτω», και κάθετα προς την επιφάνεια της Γης. Ποιο φτερό βλέπει ο πιλότος να έχει υψηλότερο ηλεκτρικό δυναμικό, το δεξιό ή το αριστερό; Εξηγείστε. Εξαρτάται η απάντησή σας από την κατεύθυνση πτήσεως του αεροπλάνου;

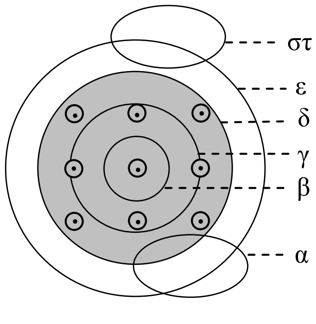


Σχήμα 10.15 *Ερώτηση 10.6.*

Ε10.6 Δυο αγώγιμοι βρόχοι κινούνται σε σχέση με μεγάλου μήκους ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό, έτσι όπως δείχνει το σχ. 10.15. Να ευρεθεί η φορά του επαγομένου ρεύματος σε κάθε βρόχο, εφόσον αυτό υπάρχει.

Ε10.7 Στον κυκλικό βρόχο του σχήματος 10.8, όπου δημιουργείται επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο, έχει έννοια να ερωτήσουμε ποια είναι η ενέργεια που κερδίζει ένα ηλεκτρόνιο κατά μια πλήρη περιφορά; Επίσης, έχει έννοια να ερωτήσουμε ποια διαφορά δυναμικού κινεί το ηλεκτρόνιο κατά την περιφορά του στο βρόχο; Εξηγείστε.

Ε10.8 Στο σχ. 10.16 φαίνεται γραμμοσκιασμένη κυκλική περιοχή, στην οποία ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο με φορά προς τα «έξω», και κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, μειώνεται με τον χρόνο. Κατατάξτε τις κλειστές διαδρομές αναλόγως την ποσότητα $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$, υπολογιζόμενη κατά μήκος τους, ξεκινώντας από την μεγαλύτερη.



Σχήμα 10.16 *Ερώτηση 10.8.*

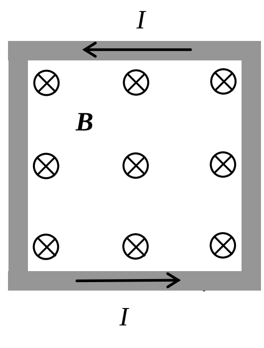
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π10.1 Επαγωγικό ρεύμα σε κυκλικό δακτύλιο. Ομογενές πεδίο επαγωγής *B* είναι κάθετο προς το επίπεδο κυκλικού δακτυλίου με διάμετρο 20.0 cm που αποτελείται από χάλκινο σύρμα αντίστασης 2 Ω. Υπολογίστε με ποιο ρυθμό πρέπει να μεταβάλλεται το *B*, για να εμφανιστεί στον δακτύλιο ρεύμα έντασης 0.1 A. *Απάντηση*: 6.37 T/s.

Π10.2 Επαγωγικό ρεύμα σε τετράγωνο βρόχο. Ένας τετράγωνος μεταλλικός βρόχος με πλευρά a=20.0 cm έχει ωμική αντίσταση R=0.10 Ω. Ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου και δίνεται συναρτήσει του χρόνου ως $B(t)=4t-2t^2$, όπου το B είναι σε tesla και το t σε sec. Προσδιορίστε την επαγωγική ΗΕΔ και το επαγωγικό ρεύμα στον βρόχο για t =0.50 s. *Απάντηση*: 0.08 V και 0.80 A.

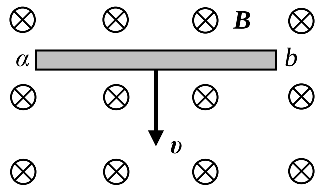
Π10.3 Επαγόμενη ΗΕΔ σε ορθογώνιο πλαίσιο. Ορθογώνιο πλαίσιο εμβαδού *A* τοποθετείται σε μια περιοχή όπου το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου αρχίζει να μεταβάλλεται ως προς το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $B=B_o e^{-t/\tau}$, όπου B_o και τ είναι σταθερές. Εφαρμόστε το νόμο του Faraday για να ευρείτε την ΗΕΔ εξ' επαγωγής που αναπτύσσεται στο πλαίσιο ως συνάρτηση του χρόνου. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της ΗΕΔ, και ποια χρονική στιγμή λαμβάνει αυτή την τιμή;

Π10.4 Μεταβολή μαγνητικού πεδίου σε βρόχο. Τετραγωνικός βρόχος πλευράς 8.00 cm έχει αντίσταση 0.10 Ω, και ευρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο *B* το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου, όπως φαίνεται στο σχ. 10.17. Ο βρόχος διαρρέεται από ρεύμα 0.150 A. α) Να ευρείτε την μεταβολή του μαγνητικού πεδίου *B* με τον χρόνο. β) Λαμβάνοντας υπόψη την φορά του ρεύματος και με βάση τον κανόνα του Lentz, απαντήστε αν το *B* αυξάνεται ή μειώνεται. *Απάντηση*: 2.34 T/s.



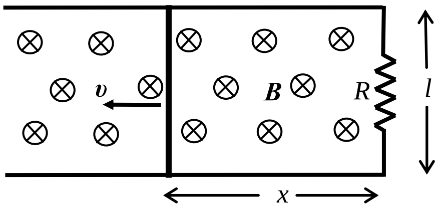
Σχήμα 10.17 *Πρόβλημα 10.4.*

Π10.5 Επαγωγική ΗΕΔ σε κινούμενη ράβδο. Μια αγώγιμη ράβδος με μήκος L=0.150 m κινείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο B, το οποίο έχει κατεύθυνση κάθετη προς το επίπεδο του σχήματος και μέτρο B=0.500 T. Η ράβδος κινείται με ταχύτητα υ=6.00 m/s, προς την κατεύθυνση που δείχνει το σχ. 10.18. α) Πόση είναι η τελική διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων α και b, και ποιο άκρο της ράβδου ευρίσκεται σε υψηλότερο δυναμικό; *Απάντηση*: 0.435 V.



Σχήμα 10.18 *Πρόβλημα 10.5.*

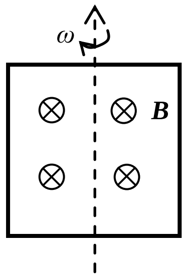
Π10.6 Επαγόμενο ρεύμα σε κινούμενη ράβδο. Θεωρείστε ότι έχουμε τη διάταξη του σχήματος 10.19, όπου R=6.00 Ω η αντίσταση του συστήματος, l=1.20 m το μήκος της ράβδου, και B=2.50 T το ομογενές μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο κινείται η ράβδος. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται η ράβδος, ώστε να παράγει επαγόμενο ρεύμα I=0.50 A στην αντίσταση R; Αγνοείστε την μάζα της ράβδου και τις τυχόν τριβές κατά την κίνησή της. *Απάντηση*: 1.00 m/s.



Σχήμα 10.19 *Πρόβλημα 10.6.*

Π10.7 Επαγόμενο ρεύμα σε πηνίο και αντιστάτη. Πηνίο με N=300 κυκλικές σπείρες ακτίνας r=0.30 m είναι τοποθετημένο σε χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο $B=at^3+bt^2$, όπου α=0.10 T/s^3 και b=0.30 T/s^2. Το πηνίο είναι συνδεδεμένο με αντιστάτη R=200 Ω, και το επίπεδό των σπειρών του είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Υπολογίστε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση την χρονική στιγμή t=5.0 s. *Απάντηση*: 4.45 A.

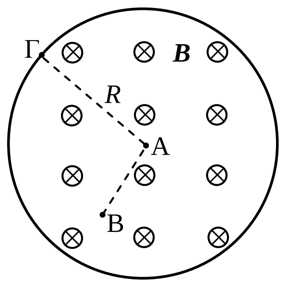
Π10.8 Επαγόμενη ΗΕΔ σε κυκλικό βρόχο στο εσωτερικό σωληνοειδούς. Ένα μεγάλου μήκους σωληνοειδές έχει n=400 σπείρες ανά μέτρο, και διαρρέεται από ρεύμα $I=I_o(1-e^{-at})$ με I_o=20.0 A και a=1.80 s^{-1}. Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς και ομοαξονικά με αυτό υπάρχει ένας κυκλικός βρόχος ακτίνας R=5.00 cm, που έχει συνολικά N=300 σπείρες λεπτού σύρματος. Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στον βρόχο λόγω της μεταβολής του ρεύματος στο σωληνοειδές; *Απάντηση*: $0.043e^{-1.8t}$ V.



Σχήμα 10.20 *Πρόβλημα 10.9.*

Π10.9 Περιστρεφόμενο τετραγωνικό πλαίσιο. Ένα τετραγωνικό πλαίσιο εμβαδού S=0.10 m^2 περιστρέφεται με συχνότητα f=60 Hz (στροφές ανά δευτερόλεπτο) και με τον άξονα περιστροφής κάθετο σε μαγνητικό πεδίο B=0.20 T, όπως φαίνεται στο σχ. 10.20. Εάν το πλαίσιο αποτελείται από N=1000 τετραγωνικές σπείρες, α) ποια είναι η έκφραση για την εναλλασσόμενη τάση εξ' επαγωγής που αναπτύσσεται στο πλαίσιο, και β) ποιο είναι το πλάτος της τάσης (μέγιστη τάση); *Απάντηση:* α) 7536V$\sin\omega t$ και β) 5329 V.

Π10.10 Επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Στο σχ. 10.21 απεικονίζεται ομογενές μαγνητικό πεδίο B, το οποίο καταλαμβάνει το χώρο ενός μεγάλου μήκους κυλίνδρου ακτίνας R=5.00 cm. Το πεδίο B μεταβάλλεται με ρυθμό 12.0 mT/s. Να ευρεθεί η στιγμιαία επιτάχυνση (μέτρο και κατεύθυνση), που ασκείται πάνω σε τρία ηλεκτρόνια, τα οποία ευρίσκονται στις θέσεις Α, Β και Γ αντιστοίχως. Το σημείο Β απέχει 3.00 cm από το σημείο Α, το οποίο ευρίσκεται στο κέντρο της διατομής του κυλίνδρου. *Υπόδειξη*: Η αλλοίωση της ομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου σε περιοχές εκτός του κυλίνδρου, να μην ληφθεί υπόψη, μιας και υπάρχει αξονική κυλινδρική συμμετρία.



Σχήμα 10.21 *Πρόβλημα 10.10.*

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Faraday M. (1839). Experimental Researches in Electricity. B. Quaritch, London, 1839.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 11

ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΜΟΙΒΑΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

Σύνοψη

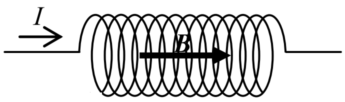
Στο ενδέκατο τούτο κεφάλαιο ορίζονται τα φυσικά μεγέθη της αυτεπαγωγής και της αμοιβαίας επαγωγής, καθώς και η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου. Περιγράφονται τα κυκλώματα πηνίου-αντιστάτη και πηνίου-πυκνωτή, ενώ μελετάται το φαινόμενο της ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης.

Προαπαιτούμενη γνώση

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Κανόνες του Kirchhoff. Νόμος του Faraday.

11.1 Επαγωγέας

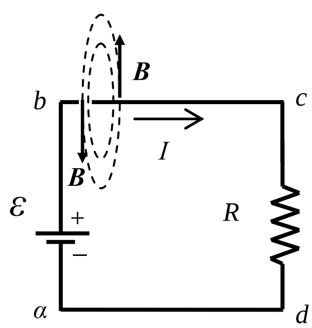
Όπως είδαμε στο εδάφιο 9.6, όταν ένα ιδανικό σωληνοειδές με κυκλικές σπείρες διαρρέεται από σταθερό ηλεκτρικό ρεύμα, δημιουργεί ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του, με κατεύθυνση παράλληλη στον άξονα συμμετρίας του. Ένα τέτοιο ιδανικό σωληνοειδές φαίνεται στο σχ. 11.1, και ονομάζεται **επαγωγέας** ή **πηνίο**. Το πηνίο αποθηκεύει μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του με ανάλογο τρόπο, όπως ένας πυκνωτής αποθηκεύει ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών του, όταν εφαρμοστεί στα άκρα του διαφορά δυναμικού (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Οι επαγωγείς παίζουν σημαντικό ρόλο στα ηλεκτρικά κυκλώματα, μόνο όταν μεταβάλλεται το ρεύμα τους, διότι τότε παρατηρούνται επαγωγικά φαινόμενα. Γενικότερα, ένας επαγωγέας είναι δυνατόν να έχει σπείρες όχι μόνο κυκλικού σχήματος, αλλά τετραγωνικού, ορθογωνίου παραλληλογράμμου κλπ. Εν γένει, με την ευρεία έννοια του όρου, ως επαγωγέας μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε διάταξη προκαλεί επαγωγικά φαινόμενα (ακόμη και ένας βρόχος). Συνήθως όμως με τον όρο αυτό εννοούμε σωληνοειδή και πηνία. Το εσωτερικό ενός επαγωγέα ονομάζεται πυρήνας και μπορεί να είναι αέρας ή κάποιο σιδηρομαγνητικό υλικό. Στην δεύτερη περίπτωση, όταν ο επαγωγέας διαρρέεται από ρεύμα, ο πυρήνας του γίνεται μαγνήτης και ονομάζεται **ηλεκτρομαγνήτης** (Grant & Phillips, 1975), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Giancoli, 2012). Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τον ρόλο των επαγωγέων σε διάφορες περιπτώσεις.



Σχήμα 11.1 *Επαγωγέας ή πηνίο, ο οποίος διαρέεται από ρεύμα I και δημιουργεί ομογενές μαγνητικό πεδίο B στο εσωτερικό του κατά μήκος του άξονά του.*

11.2 Αυτεπαγωγή

Τα επαγωγικά φαινόμενα παίζουν σημαντικό ρόλο στη σύγχρονη τεχνολογία όσον αφορά την μεταφορά και διανομή της ηλεκτρικής ισχύος, την κατασκευή ηλεκτρονικών διατάξεων κ.ά. Κάθε αγωγός που διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα δημιουργεί γύρω του μαγνητικό πεδίο, το οποίο θα μεταβληθεί εάν μεταβληθεί το ρεύμα που τον διαρρέει. Έτσι, θεωρώντας ένα κλειστό κύκλωμα όπως αυτό του βρόχου *abcda* του σχήματος 11.2, όταν συμβεί μια μεταβολή στην ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος I, αυτομάτως θα υπάρξει μεταβολή του μαγνητικού πεδίου B του αγωγού και επομένως και της μαγνητικής ροής που διαρρέει τον ίδιο τον βρόχο. Τούτο θα έχει ως συνέπεια την ανάπτυξη επαγωγικής ηλεκτεργερτικής δύναμης ΗΕΔ στο κύκλωμα, η οποία θα προσπαθήσει να αναιρέσει την μεταβολή της μαγνητικής ροής και επομένως και την μεταβολή του ρεύματος I. Η ανάπτυξη επαγωγικής ΗΕΔ σ' ένα κύκλωμα, η οποία συμβαίνει ως αποτέλεσμα κάποιας αλλαγής σ' αυτό, ονομάζεται **αυτεπαγωγή** (Alonso & Finn, 1992), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992) (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013). Η αυτεπαγωγή είναι συνέπεια του νόμου του Faraday.



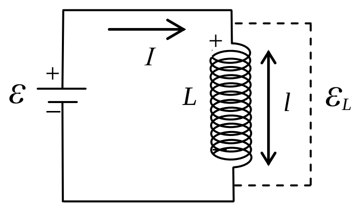
Σχήμα 11.2 *Αυτεπαγωγή σε ηλεκτρικό βρόχο.*

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν επαγωγέα με *N* σπείρες και μήκος *l*, συνδεδεμένο σε ηλεκτρικό κύκλωμα, όπως φαίνεται στο σχ. 11.3. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του μακρού επαγωγέα (μεγάλο μήκος σε σύγκριση με την διάμετρό του), μπορεί να θεωρηθεί σταθερό και δίδεται από την σχέση (βλ. εδάφιο 9.6)

$$B = \mu_o n I \qquad (11.1)$$

όπου *n* είναι ο αριθμός των σπειρών ανά μονάδα μήκους. Εάν μεταβληθεί το ηλεκτρικό ρεύμα *I* του κυκλώματος, τότε θα μεταβληθεί και το μαγνητικό πεδίο *B* στο εσωτερικό του επαγωγέα και επομένως και η μαγνητική ροή Φ_B που τον διαρρέει. Έτσι, θα ισχύει

$$\frac{dB}{dt} = \mu_o n \frac{dI}{dt} \qquad (11.2)$$



Σχήμα 11.3 *Κύκλωμα με επαγωγέα αυτεπαγωγής L, όπου με αύξηση του ρεύματος I, στα άκρα του επαγωγέα αναπτύσσεται επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ αντίθετης πολικότητας από αυτήν της πηγής.*

και η μεταβολή της μαγνητικής ροής Φ_B είναι

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(NBA)}{dt} = NA\frac{dB}{dt} \Rightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{1}{NA}\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (11.3)$$

Η εξ. 11.3 στην 11.2 δίνει

$$\frac{1}{NA}\frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_o n \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_o n NA \frac{dI}{dt} \qquad (11.4)$$

Από τον νόμο του Faraday (εξ. 10.4) παίρνουμε ότι στα άκρα του επαγωγέα θα αναπτυχθεί μια επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$, ίση με

$$-\mathcal{E}_L = \mu_o n NA \frac{dI}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_L = -\mu_o n NA \frac{dI}{dt} \qquad (11.5)$$

Από την εξ. 11.5, συμπεραίνουμε ότι η επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ στα άκρα του επαγωγέα, είναι ανάλογη της μεταβολής του ηλεκτρικού ρεύματος με σταθερά αναλογίας *L*, όπου

$$L = \mu_o n NA \qquad (11.6)$$

ή διαφορετικά

$$L = \mu_o n^2 l A \qquad (11.7)$$

Η σταθερά *L* ονομάζεται **συντελεστής αυτεπαγωγής** του επαγωγέα, και οι μονάδες μέτρησής της στο ΔΣΜ είναι το 1 H (henry - χένρι) προς τιμήν του Joseph Henry (1797-1878), και το οποίο ορίζεται ως H=V·s/A. Αντιθέτως, το γράμμα *L* επιλέχθηκε προς τιμήν του Γερμανού φυσικού Heinrich Lenz (1804-1865), για την ανακάλυψη του ομώνυμου κανόνα (βλ. κεφάλαιο 10). Προσέξτε ότι ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός επαγωγέα, εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του, όπως ο όγκος του (*lA*) και η πυκνότητα *n* των σπειρών ανά μονάδα μήκους. Συνεπώς, για κάθε μεταβολή του ρεύματος σε ηλεκτρικό κύκλωμα με επαγωγέα, η τάση αυτεπαγωγής $\mathcal{E}_L$ στα άκρα του, βάσει των εξισώσεων 11.5 και 11.6, είναι

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \qquad (11.8)$$

(Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Η παραπάνω σχέση είναι ο νόμος του Faraday για την αυτεπαγωγή. Το πλην (–) προέρχεται από τον κανόνα του Lenz, δηλ. η αυτεπαγωγή προκαλεί πάντα ένα επαγωγικό ρεύμα, το οποίο τείνει να αναιρέσει την μεταβολή *dI/dt*. Όταν κοντά στο πηνίο δεν υπάρχει κάποιο μαγνητικό υλικό, τότε η μαγνητική ροή είναι ανάλογη με το ρεύμα *I* του πηνίου, μιας και από την εξ. 11.8 μπορούμε να γράψουμε

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} \Rightarrow \Phi_B = LI \qquad (11.9)$$

Παράδειγμα 11.1 Συντελεστής αυτεπαγωγής δακτυλιοειδούς σωληνοειδούς

Ένα δακτυλιοειδές σωληνοειδές (τόρος) με πυρήνα αέρα, εμβαδού διατομής A και μέσης ακτίνας r, φέρει πολύ πυκνά περιτυλιγμένες N σπείρες σύρματος, όπως δείχνει το σχ. 11.4. Προσδιορίστε τον συντελεστή αυτεπαγωγής L του τόρου. Για τον προσδιορισμό της ροής, υποθέστε ότι το B είναι ομογενές σε όλη την επιφάνεια της διατομής, και ότι δεν μεταβάλλεται με την απόσταση από το κέντρο του δακτυλίου.

Λύση

Από την εξ. 11.9, μπορούμε να γράψουμε για το L

$$L = \frac{\Phi_B}{I} \qquad (1)$$

Το πεδίο B στο εσωτερικό του τόρου υπολογίζεται από το νόμο του Ampere, (εδάφιο 9.5) ίσο με

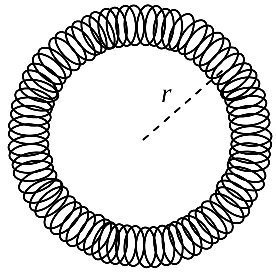
$$B = \frac{\mu_o NI}{2\pi r} \qquad (2)$$

Επειδή ο τόρος έχει N σπείρες, όπου η κάθε μια έχει διατομή A, η συνολική μαγνητική ροή του πηνίου είναι

$$\Phi_B = NBA \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις 2 και 3 στην 1, δίνουν

$$L = \frac{\mu_o N^2 A}{2\pi r} \qquad (4)$$



Σχήμα 11.4 *Δακτυλιοειδής επαγωγέας ή τόρος (παράδειγμα 11.1).*

Από την εξ. 4, επιβεβαιώνεται ότι η σταθερά αυτεπαγωγής L εξαρτάται μόνο από τα τεχνικά χαρακτηριστικά του επαγωγέα.

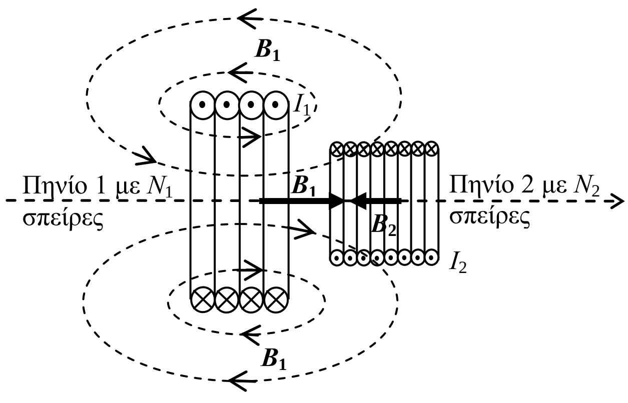
11.3 Αμοιβαία επαγωγή

Όταν δύο ηλεκτρικά κυκλώματα ευρίσκονται το ένα κοντά στο άλλο, οι μεταβολές στο ρεύμα του ενός μεταβάλλουν την μαγνητική ροή που διέρχεται από το άλλο, αναπτύσσοντας σ’ αυτό επαγωγική ΗΕΔ, η οποία τείνει να αναιρέσει τις μεταβολές ρεύματος στο πρώτο κύκλωμα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **αμοιβαία επαγωγή** (Sears, 1951), (Grant & Phillips, 1975), (Alonso & Finn, 1992), (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013).

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε δυο γειτονικά πηνία 1 και 2 με σπείρες N_1 και N_2 αντιστοίχως, τα οποία ανήκουν σε διαφορετικά ηλεκτρικά κυκλώματα, και ευρίσκονται κοντά το ένα με το άλλο, όπως δείχνει το σχ. 11.5. Εάν το πηνίο 1 διαρρέεται από ρεύμα I_1, τότε παράγει ένα μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_1}$, το οποίο δημιουργεί μια μαγνητική ροή Φ_2 σε κάθε σπείρα του πηνίου 2. Επειδή το πεδίο B_1 μπορεί να μεταβάλλεται με την απόσταση μεταξύ των δυο πηνίων, θεωρούμε την Φ_2 ως τη μέση τιμή της μαγνητικής ροής που διαρρέει κάθε σπείρα. Όταν μεταβληθεί το ρεύμα I_1, αυτομάτως θα μεταβληθεί το πεδίο B_1, και συνεπώς η μαγνητική ροή Φ_2. Τότε θα αναπτυχθεί μια αμοιβαία επαγωγική ΗΕΔ στο πηνίο 2, ίση με

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} \qquad (11.10)$$

Όμως για την μαγνητική ροή Φ_2 ανά σπείρα, ισχύει



Σχήμα 11.5 *Τομή δυο πηνίων 1 και 2 τα οποία ευρίσκονται σε γειτνίαση. Το ρεύμα I_1 που διαρρέει το πηνίο 1 δημιουργεί μαγνητικό πεδίο B_1 στην περιοχή του πηνίου 2. Κάθε μεταβολή του ρεύματος I_1 δημιουργεί επαγωγικό ρεύμα I_2 στο πηνίο 2, τέτοιας φοράς ώστε να αντιτίθεται στην μεταβολή της μαγνητικής ροής που το διαρρέει.*

$$\Phi_2 = B_1 A_2 \tag{11.11}$$

όπου A_2 είναι το εμβαδόν της κάθε σπείρας του πηνίου 2, και ισχύει

$$A_2 = \pi r_2^2 \tag{11.12}$$

και το μαγνητικό πεδίο B_1 στο εσωτερικό του πηνίου 1 είναι

$$B_1 = \mu_o n_1 I_1 \tag{11.13}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 11.11, 12 και 13 στην 11.10, παίρνουμε

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d(\mu_o n_1 I_1 \pi r_2^2)}{dt} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = -N_2 \mu_o n_1 \pi r_2^2 \frac{dI_1}{dt} \tag{11.14}$$

Από την εξ. 11.14 καταλαβαίνουμε ότι η επαγωγική ΗΕΔ που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου 2, είναι ανάλογη της μεταβολής του ρεύματος που συμβαίνει στο πηνίο 1. Ο συντελεστής αναλογίας ονομάζεται **συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής** M_{21} του πηνίου 2 ως προς το 1 και μετράται σε H (henry), όπως και η αυτεπαγωγή L. Ισχύει δηλ.

$$M_{21} = N_2 \mu_o n_1 \pi r_2^2 \tag{11.15}$$

Από την παραπάνω εξίσωση συμπεραίνουμε ότι ο συντελεστής της αμοιβαίας επαγωγής εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δυο πηνίων, εφόσον βεβαίως δεν υπάρχει στο χώρο κάποιο μαγνητικό υλικό. Τελικά η εξ. 11.14, η οποία είναι ο νόμος του Faraday για την αμοιβαία επαγωγή, γράφεται

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \tag{11.16}$$

(Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Από την εξ. 11.10 και την 11.16 παίρνουμε

$$N_2 \frac{d\Phi_2}{dt} = M_{21} \frac{dI_1}{dt} \Rightarrow \frac{d(N_2 \Phi_2)}{dt} = \frac{d(M_{21} I_1)}{dt} \Rightarrow N_2 \Phi_2 = M_{21} I_1 \tag{11.17}$$

Επομένως η εξ. 11.17 μας πληροφορεί ότι η συνολική μαγνητική ροή $N_2\Phi_2$ στο πηνίο 2, είναι ανάλογη του ρεύματος I_1 στο πηνίο 1. Έτσι, σύμφωνα με την εξ. 11.16, όταν μεταβάλλεται το ρεύμα I_1 με τον χρόνο στο πηνίο 1, θα μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή Φ_2, και συνεπώς θα αναπτύσσεται επαγωγική ΗΕΔ $\mathcal{E}_2$ στο πηνίο 2. Από την εξ. 11.17 μπορούμε να γράψουμε για τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής M_{21},

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_2}{I_1} \tag{11.18}$$

Η επαγωγική ΗΕΔ $\mathcal{E}_2$ δημιουργεί επαγωγικό ρεύμα I_2 στο πηνίο 2, τέτοιας φοράς ώστε να αντιτίθεται στην αύξηση του $\boldsymbol{B_1}$ λόγω της αύξησης του I_1 (κανόνας του Lenz). Έτσι το επαγωγικό ρεύμα I_2 έχει τέτοια φορά, ώστε να δημιουργεί μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_2}$ αντιπαράλληλο του $\boldsymbol{B_1}$ (βλ. σχ. 11.5).

Με το ίδιο σκεπτικό που αναπτύξαμε πιο πάνω, μπορούμε να θεωρήσουμε μια μεταβολή του ρεύματος I_2 στο πηνίο 2. Τότε βάσει της εξ. 11.16, θα αναπτυχθεί στο πηνίο 1 αμοιβαία επαγωγική ΗΕΔ $\mathcal{E}_1$, ίση με

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt} \tag{11.19}$$

όπου M_{12} ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής του πηνίου 1 ως προς το πηνίο 2. Για τα δυο πηνία αποδεικνύεται ότι οι συντελεστές αμοιβαίας επαγωγής είναι ίσοι, δηλ. M_{12}=M_{21} (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013).

Παράδειγμα 11.2 Πηνία γεννήτριας υψηλής τάσεως

Σε μια γεννήτρια υψηλής τάσεως, ένα μακρύ πηνίο μήκους l και διατομής εμβαδού A_1, έχει πολύ πυκνά περιτυλιγμένες N_1 σπείρες σύρματος. Ένα δεύτερο πηνίο με N_2 σπείρες εμβαδού A_2 , ευρίσκεται ομοαξονικώς γύρω από το πρώτο πηνίο, έτσι όπως φαίνεται στο σχ. 11.6. Να ευρείτε τον συντελεστή της αμοιβαίας επαγωγής των δύο πηνίων της γεννήτριας.

Λύση

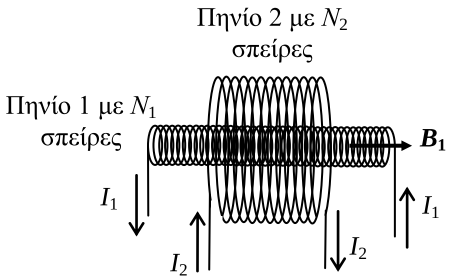
Το ρεύμα I_1 στο πηνίο 1, δημιουργεί ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B_1}$, το οποίο δημιουργεί μαγνητική ροή Φ_{B_2} στο πηνίο 2, όπου

$$\Phi_{B_2} = N_2\Phi_2 = M_{21}I_1 \qquad (1)$$

όπου Φ_2 είναι η μαγνητική ροή της μιας σπείρας του πηνίου 2, και M_{21} είναι ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής των δυο πηνίων. Η μαγνητική ροή Φ_2 δίνεται ως

$$\Phi_2 = B_1 A_2 \qquad (2)$$

Το πεδίο B_1 εντός του πηνίου 1 και σε επιφάνεια A_1, μπορεί να θεωρηθεί ομογενές για μεγάλου σχετικά μήκους πηνίο. Εκτός του πηνίου 1, το B_1 θεωρείται πολύ μικρό, ώστε η συνεισφορά του στην μαγνητική ροή Φ_2 να είναι σχεδόν μηδενική.[31] Επομένως η εξ. 2 μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως



Σχήμα 11.6 *Πηνίο με N_1 σπείρες διαρρέεται από ρεύμα I_1, και παράγει μαγνητικό πεδίο B_1 στο εσωτερικό του πηνίου με σπείρες N_2 . Η μεταβολή του ρεύματος I_1 στο πηνίο 1, παράγει επαγωγικό ρεύμα I_2 στο πηνίο 2 (παράδειγμα 11.2).*

$$\Phi_2 = B_1 A_1 \qquad (3)$$

Επειδή το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός πηνίου μεγάλου μήκους, όπως είναι το πηνίο 1, είναι

$$B_1 = \mu_o n_1 I_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_o N_1 I_1}{l} \qquad (4)$$

Οι εξισώσεις 3 και 4 στην 1 δίνουν

$$\frac{\mu_o N_1 N_2 A_1 I_1}{l} = M_{21}I_1 \Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_o N_1 N_2 A_1}{l}$$

Τελικά είναι φανερό, ότι η αμοιβαία επαγωγή των δυο πηνίων, εξαρτάται μόνο από τα τεχνικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους.

11.4 Ενέργεια μαγνητικού πεδίου

Έστω ένα πηνίο αυτεπαγωγής L, το οποίο διαρρέεται από ρεύμα I λόγω της ύπαρξης μιας πηγής ΗΕΔ. Η πηγή παρέχει ηλεκτρική ενέργεια στο πηνίο. Εάν το ηλεκτρικό ρεύμα που παρέχει η πηγή μεταβληθεί, τότε όπως είδαμε προηγουμένως στο εδάφιο 11.2, στα άκρα του πηνίου θα αναπτυχθεί λόγω αυτεπαγωγής, μια διαφορά δυναμικού $\mathcal{E}_L$, η οποία είναι

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} \qquad (11.20)$$

Όταν σε δεδομένη χρονική στιγμή το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι I, η στιγμιαία ηλεκτρική ισχύς του κυκλώματος, η οποία παρέχεται από την πηγή στο κύκλωμα, είναι

$$P = \mathcal{E}_L I \overset{(11.20)}{\Rightarrow} P = LI\frac{dI}{dt} \qquad (11.21)$$

[31] Στην πραγματικότητα η Φ_B εκτός του πηνίου 1 και σε επιφάνεια A_2-A_1 είναι μηδέν, λόγω της αντίθετης κατεύθυνσης που έχει το B_1 στο πάνω και κάτω μέρος του σωληνοειδούς.

Το πλην (-) στην εξ. 11.21 αγνοήθηκε, μιας και εδώ ενδιαφερόμαστε για την απόλυτη τιμή της ηλεκτρικής ισχύος. Η ισχύς όμως, είναι το έργο που παράγεται ανά μονάδα χρόνου, και επομένως η ενέργεια που παρέχεται στο πηνίο από την πηγή ΗΕΔ σε χρόνο *dt*, είναι

$$dW = Pdt \Rightarrow dW = LIdI \qquad (11.22)$$

Το ολικό έργο *W* που παρέχεται στο πηνίο, όταν το ρεύμα αυξηθεί από τη μηδενική τιμή στη μέγιστη τελική I_o , είναι

$$W = L\int_0^{I_o} IdI \Rightarrow W = \frac{1}{2}LI_o^{\ 2} \qquad (11.23)$$

(Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Lobkowicz & Melissinos, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Giancoli, 2012). Έτσι το παραγόμενο έργο από την πηγή, αποθηκεύεται στον επαγωγέα, όταν αυτός διαρρέεται από ρεύμα I_o . Με ποια μορφή όμως αποθηκεύεται η ενέργεια στον επαγωγέα; Για να απαντήσουμε αυτήν την ερώτηση, πρέπει να επισημάνουμε ότι αυτό που μεταβλήθηκε κατά την αύξηση του ρεύματος (από 0 σε I_o) που διαρρέει τον επαγωγέα, είναι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, η ηλεκτρική ενέργεια της πηγής αποθηκεύεται ως ενέργεια του μαγνητικού πεδίου *B* στο εσωτερικό του πηνίου, όπως ακριβώς αποθηκεύεται η ενέργεια στον πυκνωτή υπό μορφή ηλεκτρικού πεδίου ανάμεσα από τους οπλισμούς του. Επομένως, όταν ένας επαγωγέας διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα, αποθηκεύει ενέργεια υπό μορφή μαγνητικού πεδίου, και η ενέργεια αυτή ονομάζεται **ενέργεια του μαγνητικού πεδίου** U_B , όπου

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (11.24)$$

(Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Έτσι λοιπόν, βάσει της εξίσωσης 11.24, κάθε πηνίο το οποίο διαρρέεται από ρεύμα, αποθηκεύει στο εσωτερικό του ενέργεια U_B υπό την μορφή του μαγνητικού του πεδίου. Εάν το πηνίο πάψει να διαρρέεται από ρεύμα, η ενέργειά του μηδενίζεται, δηλ. για I=0 ισχύει U_B =0.

Ας ιδούμε τώρα πώς μπορούμε να εκφράσουμε την ενέργεια U_B , συναρτήσει του μαγνητικού πεδίου *B*. Καταρχήν από την εξ. 11.13 μπορούμε να υπολογίσουμε το ρεύμα *I* του πηνίου, ως

$$B = \mu_o nI \Rightarrow I = \frac{B}{\mu_o n} \qquad (11.25)$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής *L* του πηνίου δίνεται από την εξ. 11.7. Αντικαθιστώντας τα *I* και *L*, από τις εξισώσεις 11.25 και 11.7 αντιστοίχως, στην εξ. 11.24, παίρνουμε

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_o}lA \qquad (11.26)$$

Δηλαδή, κάθε πηνίο με μήκος *l* και διατομή σπείρας *A*, όταν διαρρέεται από ρεύμα ώστε να δημιουργείται μαγνητικό πεδίο *B* στο εσωτερικό του, αποθηκεύει ενέργεια U_B που δίνεται από την εξ. 11.26. Στην εξίσωση αυτή, η ποσότητα *lA* ισούται με τον όγκο του πηνίου στο χώρο. Έτσι λοιπόν, καταλαβαίνουμε ότι για ένα ιδανικό πηνίο με συγκεκριμένο ρεύμα, όσο μεγαλύτερος είναι ο όγκος του, τόσο μεγαλύτερη ενέργεια αποθηκεύεται σ' αυτό. Μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια ανά μονάδα όγκου του επαγωγέα, ως την **πυκνότητα ενέργειας του επαγωγέα** u_B , ίση με

$$u_B = \frac{U_B}{V} \Rightarrow u_B = \frac{U_B}{lA} \qquad (11.27)$$

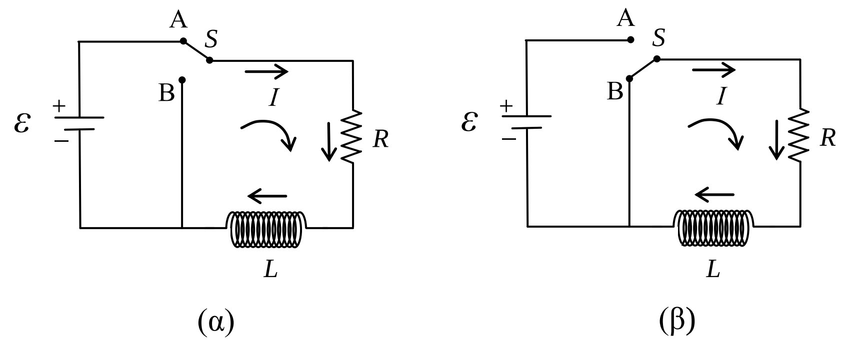
όπου *V*=*lA*, είναι ο όγκος του επαγωγέα. Η εξ. 11.26 στην 11.27 δίνει

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_o} \qquad (11.28)$$

Η πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου ενός επαγωγέα, όπως εκφράζεται από την εξ. 11.28, ισχύει γενικά για οποιαδήποτε μορφή μαγνητικού πεδίου (Benumof, 1961), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013).

11.5 Ηλεκτρικό κύκλωμα επαγωγέα-αντιστάτη (κύκλωμα *RL*)

Ας θεωρήσουμε το κύκλωμα του σχήματος 11.7 που περιλαμβάνει εκτός της πηγής, μια αντίσταση *R* και έναν ιδανικό επαγωγέα (ιδανικό πηνίο) με συντελεστή αυτεπαγωγής *L*. Το κύκλωμα αυτό ονομάζεται κύκλωμα *RL*. Η συμπεριφορά ενός επαγωγέα σε ένα κύκλωμα βασίζεται στην εξ. 11.20, σύμφωνα με την οποία μια επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ αναπτύσσεται στα άκρα του, με πολικότητα που εξαρτάται από την μεταβολή του ρεύματος συναρτήσει του χρόνου. Όταν δηλαδή το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο αυξάνεται, μια επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ αντίθετης πολικότητας από αυτή της πηγής αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου. Αντιθέτως, όταν το ρεύμα που δίνει η πηγή στο κύκλωμα ελαττώνεται, στα άκρα του πηνίου αναπτύσσεται επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ ιδίας πολικότητας με αυτή της πηγής, τέτοια ώστε να αναιρέσει την ελάττωση του ρεύματος στο κύκλωμα. Όταν το ρεύμα είναι σταθερό, τότε το πηνίο διαρρέεται από αυτό το ρεύμα, και συμπεριφέρεται σαν ένας απλός αγωγός, χωρίς να συμβαίνει κανένα επαγωγικό φαινόμενο. Έτσι είναι φανερό, ότι το πηνίο παίζει ενεργό ρόλο στο κύκλωμα, μόνο όταν υπάρχει μεταβολή του ρεύματος σ' αυτό. Συνδυασμός της εξ. 11.20 και των κανόνων του Kirchhoff, δίνει τις αρχές ανάλυσης των ηλεκτρικών κυκλωμάτων που περιέχουν επαγωγείς. Ας εξετάσουμε τώρα αναλυτικά την λειτουργία του κυκλώματος *RL* του σχήματος 11.7. Για απλότητα θα θεωρήσουμε ότι, τόσο η πηγή ΗΕΔ, όσο και το πηνίο, δεν παρουσιάζουν ωμική αντίσταση. Όταν την χρονική στιγμή t=0 s, ο διακόπτης *S* μεταβεί στην θέση Α, τότε ρεύμα *I* αρχίζει να διαρρέει το κύκλωμα *RL* (σχ. 11.7α). Το πηνίο αντιδρά στην αύξηση του ρεύματος από μηδέν που ήταν αρχικά σε μια τελική τιμή, αναπτύσσοντας στα άκρα του μια επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ αντίθετης πολικότητας με αυτή της πηγής $\mathcal{E}$. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff (δεξιόστροφα) για τον βρόχο σε χρονική στιγμή *t*, όπου το κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα *I*, έχουμε



Σχήμα 11.7 *Κύκλωμα RL με α) σύνδεση σε σειρά με πηγή ΗΕΔ, και β) χωρίς πηγή.*

$$\mathcal{E} - IR + \mathcal{E}_L = 0 \Rightarrow \mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (11.29)$$

Για να συμπεράνουμε πώς μεταβάλλεται το ρεύμα με τον χρόνο, πρέπει να λύσουμε την πιο πάνω εξίσωση. Μπορούμε να γράψουμε

$$L\frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I - \frac{\mathcal{E}}{L} = 0 \qquad (11.30)$$

Ας διερευνήσουμε την εξ. 11.30. Αρχικά, για t=0 s το ρεύμα είναι μηδενικό, οπότε ο δεύτερος όρος της εξ. 11.30 μηδενίζεται. Επομένως, για την αρχική μεταβολή του ρεύματος ισχύει

$$\left[\frac{dI}{dt}\right]_{t=0} - \frac{\mathcal{E}}{L} = 0 \Rightarrow \left[\frac{dI}{dt}\right]_{t=0} = \frac{\mathcal{E}}{L} \qquad (11.31)$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι, όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά αυτεπαγωγής *L*, τόσο μικρότερος είναι ο ρυθμός αύξησης του ρεύματος. Όταν το ρεύμα αρχίσει να αυξάνεται και τελικά φθάσει στην μέγιστη τιμή του I_o, τότε η μεταβολή του ρεύματος μηδενίζεται, και η εξ. 11.30 γράφεται

$$\frac{R}{L}I_o - \frac{\mathcal{E}}{L} = 0 \Rightarrow I_o = \frac{\mathcal{E}}{R} \qquad (11.32)$$

Δηλαδή, το τελικό ρεύμα στο *RL* κύκλωμα σταθεροποιείται, με την τιμή του να είναι ανεξάρτητη από την παρουσία του πηνίου στο κύκλωμα, εφόσον βεβαίως η ωμική του αντίστασή θεωρείται μηδενική. Επομένως από την παραπάνω διερεύνηση, συμπεραίνουμε ότι ο ρυθμός της μεταβολής του ρεύματος μειώνεται, όσο αυξάνεται το ρεύμα στο κύκλωμα. Τούτο είναι εμφανές και από την γραφή της εξ. 11.30, ως

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I \qquad (11.33)$$

Ας προσπαθήσουμε να εύρουμε την λύση της εξίσωσης 11.33. Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφθεί ως

$$dI = \left(\frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I\right)dt = \frac{1}{L}\left(\mathcal{E} - RI\right)dt \Rightarrow \frac{dI}{\left(\mathcal{E} - RI\right)} = \frac{dt}{L} \Rightarrow \frac{-RdI}{-R\left(\mathcal{E} - RI\right)} = \frac{dt}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{d(-RI)}{-R\left(\mathcal{E} - RI\right)} = \frac{dt}{L} \Rightarrow \frac{d\left(\mathcal{E} - RI\right)}{-R\left(\mathcal{E} - RI\right)} = \frac{dt}{L} \Rightarrow \frac{d\left(\mathcal{E} - RI\right)}{\left(\mathcal{E} - RI\right)} = -\frac{R}{L}dt \qquad (11.34)$$

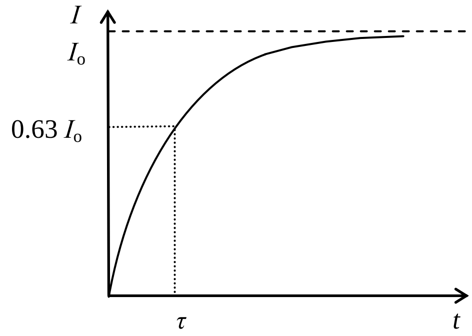
Ολοκληρώνοντας την εξ. 11.34 από *t*=0 έως τυχαίο χρόνο *t*, δηλ. από αρχικό ρεύμα μηδέν έως ρεύμα *I*, και θέτοντας μια νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης *x* στο πρώτο μέλος, όπου $x = \mathcal{E} - RI$, παίρνουμε

$$\int_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}-RI} \frac{dx}{x} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt \Rightarrow \ln x\Big|_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}-RI} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \ln(\mathcal{E} - RI) - \ln\mathcal{E} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\mathcal{E} - RI}{\mathcal{E}}\right) = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \frac{\mathcal{E} - RI}{\mathcal{E}} = e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \mathcal{E} - RI = \mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow$$

$$-RI = -\mathcal{E} + \mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \overset{(11.32)}{\Rightarrow} I = I_o(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad (11.35)$$

Από την εξ. 11.35, συμπεραίνουμε ότι το ρεύμα στο κύκλωμα *RL* αυξάνεται ασυμπτωτικά από μηδέν ως την μέγιστη τιμή I_o. Η μεταβολή του ρεύματος φαίνεται γραφικώς στο σχ. 11.8. Για χρόνο *τ=L/R*, το ρεύμα γίνεται 0.63 I_o. Ο χρόνος *τ* ονομάζεται **επαγωγική σταθερά χρόνου** του κυκλώματος *RL*, σε πλήρη αναλογία με την σταθερά χρόνου στο κύκλωμα *RC* που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 7 (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Για πολύ μεγάλο χρόνο $t\to\infty$, η τιμή του ρεύματος γίνεται I_o , όπως προβλέψαμε από την εξ. 11.30 για μεγιστοποίηση του ρεύματος. Όσο μικρότερη είναι η σταθερά χρόνου *τ*, τόσο πιο γρήγορα επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή του ρεύματος. Για δεδομένη αντίσταση *R*, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής *L*, τόσο πιο αργά επέρχεται η μεγιστοποίηση του ρεύματος στο κύκλωμα.



Σχήμα 11.8 *Η αύξηση του ρεύματος ως συνάρτηση του χρόνου, σε κύκλωμα RL με πηγή ΗΕΔ σε σειρά.*

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι αφού έχει επιτευχθεί η μέγιστη τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα *RL* του σχήματος 11.7α, μετακινούμε τον διακόπτη στη θέση Β (σχ.11.7β). Η πηγή ΗΕΔ απομονώνεται και το πηνίο αρχίζει να λειτουργεί ως πηγή ενέργειας, διότι έχει ήδη αποθηκεύσει ενέργεια μαγνητικού πεδίου (εξ. 11.24). Η ενέργεια αυτή αποδίδεται ως ηλεκτρική στην ωμική αντίσταση, η οποία δαπανά ενέργεια, με αποτέλεσμα το ρεύμα στο κύκλωμα *RL* να μειώνεται με τον χρόνο. Η ελάττωση αυτή του ρεύματος έχει ως συνέπεια την δημιουργία επαγωγικής τάσης στα άκρα του πηνίου $\mathcal{E}_L$, σύμφωνα με την σχέση 11.20. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο *RL* κύκλωμα του σχήματος 11.7β, παίρνουμε

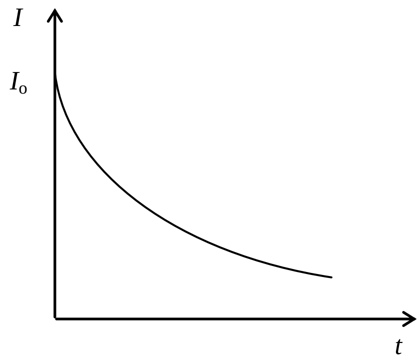
$$-IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow L\frac{dI}{dt} + IR = 0 \qquad (11.36)$$

Λύνοντας την εξ. 11.36 μπορούμε να ευρούμε την εξάρτηση του ρεύματος I ως προς τον χρόνο. Έτσι ξεχωρίζοντας τις μεταβλητές I και t, και ολοκληρώνοντας από t=0 όπου $I=I_o$, έως την τυχαία χρονική στιγμή t, όπου το ρεύμα είναι I, γράφουμε

$$L\frac{dI}{dt}=-IR\Rightarrow\frac{dI}{I}=-\frac{R}{L}dt\Rightarrow\int_{I_o}^{I}\frac{dI}{I}=\int_{0}^{t}-\frac{R}{L}dt\Rightarrow\ln I\Big|_{I_o}^{I}=-\frac{R}{L}t\Rightarrow\ln I-\ln I_o=-\frac{R}{L}t\Rightarrow$$

$$\ln(\frac{I}{I_o})=-\frac{R}{L}t\Rightarrow\frac{I}{I_o}=e^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow I=I_o e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (11.37)$$

Η εξ. 11.37 περιγράφει την μεταβολή του ρεύματος στο RL κύκλωμα απουσία της πηγής ΗΕΔ, $\mathcal{E}$. Η μέγιστη τιμή του ρεύματος είναι I_o για t=0 s. Παρατηρούμε ότι το ρεύμα φθίνει εκθετικά, όπως παρουσιάζεται στο σχ. 11.9, έως να μηδενιστεί. Για χρόνο ίσο με την επαγωγική σταθερά χρόνου του κυκλώματος $\tau=L/R$, η τιμή του ρεύματος γίνεται $I=I_o/e$ ή αλλιώς $0.37I_o$. Η ελάττωση του ρεύματος ονομάζεται **απόσβεση**, και είναι πανομοιότυπη με την αντίστοιχη ελάττωση στην εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα RC (βλ. εδάφιο 7.7).



Σχήμα 11.9 *Μεταβολή του ρεύματος σε κύκλωμα RL, απουσία πηγής ΗΕΔ.*

Λόγω της εξ. 11.20, η επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ στα άκρα του επαγωγέα, όταν το ρεύμα αυξάνεται στο RL κύκλωμα του σχήματος 11.7α, δίνεται ως

$$\mathcal{E}_L=-L\frac{dI}{dt}\overset{(11.35)}{\Rightarrow}\mathcal{E}_L=-L\frac{d}{dt}[I_o(1-e^{-\frac{R}{L}t})]=$$

$$L(-\frac{R}{L})I_o e^{-\frac{R}{L}t}=-RI_o e^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow\mathcal{E}_L=-\mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (11.38)$$

Δηλαδή, κατά την αύξηση του ρεύματος στο κύκλωμα RL, μια αντίθετης πολικότητας επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ αναπτύσσεται στα άκρα του επαγωγέα. Αυτό συμβαίνει λόγω του νόμου του Faraday, επειδή ο επαγωγέας αντιστέκεται στην αύξηση του ρεύματος. Αντιστοίχως, για την μείωση (απόσβεση) του ρεύματος στο RL κύκλωμα του σχήματος 11.7β, για την επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$, ισχύει ότι

$$\mathcal{E}_L=-L\frac{dI}{dt}\overset{(11.37)}{\Rightarrow}\mathcal{E}_L=-L\frac{d}{dt}(I_o e^{-\frac{R}{L}t})=-L(-\frac{R}{L})I_o e^{-\frac{R}{L}t}=RI_o e^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow\mathcal{E}_L=\mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t} \qquad (11.39)$$

Παρατηρούμε, ότι η επαγωγική τάση $\mathcal{E}_L$ είναι τέτοιας πολικότητας, ώστε ο επαγωγέας να προσπαθεί να αναιρέσει την μείωση του ρεύματος. Πρέπει να σημειώσουμε, ότι απουσία της πηγής ΗΕΔ στο RL κύκλωμα (σχ. 11.7β), το πηνίο έχει αποθηκευμένη ενέργεια λόγω του μαγνητικού πεδίου που έχει δημιουργηθεί από το ρεύμα I_o . Η ενέργεια αυτή σταδιακώς μειώνεται λόγω της απόσβεσης του ρεύματος (σχ. 11.9), και καταναλώνεται στην ωμική αντίσταση R ως ηλεκτρική ενέργεια. Με άλλα λόγια, για κάποιο χρονικό διάστημα, το πηνίο παίζει τον ρόλο της πηγής ΗΕΔ στο κύκλωμα.

Παράδειγμα 11.3 Ηλεκτρικό κύκλωμα *RL*

Στο κύκλωμα RL του σχήματος 11.7, την στιγμή t=0 s, η πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$ =9.00 V συνδέεται σε σειρά με ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L=350 mH και την ωμική αντίσταση R=50 Ω. α) Πόση είναι η τιμή του ρεύματος την χρονική στιγμή t=0 s; β) Ποια είναι η επαγωγική σταθερά χρόνου του κυκλώματος RL; γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα, και πότε την λαμβάνει; δ) Πόσος χρόνος χρειάζεται για να επιτευχθεί το ήμισυ της μέγιστης τιμής του ρεύματος; ε) Σ' εκείνη την χρονική στιγμή, ποιος είναι ο ρυθμός με τον οποίο η πηγή ΗΕΔ παρέχει ενέργεια στο κύκλωμα; στ) Να ευρεθεί η γενική έκφραση του ρυθμού αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου;

Λύση

α) Η μεταβολή του ρεύματος στο κύκλωμα RL δίνεται από την εξ. 11.30 ως

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I-\frac{\mathcal{E}}{L}=0 \qquad (1)$$

η οποία όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο έχει λύση την σχέση

$$I=I_o(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \qquad (2)$$

Για t=0 s, η εξ. 2 δίνει I(0s)=0. Αυτό συμβαίνει γιατί το πηνίο αντιτίθεται στην αύξηση του ρεύματος στο κύκλωμα, με αποτέλεσμα το ρεύμα να μην αυξάνει ακαριαίως, αλλά εκθετικώς, όπως περιγράφει η εξ. 2.
β) Η επαγωγική σταθερά χρόνου του κυκλώματος RL είναι

$$\tau=\frac{L}{R}\Rightarrow\tau=\frac{350\text{mH}}{50\Omega}\Rightarrow\tau=7\times10^{-3}\text{s}$$

γ) Η μέγιστη τιμή του ρεύματος I_o συμβαίνει σε μια χρονική στιγμή όπου παύει να αυξάνεται το ρεύμα, δηλ. dI/dt=0. Η εξ. 1 δίνει τότε

$$\frac{R}{L}I_o-\frac{\mathcal{E}}{L}=0\Rightarrow I_o=\frac{\mathcal{E}}{R}\Rightarrow I_o=\frac{9.00\text{V}}{50\Omega}\Rightarrow I_o=0.18\text{A}$$

Για να υπολογίσουμε τον χρόνο που μεγιστοποιείται το ρεύμα, αντικαθιστούμε στην εξ. 2, όπου I=I_o, οπότε παίρνουμε

$$I_o=I_o(1-e^{-\frac{R}{L}t})\Rightarrow 1-e^{-\frac{R}{L}t}=1\Rightarrow e^{-\frac{R}{L}t}=0$$

Πρακτικά η παραπάνω εξίσωση ισχύει για πολύ μεγάλο χρόνο, $t\to\infty$, δηλ. η μέγιστη τιμή του ρεύματος επιτυγχάνεται μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, από την σύνδεση της πηγής ΗΕΔ.
δ) Για I=I_o/2, η εξ. 2 γίνεται

$$\frac{I_o}{2}=I_o(1-e^{-\frac{R}{L}t})\Rightarrow\frac{1}{2}=1-e^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow\frac{1}{2}=e^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow\ln(\frac{1}{2})=\ln(e^{-\frac{R}{L}t})\Rightarrow\ln1-\ln2=-\frac{R}{L}t\ln e\Rightarrow$$
$$0-0.693=-\frac{R}{L}t\Rightarrow t=0.693\frac{L}{R}=0.693\frac{350\text{mH}}{50\Omega}\Rightarrow t=4.85\times10^{-3}\text{s}$$

ε) Την χρονική στιγμή t=4.85 ms, ο ρυθμός παροχής ενέργειας από την πηγή στο κύκλωμα δίνεται από την ισχύ P, όπου

$$P=\mathcal{E}\frac{I_o}{2}\Rightarrow P=9.00\text{V}\times\frac{0.18\text{A}}{2}\Rightarrow P=0.81\text{W}$$

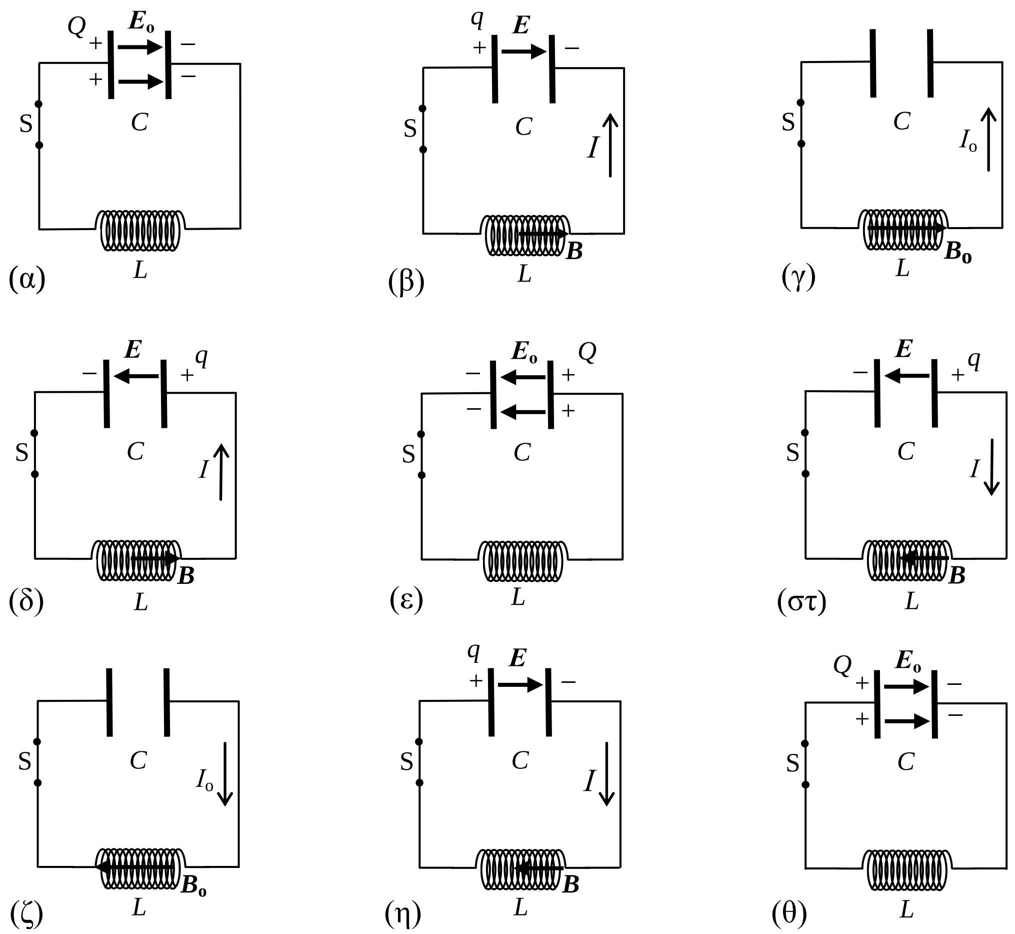
στ) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο δίνεται από την εξ. 11.24. Ο ρυθμός αποθήκευσης δίνεται από την πρώτη παράγωγο της ενεργείας ως προς τον χρόνο. Δηλαδή έχουμε

$$\frac{dU_B}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right)=\frac{1}{2}L(2I)\frac{dI}{dt}\Rightarrow\frac{dU_B}{dt}=LI\frac{dI}{dt}\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{dU_B}{dt}=LI\frac{d}{dt}\left[I_o(1-e^{-\frac{R}{L}t})\right]=-LII_o(-\frac{R}{L})e^{-\frac{R}{L}t}\Rightarrow$$
$$\frac{dU_B}{dt}=II_oRe^{-\frac{R}{L}t} \qquad (3)$$

Η εξ. 3 περιγράφει τον ρυθμό αποθήκευσης ενέργειας μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, για οποιαδήποτε στιγμή.

11.6 Ηλεκτρικό κύκλωμα επαγωγέα-πυκνωτή (κύκλωμα *LC*) – Ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα κύκλωμα που περιλαμβάνει ένα ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L, και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C, όπως φαίνεται στο σχ. 11.10. Το κύκλωμα αυτό ονομάζεται **κύκλωμα *LC***. Αρχικά ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με μέγιστο φορτίο Q και μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}_o$ ανάμεσα από



Σχήμα 11.10 *Ένας πλήρης κύκλος ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης σε κύκλωμα LC χωρίς ωμική αντίσταση.*

τους οπλισμούς του (σχ. 11.10α), και ο διακόπτης S είναι ανοικτός. Εάν κλείσουμε τον διακόπτη S, το κύκλωμα αρχίζει να διαρρέεται από ρεύμα *I*, λόγω της εκφόρτισης του πυκνωτή, ενώ το πηνίο δημιουργεί στο εσωτερικό του μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$ (σχ. 11.10β). Για χρόνο *t*, στον πυκνωτή το φορτίο μειώνεται από *Q* σε *q*, ενώ το ηλεκτρικό πεδίο από $\boldsymbol{E}_o$ μειώνεται σε $\boldsymbol{E}$. Αρχικά σε *t*=0 s, το πηνίο αντιτίθεται σε οποιαδήποτε μεταβολή του ρεύματος, και εμποδίζει την ανάπτυξη του ρεύματος στο κύκλωμα με την δημιουργία επαγωγικής τάσης $\mathcal{E}_L$ στα άκρα του. Αποτέλεσμα αυτής της τάσης είναι το ρεύμα να αυξάνει σταδιακά και όχι ακαριαίως, όπως συμβαίνει σε εκφόρτιση πυκνωτή σε κύκλωμα *RC* (βλ. εδάφιο 7.7.2). Όταν ο πυκνωτής εκφορτιστεί πλήρως (q=0, $\boldsymbol{E}$=0), το ρεύμα στο κύκλωμα *LC* μεγιστοποιείται σε I_o , όπως συμβαίνει και για το πεδίο $\boldsymbol{B}_o$ στο εσωτερικό του επαγωγέα (σχ. 11.10γ). Η ενέργεια που είναι τώρα αποθηκευμένη στον επαγωγέα, αρχίζει να αποδίδεται πίσω στον πυκνωτή. Το ρεύμα τότε αρχίζει να μειώνεται, μιας και ο πυκνωτής αρχίζει να φορτίζεται πάλι με φορτίο *q*, δημιουργώντας ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ με αντίθετη όμως φορά από την αρχική (σχ. 11.10δ). Ξανά το φορτίο μεγιστοποιείται μαζί με το πεδίο $\boldsymbol{E}_o$ στον πυκνωτή, ενώ το ρεύμα στο κύκλωμα μηδενίζεται όπως και το μαγνητικό πεδίο στον επαγωγέα (σχ. 11.10ε). Στη συνέχεια ο φορτισμένος πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται ξανά μέσω του πηνίου, δημιουργώντας στο κύκλωμα ρεύμα *I* αντίθετης φοράς από πριν (λόγω της αντίθετης πολικότητάς του), αυξάνοντας σταδιακά το ρεύμα (σχ. 11.10στ) μέχρι την μέγιστη τιμή του I_o , όπου μεγιστοποιείται και το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}_o$ στο πηνίο. Ταυτοχρόνως το ηλεκτρικό πεδίο στον πυκνωτή μηδενίζεται (σχ. 11.10ζ). Ο πυκνωτής είναι πλέον αφόρτιστος και αρχίζει ξανά να φορτίζεται, ενώ το ρεύμα φθίνει εκθετικώς, όπως ακριβώς και το μαγνητικό πεδίο στον επαγωγέα (σχ. 11.10η) έως την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή και την μεγιστοποίηση του $\boldsymbol{E}_o$ και μηδενισμό του $\boldsymbol{B}$ (σχ. 11.10θ). Ο παραπάνω κύκλος φόρτισης-εκφόρτισης του πυκνωτή στο κύκλωμα *LC* απουσία ωμικής αντίστασης, είναι μια συνεχής εναλλαγή της αρχικά αποθηκευμένης ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή $Q^2/2C$, σε μαγνητική ενέργεια αποθηκευμένης στον επαγωγέα $LI_o^2/2$ και τούμπαλιν.

Η εναλλαγή αυτή σ' ένα ιδανικό κύκλωμα *LC* (*R*=0), γίνεται με απόλυτα αρμονικό τρόπο, και επαναλαμβάνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα, δηλ. με περίοδο *T*. Όταν το ηλεκτρικό πεδίο στους οπλισμούς του πυκνωτή γίνεται μέγιστο $\boldsymbol{E_o}$, το μαγνητικό πεδίο στο πηνίο γίνεται μηδέν και όλη η ενέργεια είναι ηλεκτρική. Αντιθέτως, όταν το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στον πυκνωτή, το μαγνητικό πεδίο στον επαγωγέα αλλά και το ρεύμα στο κύκλωμα μεγιστοποιούνται στις τιμές $\boldsymbol{B_o}$ και I_o αντιστοίχως, ενώ όλη η ενέργεια είναι πλέον μαγνητική. Μιας και δεν υπάρχει αντίσταση στο κύκλωμα, δεν υπάρχει και κατανάλωση ενέργειας, δηλ. απώλεια ενέργειας του κυκλώματος. Έτσι λοιπόν, η ενέργεια στο *LC* κύκλωμα παραμένει σταθερή, και ισχύει

$$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}LI_o^2 = U \tag{11.40}$$

Για τυχαία χρονική στιγμή, ένα μέρος της συνολικής ενέργειας είναι ηλεκτρική και ένα μέρος μαγνητική. Η συνολική ενέργεια όμως του κυκλώματος *LC*, παραμένει αναλλοίωτη και σταθερή, οπότε γράφουμε

$$U = U_E + U_B \Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2 \tag{11.41}$$

Επομένως, απουσία απωλειών ενέργειας στο κύκλωμα *LC* του σχήματος 11.10, έχουμε μια αέναη ταλάντωση του ηλεκτρικού πεδίου από $\boldsymbol{E_o}$ σε $\boldsymbol{-E_o}$, και του μαγνητικού πεδίου από $\boldsymbol{B_o}$ σε $\boldsymbol{-B_o}$. Όταν το ηλεκτρικό πεδίο παίρνει μέγιστη τιμή, το μαγνητικό μηδενίζεται και αντιστρόφως (σχ. 11.10). Έτσι ένα κύκλωμα *LC* με ενέργεια *U* και απουσία ωμικών αντιστάσεων, εκτελεί **ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση**, μιας και η ενέργεια μεταφέρεται από τον πυκνωτή στο πηνίο και αντιστρόφως, σε σταθερό χρόνο ίσο με την περίοδο της ταλάντωσης (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Τέτοια κυκλώματα ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων είναι χρήσιμα στις τηλεπικοινωνίες, τα ραδιόφωνα, τις τηλεοράσεις, τα κινητά τηλέφωνα κ.α. Ας εξετάσουμε όμως πιο αναλυτικά την ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση ενός ιδανικού κυκλώματος *LC*. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο κανόνα του Kirckhhoff στο κύκλωμα *LC* για μια τυχαία χρονική στιγμή, (βλ. σχ. 11.10β), παίρνουμε

$$-\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{q}{C} - L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0 \tag{11.42}$$

Η εξ. 11.42 είναι εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή με λύση

$$q = Q\cos(\omega t + \varphi) \tag{11.43}$$

Άρα το φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή, ταλαντώνεται με γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης ω, όπου

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11.44}$$

Το ηλεκτρικό ρεύμα στο κύκλωμα *LC* επίσης ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα ω, και είναι ίσο με

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}[Q\cos(\omega t + \varphi)] \Rightarrow I = -\omega Q\sin(\omega t + \varphi) \tag{11.45}$$

Από την εξ. 11.40 παίρνουμε

$$\frac{Q^2}{C} = LI_o^2 \Rightarrow I_o^2 = \frac{Q^2}{LC} \Rightarrow I_o = \frac{Q}{\sqrt{LC}} \overset{(11.44)}{\Rightarrow} I_o = \omega Q \tag{11.46}$$

Η εξ. 11.46 στην 11.45, δίνει τελικά για την μεταβολή του ρεύματος στο κύκλωμα *LC*

$$I = -I_o\sin(\omega t + \varphi) \tag{11.47}$$

Η συχνότητα ταλάντωσης *f*, δηλ. ο αριθμός των κύκλων που κάνει ο ηλεκτρομαγνητικός ταλαντωτής στην μονάδα του χρόνου, είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{1/LC}}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{11.48}$$

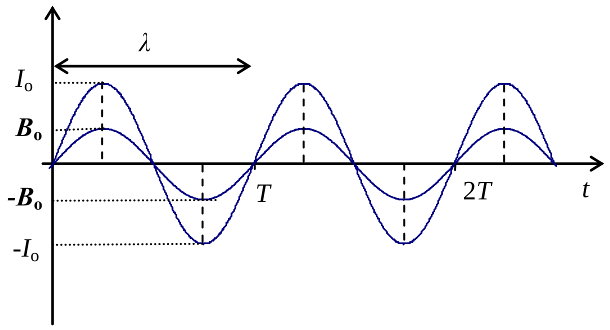
Η συχνότητα ταλάντωσης του ρεύματος είναι ίδια με την συχνότητα ταλάντωσης του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου. Η φάση με την οποία ταλαντώνεται το μαγνητικό πεδίο B είναι ίδια με αυτή του ρεύματος, διότι το B εξαρτάται από το I στο πηνίο (εξ. 11.1). Αντιθέτως, η ταλάντωση του ηλεκτρικού πεδίου E στον πυκνωτή, παρουσιάζει διαφορά φάσης $\pi/2$ (90^o) σε σχέση με την ταλάντωση του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, διότι όταν μεγιστοποιείται το I και το B, το E μηδενίζεται (βλ. σχ. 11.10).

Στο σχ. 11.11 φαίνεται η εξάρτηση του ρεύματος I και του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ συναρτήσει του χρόνου t στο κύκλωμα LC. Η μεταβολή του ρεύματος είναι αρμονική, όπως και αυτή του μαγνητικού πεδίου παρουσιάζοντας περίοδο T και μήκος κύματος λ. Έτσι ισχύει

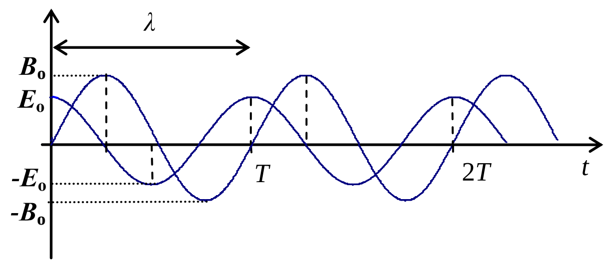
$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_o \sin(\omega t + \varphi) \qquad (11.49)$$

Αντιθέτως για το ηλεκτρικό πεδίο στον πυκνωτή, ισχύει

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_o \cos(\omega t + \varphi) \qquad (11.50)$$



Σχήμα 11.11 *Μεταβολή του ρεύματος και του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, συναρτήσει του χρόνου σε κύκλωμα LC.*



Σχήμα 11.12 *Μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου στον πυκνωτή και του μαγνητικού πεδίου στο πηνίο, συναρτήσει του χρόνου σε κύκλωμα LC.*

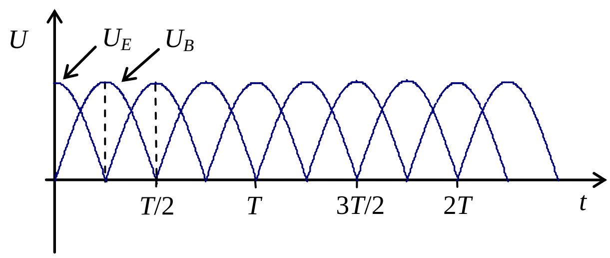
Για αρχική φάση $\varphi=0^o$, το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο ταλαντώνονται, όπως στο σχ. 11.12, με διαφορά φάσης $\pi/2$. Όταν μεγιστοποιείται το μέτρο του ενός πεδίου, μηδενίζεται του άλλου. Συμβαίνει λοιπόν και για τα δύο πεδία $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$, μια ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση με περίοδο T και γωνιακή συχνότητα ω.

Αναλόγως μεταβάλλεται και η ηλεκτρική και μαγνητική ενέργεια σε πυκνωτή και επαγωγέα αντιστοίχως. Έτσι λοιπόν, σε τυχαία χρονική στιγμή, όπου το φορτίο στους οπλισμούς του είναι q, η ηλεκτρική ενέργεια του πυκνωτή είναι

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \overset{(11.43)}{\Rightarrow} U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\cos^2(\omega t + \varphi) \qquad (11.51)$$

ενώ για την ενέργεια του επαγωγέα ισχύει

$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \Rightarrow U_B = \frac{1}{2}LI_o^{\,2}\sin^2(\omega t + \varphi) \qquad (11.52)$$



Σχήμα 11.13 *Μεταβολή της ηλεκτρικής ενέργειας στον πυκνωτή και της μαγνητικής στον επαγωγέα, για αρχική φάση μηδέν (φ=0^o) συναρτήσει του χρόνου σε κύκλωμα LC.*

Η μεταβολή της ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας του κυκλώματος LC για αρχική φάση μηδέν ($\varphi=0^o$), φαίνεται στο σχ. 11.13. Όταν μεγιστοποιείται η ηλεκτρική ενέργεια, μηδενίζεται η μαγνητική και τούμπαλιν. Υπάρχει δηλαδή, μια διαφορά φάσης $\pi/2$ μεταξύ των δύο ενεργειών. Εντούτοις προσέξτε, ότι η περίοδος της ταλαντώσεως των ενεργειών U_E και U_B , είναι η μισή αυτής του E και του B (συγκρίνετε τα σχήματα 11.12 και 11.13). Αυτό συμβαίνει διότι, ενώ το ημίτονο και το συνημίτονο παίρνουν θετικές και αρνητικές τιμές, τα τετράγωνά τους είναι θετικά.

Παράδειγμα 11.4 Ηλεκτρικό κύκλωμα *LC*

Σ’ ένα ηλεκτρικό κύκλωμα LC, με πυκνωτή χωρητικότητας C=2.50 μF και πηνίο με σταθερά αυτεπαγωγής L=150 mH, εκτελείται ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση μεταξύ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Το κύκλωμα θεωρείται ιδανικό, χωρίς ωμική αντίσταση. α) Πόσο ηλεκτρικό φορτίο q σε σχέση με τη μέγιστη τιμή του Q υπάρχει στον πυκνωτή, όταν η ενέργεια του κυκλώματος διαμοιράζεται εξίσου στον πυκνωτή και στο πηνίο; β) Σε ποια χρονική στιγμή t συμβαίνει αυτή η ισοκατανομή της ενεργείας, όταν για t=0 s, ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος;

Λύση

α) Η μέγιστη ηλεκτρική ενέργεια που έχει αρχικά ο πυκνωτής είναι

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad (1)$$

Σε κάποια χρονική στιγμή t η ενέργεια του πυκνωτή μειώνεται στο ήμισυ, με το φορτίο στον πυκνωτή να είναι q. Τότε βάσει της εξίσωσης 1, ισχύει

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}) \Rightarrow q^2 = \frac{Q^2}{2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{Q^2}{2}} \Rightarrow q = \frac{Q}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

β) Η μεταβολή του φορτίου q συναρτήσει του χρόνου, στην ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση του κυκλώματος LC, δίνεται από την εξ. 11.42. Επειδή για t=0 s, ο πυκνωτής είναι πλήρως φορτισμένος, δηλ. έχει φορτίο Q στους οπλισμούς του, η αρχική φάση είναι μηδέν, φ=0. Άρα η εξ. 11.42 γράφεται

$$q = Q\cos\omega t \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. 2 στην 3 και λύνοντας ως προς τον χρόνο t, παίρνουμε

$$\frac{Q}{\sqrt{2}} = Q\cos\omega t \Rightarrow \cos\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega t = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4\omega} \quad (4)$$

Από την εξ. 11.47 όμως, μπορούμε να γράψουμε ότι η γωνιακή συχνότητα ω της ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης του κυκλώματος LC, είναι

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. 5 στην 4, παίρνουμε για τον χρόνο

$$t = \frac{\pi}{4}\sqrt{LC} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}\sqrt{150\mathrm{mH}\times 2.50\mu\mathrm{F}} \Rightarrow t = 0.481\mathrm{ms}$$

11.7 Ηλεκτρικό κύκλωμα αντιστάτη-επαγωγέα-πυκνωτή (κύκλωμα *RLC*) – Φθίνουσα ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση

Στο προηγούμενο εδάφιο μελετήσαμε την ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση που συμβαίνει σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα LC, όπου μια αέναη ταλάντωση μεταξύ ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας λαμβάνει χώρα, χωρίς καμία απώλεια ενεργείας. Αυτό συμβαίνει διότι αγνοήσαμε, πρώτον την ωμική αντίσταση του κυκλώματος, θεωρώντας το ιδανικό, και δεύτερον την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπει ο ταλαντωτής προς το περιβάλλον. Στην πραγματικότητα όμως, κάθε ηλεκτρικό κύκλωμα παρουσιάζει ωμική αντίσταση.[32] Στο παρόν εδάφιο θα εξετάσουμε την λειτουργία ενός πραγματικού κυκλώματος LC, το οποίο στην ουσία είναι κύκλωμα RLC, μιας και περιέχει ωμική αντίσταση. Έτσι λοιπόν ας θεωρήσουμε το **κύκλωμα *RLC*** του σχήματος 11.14, όπου ένας αντιστάτης R, ένας επαγωγέας L και ένας πυκνωτής C, συνδέονται σε σειρά μεταξύ τους. Μία πηγή ΗΕΔ $\mathcal{E}$ συνδέεται με τον πυκνωτή έτσι, ώστε όταν ο διακόπτης είναι στην θέση A, να τον φορτίζει. Στη συνέχεια έχοντας πλήρως φορτισμένο τον πυκνωτή, με φορτίο $Q = \mathcal{E}C$ στα άκρα του, γυρνάμε ξαφνικά τον διακόπτη S στην θέση B, σε χρόνο t=0 s. Τότε ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται λειτουργώντας ως πηγή στο κύκλωμα RLC, το οποίο αρχίζει να διαρρέεται από

[32] Θυμηθείτε την σχέση μεταξύ μήκους και αντίστασης, $R = \rho\frac{l}{A}$, από το κεφάλαιο 6. Σύμφωνα μ' αυτήν, κάθε καλώδιο ενός ηλεκτρικού κυκλώματος έχει ωμική αντίσταση.

ηλεκτρικό ρεύμα *I*. Ας εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται το ρεύμα. Εφαρμόζοντας τον δεύτερο νόμο του Kirchhoff για τον βρόχο του κυκλώματος *RLC*, γράφουμε

$$\frac{q}{C} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (11.53)$$

όπου

$$I = -\frac{dq}{dt} \qquad (11.54)$$

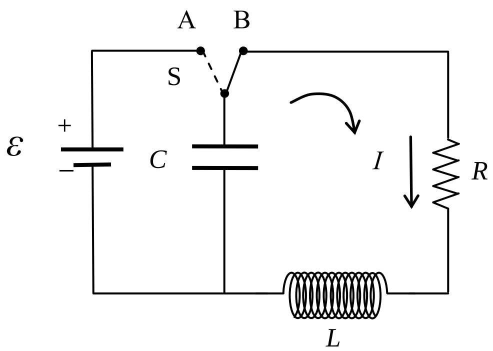
διότι το φορτίο *q* μειώνεται με τον χρόνο στους οπλισμούς του πυκνωτή. Η εξ. 11.54 στην 11.53 δίνει

$$\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt}R + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad (11.55)$$

Η εξ. 11.55 είναι διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού, και περιγράφει πώς μεταβάλλεται το φορτίο *q* στον πυκνωτή, αλλά και το ρεύμα στο κύκλωμα *RLC* (βλ. παράδειγμα 11.5 παρακάτω). Ας διερευνήσουμε την εξ. 11.55. Για *R*=0, η εξίσωση ανάγεται στην εξ. 11.42 του ιδανικού κυκλώματος *LC*, όπου συμβαίνει ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση χωρίς απώλειες ενεργείας. Εάν η ωμική αντίσταση είναι μικρή *R*<<, τότε η απώλεια ενέργειας στην αντίσταση I^2R είναι μικρή, και η λύση της εξ. 11.55 μπορεί να δειχθεί ότι είναι της μορφής

$$q = Qe^{-\frac{R}{2L}t}\cos(\omega' t + \varphi) \qquad (11.56)$$

όπου ω' είναι η γωνιακή συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης του κυκλώματος *RLC*, η οποία είναι φθίνουσα, μιας και το πλάτος της $Qe^{-\frac{R}{2L}t}$ φθίνει με τον χρόνο. Η συχνότητα ω' είναι ίση με



Σχήμα 11.14 *Κύκλωμα RLC, σε παράλληλη σύνδεση με πηγή ΗΕΔ. Όταν ο διακόπτης S είναι στη θέση A, η πηγή φορτίζει πλήρως τον πυκνωτή. Όταν ο διακόπτης μεταβεί στην θέση B, ο πυκνωτής λειτουργεί ως πηγή.*

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad (11.57)$$

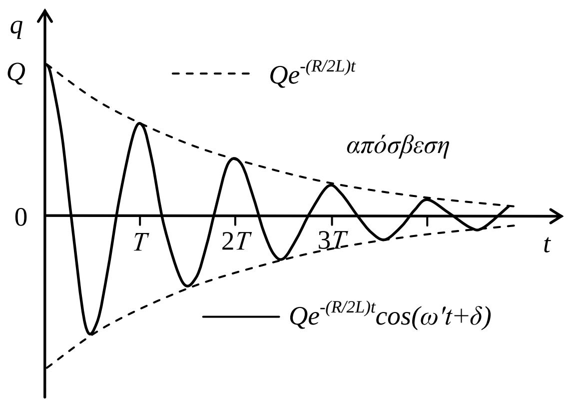
Προσέξτε ότι από την εξ. 11.44, η ποσότητα $1/\sqrt{LC}$ είναι η γωνιακή συχνότητα ταλάντωσης του ιδανικού κυκλώματος *LC*, οπότε η εξ. 11.57 γράφεται

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad (11.58)$$

Η εξ. 11.58 μάς πληροφορεί ότι η παρουσία του αντιστάτη *R* στο κύκλωμα, προκαλεί μια μείωση της γωνιακής συχνότητας ω, δηλ. αυτής που θα είχε το ιδανικό κυκλώματος *LC*. Επίσης καταλαβαίνουμε, ότι για να εκτελεί ηλεκτρομαγνητική φθίνουσα ταλάντωση το κύκλωμα *RLC*, σύμφωνα με την εξ. 11.56, η ω' πρέπει να είναι θετική, ή αλλιώς για την υπόριζη ποσότητα της εξίσωσης 11.57, να ισχύει

$$\omega' > 0 \Rightarrow \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \Rightarrow R < \sqrt{\frac{4L}{C}} \qquad (11.59)$$

Έτσι λοιπόν, όταν ισχύει η εξ. 11.59, το κύκλωμα *RLC* εκτελεί **φθίνουσα** ή **αποσβενομένη αρμονική ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση**, η οποία περιγράφεται από την εξ. 11.57, με το πλάτος του φορτίου, αλλά και του ρεύματος, να φθίνει εκθετικώς, δηλ. να παρουσιάζουν απόσβεση, όπως δείχνει το σχ. 11.15 (Young & Freedman, 2010). Όσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση *R* του κυκλώματος, τόσο πιο ταχέως φθίνει το πλάτος της ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης. Αυτό είναι λογικό, διότι μεγαλύτερη αντίσταση προκαλεί μεγαλύτερη κατανάλωση ενέργειας. Όταν η αντίσταση είναι ίση με $R = \sqrt{4L/C}$, τότε από τις εξισώσεις 11.57 και 11.58,

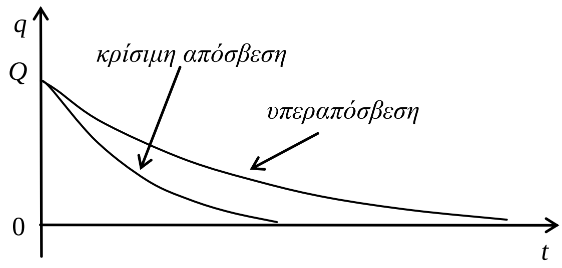


Σχήμα 11.15 *Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση που περιγράφει το φορτίο q στον πυκνωτή ενός RLC κυκλώματος, με* $R<\sqrt{4L/C}$.

συμπεραίνουμε ότι η γωνιακή συχνότητα μηδενίζεται, και επομένως δεν υπάρχει ταλάντωση. Τότε παρατηρείται μόνο εκθετική μείωση του φορτίου και του ρεύματος όπως δείχνει το σχ. 11.16, και η λειτουργία του κυκλώματος είναι γνωστή ως **κρίσιμη απόσβεση**, ενώ το κύκλωμα ονομάζεται **κρίσιμα αποσβενομένο** (Benumof, 1961), (Young & Freedman, 2010). Για ακόμη μεγαλύτερη αντίσταση $R>\sqrt{4L/C}$, η γωνιακή συχνότητα δεν ορίζεται (είναι φανταστικός αριθμός), οπότε φορτίο και ρεύμα δεν ταλαντώνονται, αλλά φθίνουν ακόμα πιο αργά προσεγγίζοντας το μηδέν. Τότε η λειτουργία του κυκλώματος *RLC* είναι γνωστή ως **υπεραπόσβεση** (Serway & Jewett, 2013), ενώ το κύκλωμα ονομάζεται **υπεραποσβενομένο** (βλ. σχ. 11.16).

Η συμπεριφορά ενός ηλεκτρομαγνητικού ταλαντωτή κυκλώματος *RLC*, είναι εντελώς ανάλογη με την συμπεριφορά ενός μηχανικού αρμονικού ταλαντωτή, πχ. σώμα αναρτημένο σε ελατήριο, όπου κατά την ταλάντωση του σώματος υπάρχουν δυνάμεις τριβής, οι οποίες καταναλώνουν την μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή, αναγκάζοντάς τον σε φθίνουσα ταλάντωση. Δεν θα επεκταθούμε περαιτέρω στην αντιστοίχιση ηλεκτρομαγνητικής φθίνουσας ταλάντωση με την αντίστοιχη μηχανική. Καλούμε όμως τον αναγνώστη να δοκιμάσει να αναδείξει την αντιστοιχία μεταξύ των ποσοτήτων, μάζας *m* και αυτεπαγωγής *L*, σταθεράς απόσβεσης *b* και ωμικής αντίστασης *R*, σταθεράς ελατηρίου *k* και αντιστρόφου της χωρητικότητας 1/*C* (βλ. πρόβλημα 11.10).

Τελειώνοντας, πρέπει να σημειώσουμε ότι τα κυκλώματα *RLC* είναι πρακτικής σημασίας όταν τροφοδοτούνται με πηγές εναλλασσομένου ρεύματος. Τότε δημιουργούνται εξαναγκασμένες ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις σ’ αυτά τα κυκλώματα, και δύναται να εμφανιστούν φαινόμενα συντονισμού, με σημαντικές εφαρμογές σε ηλεκτρονικές διατάξεις, στις τηλεπικοινωνίες, τους ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς δέκτες, κ.α. Την εφαρμογή του εναλλασσομένου ρεύματος στα κυκλώματα *RLC*, θα την εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.



Σχήμα 11.16 *Φθίνουσα μεταβολή του φορτίου q στον πυκνωτή ενός RLC κυκλώματος, με κρίσιμη απόσβεση για* $R=\sqrt{4L/C}$ *, και υπεραπόσβεση για* $R>\sqrt{4L/C}$ *, (βλ. κείμενο).*

Παράδειγμα 11.5 Ηλεκτρικό κύκλωμα *RLC*

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα *RLC* όπως αυτό του σχήματος 11.14, εκτελεί αποσβενομένη ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση. α) Ξεκινώντας από την μεταβολή της ολικής ενέργειας του κυκλώματος και την κατανάλωση ενέργειας από την αντίσταση, να ευρεθεί η εξίσωση που περιγράφει την μεταβολή του ρεύματος στο κύκλωμα. β) Από την εξίσωση ρεύματος που ευρήκατε στο (α) ερώτημα, να δείξετε ότι το ρεύμα στο κύκλωμα *RLC* εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, όπως συμβαίνει και για το φορτίο.

Λύση

α) Η συνολική ενέργεια του κυκλώματος *RLC* μια τυχαία χρονική στιγμή *t*, είναι το άθροισμα της ηλεκτρικής ενέργειας του πυκνωτή και της μαγνητικής ενέργειας του πηνίου. Έτσι λοιπόν ισχύει ότι

$$U=U_E+U_B \Rightarrow U=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}+\frac{1}{2}LI^2 \qquad (1)$$

Όμως η ενέργεια του κυκλώματος *U* δεν παραμένει σταθερή, αλλά μειώνεται, διότι στο κύκλωμα υπάρχει ωμική αντίσταση η οποία καταναλώνει ενέργεια με ρυθμό ίση με την ισχύ *P*, όπου

$$P=RI^2 \qquad (2)$$

Με άλλα λόγια η απώλεια ενέργειας του κυκλώματος της ηλεκτρομαγνητικής ταλάντωσης ανά κύκλο, είναι ίση με την ενέργεια που δαπανά η αντίσταση, (αγνοούμε την απώλεια λόγω ακτινοβολίας στο περιβάλλον). Συμπεραίνουμε λοιπόν λόγω των εξ. 1 και 2, ότι η μεταβολή της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού ταλαντωτή *RLC* είναι

$$\frac{dU}{dt} = -RI^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}LI^2\right) = -RI^2 \Rightarrow \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} + LI\frac{dI}{dt} = -RI^2 \Rightarrow$$

$$\frac{q}{C}I + LI\frac{dI}{dt} = -RI^2 \Rightarrow L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0 \qquad (3)$$

Εάν διαφορίσουμε την εξ. 3 ως προς τον χρόνο, και θεωρώντας $I=dq/dt$, παίρνουμε

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \qquad (4)$$

β) Η εξ. 4 είναι μια δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση, πανομοιότυπη με αυτή για το φορτίο (εξ. 11.54). Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι και η ένταση του ρεύματος, όπως και το ηλεκτρικό φορτίο στους οπλισμούς του πυκνωτή, εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση, με τη μόνη διαφορά ότι μεταξύ των ταλαντώσεων φορτίου και ρεύματος, υπάρχει διαφορά φάσης $\pi/2$. Αυτό είναι εύλογο, διότι όταν το φορτίο είναι μέγιστο στον πυκνωτή, το ρεύμα είναι μηδενικό στο κύκλωμα *RLC* (βλ. σχ. 11.14) και αντιστρόφως. Έτσι, εάν το φορτίο δίνεται από την εξ. 11.57, το ρεύμα μπορεί να δειχθεί ότι τελικά δίνεται από την σχέση

$$I = I_o e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega' t + \varphi) \qquad (5)$$

όπου η γωνιακή συχνότητα ω' δίνεται από την εξ. 11.59. Για $R < \sqrt{4L/C}$, στο κύκλωμα *RLC* συμβαίνει φθίνουσα ταλάντωση του ρεύματος, με διαφορά φάσης $\pi/2$, από το φορτίο. Σχετικά με την αντίσταση *R*, ισχύουν αυτά που αναφέραμε στο εδάφιο 11.7, για τις περιπτώσεις της κρίσιμης απόσβεσης και της υπεραπόσβεσης.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 11

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε11.1 Αρχικά ένα ιδανικό πηνίο χωρίς αντίσταση διαρρέεται από σταθερό ρεύμα I_o. Ξαφνικά το ρεύμα αυξάνεται σε τιμή $2I_o$ και σταθεροποιείται. Τι ισχύει για την επαγωγική ΗΕΔ στα άκρα του πηνίου, σε σχέση με αυτήν πριν την αύξηση του ρεύματος; α) Είναι τετραπλάσια. β) Είναι διπλάσια. γ) Έχει την ίδια μη μηδενική τιμή. δ) Εξακολουθεί να είναι μηδενική όπως πριν. ε) Έχει μειωθεί.

Ε11.2 Εάν διαθέτουμε ένα αγώγιμο σύρμα συγκεκριμένου μήκους, τί σχήμα πρέπει να του δώσουμε για να έχει την μέγιστη αυτεπαγωγή; Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για την ελάχιστη.

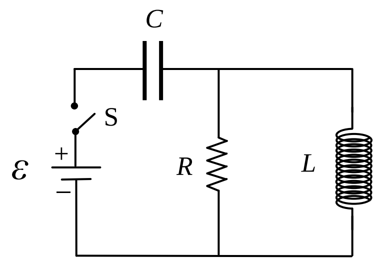
Ε11.3 Δύο αγώγιμοι κυκλικοί βρόχοι είναι τοποθετημένοι με τα κέντρα τους σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους. α) Ποιος πρέπει να είναι ο σχετικός προσανατολισμός των δυο βρόχων, για να είναι μέγιστος ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής; 1) Ομοαξονικοί και σε παράλληλα επίπεδα. 2) Συνεπίπεδοι. 3) Τα επίπεδά τους να είναι κάθετα, με το κέντρο του ενός πάνω στον άξονα του άλλου. 4) Δεν παίζει ρόλο ο προσανατολισμός τους. β) Ποια από τις παραπάνω εκδοχές δίνει τον ελάχιστο συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής;

Ε11.4 Δύο πηνία Α και Β έχουν τις ίδιες διαστάσεις, όμως το Β έχει τις μισές σπείρες από το Α. Εάν το ρεύμα που διαρρέει το Α είναι *I*, ποιο ρεύμα πρέπει να διαρρέει το Β για να αποθηκεύουν τα πηνία την ίδια ενέργεια; α) $4I$. β) $2I$. γ) $I/2$. δ) I. ε) Η μείωση των σπειρών δεν αντισταθμίζεται με αλλαγή του ρεύματος.

E11.5 Σ’ ένα ηλεκτρικό κύκλωμα συνδέονται σε σειρά πηγή ΗΕΔ, αντιστάτης και επαγωγέας, ο οποίος παρουσιάζει αντίσταση. Κάποια χρονική στιγμή το ρεύμα στο κύκλωμα σταθεροποιείται. Μετά την σταθεροποίηση του ρεύματος, στα άκρα του επαγωγέα υπάρχει τάση; Είναι επαγωγική;

E11.6 Στο κύκλωμα *RL* του σχήματος 11.7, η επαγωγική ΗΕΔ στα άκρα του πηνίου είναι μέγιστη την στιγμή που ο διακόπτης μετακινείται στην θέση A. Πώς εξηγείται αυτό εφόσον εκείνη την χρονική στιγμή το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν; Εάν μετά από αρκετό χρόνο, ο διακόπτης μετακινηθεί στην θέση *B*, τί συμβαίνει με την ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο πηνίο; Ποια είναι η τελική τιμή του ρεύματος στο κύκλωμα;

E11.7 Κλείνουμε τον ανοιχτό διακόπτη S του κυκλώματος *RLC*, του σχήματος 11.17. Πριν το κλείσιμο του διακόπτη ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος και στο κύκλωμα δεν υπάρχει ρεύμα. Να ευρείτε το ρεύμα και την τάση σε κάθε στοιχείο του κυκλώματος, αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη (t=0 s), και αρκετό χρόνο μετά ($t \to \infty$). Συμπληρώστε με τις απαντήσεις σας τον πίνακα 11.1.



Σχήμα 11.17 *Ερώτηση 11.7.*

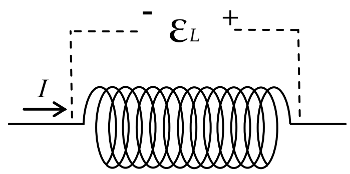
Πίνακας 11.1 (*Ερώτηση 11.7)*

Στοιχείο	$I(0)$	$V(0)$	$I(\infty)$	$V(\infty)$
C				
R				
L				

E11.8 Σ’ ένα κύκλωμα *RLC* όπως αυτό του σχήματος 11.14, ποια ποσότητα πρέπει να εξετάσουμε για να εύρουμε αν στο κύκλωμα θα συμβεί απόσβεση, κρίσιμη απόσβεση, ή υπεραπόσβεση; Εάν το κύκλωμα εκτελεί κρίσιμη απόσβεση και η αντίσταση δεν είναι εφικτό να αλλάξει, ποιες εναλλακτικές έχουμε ώστε να το εξαναγκάσουμε σε απόσβεση, δηλ. φθίνουσα ταλάντωση;

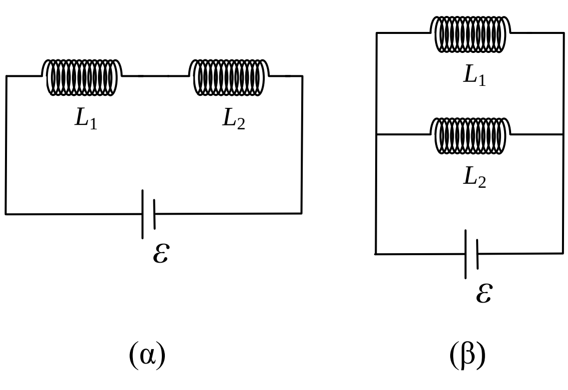
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π11.1 Συντελεστής αυτεπαγωγής. Σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, το ρεύμα *I* και η ΗΕΔ αυτεπαγωγής $\mathcal{E}_L$ σ’ ένα πηνίο, έχουν την κατεύθυνση που δείχνει το σχ. 11.18. α) Το ρεύμα *I* αυξάνεται ή μειώνεται και γιατί; β) Αν η επαγόμενη τάση είναι 20 V και ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος είναι 15 A/s, ποιος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής *L*;



Σχήμα 11.18 *Πρόβλημα 11.1.*

Π11.2 Τάση αυτεπαγωγής σε πηνίο. Το ρεύμα σε ένα πηνίο είναι αρχικά μηδέν και ξαφνικά αρχίζει να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό, ώστε μετά από 10 s να φθάσει στην τιμή των 50 A. Η μεταβολή του ρεύματος δημιουργεί μια τάση αυτεπαγωγής στο πηνίο ίση με 25 V και η ωμική αντίσταση του πηνίου είναι 80 Ω. α) Προσδιορίστε τον συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου. β) Υπολογίστε την ολική μαγνητική ροή στο πηνίο όταν το ρεύμα είναι 50 A. γ) Υπολογίστε τον λόγο του ρυθμού αποθήκευσης ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου ως προς τον ρυθμό κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας από την αντίστασή του, όταν το ρεύμα έχει τιμή 50 A. *Απάντηση*: α) 5 H, β) 250 Wb, και γ) 0.00625.

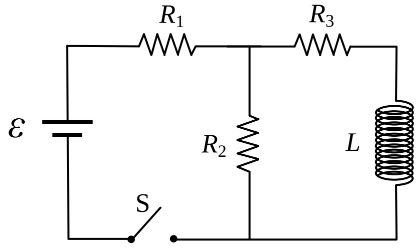


Σχήμα 11.19 *Πρόβλημα 11.3.*

Π11.3 Σύνδεση επαγωγέων. Δύο επαγωγείς με σταθερές αυτεπαγωγής L_1 και L_2 αντιστοίχως, συνδέονται σε σειρά με πηγή ΗΕΔ, όπως δείχνει το σχ. 11.19α. Να αποδείξετε ότι η συνολική (ισοδύναμη) αυτεπαγωγή είναι $L = L_1 + L_2$. Εάν η σύνδεση των επαγωγέων είναι παράλληλη, όπως αυτή του σχήματος 11.19β, να αποδείξετε ότι η συνολική αυτεπαγωγή είναι $\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$. Για να ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις, πρέπει και στις δύο περιπτώσεις σύνδεσης, οι επαγωγείς να απέχουν ο ένας από τον άλλο μεγάλη απόσταση. Γιατί πρέπει να συμβαίνει αυτό;

Π11.4 Τάση αμοιβαίας επαγωγής σε ζεύγος πηνίων. Ένα σωληνοειδές έχει μήκος l_1, ακτίνα r_1 και N_1 σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα I_1. Ένα δεύτερο μικρότερο σωληνοειδές με μήκος l_2, ακτίνα r_2 ($r_2<r_1$) και N_2 σπείρες, τοποθετείται στο εσωτερικό του πρώτου ώστε τα δυο σωληνοειδή να έχουν μια ομοαξονική διάταξη. Υποθέστε ότι το μαγνητικό πεδίο του πρώτου σωληνοειδούς στην περιοχή του δευτέρου είναι ομογενές. α) Υπολογίστε τον συντελεστή της αμοιβαίας επαγωγής του ζεύγους των σωληνοειδών. β) Εάν το ρεύμα στο πρώτο σωληνοειδές μεταβάλλεται με ρυθμό dI_1/dt, πόση είναι η ΗΕΔ αμοιβαίας επαγωγής που αναπτύσσεται στο δεύτερο σωληνοειδές; γ) Εάν το ρεύμα στο δεύτερο σωληνοειδές μεταβάλλεται με ρυθμό dI_2/dt, πόση είναι η ΗΕΔ αμοιβαίας επαγωγής που αναπτύσσεται στο πρώτο σωληνοειδές;

Π11.5 Ηλεκτρικό κύκλωμα *RL*. Έστω το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος 11.20, όπου $\mathcal{E}$ =220 V, R_1=7.00 Ω, R_2=16.0 Ω, και R_3=35.0 Ω, ενώ η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι L=3.00 H. Να υπολογίσετε τις τιμές των ρευμάτων I_1 και I_2 , τα οποία διαρρέουν τους αντιστάτες R_1 και R_2 αντιστοίχως, α) αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη S, β) αφού περάσει αρκετός χρόνος, γ) αμέσως μετά το άνοιγμα του διακόπτη, και δ) αφού περάσει ξανά αρκετός χρόνος.



Σχήμα 11.20 *Πρόβλημα 11.5.*

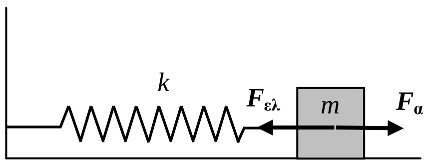
Π11.6 Ηλεκτρικό κύκλωμα *LC*. Ένα πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής 0.80 H και ένας πυκνωτής έχει χωρητικότητα 5.60 μF. Τα δύο στοιχεία είναι συνδεδεμένα σε κύκλωμα *LC*. α) Υπολογίστε το φορτίο που ευρίσκεται στους οπλισμούς του πυκνωτή την στιγμή που το ρεύμα στο κύκλωμα μεταβάλλεται με ρυθμό 3 A/s; β) Όταν το φορτίο στον πυκνωτή είναι 6.50 μC, πόση είναι η τάση αυτεπαγωγής στα άκρα του πηνίου; *Απάντηση*: 13.4 μC και 1.16 V.

Π11.7 Ενέργεια κυκλώματος *LC*. Σε έναν ιδανικό ταλαντωτή κυκλώματος *LC*, η ηλεκτρική ενέργεια στον πυκνωτή μετατρέπεται εξ' ολοκλήρου σε μαγνητική στο πηνίο σε χρόνο 2.65 μs. α) Πόση είναι η περίοδος της ηλεκτρομαγνητικής ταλαντώσεως. β) Πόση είναι η συχνότητα; γ) Πόσος χρόνος μεσολαβεί μεταξύ δυο μεγίστων της μαγνητικής ενέργειας; *Απάντηση*: α) 10.6 μs, β) 94.3 kHz και γ) 5.3 μs.

Π11.8 Ταλαντωτής *LC*. Ένα ιδανικό κύκλωμα *LC* είναι σχεδιασμένο να λειτουργεί με μέγιστο ρεύμα 55.0 mA. Η αυτεπαγωγή του είναι σταθερή 38.0 mH, και η συχνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ταλαντώσεως μπορεί να αλλάζει μεταβάλλοντας την χωρητικότητα *C*. α) Εάν ο πυκνωτής αντέχει μέγιστη τάση 46.5 V, μπορεί το κύκλωμα να λειτουργήσει σε συχνότητα 12 kHz; β) Ποια είναι η μέγιστη ασφαλής συχνότητα λειτουργίας του κυκλώματος; γ) Πόση είναι η ελάχιστη χωρητικότητα λειτουργίας; *Απάντηση*: α) Όχι. β) 3.55 kHz. γ) 53 nF.

Π11.9 Ηλεκτρικό κύκλωμα *RLC*. Ένα κύκλωμα *RLC* αποτελείται από πηνίο αυτεπαγωγής L=17.0 mH, πυκνωτή χωρητικότητας C=2.80 μF, και αντιστάτη R=3.41 Ω. α) Μετά από πόσο χρόνο το πλάτος της ταλάντωσης του φορτίου θα ισούται με το 1/3 της αρχικής του τιμής; β) Πόσες περίοδοι αντιστοιχούν σ' αυτό το χρονικό διάστημα; *Απάντηση*: α) 11 ms. β) 8.

Π11.10 Αποσβενομένη μηχανική ταλάντωση. Θεωρήστε έναν μηχανικό ταλαντωτή, αποτελούμενο από ελατήριο σταθεράς *k*, του οποίου το ένα άκρο είναι στερεωμένο σε σταθερό σημείο, ενώ στο άλλο είναι αναρτημένο σώμα μάζας *m*, το οποίο μπορεί να κινείται οριζοντίως πάνω σε επιφάνεια τραπεζιού χωρίς τριβές, όπως δείχνει το σχ. 11.21. Το σώμα ταλαντώνεται και περιβάλλεται από αέρα, ο οποίος του ασκεί δύναμη αντίστασης ίση με $F_\alpha=-bv$, πάντα αντίθετη από την κατεύθυνση κίνησης του σώματος. α) Δείξτε ότι η εξίσωση



Σχήμα 11.21 *Πρόβλημα 11.10.*

κίνησης του σώματος περιγράφει αποσβενομένη ταλάντωση, ανάλογη της αντίστοιχης ηλεκτρομαγνητικής (βλ. εξ. 11.54). β) Βάσει της εξίσωσης κίνησης του σώματος, ποιες μηχανικές ποσότητες αντιστοιχούν στις ποσότητες *L*, *R*, και *C* αντιστοίχως; γ) Από τα παραπάνω ευρήματα, γράψετε την γωνιακή συχνότητα της αποσβενομένης μηχανικής ταλάντωσης.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Lobkowicz, F., & Melissinos, A. C. (1975). *Physics for scientists and engineers*. Copyright © 1975 by W. B. Saunders Company. ISBN: 0-7216-5793-1 (Volume II).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΟ ΡΕΥΜΑ

Σύνοψη

Στο δωδέκατο τούτο κεφάλαιο περιγράφεται το εναλλασσόμενο ρεύμα και ορίζονται οι έννοιες της ενεργού τιμής τάσεως και ρεύματος. Μελετώνται τα κυκλώματα εναλλασσομένου ρεύματος με πυκνωτή και επαγωγέα, και καθορίζονται οι φυσικές ποσότητες της χωρητικής και επαγωγικής αντίστασης. Επίσης μελετάται το κύκλωμα αντιστάτη-πυκνωτή-επαγωγέα (κύκλωμα RLC), και ορίζονται η σύνθετη αντίσταση και η γωνία φάσης κυκλώματος. Τέλος περιγράφονται οι μετασχηματιστές και η λειτουργία τους στην μεταφορά ηλεκτρικής ισχύος.

Προαπαιτούμενη γνώση

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Νόμος του Faraday. Αυτεπαγωγή.

12.1 Εισαγωγικά

Στο κεφάλαιο 10 περιγράψαμε την αρχή λειτουργίας της ηλεκτρογεννήτριας εναλλασσομένου ρεύματος, με την δημιουργία μιας αρμονικά μεταβαλλόμενης τάσης εξ επαγωγής. Όταν το μέτρο και η πολικότητα της τάσης μεταβάλλεται περιοδικά με τον χρόνο, η τάση ονομάζεται **εναλλασσόμενη τάση** και το αντίστοιχο ρεύμα που παράγεται **εναλλασσόμενο ρεύμα**, διότι η φορά του ρεύματος στο κύκλωμα αλλάζει με περιοδικό τρόπο(Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Έτσι λοιπόν, εάν περιστρέφουμε με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω ένα κλειστό αγώγιμο πλαίσιο ή πηνίο μέσα σ' ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, στα άκρα του πηνίου αναπτύσσεται μια εναλλασσόμενη τάση, ίση με

$$V = V_o \sin\omega t \tag{12.1}$$

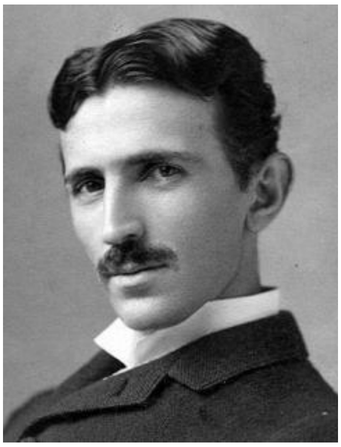
όπου V_o είναι η μέγιστη τιμή της τάσης που ονομάζεται **πλάτος**, ενώ ω είναι η **γωνιακή συχνότητα**, η οποία ορίζει την περίοδο T μεταβολής της τάσης (Grant & Phillips, 1975), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013). Το αντίστοιχο εναλλασσόμενο ρεύμα που δημιουργεί η εναλλασσόμενη τάση, είναι

$$I = I_o \sin\omega t \tag{12.2}$$

όπου I_o είναι η μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος ή αλλιώς πλάτος του ρεύματος (Young & Freedman, 2010). Η συχνότητα f της τάσης V είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{12.3}$$

Σήμερα για την διανομή της ηλεκτρικής ενέργειας από τον τόπο παραγωγής στον τόπο κατανάλωσης, χρησιμοποιείται αποκλειστικώς εναλλασσόμενη τάση με συνήθη συχνότητα f=50 Hz (50 κύκλοι), η οποία αντιστοιχεί σε κυκλική συχνότητα ω=314 rad/s. Στην οικία μας, το ρεύμα που χρησιμοποιούμε για την λειτουργία των ηλεκτρικών συσκευών, όπως το ραδιόφωνο, η τηλεόραση, το ψυγείο, κ.ά., είναι εναλλασσόμενο ρεύμα. Γιατί όμως αυτή η προτίμησή μας στο εναλλασσόμενο ρεύμα έναντι του συνεχούς; Η απάντηση ευρίσκεται στο ζήτημα της μεταφοράς της ηλεκτρικής ενέργειας από τον τόπο παραγωγής, π.χ. υδροηλεκτρικό ή άλλου είδους εργοστάσιο, στον τόπο κατανάλωσης, όπως οικίες, βιομηχανίες κλπ. Όταν πρόκειται να μεταφέρουμε ηλεκτρική ενέργεια σε μεγάλες αποστάσεις (εκατοντάδες ή χιλιάδες χιλιόμετρα), θεμελιώδες ζήτημα είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών της. Έτσι είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε εναλλασσόμενο ρεύμα (alternative current –AC), αντί συνεχές ρεύμα (direct current – DC), διότι: α) συμβαίνει μικρότερη απώλεια ενέργειας στις γραμμές μεταφοράς, και β) μπορούμε να ανυψώνουμε ή να υποβιβάζουμε το πλάτος της έντασής του ευκολότερα. Παραδείγματος χάριν, για ενέργεια δεδομένης ισχύος, η μεταφορά είναι οικονομικότερη όταν γίνεται με υψηλή τάση, διότι τότε το ρεύμα είναι χαμηλό, όπως και οι απώλειες ενέργειας στις γραμμές μεταφοράς (βλ. εξ. 7.4). Γι' αυτόν τον λόγο χρησιμοποιούνται γραμμές μεταφοράς ενέργειας με τάση 350 kV, ενώ τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται ακόμη και 765 kV. Όμως, στην καθημερινή χρήση του ηλεκτρικού ρεύματος για την λειτουργία των οικιακών συσκευών, οι καταναλωτές χρειάζονται χαμηλές τάσεις (για λόγους ασφαλείας), και συνεπώς σχετικά υψηλό ρεύμα. Ο υποβιβασμός της τάσης γίνεται εύκολα για το AC ρεύμα με ειδικές ηλεκτρικές διατάξεις, γνωστές ως μετασχηματιστές, την λειτουργία των οποίων θα μελετήσουμε παρακάτω. Η διαμάχη για το ποιο ρεύμα είναι καλύτερο για την μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας, άρχισε την δεκαετία του 1880 στην Αμερική. Συγκεκριμένα, ο αυτοδίδακτος εφευρέτης Thomas Edison (1847-1931)[33], υποστήριζε την χρήση του DC ρεύματος, σε αντίθεση με τον Σερβοαμερικανό φυσικό και εφευρέτη Nikola Tesla (1856-1943), ο οποίος υποστήριζε την χρήση του AC. Τελικά στην διαμάχη μεταξύ Edison και Tesla, ή αλλιώς συνεχούς και εναλλασσομένου ρεύματος, επικράτησε για πρακτικούς λόγους το δεύτερο. Ο Tesla μεταξύ άλλων εφευρέσεων, εφηύρε τον επαγωγικό κινητήρα εναλλασσομένου ρεύματος, ενώ πρόβλεψε την δυνατότητα εφαρμογής αυτού του είδους ρεύματος για την επίτευξη τηλεπικοινωνιών. Επίσης κατασκεύασε μια τηλεχειριζόμενη βάρκα, ένα από τα πρώτα οχήματα αυτού του είδους. Η συμβολή του Tesla στην επιστήμη αναγνωρίστηκε μετά τον θάνατό του, και συγκεκριμένα το 1960, όταν ο Οργανισμός Μέτρων και Σταθμών απέδωσε το όνομά του στην μονάδα μέτρησης της μαγνητικής επαγωγής B (1 tesla).[34]



Nikola Tesla (1856-1943) (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tesla_circa_1890.jpeg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

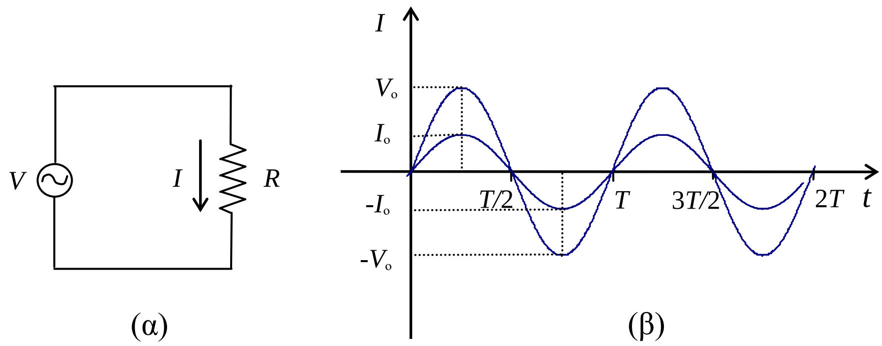
12.2 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με αντιστάτη

Θεωρούμε τώρα ένα απλό κύκλωμα, το οποίο αποτελείται από μια ωμική αντίσταση και μια γεννήτρια εναλλασσομένου ρεύματος, η οποία συμβολίζεται ως (~) , όπως φαίνεται στο σχ. 12.1α. Η γεννήτρια προσδίδει στα άκρα της αντίστασης εναλλασσόμενη τάση (AC τάση)

$$V = V_{oR} \sin \omega t \tag{12.4}$$

όπου V_{oR} είναι το πλάτος της τάσης, το οποίο για το κύκλωμα του σχήματος 12.1α, ταυτίζεται με το πλάτος V_o της γεννήτριας. Το στιγμιαίο ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα ισούται με

$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow I = \frac{V_{oR}}{R} \sin \omega t \Rightarrow I = I_o \sin \omega t \tag{12.5}$$



Σχήμα 12.1 *(α) Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με γεννήτρια AC τάσης V και αντίσταση R. (β) Μεταβολή της τάσης και του ρεύματος στα άκρα της αντίστασης συναρτήσει του χρόνου.*

Οι ποσότητες V και I είναι ανάλογες του $\sin\omega t$ και παίρνουν ταυτόχρονα την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή τους. Αυτό σημαίνει ότι τα I και V είναι σε φάση, ή αλλιώς η διαφορά φάσης τους είναι μηδέν. Στο σχ. 12.1β απεικονίζονται τα μεγέθη I και V συναρτήσει του χρόνου, σε κύκλωμα AC ρεύματος. Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή του ρεύματος και της τάσης σε μια περίοδο είναι μηδενική. Τούτο συμβαίνει διότι, όσο χρονικό

[33] Ο Thomas Edison υπήρξε από τους σημαντικότερους εφευρέτες, με εκατοντάδες εφευρέσεις, μεταξύ των οποίων ο ηλεκτρικός λαμπτήρας, το μικρόφωνο και ο φωνόγραφος. Δημιούργησε το πρώτο εργοστάσιο ηλεκτρικής ενέργειας στον κόσμο, το οποίο μετεξελίχθηκε στον σημερινό ενεργειακό κολοσσό της General Electric.
[34] Ο Nikola Tesla κέρδισε μεγάλη φήμη αλλά και χρήματα, από τις πατέντες του και τις επιδείξεις πειραμάτων Φυσικής σε κοινό. Λόγω των ισχυρισμών του για τις δυνατότητες των πειραμάτων του (ενίοτε εξωφρενικές), του αποδόθηκε η υστεροφημία του «τρελού επιστήμονα».

διάστημα το ρεύμα έχει την θετική κατεύθυνση, άλλο τόσο έχει και την αρνητική. Η λειτουργία όμως της ωμικής αντίστασης δεν επηρεάζεται από την φορά του ρεύματος, διότι ο ρυθμός μετατροπής της ηλεκτρικής ενέργειας σε θερμότητα, δίνεται από την ισχύ ως

$$P = I^2 R \tag{12.6}$$

όπου I είναι η στιγμιαία ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα. Αν και η θερμική απώλεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του ρεύματος, εντούτοις το θερμικό αποτέλεσμα που προκαλεί το AC ρεύμα πλάτους I_o , είναι διαφορετικό από το θερμικό αποτέλεσμα που προκαλεί ένα συνεχές ρεύμα εντάσεως I_o . Αυτό συμβαίνει διότι το AC ρεύμα διατηρεί για μικρό χρονικό διάστημα την μέγιστη τιμή του. Βάσει των εξισώσεων 12.5 και 12.6, για την ισχύ κατανάλωσης ενέργειας στην αντίσταση R, ισχύει ότι

$$P = RI_o^2 \sin^2 \omega t \tag{12.7}$$

ή αλλιώς

$$P = P_o \sin^2 \omega t \tag{12.8}$$

όπου P_o είναι η μέγιστη στιγμιαία ισχύς του κυκλώματος, ίση με

$$P_o = I_o^2 R \tag{12.9}$$

Η ισχύς συναρτήσει του χρόνου σχεδιάζεται γραφικώς στο σχ. 12.2. Η μέση ισχύς σε ένα πλήρη κύκλο, δηλ. σε χρόνο μιας περιόδου T, είναι

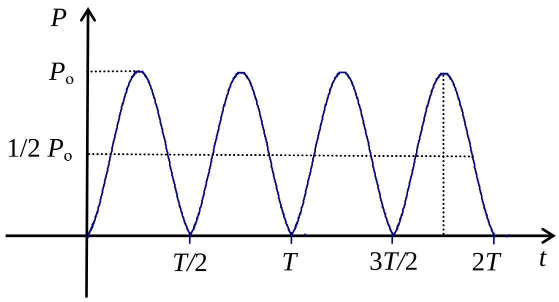
$$\bar{P} = \overline{P_o \sin^2 \omega t} = P_o \overline{\sin^2 \omega t} \Rightarrow \bar{P} = \frac{1}{2} P_o \tag{12.10}$$

διότι η μέση τιμή του τετραγώνου του ημιτόνου (και του συνημιτόνου) είναι 1/2. Από την εξ. 12.10, λόγω των εξισώσεων 12.6 και 12.9, παίρνουμε

$$\overline{I^2 R} = \frac{1}{2} I_o^2 R \Rightarrow \overline{I^2} = \frac{1}{2} I_o^2 \Rightarrow \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \tag{12.11}$$

Έτσι λοιπόν, σ' ένα κύκλωμα AC ρεύματος, η μέση ισχύς που καταναλώνεται στην αντίστασή του, ισοδυναμεί με την ισχύ που θα κατανάλωνε η ίδια αντίσταση, εάν αυτή διαρρέονταν από DC ρεύμα σταθερής έντασης και ίσης με την τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου του AC ρεύματος, $\sqrt{\overline{I^2}}$. Η τιμή της έντασης του DC ρεύματος, που παράγει την ίδια ισχύ με το AC πάνω στην ίδια αντίσταση, ονομάζεται **ενεργός ένταση** του εναλλασσομένου ρεύματος $I_{εν}$, και είναι ίση με

$$I_{εν} = \sqrt{\overline{I^2}} \tag{12.12}$$



Σχήμα 12.2 *Η μεταβολή της ισχύος κατανάλωσης ενέργειας σε αντίσταση κυκλώματος εναλλασσομένου ρεύματος, συναρτήσει του χρόνου.*

Η εξ. 12.12 από την 12.11 δίνει

$$I_{εν} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{εν} = 0.707 I_o \tag{12.13}$$

(Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010). Προσέξτε ότι, ενώ η μέση τιμή του AC ρεύματος, όπως προαναφέραμε, είναι μηδέν, η μέση τιμή του τετραγώνου της εντάσεως του ρεύματος, δεν είναι μηδέν. Τούτο είναι εμφανές στο σχ. 12.2, όπου παριστάνεται η ισχύς P συναρτήσει του χρόνου, η οποία είναι ανάλογη του I^2.

Αντιστοίχως με το ενεργό ρεύμα $I_{εν}$, μπορούμε να ορίσουμε και την **ενεργό τάση** $V_{εν}$, για την οποία ισχύει

$$V_{\varepsilon\nu} = I_{\varepsilon\nu} R \overset{(12.13)}{\Rightarrow} V_{\varepsilon\nu} = 0.707 I_{\text{o}} R \Rightarrow V_{\varepsilon\nu} = 0.707 V_{\text{o}} \qquad (12.14)$$

(Grant & Phillips, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Εναλλασσόμενη τάση είναι και η τάση που μετράμε με ένα βολτόμετρο σε έναν οικιακό ρευματοδότη (πρίζα), ίση περίπου με 220 V. Αυτή η τιμή της τάσης είναι η **ενεργός τάση**, δηλ. η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετραγώνου της εναλλασσομένης τάσης

$$V_{\varepsilon\nu} = \sqrt{\overline{V^2}} \qquad (12.15)$$

Από την εξ. 12.13 παίρνουμε ότι το πλάτος της οικιακής τάσης, δηλ. η μέγιστη τιμή της είναι περίπου 311 V.[35] Ο λόγος που χρησιμοποιούμε τις ενεργές τιμές για τα AC ρεύματα είναι πρώτον, για να υπάρχει μια αναλογία με τα DC ρεύματα και τάσεις, και δεύτερον επειδή τα όργανα μέτρησής τους (αμπερόμετρα, βολτόμετρα, κλπ), είναι ρυθμισμένα να μετρούν τις ενεργές τιμές και σε συχνότητες πλησίον στα 50 Hz. Από τις ενεργές τιμές του ρεύματος και της τάσης ενός κυκλώματος, μπορεί να υπολογισθεί η μέση ισχύς ως

$$\bar{P} = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \qquad (12.16)$$

Παράδειγμα 12.1 Λειτουργία ηλεκτρονικού υπολογιστή

Στο πίσω μέρος ενός προσωπικού υπολογιστή είναι γραμμένο ότι αντλεί 2.70 A από ρευματοδότη AC τάσης 220 V των 50 Hz. α) Ποιο είναι το μέσο ρεύμα τροφοδοσίας του υπολογιστή; β) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος; γ) Ποια είναι η έκφραση για το AC ρεύμα που δίνει ο ρευματοδότης στον υπολογιστή; δ) Ποια είναι η μέση ισχύς που καταναλώνει ο υπολογιστής;

Λύση

α) Το AC ρεύμα είναι της μορφής

$$I = I_{\text{o}} \sin\omega t \qquad (1)$$

Η μέση τιμή του ρεύματος είναι μηδέν, γιατί μηδέν είναι η μέση τιμή του ημιτόνου σε έναν πλήρη κύκλο.
β) Οι αναγραφόμενες τιμές 2.70 A και 220 V, είναι οι ενεργές τιμές του ρεύματος και της τάσης αντιστοίχως. Επομένως για το πλάτος του ρεύματος I_{o} , έχουμε

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_{\text{o}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow I_{\text{o}} = \sqrt{2} I_{\varepsilon\nu} = \sqrt{2} \times 2.7\text{A} \Rightarrow I_{\text{o}} = 3.82\text{A}$$

γ) Εφόσον η συχνότητα είναι f=50 Hz, η γωνιακή συχνότητα είναι

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 2 \times 3.14 \times 50\text{Hz} \Rightarrow \omega = 314\text{rad/s}$$

Άρα η εξ. 1 γράφεται

$$I = 3.82\text{A} \sin(314 \frac{\text{rad}}{\text{s}} t)$$

δ) Η μέση ισχύς του υπολογιστή είναι

$$\bar{P} = V_{\varepsilon\nu} I_{\varepsilon\nu} \Rightarrow \bar{P} = 220\text{V} \times 2.7\text{A} \Rightarrow \bar{P} = 594\text{W}$$

12.3 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με πυκνωτή

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα απλό κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος, το οποίο αποτελείται από μία γεννήτρια και έναν πυκνωτή με χωρητικότητα C και μηδενική αντίσταση, όπως δείχνει το σχ. 12.3α. Η AC τάση στα άκρα του πυκνωτή είναι V_C , και δίνεται ως

$$V_C = V_{\text{o}C} \sin\omega t \qquad (12.17)$$

[35] Σε κάποιες αγγλοσαξωνικές χώρες (Βρετανία, ΗΠΑ, Καναδάς κ.ά.), η οικιακή τάση είναι 120 V στα 60 Hz και όχι 220 V στα 50 Hz, οπότε εκεί διαφέρει και το πλάτος της εναλλασσομένης τάσης, το οποίο είναι περίπου 170 V.

όπου V_{oC} είναι το πλάτος της AC τάσης στα άκρα του πυκνωτή, και

$$V_C = \frac{q}{C} \qquad (12.18)$$

είναι η στιγμιαία τάση σε χρόνο t. Η εξ. 12.17 σε συνδυασμό με την 12.18 δίνει

$$\frac{q}{C} = V_{oC}\sin\omega t \Rightarrow q = CV_{oC}\sin\omega t \qquad (12.19)$$

Το ρεύμα στο κύκλωμα είναι

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(CV_{oC}\sin\omega t) = \omega CV_{oC}\cos\omega t \Rightarrow I = I_o\cos\omega t \qquad (12.20)$$

όπου

$$I_o = \omega CV_{oC} \qquad (12.21)$$

είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος. Βλέπουμε ότι το ρεύμα μεταβάλλεται συνημιτονοειδώς, και επομένως έχει μια διαφορά φάσης $\pi/2$ από την AC τάση V_C. Όταν το ρεύμα παίρνει την μέγιστη τιμή του, η τάση παίρνει την ελάχιστη, δηλ. το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά φάση $\pi/2$, ή αλλιώς χρόνο $T/4$, όπως φαίνεται στο σχ. 12.3β (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012). Έτσι λοιπόν, βάσει της εξίσωσης 12.17 για την τάση και σύμφωνα με τα παραπάνω, το ρεύμα μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως

$$I = I_o\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (12.22)$$

Για το πλάτος της τάσης στα άκρα του πυκνωτή, από την εξ. 12.21 παίρνουμε

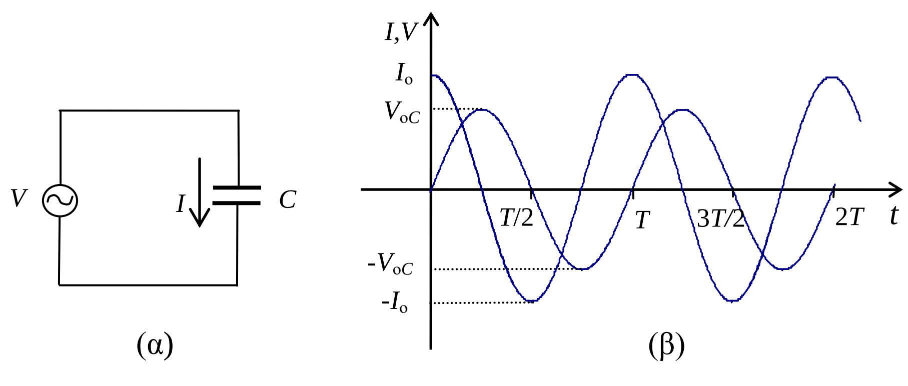
$$V_{oC} = \frac{1}{\omega C}I_o \qquad (12.23)$$

Εάν αντιπαραθέσουμε αυτή την εξίσωση με το νόμο του Ohm, $V_o=RI_o$, που ισχύει για το κύκλωμα του σχήματος 12.1, έχουμε την αναλογία μεταξύ της ωμικής αντίστασης R και της ποσότητας $1/\omega C$. Ως εκ τούτου, ορίζεται η **χωρητική αντίσταση**, ή αλλιώς **χωρητική εμπέδηση** X_C , ως η ποσότητα

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (12.24)$$

(Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Knight, 2010), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), και άρα η εξ. 12.23 γίνεται

$$V_{oC} = X_C I_o \qquad (12.25)$$

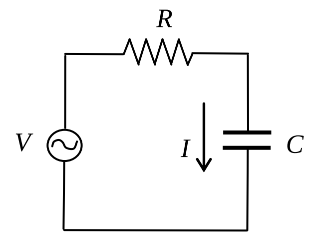


Σχήμα 12.3 *(α) Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με πηγή τάσης V και χωρητικότητα C. (β) Μεταβολή της τάσης και του ρεύματος στα άκρα της χωρητικότητας συναρτήσει του χρόνου.*

Η χωρητική αντίσταση X_C μειώνεται με την χωρητικότητα του πυκνωτή και την συχνότητα της AC τάσης. Η μονάδα μέτρησης της χωρητικής αντίστασης στο ΔΣΜ είναι το Ohm, όπως ακριβώς συμβαίνει και για την ωμική αντίσταση R. Εντούτοις, παρότι τα δύο μεγέθη χρησιμοποιούν τις ίδιες μονάδες, η χωρητική αντίσταση είναι διαφορετική φυσική ποσότητα από την ωμική αντίσταση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο νόμος του Ohm $V=X_C I$, δεν ισχύει για την χωρητική αντίσταση, διότι η τάση και το ρεύμα δεν είναι σε φάση, και συνεπώς δεν είναι ανάλογα μεγέθη, μιας και όπως δείχνει το σχ. 12.3, όταν το ένα μέγεθος αυξάνεται, το άλλο μπορεί να μειώνεται. Επομένως, η εξ. 12.23 ισχύει μόνο αριθμητικά και αποκλειστικώς για τα πλάτη της τάσεως και του ρεύματος, και όχι για τις στιγμιαίες τιμές τους. Από την εξ. 12.23, για δεδομένη τάση V_{oC} , το ρεύμα I_o είναι τόσο μικρότερο, όσο μεγαλύτερη είναι η χωρητική αντίσταση X_C. Για παράδειγμα, για δεδομένο πυκνωτή χωρητικότητας C, εάν η συχνότητα ω της AC τάσης είναι μικρή, η X_C μεγαλώνει, με αποτέλεσμα το πλάτος του ρεύματος I_o να γίνεται μικρό, ώστε να μην διαδίδονται εύκολα στο κύκλωμα, σήματα χαμηλής συχνότητας. Έτσι, το AC κύκλωμα με τον πυκνωτή του σχήματος 12.3α, αποτελεί ένα φίλτρο αποκοπής χαμηλών συχνοτήτων. Αντιθέτως, τα υψηλής συχνότητας σήματα διέρχονται εύκολα από ένα τέτοιο κύκλωμα, το οποίο ονομάζεται **φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων** ή **υψιπερατό φίλτρο** (Young & Freedman, 2010), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012).

Παράδειγμα 12.2 Κύκλωμα *RC* εναλλασσομένου ρεύματος

Σ' ένα κύκλωμα AC ρεύματος, όπως αυτό του σχήματος 12.4, είναι συνδεδεμένα μια αντίσταση 300 Ω και ένας πυκνωτής με χωρητικότητα 10 μF. Η τάση στα άκρα της αντίστασης δίδεται από την σχέση $V_R = 1.50\mathrm{V}\sin[(2\times10^3\,\mathrm{rad/s})t]$. α) Προσδιορίστε την έκφραση για την ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα. β) Υπολογίστε την χωρητική εμπέδηση του κυκλώματος. γ) Προσδιορίστε την σχέση για την τάση στα άκρα του πυκνωτή.



Σχήμα 12.4 *Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με πηγή τάσης V, αντίσταση R και χωρητικότητα C, συνδεδεμένα εν σειρά (παράδειγμα 12.2).*

Λύση

α) Από το νόμο του Ohm ευρίσκουμε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση και επομένως αυτό του κυκλώματος, άρα

$$I = \frac{V_R}{R} = \frac{150\mathrm{V}\sin[(2\times10^3\,\mathrm{rad/s})t]}{300\Omega} \Rightarrow I = 2\times10^{-3}\,\mathrm{A}\sin[(2\times10^3\,\mathrm{rad/s})t]$$

β) Η χωρητική εμπέδηση δίνεται ως

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{(2\times10^3\,\mathrm{rad/s})\times10\times10^{-6}\,\mathrm{F}} \Rightarrow X_C = 50\Omega$$

γ) Η τάση στα άκρα του πυκνωτή παρουσιάζει, σύμφωνα με την θεωρία που αναπτύξαμε πιο πάνω, μια καθυστέρηση φάσης ίση με $\pi/2$ σε σχέση με το ρεύμα, επομένως ισχύει

$$V_C = V_{oC}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow V_C = V_{oC}[\sin(2\times10^3\,\mathrm{rad/s})t - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}]$$

Υπολογίζουμε το πλάτος της τάσης V_{oC} από την σχέση

$$V_{oC} = X_C I_o \Rightarrow V_{oC} = 50\Omega\times5\times10^{-3}\,\mathrm{A} \Rightarrow V_{oC} = 0.25\mathrm{V}$$

Τελικώς για την τάση του πυκνωτή στο κύκλωμα του AC ρεύματος στο σχ. 12.4, ισχύει

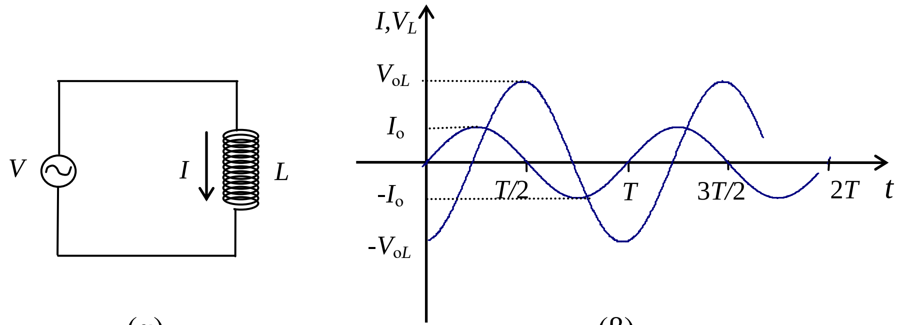
$$V_C = 0.25\mathrm{V}\sin[(2\times10^3\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}})t - \frac{\pi}{2}]$$

12.4 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με επαγωγέα

Ας μελετήσουμε τώρα ένα απλό κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος, το οποίο αποτελείται από έναν ιδανικό επαγωγέα L με μηδενική αντίσταση, και μια γεννήτρια AC τάσης, όπως δείχνει το σχ. 12.5α. Η γεννήτρια δίνει AC τάση και ρεύμα αρμονικής μορφής, όπως περιγράφονται από τις εξισώσεις 12.1 και 12.2, αντιστοίχως. Στα άκρα του επαγωγέα αναπτύσσεται επαγωγική τάση, η οποία σύμφωνα με το νόμο του Faraday είναι

$$V_L = -L\frac{dI}{dt} = -L\frac{d}{dt}(I_o \sin\omega t) \Rightarrow V_L = -L\omega I_o \cos\omega t \qquad (12.26)$$

Όσο αυξάνεται το ρεύμα στο κύκλωμα, μία αντίθετης πολικότητας τάση V_L αναπτύσσεται στα άκρα του επαγωγέα, έτσι ώστε να δώσει ρεύμα αντιθέτου φοράς και να αντιταχθεί στην αύξηση του ρεύματος από την γεννήτρια, σύμφωνα με το νόμο της ηλεκτρομαγνητικής επαγωγής. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το ρεύμα ελαττώνεται. Από την εξ. 12.26, συμπεραίνουμε ότι η επαγωγική τάση V_L στα άκρα του επαγωγέα είναι αρμονική συνάρτηση με διαφορά φάσης $\pi/2$ από το ρεύμα I (εξ. 12.2), μιας και το συνημίτονο διαφέρει σε φάση από το ημίτονο 90^o μοίρες, ή αλλιώς $\pi/2$ ακτίνια. Πράγματι, όπως φαίνεται στο σχ. 12.5β, η επαγωγική τάση μεγιστοποιείται όταν το ρεύμα μηδενίζεται. Έτσι μπορούμε να ειπούμε ότι στο κύκλωμα AC τάσεως με επαγωγέα L, η τάση προηγείται του ρεύματος κατά φάση $\pi/2$, ή αλλιώς χρόνο $T/4$ (σχ. 12.5β) (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Giancoli, 2012), (Young & Freedman, 2010). Με βάση τα παραπάνω, μια ισοδύναμη έκφραση της εξίσωσης 12.26, η οποία δείχνει καθαρά ότι η AC επαγωγική τάση V_L προηγείται του ρεύματος, όταν η γεννήτρια συνδέεται με επαγωγέα, είναι η ακόλουθη,



(α) (β)

Σχήμα 12.5 *(α) Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με γεννήτρια AC τάσης V και επαγωγέα L. (β) Μεταβολή του ρεύματος και της τάσης στα άκρα του επαγωγέα συναρτήσει του χρόνου.*

$$V_L = -L\omega I_o \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow V_L = -V_{oL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad (12.27)$$

όπου το πλάτος της επαγωγικής τάσης V_L είναι η μέγιστη τιμή της, ίση με V_{oL} , για την οποία ισχύει

$$V_{oL} = L\omega I_o \qquad (12.28)$$

Βάσει της σχέσης μεταξύ τάσης και ρεύματος στο νόμο του Ohm, οδηγούμαστε σε αντιστοίχιση της επαγωγικής τάσης και του ρεύματος μέσω της εξίσωσης

$$V_{oL} = X_L I_o \qquad (12.29)$$

όπου X_L ορίζεται η **επαγωγική αντίσταση** ή **επαγωγική εμπέδηση** του κυκλώματος L εναλλασσομένου ρεύματος (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Knight, 2010), (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Ισχύει λοιπόν για την επαγωγική εμπέδηση

$$X_L = L\omega \qquad (12.30)$$

Η επαγωγική εμπέδηση αυξάνεται με την σταθερά αυτεπαγωγής L του επαγωγέα, αλλά και με την συχνότητα ω της AC τάσης. Οι μονάδες μέτρησης της επαγωγικής αντίστασης στο ΔΣΜ είναι το Ohm, όπως ακριβώς η ωμική αντίσταση R, αλλά και η χωρητική εμπέδηση X_C. Ωστόσο, η επαγωγική αντίσταση είναι διαφορετική φυσική ποσότητα από την ωμική αντίσταση. Για παράδειγμα, ενώ ισχύει $V=RI$, δεν ισχύει $V=X_L I$, μιας και όπως δείξαμε και παρατηρούμε στο σχ.12.5β, τα V και I δεν είναι σε φάση. Η εξ. 12.27 απλώς συνδέει αριθμητικώς τα πλάτη V_{oL} και I_o , χωρίς αυτά ποτέ να παίρνουν ταυτοχρόνως τις τιμές αυτές. Στο ίδιο ακριβώς συμπέρασμα καταλήξαμε και για την χωρητική αντίσταση X_C (βλ. προηγούμενο εδάφιο). Σχετικά με την τιμή της επαγωγικής αντίστασης, για δεδομένο επαγωγέα L, όσο πιο απότομα αλλάζει το ρεύμα (μεγάλο ω), τόσο μεγαλύτερη είναι η X_L , δηλ. τόσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση του πηνίου στην αύξηση του ρεύματος στο κύκλωμα. Από την εξ. 12.29, για δεδομένη τάση V_{oL} , το ρεύμα I_o είναι τόσο μικρότερο, όσο μεγαλύτερη είναι η επαγωγική αντίσταση X_L. Για παράδειγμα, εάν η συχνότητα ω είναι πολύ μεγάλη, μεγαλώνει και η X_L , με αποτέλεσμα το πλάτος του ρεύματος I_o να γίνεται πολύ μικρό, και να μην διαδίδονται εύκολα στο κύκλωμα τα σήματα υψηλής συχνότητας. Έτσι, το AC κύκλωμα με τον επαγωγέα του σχήματος

12.5α, αποτελεί ένα φίλτρο αποκοπής υψηλών συχνοτήτων. Τέτοια φίλτρα χρησιμοποιούνται σε διάφορα τροφοδοτικά, ή σε συσκευές συμβολής ραδιοκυμάτων, όπου η διέλευση υψηλών συχνοτήτων είναι ανεπιθύμητη. Αντιθέτως, τα χαμηλής συχνότητας σήματα μπορούν να διέρχονται από ένα τέτοιο κύκλωμα, το οποίο ονομάζεται **φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων**, ή **βαθυπερατό φίλτρο** (Young & Freedman, 2010), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012). Υψιπερατά και βαθυπερατά φίλτρα χρησιμοποιούνται στα ηχεία μεγαφώνων, όπου στα μεγάφωνα υψηλών συχνοτήτων (τουίτερς), ένας πυκνωτής λειτουργεί ως υψιπερατό φίλτρο, ενώ στα μεγάφωνα χαμηλών συχνοτήτων (γούφερς), ένα πηνίο λειτουργεί ως βαθυπερατό φίλτρο. Έτσι, τα τουίτερς δίνουν μόνο ήχους υψηλών συχνοτήτων (πρίμα), ενώ τα γούφερς δίνουν μόνο ήχους χαμηλών (μπάσα).

Παράδειγμα 12.3 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με επαγωγέα

Το πλάτος ρεύματος στο πηνίο ενός ραδιοφώνου πρέπει να είναι 280 μA, όταν το πλάτος τάσης του πηνίου είναι 3.45 V για συχνότητα 100 MHz (ραδιοφωνική λήψη στη ζώνη των FM). α) Πόση πρέπει να είναι η επαγωγική εμπέδηση X_L, και πόση η σταθερά αυτεπαγωγής L του πηνίου; β) Αν το πλάτος της τάσης στο πηνίο διατηρηθεί σταθερό, πόσο θα είναι το πλάτος του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο για λήψη σήματος του ραδιοφώνου στη συχνότητα των 16 MHz (ραδιοφωνική λήψη στη ζώνη των βραχέων -SW);

Λύση

α) Για τα πλάτη της AC τάσης και ρεύματος στο πηνίο ισχύει η σχέση

$$V_{oL} = X_L I_o \Rightarrow X_L = \frac{V_{oL}}{I_o} \Rightarrow X_L = \frac{3.45\text{V}}{280\times 10^{-6}\text{A}} \Rightarrow X_L = 1.23\times 10^4 \Omega$$

Γνωρίζοντας την επαγωγική εμπέδηση, μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερά αυτεπαγωγής L του πηνίου, ως

$$X_L = L\omega \Rightarrow L = \frac{X_L}{\omega} \overset{(12.3)}{\Rightarrow} L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{1.23\times 10^4\Omega}{2\pi\times 100\times 10^6\text{Hz}} \Rightarrow L = 1.96\times 10^{-5}\text{H}$$

β) Από την σχέση των πλατών εξ. 12.29 παίρνουμε

$$I_o = \frac{V_{oL}}{X_L} = \frac{V_{oL}}{\omega L} \Rightarrow I_o = \frac{V_{oL}}{2\pi f L} = \frac{3.45\text{V}}{2\pi\times 16\times 10^6\text{Hz}\times 1.96\times 10^{-5}\text{H}} \Rightarrow I_o = 1.75\text{mA}$$

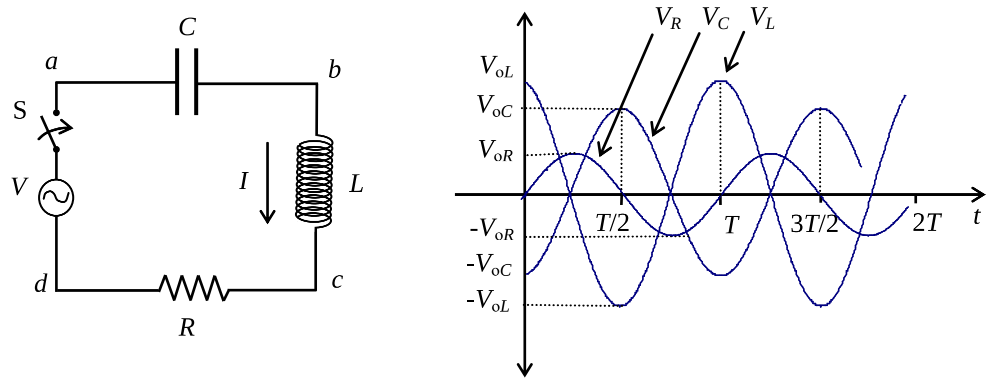
Γενικότερα ισχύει ότι, όσο μικρότερη είναι η συχνότητα ταλάντωσης της AC τάσης στα άκρα ενός πηνίου, τόσο μεγαλύτερο είναι το πλάτος του AC ρεύματος που το διαρρέει.

12.5 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος με αντιστάτη, επαγωγέα και πυκνωτή, σε σύνδεση εν σειρά (AC κύκλωμα *RLC*)

Ένα πιο σύνθετο κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος είναι αυτό που περιέχει και τα τρία διαφορετικά στοιχεία, δηλ. αντιστάτη, επαγωγέα και πυκνωτή. Κάθε τέτοιο κύκλωμα ονομάζεται AC **κύκλωμα *RLC***. Πιο ειδικώς, όταν η σύνδεση των τριών στοιχείων *R, L* και *C*, γίνεται σε σειρά (σειριακή σύνδεση), όπως φαίνεται στο σχ. 12.6α, τότε το κύκλωμα ονομάζεται **σειριακό κύκλωμα *RLC*** (Knight, 2010). Όταν «κλείσει» ο διακόπτης S, και αφού προηγουμένως περάσει κάποιος χρόνος, η γεννήτρια AC ρεύματος παρέχει στο κύκλωμα τάση και ρεύμα που περιγράφονται από τις σχέσεις 12.1 και 12.2. Για την διαφορά δυναμικού στα άκρα της πηγής εναλλασσομένου ρεύματος $V=V_{ad}$, ισχύει

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} \Rightarrow V = V_C + V_L + V_R \qquad (12.31)$$

Ενώ όμως, κάθε στοιχείο του κυκλώματος διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα $I = I_o \sin\omega t$, όπως δείξαμε στα προηγούμενα εδάφια, οι τάσεις στα άκρα του πυκνωτή και του επαγωγέα, παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\pi/2$ με το ρεύμα. Συγκεκριμένα, η τάση του πυκνωτή V_C έπεται του ρεύματος, δηλ. $V_C = V_{oC}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$.



(α) (β)

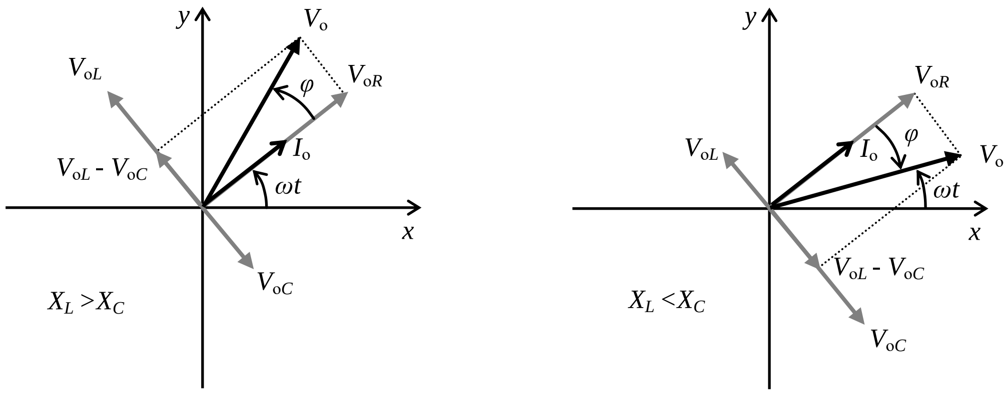
Σχήμα 12.6 *(α) Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος RLC, με όλα τα στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά. (β) Μεταβολή των τάσεων στα άκρα κάθε στοιχείου του κυκλώματος συναρτήσει του χρόνου, εφόσον κλείσει ο διακόπτης S του κυκλώματος. Προσέξτε την διαφορά φάσης μεταξύ των τάσεων V_R , V_C και V_L.*

Αντιθέτως, η τάση του επαγωγέα V_L προηγείται του ρεύματος, δηλ. $V_L = V_{oL}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$, ενώ η τάση στα άκρα του αντιστάτη V_R είναι πάντα σε φάση με το ρεύμα (βλ. εδάφιο 12.2). Για τα πλάτη των τάσεων στα άκρα κάθε στοιχείου του κυκλώματος ισχύουν αντιστοίχως οι σχέσεις, $V_{oC}=I_oX_C$, $V_{oL}=I_oX_L$ και $V_{oR}=I_oR$. Οι τάσεις λοιπόν στα άκρα του επαγωγέα, του αντιστάτη, και του πυκνωτή, διαφέρουν μεταξύ τους ανά δύο κατά φάση $\pi/2$, όπως δείχνει το σχ. 12.6β. Οι πιο πάνω πληροφορίες για το AC σειριακό κύκλωμα *RLC*, παρουσιάζονται στον πίνακα 12.1.

Πίνακας 12.1 *Στοιχεία του κυκλώματος RLC εναλλασσομένου ρεύματος (σχ. 12.6).*

Στοιχείο κυκλώματος	**Σύμβολο**	**Εμπέδηση**	**Ρεύμα**	**Τάση**	**Πλάτος τάσης**
Πηγή	V	r	$I = I_o \sin\omega t$	$V = V_R + V_L + V_C$	V_o
Αντιστάτης	R	R	$I = I_o \sin\omega t$	$V_R = V_{oR}\sin\omega t$	$V_{oR} = I_o R$
Επαγωγέας	L	ωL	$I = I_o \sin\omega t$	$V_L = V_{oL}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$	$V_{oL} = I_o \omega C$
Πυκνωτής	C	$1/\omega C$	$I = I_o \sin\omega t$	$V_C = V_{oC}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$V_{oC} = \frac{I_o}{\omega C}$

Μια τυχαία χρονική στιγμή, η τάση στα άκρα της πηγής δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμα των επιμέρους τάσεων όλων των στοιχείων του κυκλώματος, όπως περιγράφει η εξ. 12.31. Επειδή οι τιμές των τάσεων V_R , V_C και V_L , αλλάζουν συνεχώς με τον χρόνο, και επιπλέον έχουν διαφορά φάσεως $\pi/2$ μεταξύ τους, οι τάσεις αυτές μπορούν να αναπαρασταθούν γραφικώς με περιστρεφόμενα διανύσματα μήκους V_{oR} , V_{oC} και V_{oL} αντιστοίχως, όπως δείχνει το σχ. 12.7. Αυτά τα περιστρεφόμενα διανύσματα των τάσεων, η κατεύθυνση των οποίων κάθε χρονική στιγμή ορίζεται από την αντίστοιχη φάση, ονομάζονται **φάσορες** ή **φασιθέτες** (Young & Freedman, 2010), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Εκτός των τάσεων στα άκρα των στοιχείων, φάσορα έχει και η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος στο κύκλωμα (βλ. σχ. 12.7), μιας και το ρεύμα ταλαντώνεται με πλάτος I_o. Προσέξτε ότι η τάση στα άκρα κάθε στοιχείου του κυκλώματος *RLC*, είναι η προβολή του κάθε φάσορα (διανύσματος τάσης) πάνω στον άξονα y (βλ. την στήλη της τάσης στον πίνακα 12.1). Επίσης, προσέξτε την διαφορά φάσης π, μεταξύ της τάσης V_L και V_C , έτσι ώστε πάντα αυτές οι τάσεις να είναι αντιθέτου προσήμου μεταξύ τους, και επομένως να αφαιρούνται στον υπολογισμό της συνολικής τάσης V στα άκρα της γεννήτριας. Η συνολική τάση V στα άκρα της γεννήτριας στο σχ. 12.6 (διαφορά δυναμικού, V_{ad}), θα δίνεται κάθε στιγμή από την προβολή του συνιστάμενου διανύσματος V_o των διανυσμάτων V_{oR} , V_{oC} και V_{oL} . Από το σχ. 12.7, αποδεικνύεται εύκολα γεωμετρικώς, ότι το πλάτος της τάσης της γεννήτριας AC ρεύματος, είναι V_o , ίση με



(α) (β)

Σχήμα 12.7 *Διανύσματα τάσεων και ρεύματος σε κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος RLC, με τα στοιχεία συνδεδεμένα σε σειρά. Τα διανύσματα αναπαριστώνται σε τυχαία χρονική στιγμή t, (α) για $X_L>X_C$, και (β) για $X_L<X_C$. Το πλάτος του ρεύματος είναι I_o και η γωνιακή του συχνότητα είναι ω. Προσέξτε την διαφορά φάσης φ μεταξύ του ρεύματος I_o και της τάσης της AC πηγής V_o , η οποία ονομάζεται γωνία φάσης του AC κυκλώματος RLC.*

$$V_o = \sqrt{{V_{oR}}^2 + (V_{oL} - V_{oC})^2} \qquad (12.32)$$

Από τις σχέσεις των πλατών των τάσεων στα άκρα των στοιχείων του *RLC* κυκλώματος AC ρεύματος, (βλ. εξ. 12.5, 12.25 και 12.29) η εξ. 12.32 γράφεται

$$V_o = I_o\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (12.33)$$

Αντιπαραβάλλοντας την εξ. 12.33 με το νόμο του Ohm, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \qquad (12.34)$$

ως την **σύνθετη αντίσταση,** ή την **εμπέδηση** *Z* του σειριακού κυκλώματος *RLC* (Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Alonso & Finn, 1992), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Knight, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Η εμπέδηση *Z* έχει μονάδες μέτρησης ωμικής αντίστασης, δηλ. Ohm στο ΔΣΜ, και παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει η ωμική αντίσταση *R* σε ένα κύκλωμα DC ρεύματος. Όπως στα DC κυκλώματα, το ρεύμα διαδίδεται ευκολότερα μέσω διαδρομών μικρής αντίστασης *R*, έτσι και στα AC κυκλώματα, το ρεύμα τείνει να ακολουθήσει διαδρομές ελάχιστης εμπέδησης *Z*. Βάσει των σχέσεων της χωρητικής και επαγωγικής εμπέδησης (βλ. τη στήλη πλάτους τάσης στον πίνακα 12.1), η εξ. 12.34 μπορεί να μας δώσει την εξάρτηση της εμπέδησης από την συχνότητα *ω* του AC ρεύματος. Τότε η εμπέδηση *Z* γράφεται

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \qquad (12.35)$$

Προσέξτε ότι η εξ. 12.33, η οποία συνδέει τα πλάτη V_o και I_o με την εμπέδηση *Z*, ισχύει μόνο αριθμητικώς, και ποτέ κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, διότι τα πλάτη αυτά διαφέρουν κατά φάση γωνίας *φ* (βλ. σχ. 12.7). Παρόλα αυτά, εάν γράψουμε τα πλάτη V_o και I_o συναρτήσει των αντιστοίχων ενεργών τιμών, παίρνουμε

$$V_o = I_o Z \Rightarrow \frac{V_o}{\sqrt{2}} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} Z \overset{(12.13)}{\Rightarrow} V_{εν} = I_{εν} Z \qquad (12.36)$$

Η εξ. 12.36 ισχύει γενικώς για οποιοδήποτε κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος, το οποίο περιέχει αντιστάτες, πυκνωτές και επαγωγείς, και για οποιαδήποτε σύνδεση μεταξύ τους. Έτσι, γνωρίζοντας τα πλάτη της τάσης και του ρεύματος, μπορούμε με έμμεσο τρόπο να υπολογίσουμε την εμπέδηση *Z* του κυκλώματος, μιας και η εξ. 12.35 ισχύει μόνο για σειριακή σύνδεση του κυκλώματος *RLC*.

Πρέπει όμως να τονίσουμε πάλι, ότι για τα κυκλώματα AC ρεύματος τα οποία περιέχουν έστω και έναν πυκνωτή ή επαγωγέα, δεν ισχύει ο νόμος του Ohm, $V = IZ$, όπως αντιστοίχως ισχύει η σχέση $V = IR$ για τα κυκλώματα DC ρεύματος. Αυτό συμβαίνει διότι οι στιγμιαίες τιμές των V και I, διαφέρουν σε φάση. Η διαφορά φάσης μεταξύ της τάσης και του ρεύματος στο AC κύκλωμα *RLC*, ονομάζεται **γωνία φάσης** φ του κυκλώματος *RLC*, και από τα διανυσματικά σχεδιαγράμματα του σχήματος 12.7, ορίζεται ως

$$\tan\varphi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{I(X_L - X_C)}{IR} = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})}{R} \tag{12.37}$$

(Benumof, 1961), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Εάν δηλ. το ρεύμα δίνεται ως $I = I_o \sin\omega t$, η τάση θα δίνεται ως $V = V_o \sin(\omega t + \varphi)$. Εάν η επαγωγική εμπέδηση X_L είναι μεγαλύτερη από την χωρητική εμπέδηση X_C, δηλ. ισχύει $X_L > X_C$, τότε η γωνία φ είναι θετική, και η τάση V προηγείται του ρεύματος I, όπως δείχνει το σχ. 12.7α . Αντιθέτως, εάν ισχύει $X_L < X_C$, τότε η γωνία φ είναι αρνητική, και η τάση έπεται του ρεύματος,, όπως δείχνει το σχ. 12.7β. Η σχέση 12.35 για την Z, ισχύει και όταν απουσιάζει κάποιο από τα τρία στοιχεία του κυκλώματος, εφόσον όμως η σύνδεση παραμένει σειριακή. Έτσι λοιπόν, όταν λείπει η αντίσταση, στην εξ. 12.35 έχουμε R=0, όταν λείπει ο επαγωγέας έχουμε L=0, ενώ όταν λείπει ο πυκνωτής έχουμε $C\to\infty$, διότι τότε X_C=0.

Τέλος πρέπει να επισημάνουμε, ότι η παραπάνω ανάλυση που κάναμε για το AC κύκλωμα *RLC*, ισχύει μόνο για σειριακή σύνδεση των *R, L* και *C* στοιχείων με την πηγή. Για κάθε άλλη σύνδεση, θα πρέπει να κάνουμε αντίστοιχη ανάλυση. Επίσης, η ανάλυση της λειτουργίας του κυκλώματος, έγινε για αρκετό χρόνο μετά το κλείσιμο του διακόπτη S (σχ. 12.6α), όπου η λειτουργία του κυκλώματος σταθεροποιείται, μιας και αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη, μπορεί να εμφανιστούν πρόσθετες τάσεις και ρεύματα, τα οποία ονομάζονται μεταβατικά. Επιπλέον, για λόγους ευκολίας, θεωρήσαμε ότι η αρχική φάση φ_o της AC τάσης (εξ. 12.1) είναι μηδέν. Όλα τα παραπάνω ισχύουν και για αρχική φάση διάφορη του μηδενός ($\varphi_o \neq 0$), η οποία όμως θα πρέπει να εμπεριέχεται σε όλες τις αρμονικώς μεταβαλλόμενες ποσότητες.

Παράδειγμα 12.4 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος *RLC* σε σειριακή σύνδεση

Σ' ένα AC κύκλωμα *RLC* σειριακής σύνδεσης, όπως αυτό του σχήματος 12.6α, υπάρχουν τα στοιχεία R=300 Ω, L=60 mH και C=0.50 μF. Η μέγιστη εναλλασσόμενη τάση που επιτυγχάνεται είναι V_o=50 V, ενώ η γωνιακή συχνότητα του εναλλασσομένου ρεύματος είναι $\omega = 10^4$ rad/s. Να ευρείτε τα X_L,, X_C , Z, το μέγιστο ρεύμα I_o και τη γωνία φάσεως φ του κυκλώματος. Επίσης υπολογίστε τις μέγιστες τάσεις στα άκρα του κάθε στοιχείου, δηλ. τα V_{oL} , V_{oC} και V_{oR}.

Λύση

Η επαγωγική εμπέδηση X_L είναι

$$X_L = L\omega = 60 \times 10^{-3}\,\mathrm{H} \times 10^4\,\mathrm{rad/s} \Rightarrow X_L = 600\Omega$$

Η χωρητική εμπέδηση X_C είναι

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{0.5 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} \times 10^4\,\mathrm{rad/s}} \Rightarrow X_C = 200\Omega$$

Η σύνθετη αντίσταση Z του κυκλώματος είναι

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(300\Omega)^2 + (600\Omega - 200\Omega)^2} = \sqrt{9 \times 10^4 \Omega^2 + 16 \times 10^4 \Omega^2} =$$

$$\sqrt{25 \times 10^4 \Omega^2} \Rightarrow Z = 500\Omega$$

Ισχύει για τα πλάτη τάσεως και ρεύματος

$$Z = \frac{V_o}{I_o} \Rightarrow I_o = \frac{V_o}{Z} = \frac{50\mathrm{V}}{500\Omega} \Rightarrow I_o = 0.1\mathrm{A}$$

Για την γωνία φάσεως του κυκλώματος ισχύει

$$\tan\varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{600\Omega - 200\Omega}{300\Omega} \Rightarrow \tan\varphi = 1.33 \Rightarrow \varphi = \arctan 1.33 \Rightarrow \varphi = 53^o$$

Επειδή $X_L > X_C$, η γωνία φ είναι θετική και η τάση V προηγείται του ρεύματος I. Εάν δηλ. για το ρεύμα ισχύει $I = I_o \sin \omega t$, τότε για την τάση ισχύει, $V = V_o \sin(\omega t + \varphi)$.

Για την μέγιστη τάση στα άκρα του πηνίου, ισχύει

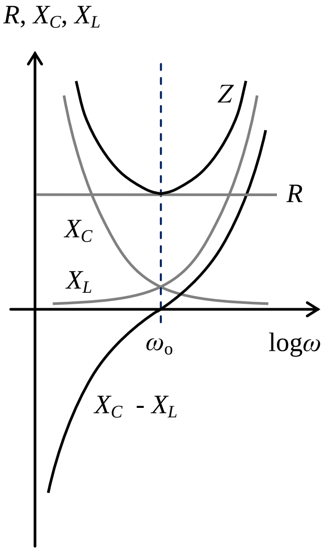
$$V_{oL} = X_L I_o = 600\Omega \times 0.1\text{A} \Rightarrow V_{oL} = 60\text{V}$$

Για την μέγιστη τάση στα άκρα του πυκνωτή, ισχύει

$$V_{oC} = X_C I_o = 200\Omega \times 0.1\text{A} \Rightarrow V_{oC} = 20\text{V}$$

Για την μέγιστη τάση στα άκρα της αντίστασης ισχύει

$$V_{oR} = RI_o = 300\Omega \times 0.1\text{A} \Rightarrow V_{oR} = 30\text{V}$$



Σχήμα 12.8 *Οι εμπεδήσεις Z, X_L και X_C , ως συναρτήσεις του λογαρίθμου της γωνιακής ω συχνότητας ενός AC κυκλώματος RLC. Διακρίνονται επίσης η ωμική αντίσταση R και η διαφορά X_C-X_L . Οι καμπύλες περιγράφουν την ελάχιστη Z για την συχνότητα συντονισμού ω_o.*

12.5.1 Συντονισμός σε σειριακό κύκλωμα *RLC*

Αξίζει να σταθούμε λίγο περισσότερο στην εμπέδηση Z του κυκλώματος *RLC*. Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο εδάφιο, η εμπέδηση Z εξαρτάται από την γωνιακή συχνότητα ω του AC ρεύματος (εξ. 12.35). Έτσι λοιπόν, για δεδομένα στοιχεία *R, L* και *C* σε ένα σειριακό κύκλωμα *RLC*, η εμπέδηση Z και συνεπώς οι επιμέρους εμπεδήσεις X_L,,και X_C , μεταβάλλονται συναρτήσει της ω, όπως δείχνει το σχ. 12.8. (Young & Freedman, 2010). Για δεδομένο πλάτος AC τάσης V_o , το πλάτος του ρεύματος I_o εξαρτάται από την τιμή της Z, διότι από την εξ. 12.36 μπορούμε να γράψουμε

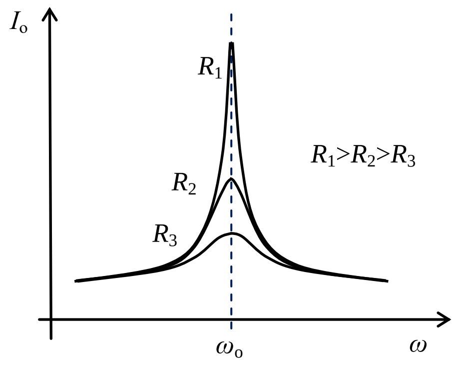
$$I_o = \frac{V_o}{Z} \qquad (12.38)$$

Βάσει αυτής της εξίσωσης, το πλάτος του ρεύματος γίνεται μέγιστο όταν η Z ελαχιστοποιείται. Αυτό συμβαίνει όταν η επαγωγική εμπέδηση X_L γίνει ίση με την χωρητική X_C , μιας και τότε η εμπέδηση Z γίνεται ίση με την ωμική αντίσταση R. Η συχνότητα ω_o για την οποία ελαχιστοποιείται η Z, και άρα μεγιστοποιείται το πλάτος του ρεύματος I_o , ικανοποιεί την σχέση

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega_o L = \frac{1}{\omega_o C} \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad (12.39)$$

Η μεγιστοποίηση του πλάτους του ρεύματος στην ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση σ' ένα κύκλωμα *RLC*, ονομάζεται **συντονισμός**, και η αντίστοιχη γωνιακή συχνότητα ω_o για την οποία συμβαίνει ο συντονισμός, ονομάζεται **γωνιακή συχνότητα συντονισμού** (Knight, 2010), (Young & Freedman, 2010), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013). Η γωνιακή συχνότητα συντονισμού ω_o , είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα του κυκλώματος *RLC*, η οποία ορίζεται από τις τιμές της χωρητικότητας *C* και της αυτεπαγωγής *L*. Επίσης, ορίζεται η **συχνότητα συντονισμού**, $f_o = \omega_o / 2\pi$ (Giancoli, 2012), (Young & Freedman, 2010). Προσέξτε ότι για $\omega < \omega_o$, η χωρητική εμπέδηση X_C είναι μεγαλύτερη της επαγωγικής X_L , και το κύκλωμα παρουσιάζει αρνητική γωνία φάσης (εξ. 12.37) με το ρεύμα να προηγείται της τάσης. Αντιθέτως, για $\omega > \omega_o$, η επαγωγική εμπέδηση X_L, είναι μεγαλύτερη της χωρητικής X_C , και το κύκλωμα παρουσιάζει θετική γωνία φάσης, με την τάση να προηγείται του ρεύματος. Στην κατάσταση του συντονισμού όπου $\omega = \omega_o$, η τάση στα άκρα της γεννήτριας γίνεται ίση με την τάση στα άκρα του αντιστάτη *R*, οπότε ο πυκνωτής και ο επαγωγέας είναι σαν να μην υπάρχουν στο κύκλωμα.

Σε αρκετά κυκλώματα *RLC*, η γεννήτρια εναλλασσομένου ρεύματος δίνει τάση διαφόρων συχνοτήτων. Έτσι είναι δυνατόν να ρυθμίσουμε την συχνότητα ω στην τιμή ω_o , ώστε να επιτύχουμε κατάσταση συντονισμού. Η εξάρτηση του πλάτους ρεύματος I_o από την γωνιακή συχνότητα ω της AC τάσης που δίνει η γεννήτρια στο κύκλωμα *RLC*, φαίνεται στο σχ. 12.9. Όσο πιο διαφορετική είναι η συχνότητα του κυκλώματος ω από την ω_o , τόσο μικρότερο είναι το πλάτος του ρεύματος I_o. Επίσης το I_o εξαρτάται και από την ωμική αντίσταση του κυκλώματος *RLC*, μιας και για την κατάσταση συντονισμού, η εξ. 12.38 δίνει τόσο μεγαλύτερο πλάτος I_o , όσο μικρότερη είναι η ωμική αντίσταση. Γενικά η καμπύλη εξάρτησης του πλάτους ρεύματος I_o συναρτήσει της γωνιακής συχνότητας του κυκλώματος (σχ. 12.9), ονομάζεται **καμπύλη απόκρισης** ή **καμπύλη συντονισμού** του *RLC* κυκλώματος (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Η μορφή της καμπύλης συντονισμού έχει ιδιαίτερη σημασία για τον σχεδιασμό κυκλωμάτων *RLC* σε διάφορες ηλεκτρονικές συσκευές, όπως πχ. τα ραδιόφωνα και οι τηλεοράσεις. Όταν συντονίζουμε τον ραδιοφωνικό μας δέκτη με έναν σταθμό ραδιοφωνικής εκπομπής, στην ουσία επιλέγουμε την κατάλληλη ω (και την αντίστοιχη f), στην οποία εκπέμπει σήμα ο σταθμός. Αυτή η επιλογή γίνεται αλλάζοντας την Z του κυκλώματος του ραδιοφώνου, μεταβάλλοντας την τιμή της σταθεράς αυτεπαγωγής L του πηνίου του κυκλώματος.[36] Ένα ραδιόφωνο με οξεία καμπύλη συντονισμού, μπορεί να συντονίζεται με σταθμούς οι οποίοι εκπέμπουν σε αρκετά κοντινές συχνότητες , και να τους ξεχωρίζει, λαμβάνοντας το σήμα του κάθε σταθμού ξεχωριστά. Γενικώς, ο δέκτης του ραδιοφώνου, λαμβάνει όλα τα εκπεμπόμενα ραδιοφωνικά σήματα μέσω της κεραίας, ανεξαρτήτως συχνότητας, όμως το πλάτος της ταλάντωσης I_o που πηγαίνει στα ηχεία του, είναι μόνο του σήματος του σταθμού που έχει την συχνότητα ω_o , την οποία έχουμε επιλέξει για να συντονίσουμε τον δέκτη μας. Εάν θέλουμε να αλλάξουμε σταθμό, θα πρέπει να συντονίσουμε τον δέκτη μας σε μια νέα συχνότητα ω'_o . Κάποιες φορές που ακούμε ταυτοχρόνως δύο σταθμούς στο ραδιόφωνο, μπορεί να οφείλεται, είτε στην όχι τόσο οξεία καμπύλη συντονισμού του δέκτη μας, είτε στο γεγονός ότι πράγματι οι δυο ραδιοφωνικοί σταθμοί εκπέμπουν στην ίδια ακριβώς συχνότητα.



Σχήμα 12.9 *Το πλάτος ρεύματος I_o σε σειριακό AC κύκλωμα RLC ως συνάρτηση της γωνιακής συχνότητας ω, για διαφορετικές ωμικές αντιστάσεις. Στον συντονισμό του κυκλώματος, όπου $\omega=\omega_o$, το πλάτος είναι μεγαλύτερο για τις μικρότερες ωμικές αντιστάσεις.*

Παράδειγμα 12.5 Συντονισμός ραδιοφώνου

Κεραία ραδιοφώνου λαμβάνει σήμα ραδιοφωνικού σταθμού συχνότητας 1200 kHz, με πλάτος τάσης 7.50 mV. Το σειριακό κύκλωμα συντονισμού *RLC* του ραδιοφώνου, αποτελείται από πηνίο μεταβλητής αυτεπαγωγής L, πυκνωτή χωρητικότητας C=350 pF, και συνολική ωμική αντίσταση R=0.25 Ω. α) Ποια τιμή της αυτεπαγωγής L πρέπει να επιλέξουμε, για να ακούσουμε τον σταθμό; β) Ποιο είναι το πλάτος ρεύματος στο κύκλωμα κατά τον συντονισμό του ραδιοφώνου; γ) Ένας άλλος σταθμός συχνότητας με εντονότερο σήμα εκπομπής στη συχνότητα των 1150 kHz, δημιουργεί στην κεραία σήμα πλάτους τάσης 10 mV. Ποιο είναι το πλάτος ρεύματος που δημιουργεί ο σταθμός των 1150 kHz στο κύκλωμα *RLC*, όταν αυτό είναι συντονισμένο στον σταθμό των1200 kHz;

Λύση

α) Για να συντονίσουμε τον δέκτη μας στην συχνότητα των 1200 kHz του σταθμού, πρέπει να ισχύει η εξ. 12.39. Άρα πρέπει

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} \Rightarrow \omega_o^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_o^2 C} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 \times (1200\times10^3\,\mathrm{Hz})^2 \times 350\times10^{-12}\,\mathrm{F}} \Rightarrow$$
$$L = 50\mu\mathrm{H}$$

β) Το πλάτος ρεύματος I_o στο κύκλωμα *RLC* για την κατάσταση συντονισμού με τον σταθμό, δίνεται από την εξ. 12.36 ως

$$I_o = \frac{V_o}{Z} \Rightarrow I_o = \frac{V_o}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \qquad (1)$$

Επειδή όμως στον συντονισμό ισχύει $X_L = X_C$, η εξ. 1 δίνει

[36] Παλαιότερα, ο συντονισμός των ραδιοφώνων με τους ραδιοφωνικούς σταθμούς, γινόταν με αλλαγή της χωρητικότητας C του κυκλώματος *RLC*, με χρήση μεταλλικών πυκνωτών μεταβλητής χωρητικότητας.

$$I_o = \frac{V_o}{R} \Rightarrow I_o = \frac{7.50\text{mV}}{0.25\Omega} \Rightarrow I_o = 30\text{mA}$$

γ) Η γωνιακή συχνότητα ω που αντιστοιχεί στον σταθμό των 1150 kHz, είναι

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega_o = 2\pi \times 1150\text{kHz} \Rightarrow \omega = 7.22 \times 10^6 \text{rad/s}$$

Γι’ αυτήν την συχνότητα το κύκλωμα *RLC* έχει χωρητική εμπέδηση X_C , ίση με

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{7.22 \times 10^6 \text{rad/s} \times 350 \times 10^{-12}\text{F}} \Rightarrow X_C = 396\Omega$$

και επαγωγική εμπέδηση X_L , ίση με

$$X_L = \omega L = 7.22 \times 10^6 \text{rad/s} \times 50 \times 10^{-6}\text{H} \Rightarrow X_L = 361\Omega$$

Βάσει των παραπάνω τιμών μπορούμε να υπολογίσουμε την εμπέδηση *Z* του κυκλώματος *RLC* για την γωνιακή συχνότητα ω=7.22×10^6 rad/s. Έτσι έχουμε

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(0.25\Omega)^2 + (361\Omega - 396\Omega)^2} = \sqrt{0.7225\Omega^2 + 1225\Omega^2} \Rightarrow Z = 35\Omega$$

Τελικώς το πλάτος ρεύματος του σταθμού των 1150 kHz είναι

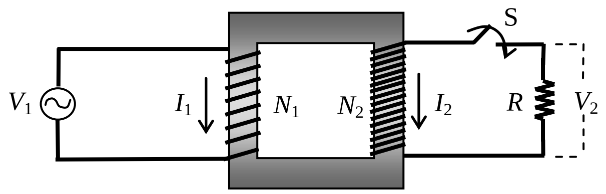
$$I_o = \frac{V_o}{Z} \Rightarrow I_o = \frac{10\text{mV}}{35\Omega} \Rightarrow I_o = 0.28\text{mA}$$

Παρατηρούμε πόσο πιο μικρό είναι το πλάτος του ρεύματος του σταθμού των 1150 kHz (σχεδόν 100 φορές μικρότερο), όταν το ραδιόφωνο είναι συντονισμένο στον σταθμό των 1200 kHz. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο ακούμε τον σταθμό των 1200 kHz, και όχι αυτόν των 1150 kHz.

12.6 Μετασχηματιστές και μεταφορά ηλεκτρικής ισχύος

Όπως προαναφέραμε, το οικιακό ρεύμα που χρησιμοποιούμε για την λειτουργία των ηλεκτρικών συσκευών είναι εναλλασσόμενο. Ενώ στις γραμμές μεταφοράς υπάρχει υψηλή τάση για εξοικονόμηση ενέργειας, στην καθημερινή χρήση του ηλεκτρικού ρεύματος χρειαζόμαστε χαμηλές σχετικά τάσεις. Θα πρέπει λοιπόν, η υψηλή τάση του εναλλασσομένου ρεύματος με κάποιο τρόπο να υποβιβάζεται σε χαμηλή, και αντιστοίχως το ρεύμα να ανυψώνεται έτσι, ώστε η ηλεκτρική ισχύς να διατηρείται σταθερή. Γενικώς, η υποβίβαση ή ανύψωση του ρεύματος ή της τάσης του AC ρεύματος, επιτυγχάνεται με την χρήση ειδικών διατάξεων, οι οποίες ονομάζονται **μετασχηματιστές** (Sears, 1951), (Benumof, 1961), (Grant & Phillips, 1975), (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Halliday, Resnick & Krane, 2009), (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013).

Συνήθως ένας μετασχηματιστής αποτελείται από δυο πηνία τυλιγμένα σε έναν πυρήνα από μαλακό σίδηρο, όπως φαίνεται γραφικώς στο σχ. 12.10. Ο σιδερένιος πυρήνας αυξάνει την μαγνητική ροή των πηνίων, και είναι σε μορφή μεταλλικών φύλλων, πρώτον για να μην αναπτύσσονται μεγάλα επαγωγικά ρεύματα στην ύλη του σιδήρου, τα οποία είναι γνωστά ως δινορεύματα, και δεύτερον για να ελαχιστοποιείται η μαγνητική υστέρηση.[37] Τα **δινορεύματα** είναι μικροσκοπικοί βρόχοι επαγωγικών ρευμάτων που αναπτύσσονται στα μέταλλα κατά την μεταβολή της



Σχήμα 12.10 *Ιδανικός μετασχηματιστής ανύψωσης εναλλασσομένης τάσης με* $N_2>N_1$.

[37] **Μαγνητική υστέρηση** είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η μαγνήτιση, και συνεπώς το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός σιδηρομαγνητικού υλικού, δεν μηδενίζεται, ακόμη και αν μηδενιστεί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μέσα στο οποίο ευρίσκεται το σιδηρομαγνητικό υλικό, και το οποίο αρχικώς προκάλεσε την μαγνήτισή του. Μαγνητικά υλικά τα οποία παρουσιάζουν μεγάλη μαγνητική υστέρηση, απαιτούν κατανάλωση ενέργειας για την μαγνήτιση και την απομαγνήτισή τους, με ταυτόχρονη υπερθέρμανσή τους. Γι’ αυτόν τον λόγο, αυτά τα υλικά θα πρέπει να αποφεύγονται στην κατασκευή μετασχηματιστών, και άλλων διατάξεων εναλλασσομένου ρεύματος.

μαγνητικής ροής διαμέσου της ύλης τους (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013). Στην περίπτωση των μετασχηματιστών, τα δινορεύματα είναι ανεπιθύμητα, διότι προκαλούν απώλειες ηλεκτρικής ενέργειας.

Σ' έναν μετασχηματιστή, το πηνίο που είναι συνδεδεμένο με την πηγή του εναλλασσομένου ρεύματος ονομάζεται **πρωτεύον πηνίο** και έχει N_1 σπείρες. Το πηνίο που είναι συνδεδεμένο με την αντίσταση, δηλ. με την κατανάλωση της ηλεκτρικής ενέργειας, ονομάζεται **δευτερεύον πηνίο** και έστω ότι έχει N_2 σπείρες (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Όταν ο διακόπτης του κυκλώματος του δευτερεύοντος πηνίου είναι ανοικτός (βλ. σχ. 12.10), τότε ρεύμα υπάρχει μόνο στο κύκλωμα του πρωτεύοντος, και επειδή το ρεύμα μεταβάλλεται με τον χρόνο, θα μεταβάλλεται και το μαγνητικό πεδίο μέσα στο πηνίο και επομένως και η μαγνητική του ροή. Από το νόμο του Faraday, στα άκρα του πρωτεύοντος θα αναπτύσσεται AC επαγωγική τάση

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (12.40)$$

όπου Φ_B είναι η μαγνητική ροή που περνά από την κάθε σπείρα του πρωτεύοντος πηνίου. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής θα είναι η ίδια και για κάθε σπείρα του δευτερεύοντος πηνίου, εφόσον έχουν την ίδια διατομή με αυτές του πρωτεύοντος πηνίου, και επομένως λόγω αμοιβαίας επαγωγής, θα αναπτύσσεται στα άκρα του δευτερεύοντος πηνίου AC επαγωγική τάση

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (12.41)$$

Από τις εξισώσεις 12.40 και 12.41 παίρνουμε

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (12.42)$$

ή αλλιώς

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \qquad (12.43)$$

Όταν ισχύει $N_2 > N_1$, τότε η επαγωγική τάση V_2 είναι μεγαλύτερη της V_1 , δηλαδή η τάση εξόδου του μετασχηματιστή είναι μεγαλύτερη της τάσης εισόδου και επομένως έχουμε **μετασχηματιστή ανύψωσης τάσεως**. Αντιθέτως, για $N_2 < N_1$ παίρνουμε V_2 μικρότερη του V_1 , και επομένως έχουμε **μετασχηματιστή υποβιβασμού τάσεως** (Young & Freedman, 2010), (Giancoli, 2012), (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013). Από την εξ. 12.43 είναι φανερό ότι με κατάλληλη επιλογή των N_1 και N_2 μπορούμε να έχουμε οποιαδήποτε τάση εξόδου από μια τάση εισόδου.

Όταν «κλείσει» ο διακόπτης S του δευτερεύοντος πηνίου (βλ. σχ. 12.10), δημιουργείται σ' αυτό ένα ρεύμα εξ επαγωγής I_2. Θεωρώντας έναν ιδανικό μετασχηματιστή χωρίς απώλειες ενέργειας στις σπείρες και στον πυρήνα, η ισχύς που παρέχει το πρωτεύον είναι ίδια με την ισχύ που καταναλώνει η αντίσταση στο δευτερεύον. Δηλαδή ισχύει

$$I_1 V_1 = I_2 V_2 \qquad (12.44)$$

Στην γενική περίπτωση, εάν το πρωτεύον πηνίο έχει αντίσταση R_1, από τον νόμο του Ohm ισχύει ότι,

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} \qquad (12.45\alpha) \qquad \text{και} \qquad R_2 = \frac{V_2}{I_2} \qquad (12.45\beta)$$

όπου R_2 είναι η αντίσταση του δευτερεύοντος πηνίου του μετασχηματιστή. Τότε από την εξ. 12.44 παίρνουμε

$$V_1 = \frac{I_2 V_2}{I_1} \Rightarrow \frac{V_1}{I_1} = \frac{I_2 V_2}{I_1^2} \Rightarrow R_1 = \frac{I_2^2 V_2}{I_1^2 I_2} \Rightarrow R_1 = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 R_2 \qquad (12.46)$$

Επίσης από την εξ. 12.44 παίρνουμε

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} \qquad (12.47)$$

Η εξ. 12.47 στην 12.46 δίνει

$$R_1 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 R_2 \overset{(12.42)}{\Rightarrow} R_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 \qquad (12.48)$$

όπου R_1 είναι η αντίσταση στο πρωτεύον πηνίο, η οποία σχετίζεται άμεσα με την αντίσταση R_2 του δευτερεύοντος κυκλώματος μέσω του πηλίκου των σπειρών του. Αυτό είναι αναμενόμενο διότι, όσο μεγαλύτερο αριθμό σπειρών έχει ένα πηνίο, τόσο μεγαλύτερο μήκος αγώγιμης διαδρομής έχει το κύκλωμά του, και άρα τόσο μεγαλύτερη αντίσταση. Από την εξ. 12.43, συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματιστής εκτός από ρεύματα και τάσεις, μετασχηματίζει και αντιστάσεις. Επειδή η εξ. 12.43 είναι απόρροια της εξ.12.39, ισχύει για μεταφορά της μεγίστης ισχύος από την πηγή εναλλασσομένου ρεύματος στην αντίσταση R_2. Στην πραγματικότητα οι μετασχηματιστές παρουσιάζουν απώλειες ισχύος, λόγω μαγνητικής υστέρησης στον πυρήνα τους αλλά και λόγω θερμικών απωλειών στα σύρματα των σπειρών. Έτσι ένας μετασχηματιστής μπορεί να προσφέρει στο δευτερεύον κύκλωμα από 90 έως 99% της ισχύος της πηγής του.

Οι μετασχηματιστές είναι απαραίτητοι για την μεταφορά ηλεκτρικής ισχύος σε μεγάλες αποστάσεις. Όπως προαναφέρθηκε η μεταφορά πρέπει να γίνεται σε υψηλή τάση για να κρατείται το ρεύμα χαμηλό, ώστε οι απώλειες ισχύος σε θερμότητα στις γραμμές μεταφοράς να είναι χαμηλές. Έτσι, ενώ στον τόπο παραγωγής του ρεύματος η τάση είναι εκατοντάδες χιλιάδες ή και εκατομμύρια Volts, στους σταθμούς διανομής της ηλεκτρικής ενέργειας η τάση υποβιβάζεται σε μερικές δεκάδες χιλιάδες Volts μέσω ειδικών μετασχηματιστών. Στη συνέχεια η ενέργεια μεταφέρεται στις πόλεις και τα χωριά, και τελικά στους στύλους της ΔΕΗ έξω από τις οικίες. Εκεί η τάση πρέπει να υποβιβασθεί εκ νέου στα 220 V, με την χρήση άλλων μετασχηματιστών.[38] Υποβιβάζοντας την τάση αυξάνουμε το ρεύμα που είναι χρήσιμο για τις διάφορες οικιακές χρήσεις. Οι περισσότερες συσκευές λειτουργούν με 220 V από το δίκτυο μέσω των ρευματοδοτών πριζών που έχουν δυο εισόδους, μια με τάση 220 V και μια ουδέτερη με δυναμικό αυτό της Γης (μηδέν).

Παράδειγμα 12.6 Μετασχηματιστής τάσης

Ένας μετασχηματιστής έχει N_1=350 σπείρες στο πρωτεύον πηνίο, και N_2=2000 σπείρες στο δευτερεύον. Εάν η τάση εισόδου είναι $V(t)$=170Vcosωt, α) ποια είναι η ενεργός τάση που αναπτύσσεται στους ακροδέκτες του δευτερεύοντος πηνίου; β) Εάν η αντίσταση του πρωτεύοντος πηνίου είναι 200 Ω, πόση είναι η αντίσταση του δευτερεύοντος πηνίου; γ) Ποιες είναι οι ενεργές τιμές του ρεύματος στην είσοδο και την έξοδο του μετασχηματιστή;

Λύση

α) Στο πρωτεύον πηνίο η ενεργός τάση είναι

$$V_{1\varepsilon\nu} = \frac{V_{o1}}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{1\varepsilon\nu} = \frac{170\text{V}}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_{1\varepsilon\nu} = 120.2\text{V}$$

Θεωρώντας ότι δεν έχουμε απώλειες ενέργειας από το πρωτεύον στο δευτερεύον πηνίο γράφουμε

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \frac{V_{1\varepsilon\nu}}{V_{2\varepsilon\nu}} = \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow V_{2\varepsilon\nu} = \frac{N_2 V_{1\varepsilon\nu}}{N_1}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές παίρνουμε

$$V_{2\varepsilon\nu} = \frac{2000}{350} \times 170\text{V} \Rightarrow V_{2\varepsilon\nu} = 687\text{V}$$

β) Από την εξ. 12.48 παίρνουμε για την αντίσταση R_2 του δευτερεύοντος πηνίου

$$R_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2 \Rightarrow R_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 R_1 \Rightarrow R_2 = \left(\frac{2000}{350}\right)^2 200\Omega \Rightarrow R_2 = 6531\Omega$$

[38] Η εναλλασσόμενη τάση είναι 120 V στην Βρετανία, Αμερική, Καναδά και κάποιες άλλες Αγγλοσαξωνικές χώρες.

γ) Για την ενεργό τιμή του ρεύματος στην είσοδο έχουμε

$$V_{1\varepsilon\nu} = I_{1\varepsilon\nu} R_1 \Rightarrow I_{1\varepsilon\nu} = \frac{V_{1\varepsilon\nu}}{R_1} \Rightarrow I_{1\varepsilon\nu} = \frac{120.2\text{V}}{200\Omega} \Rightarrow I_{1\varepsilon\nu} = 0.601\text{A}$$

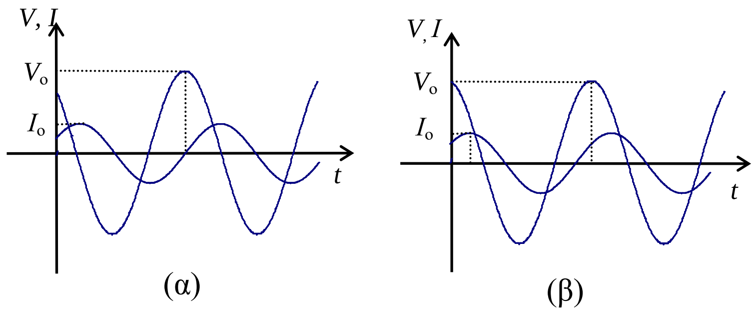
Ομοίως στην έξοδο του μετασχηματιστή έχουμε

$$V_{2\varepsilon\nu} = I_{2\varepsilon\nu} R_2 \Rightarrow I_{2\varepsilon\nu} = \frac{V_{2\varepsilon\nu}}{R_2} \Rightarrow I_{2\varepsilon\nu} = \frac{687\text{V}}{6531\Omega} \Rightarrow I_{2\varepsilon\nu} = 0.105\text{A}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 12

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Ε12.1 Τα δύο παρακάτω διαγράμματα τάσεως και ρεύματος στο σχ. 12.11, ανήκουν σε δύο κυκλώματα AC ρεύματος, ένα *RC* και ένα *RL*. Ποιο είναι το διάγραμμα κάθε κυκλώματος;

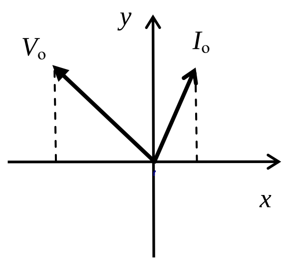


Σχήμα 12.11 *Ερώτηση 12.1.*

Ε12.2 Μια εναλλασσόμενη τάση με σταθερό πλάτος εφαρμόζεται στα άκρα ενός στοιχείου σε ένα κύκλωμα. Εάν η συχνότητα της τάσεως αυξηθεί, πώς θα μεταβληθεί το ρεύμα στο στοιχείο, αν αυτό είναι: α) αντιστάτης, β) πυκνωτής, και γ) επαγωγέας;

Ε12.3 Σ' ένα σειριακό κύκλωμα *RLC*, υπό ποιες προϋποθέσεις η σύνθετη αντίσταση γίνεται ελάχιστη; Τί φαινόμενο παρατηρείται τότε στο κύκλωμα;

Ε12.4 Στο σχ. 12.12 φαίνονται οι φάσορες της τάσης και του ρεύματος σ'ένα σειριακό AC κύκλωμα *RLC,* σε μια χρονική στιγμή. Απαντήστε τι συμβαίνει στην επόμενη χρονική στιγμή, για το μέγεθος της στιγμιαίας τάσης και το αντίστοιχο μέγεθος του στιγμιαίου ρεύματος. α) Αυξάνονται και τα δύο. β) Μειώνονται και τα δύο. γ) Αυξάνεται η τάση και μειώνεται το ρεύμα. δ) Μειώνεται η τάση και αυξάνεται το ρεύμα. δ) Δεν γνωρίζουμε τι κάνουν τα μεγέθη. Ποια εμπέδηση είναι μεγαλύτερη, η χωρητική ή η επαγωγική;



Σχήμα 12.12 *Ερώτηση 12.4.*

Ε12.5 Ένα AC κύκλωμα *RLC*, το οποίο ευρίσκεται σε συντονισμό, ονομάζεται και κύκλωμα ταλάντωσης. Τί είναι αυτό που ταλαντώνεται στο κύκλωμα; Τί καταναλώνει την ενέργεια σε ένα τέτοιο κύκλωμα, και πώς αυτή παρέχεται σ' αυτό;

Ε12.6 Περιγράψτε εν συντομία πώς επιδρά η γωνιακή συχνότητα της πηγής τάσης στην α) ωμική αντίσταση, β) στην επαγωγική εμπέδηση, γ) στην χωρητική εμπέδηση, δ) στην εμπέδηση ενός AC κυκλώματος *RLC*, κοντά στη συχνότητα συντονισμού (για μικρό *R*), και ε) στην εμπέδηση ενός AC κυκλώματος *RLC*, μακριά από την συχνότητα συντονισμού (για μικρό *R*).

Ε12.7 Ένα σειριακό AC κύκλωμα *RLC* παρουσιάζει V_C=8.0 V, V_R=7.0 V και V_L=6.0 V. Η γωνιακή συχνότητα του κυκλώματος είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της συχνότητας συντονισμού;

Ε12.8 Ποια είναι η γωνία φάσης ενός σειριακού κυκλώματος *RLC* στην κατάσταση συντονισμού; α) 90^o, β) 180^o, γ) -90^o, δ) 0^o, ε) Καμία από τις προηγούμενες απαντήσεις δεν είναι σωστή.

Ε12.9 Ένας μετατροπέας AC ρεύματος (AC adapter), χρησιμοποιεί έναν μετασχηματιστή υποβιβασμού τάσεως, για την λειτουργία διαφόρων ηλεκτρικών συσκευών. Ο μετασχηματιστής μετατρέπει την εναλλασσόμενη τάση 220 V του δικτύου σε 9 V, ενώ στην συνέχεια ανορθωτές μετατρέπουν την AC τάση σε DC, για την λειτουργία των συσκευών. Ποιο πηνίο του μετασχηματιστή έχει περισσότερες σπείρες, το πρωτεύον ή το δευτερεύον; Ποιος είναι ο λόγος των σπειρών των δύο πηνίων;

Ε12.10 Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας μετασχηματιστής στο συνεχές ρεύμα; Εξηγείστε την απάντησή σας. Τί θα συμβεί, εάν ένας μετασχηματιστής που έχει σχεδιαστεί για λειτουργία στα 220 V εναλλασσομένης τάσεως, συνδεθεί σε 220 V συνεχούς; Θα μετράτε τάση στην έξοδο του μετασχηματιστή, και αν ναι, θα είναι AC ή DC;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

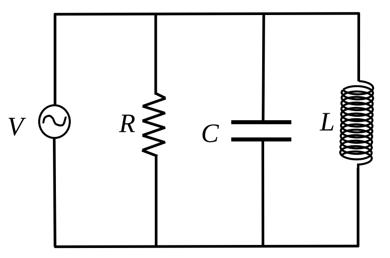
Π12.1 AC κύκλωμα πυκνωτή. Ένα ψυγείο περιέχει πυκνωτή για την εκκίνηση της λειτουργίας του. Για να δημιουργηθεί ρεύμα εντάσεως 0.950 A, στα άκρα του πυκνωτή εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση πλάτους 230 V και συχνότητας 50 Hz. Να ευρεθεί η χωρητικότητα του πυκνωτή. *Απάντηση*: 13.2 μF.

Π12.2 Κύκλωμα εναλλασσομένου ρεύματος. Η τάση εξόδου σε μια γεννήτρια AC ρεύματος δίνεται από την σχέση $V = V_o \sin(\omega t - \pi/4)$, όπου V_o=30 V, και ω=300 rad/s. Το ρεύμα δίνεται από την σχέση $I = I_o \sin(\omega t - 3\pi/4)$, όπου I_o=650 mA. α) Σε ποια στιγμή, μετά την *t*=0, η τάση της γεννήτριας γίνεται μέγιστη; β) Σε ποια χρονική στιγμή γίνεται μέγιστο το ρεύμα; γ) Το κύκλωμα εκτός από την γεννήτρια περιέχει και ένα άλλο απλό στοιχείο. Το στοιχείο αυτό είναι αντιστάτης, πυκνωτής ή επαγωγέας; Δικαιολογείστε την απάντησή σας. δ) Υπολογίστε την αντίσταση του στοιχείου στο κύκλωμα.

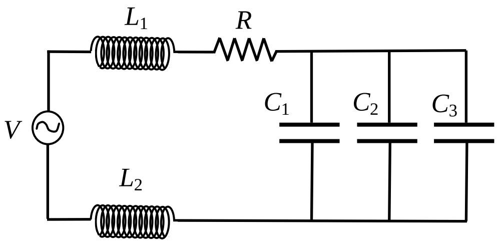
Π12.3 Σειριακό AC κύκλωμα *RLC*. Σ' ένα κύκλωμα *RLC* όπως αυτό του σχήματος 12.6, η ωμική αντίσταση είναι 250 Ω, η χωρητικότητα του πυκνωτή 5 μF και η αυτεπαγωγή 0.8 H. Το κύκλωμα συνδέεται με πηγή εναλλασσομένου ρεύματος συχνότητας 220 rad/s, η οποία δίνει ρεύμα πλάτους 0.520 A. Να ευρείτε: α) την σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος, β) το πλάτος της εναλλασσόμενης τάσης, γ) τη γωνία φάσεως *φ* του κυκλώματος, και δ) τις μέγιστες τάσεις στα άκρα του κάθε στοιχείου του κυκλώματος, δηλαδή τα V_{oR}, V_{oC} και τα V_{oL}.

Π12.4 Σειριακό AC κύκλωμα *RLC*. Σ' ένα σειριακό κύκλωμα *RL*C, η μέγιστη τιμή της τάσης στα άκρα του επαγωγέα είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από την μέγιστη τιμή στα άκρα του αντιστάτη. Η μέγιστη τιμή της τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι ίδια με την μέγιστη τιμή στα άκρα του αντιστάτη. α) Ποια είναι η γωνία φάσης του κυκλώματος. Προηγείται η τάση ή το ρεύμα; β) Αν η μέγιστη τιμή της τάσης της γεννήτριας είναι 45.0 V, πόση πρέπει να είναι η ωμική αντίσταση του κυκλώματος ώστε το μέγιστο ρεύμα να είναι 370 mA; *Απάντηση*: α) φ=63.4^o, β) *R*=70.3 Ω.

Π12.5 AC κύκλωμα *RLC* σε παράλληλη σύνδεση. Ένας αντιστάτης *R*, ένας πυκνωτής *C*, και ένας επαγωγέας *L*, συνδέονται μεταξύ τους με παράλληλη σύνδεση και όλα μαζί τα στοιχεία συνδέονται με γεννήτρια ρεύματος, όπως δείχνει το σχ. 12.13. Εάν η γεννήτρια δίνει τάση $V = V_o \sin\omega t$, καθορίστε το ρεύμα ως συνάρτηση του χρόνου, α) στον αντιστάτη, β) στον πυκνωτή, και γ) στο πηνίο. δ) Υπολογίστε την έκφραση της χρονικής μεταβολής του ρεύματος στο κύκλωμα, δίνοντας το πλάτος και την φάση του. ε) Καθορίστε την εμπέδηση *Z* του κυκλώματος.



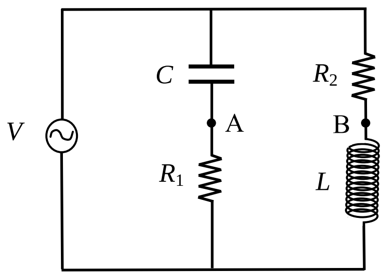
Σχήμα 12.13 *Πρόβλημα 12.5.*



Σχήμα 12.14 *Πρόβλημα 12.6.*

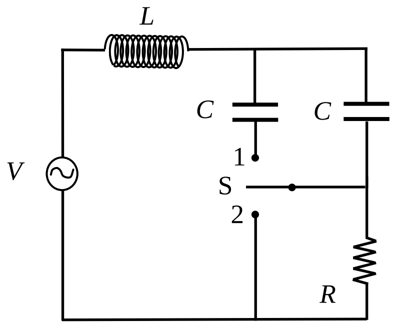
Π12.6 AC κύκλωμα *RLC*. Στο σχ. 12.14 μια γεννήτρια ρυθμιζόμενης συχνότητας *f* συνδέεται με αντιστάτη R=150 Ω, δύο επαγωγείς με L_1=2.50 mH και L_2=3.50 mH, και τρείς πυκνωτές C_1= 3.20 μF, C_2= 5.70 μF και C_3= 4.10 μF. α) Πόση είναι η συχνότητα συντονισμού του κυκλώματος; β) Τί θα συμβεί στην συχνότητα συντονισμού αν αυξηθεί το L_1; γ) Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα αν αποσυνδέσουμε την χωρητικότητα C_3. *Υπόδειξη*: Χρησιμοποιήστε το συμπέρασμα του προβλήματος 11.3 για την σύνδεση των επαγωγέων.

Π12.7 AC κύκλωμα *RLC*. Για το κύκλωμα του σχήματος 12.15 δείξτε ότι εάν το δυναμικό στο σημείο Α είναι το ίδιο με αυτό στο σημείο Β, τότε ισχύει η σχέση $R_1R_2=L/C$, ανεξαρτήτως της συχνότητας της γεννήτριας.



Σχήμα 12.15 *Πρόβλημα 12.7.*

Π12.8 AC κύκλωμα *RLC*. Η γεννήτρια AC ρεύματος παρέχει στο κύκλωμα του σχήματος 12.16 τάση 120 V με συχνότητα 60 Hz. Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, όπως φαίνεται στο σχήμα, το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά γωνία φάσης 20°. Όταν ο διακόπτης είναι στην θέση 1, το ρεύμα έπεται της τάσης κατά γωνία φάσης 10°. Όταν ο διακόπτης είναι στην θέση 2, η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι 2.00 A. Να ευρεθούν τα *R*, *C* και *L* του κυκλώματος. *Απάντηση*: R=165 Ω, C=14.9 μF, και L=313 mH.



Σχήμα 12.16 *Πρόβλημα 12.8.*

Π12.9 Σχεδιασμός ραδιοφωνικού δέκτη FM. Ο αγαπημένος σας σταθμός «Classic FM» εκπέμπει στη συχνότητα των 105.0 MHz, ενώ ο ανεπιθύμητος για σας σταθμός «Power FM» εκπέμπει στα 105.1 MHz. Η απόσταση του κάθε σταθμού από το σπίτι σας είναι περίπου ίδια, όπως είναι και η ισχύς του σήματός τους, η οποία μετράται στο σπίτι σας 1.50 V. Θέλετε να σχεδιάσετε έναν ραδιοφωνικό δέκτη *RLC* με τις εξής ιδιότητες: α) Να δίνει μέγιστη απόκριση ισχύος στον «Classic FM». β) Η μέση ισχύς που παρέχεται στον αντιστάτη να είναι 100 φορές μεγαλύτερη για τον «Classic FM», από αυτή του «Power FM», ώστε να μην ακούτε τον δεύτερο. Εάν πρέπει να χρησιμοποιήσετε ένα πηνίο με L=2.5 μH, υπολογίστε την χωρητικότητα *C* και την αντίσταση *R* που απαιτεί ο σχεδιασμός του ραδιοφωνικού δέκτη.

Π12.10 Μετασχηματιστής. Το πρωτεύον πηνίο ενός μετασχηματιστή αποτελείται από N_1=1000 σπείρες, ενώ το δευτερεύον από N_2=50 σπείρες. Εάν η ενεργός τάση στο πρωτεύον πηνίο είναι 220 V, πόση είναι η αντίστοιχη τάση στο δευτερεύον πηνίο, όταν το κύκλωμά του είναι ανοικτό; Εάν το δευτερεύον πηνίο συνδεθεί με αντίσταση 20 Ω, ποιες είναι οι ενεργές εντάσεις ρεύματος στα πηνία του μετασχηματιστή; *Απάντηση*: α) 11 V, και β) 27.5 mA και 0.55 A.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Benumof, R. (1961). *Concepts in Electricity and Magnetism*. Copyright © 1961 by Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Sears, F. W. (1951). *Electricity and magnetism*. Copyright © 1951 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

Κεφάλαιο 13

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

Σύνοψη

Στο δέκατοτρίτο τούτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell οι οποίες δομούν την θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού. Επίσης περιγράφονται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και η διάδοσή τους στο κενό. Επιπλέον, μελετάται η εξίσωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος καθώς και η πόλωση και η ενέργεια κύματος. Τέλος αναφέρονται οι ιδιότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και περιγράφεται το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα.

Προαπαιτούμενη γνώση

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός. Μερικές παράγωγοι. Κύματα.

13.1 Ηλεκτρομαγνητική θεωρία και εξισώσεις του Maxwell

Έως τώρα έχουμε περιγράψει τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα βάσει διαφόρων νόμων όπως π.χ. ο νόμος του Coulomb, του Gauss, του Ampere, του Faraday κ.ά. Στις αρχές του δεκάτου ενάτου αιώνα, οι νόμοι αυτοί απετέλεσαν την απαρχή της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, που όμως αρχικά περιέγραφαν μάλλον αποσπασματικά τα διάφορα φαινόμενα, χωρίς να αποτελούν μέρος μιας πλήρους φυσικής θεωρίας. Το 1865 όμως, ο σπουδαίος Σκωτσέζος φυσικός James Clerk Maxwell (1831-1879), παρουσίασε την ενοποιημένη **ηλεκτρομαγνητική θεωρία** βασιζόμενος σε τέσσερις μόνο εξισώσεις. Βάσει αυτών, και υιοθετώντας την έννοια του πεδίου του Faraday, ο Maxwell μπορούσε να περιγράψει κάθε γνωστό ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο στη Φύση. Οι εξισώσεις αυτές είναι ο νόμος του Gauss για τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό, ο νόμος του Faraday και ο νόμος του Ampere (τροποποιημένος από τον ίδιο τον Maxwell). Παρότι ο Maxwell δεν ανακάλυψε αυτές τις εξισώσεις, φέρουν το όνομά του ως **εξισώσεις του Maxwell**, διότι αυτός πρώτος, αναγνωρίζοντας την σπουδαιότητά τους, τις διατύπωσε ως ένα σύνολο που απαρτίζουν την σύγχρονη ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Επίσης, βάσει αυτών των εξισώσεων, οι οποίες περιγράφουν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στο χώρο, ο Maxwell κατόρθωσε να προβλέψει την ύπαρξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και την συσχέτιση τους με το φως. Αναλυτικά οι τέσσερις εξισώσεις του Maxwell για ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία στο κενό, είναι

James Clerk Maxwell (1831-1879)
(https://commons.wikimedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell#/media/File:James_Clerk_Maxwell.png). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \quad \text{(νόμος του Gauss στον ηλεκτρισμό)} \tag{13.1}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \quad \text{(νόμος του Gauss στον μαγνητισμό)} \tag{13.2}$$

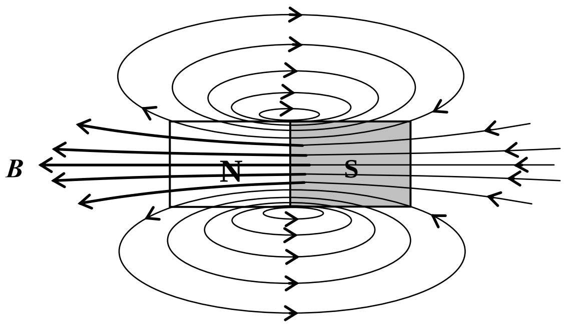
$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{(νόμος του Faraday)} \tag{13.3}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_o \left(I + \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} \right) \quad \text{(νόμος του Ampere-Maxwell)} \tag{13.4}$$

Εάν στο χώρο υπάρχει κάποιο υλικό, τότε για την εφαρμογή των εξισώσεων εντός του υλικού, θα πρέπει η ηλεκτρική επιτρεπτότητα ε_o και η μαγνητική διαπερατότητα μ_o του κενού, να αντικατασταθούν με τις αντίστοιχες του υλικού, ε και μ αντιστοίχως.

Ας σχολιάσουμε λίγο τις εξισώσεις του Maxwell. Από τις τέσσερις εξισώσεις, οι δυο πρώτες, (εξ. 13.1 και 13.2) είναι ολοκληρώματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου πάνω σε κλειστές επιφάνειες, ενώ οι δυο τελευταίες (εξ. 13.3 και 13.4), είναι επικαμπύλια ολοκληρώματα του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου πάνω σε κλειστές διαδρομές. Γενικά, οι εξισώσεις μας πληροφορούν πως δημιουργούνται τα πεδία ***E*** και ***B*** από τα φορτία και τα ρεύματα, αλλά και πως αυτά τα πεδία επάγονται από την χρονική μεταβολή άλλων πεδίων (Knight, 2010). Είναι σημαντικό, όχι μόνο να γνωρίζουμε τις εξισώσεις, αλλά πώς να τις εφαρμόζουμε επιτυχώς. Επίσης είναι θεμελιώδους σημασίας να είμαστε γνώστες της φυσικής που κρύβεται πίσω από κάθε μια εξίσωση. Έτσι λοιπόν, η πρώτη εξίσωση του Maxwell (εξ. 13.1) περιγράφει την δημιουργία ηλεκτρικού πεδίου από στατικά ηλεκτρικά φορτία. Από την εξ. αυτή μπορεί να εξαχθεί ο νόμος του Coulomb.

Η δεύτερη εξίσωση του Maxwell, είναι ο νόμος του Gauss για το μαγνητικό πεδίο, ο οποίος μας πληροφορεί ότι η μαγνητική ροή μιας κλειστής επιφάνειας είναι πάντα μηδέν. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όσες μαγνητικές δυναμικές γραμμές εισέρχονται στην επιφάνεια, άλλες τόσες εξέρχονται, διότι οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές δεν έχουν αρχή και τέλος, όπως συμβαίνει για τις ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές, αλλά είναι κλειστές, όπως περιγράφει το σχ. 13.1 για το μαγνητικό πεδίο ενός ραβδόμορφου μαγνήτη (Giancoli, 2012). Ο λόγος για την ιδιαίτερη αυτή μορφή των μαγνητικών δυναμικών γραμμών, οφείλεται στο γεγονός ότι στην Φύση δεν υπάρχουν μεμονωμένες μαγνητικές ποσότητες (βόρειοι και νότιοι μαγνητικοί πόλοι), όπως υπάρχουν μεμονωμένα αρνητικά και θετικά φορτία. Με άλλα λόγια, στην Φύση δεν έχει παρατηρηθεί ποτέ μέχρι σήμερα κάποιο μαγνητικό ισοδύναμο των ηλεκτρικών φορτίων, δηλ. μαγνητικά μονόπολα. Αυτό προφανώς οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαγνητικές ιδιότητες της ύλης απορρέουν εν τέλει από το ηλεκτρικό φορτίο (βλ. εδάφιο 9.9). Συγκρίνοντας λοιπόν τις δύο πρώτες εξισώσεις του Maxwell, παρατηρούμε μια ασυμμετρία για την μαγνητική ροή, σε σχέση με την ηλεκτρική.



Σχήμα 13.1 *Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές ενός ραβδόμορφου μαγνητικού διπόλου. Προσέξτε ότι οι γραμμές δεν έχουν αρχή και τέλος. Είναι πάντα κλειστές.*

Η τρίτη εξίσωση του Maxwell (εξ. 13.3) είναι ο νόμος του Faraday, ο οποίος περιγράφει πώς ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί ένα επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Επειδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου σε κλειστή διαδρομή είναι διάφορο του μηδενός, η εξίσωση μας πληροφορεί ότι αυτού του είδους το πεδίο είναι μη διατηρητικό, σε αντίθεση με το διατηρητικό ηλεκτροστατικό ηλεκτρικό πεδίο της πρώτης εξίσωσης (εξ. 13.1). Σημειώστε ότι σε όλες τις εξισώσεις του Maxwell, δεν γίνεται διαχωρισμός σε διατηρητικό και μη ηλεκτρικό πεδίο, αλλά στο συνολικό πεδίο E, του αθροίσματος δηλ. κάθε διατηρητικού και μη πεδίου στο χώρο (Young & Freedman, 2010).

Η τέταρτη εξίσωση του Maxwell είναι ο νόμος του Ampere, τροποποιημένος από τον ίδιο τον Maxwell με έναν επιπλέον όρο, ο οποίος περιγράφει την δημιουργία μαγνητικού πεδίου από χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο. Ο νόμος του Ampere, τον οποίο μελετήσαμε στο εδάφιο 9.5, ισχύει για σταθερά ηλεκτρικά ρεύματα, τα οποία δεν μεταβάλλονται με τον χρόνο. Το ερώτημα όμως που προκύπτει για την δημιουργία μαγνητικού πεδίου από ηλεκτρικό ρεύμα, είναι αν παράγεται μαγνητικό πεδίο και από ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, κατά αντιστοιχία της δημιουργίας επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου από μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο (νόμος Faraday, εξ. 13.3). Αυτό θα δημιουργούσε μια εξαιρετική συμμετρία στη Φύση, μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Την απάντηση την έδωσε ο Maxwell, με την ενσωμάτωση ενός δεύτερου όρου στο δεξί μέρος της εξίσωσης του Ampere, ο οποίος έχει μέτρο $\varepsilon_o \dfrac{d\Phi_E}{dt}$ με διαστάσεις ρεύματος, και ονομάζεται **ρεύμα μετατόπισης** [39] (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Halliday, Resnick & Walker, 2013), (Serway & Jewett, 2013). Με αυτή την προσθήκη του Maxwell, ο νόμος του Ampere έγινε πιο πλήρης, και περιγράφει τη δημιουργία μαγνητικού πεδίου όχι μόνο

[39] Ο όρος ρεύμα μετατόπισης δεν είναι ακριβής, διότι ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δεν δημιουργεί πάντοτε ρεύμα. Σκεφθείτε ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δυο οπλισμών επίπεδου πυκνωτή. Μεταξύ των οπλισμών δεν δημιουργείται ρεύμα, μιας και δεν υπάρχουν φορτία, όπως δεν υπάρχει και κάποια μετατόπιση. Ο όρος ρεύμα μετατόπισης για τον όρο του Maxwell επικράτησε κυρίως για ιστορικούς λόγους, από μια παλιά θεωρία που στη συνέχεια απορρίφθηκε.

από σταθερό ρεύμα, αλλά και από μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο ή γενικότερα μεταβαλλόμενη ηλεκτρική ροή. Αυτή η συνεισφορά του Maxwell είναι θεμελιώδους σημασίας, διότι εφόσον ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, και αυτό το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, δημιουργεί με τη σειρά του ένα νέο μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, καταλαβαίνουμε ότι με αυτόν τον τρόπο μπορεί να δημιουργηθεί στο χώρο μια ηλεκτρομαγνητική διάδοση πεδίων $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$, που στην ουσία αποτελεί ένα **ηλεκτρομαγνητικό κύμα** (ΗΜ κύμα). Έτσι, μια εξαιρετικής σημασίας πρόβλεψη της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας του Maxwell είναι η ύπαρξη ΗΜ κυμάτων, τα οποία μάλιστα μεταδίδονται ακόμη και στο κενό, με ταχύτητα διάδοσης αυτήν του φωτός. Θα αναφερθούμε στα ΗΜ κύματα λεπτομερώς στα παρακάτω εδάφια.

Σε προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι εάν τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία δεν μεταβάλλονται χρονικώς, μπορούμε να μελετήσουμε τις επιδράσεις τους πάνω στην ύλη, ξεχωριστά. Για παράδειγμα, η δύναμη που ασκούν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στην ηλεκτρικά φορτισμένη ύλη, περιγράφεται από την εξίσωση του Lorentz

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \qquad (13.5)$$

όπου η συνολική δύναμη πάνω στο φορτίο είναι το διανυσματικό άθροισμα δυο ανεξάρτητων δυνάμεων της ηλεκτρικής και της μαγνητικής. Αντιθέτως, στην περίπτωση που το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο μεταβάλλονται χρονικώς, τότε η εξίσωση του Lorentz δεν είναι αρκετή, και οι εξισώσεις του Maxwell είναι απαραίτητες. Επομένως οι εξισώσεις του Maxwell και αυτή του Lorentz, ορίζουν την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, στο πλαίσιο της οποίας, με εξαίρεση του κβαντικού επιπέδου φωτονίων, μπορούμε να περιγράψουμε κάθε ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο στη Φύση, ακόμη και στα πλαίσια της Σχετικότητας. Παρότι στην πορεία του παρόντος συγγράμματος, χρησιμοποιήσαμε αρκετούς νόμους για την ερμηνεία ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων, όπως π.χ. ο νόμος του Ohm, των Biot-Savart, του Kirchoff, του Lenz κ.ά., αυτοί οι νόμοι δεν είναι θεμελιώδεις, μιας και μπορούν να εξαχθούν από τις εξισώσεις του Maxwell. Η σπουδαιότητα των εξισώσεων του Maxwell, είναι ανάλογη των νόμων του Νεύτωνα στην Μηχανική. Αν και όπως προαναφέραμε, η εύρεση των εξισώσεων αυτών ήταν απόρροια εργασιών άλλων επιστημόνων [40] πριν από τον Maxwell [41], ο τελευταίος ενοποίησε και συμπλήρωσε τις εξισώσεις σε μια συμμετρική ενοποιημένη φυσική θεωρία, με την οποία ήταν δυνατή μια πλήρης περιγραφή των ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων. Παρόλα αυτά, αξίζει να σημειώσουμε ότι στην πραγματεία του Maxwell για τον Ηλεκτρομαγνητισμό (ΗΜ), οι τέσσερις εξισώσεις δεν παρουσιάζονταν με την σημερινή τους μαθηματική μορφή. Αυτό έγινε αργότερα από τον Άγγλο αυτοδίδακτο μαθηματικό, φυσικό και τηλεγραφητή Oliver Heaviside (1850-1925) το 1884. Εντούτοις, σήμερα, οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να γραφτούν και με διαφορική μορφή, η οποία σε μερικές περιπτώσεις είναι πιο εύχρηστη. Για λόγους πληρότητας παρουσιάζουμε τις εξισώσεις του Maxwell στην διαφορική τους μορφή, με σειρά αντιστοιχίας αυτή των εξισώσεων 13.1 έως 13.4 (Feynman, Leighton & Sands, 2009), (Grant & Phillips, 1975). Έτσι έχουμε

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad \text{(νόμος του Gauss στον ηλεκτρισμό)} \qquad (13.6)$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \quad \text{(νόμος του Gauss στον μαγνητισμό)} \qquad (13.7)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{(νόμος του Faraday)} \qquad (13.8)$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_o\left(\boldsymbol{j} + \varepsilon_o\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \quad \text{(νόμος του Ampere-Maxwell)} \qquad (13.9)$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου και $\boldsymbol{j}$ είναι η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος.

Η συμβολή του Maxwell στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι ανάλογη της συμβολής του Νεύτωνα στην Μηχανική, του Carnot (Καρνότ) στην Θερμοδυναμική και του Αϊνστάιν στην θεωρία της σχετικότητας και της κβαντομηχανικής. Στην πραγματικότητα ο Maxwell ήταν μια ιδιοφυΐα, και ο πρώτος άνθρωπος που κατάλαβε την πραγματική φύση του φωτός, ως ΗΜ κύμα που διαδίδεται στο χώρο με ταχύτητα c. Δικαίως σήμερα ο Maxwell θεωρείται ο «πατέρας» του Ηλεκτρομαγνητισμού.

[40] Οι Gauss, Faraday και Ampere, δεν θα αναγνώριζαν τους νόμους τους αν έβλεπαν τις εξισώσεις 13.1 έως και 13.4.

[41] Ο Maxwell γεννήθηκε το 1831, χρονιά που ο Faraday διατύπωσε το νόμο της επαγωγής.

13.2 Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Όπως προείπαμε, η ηλεκτρομαγνητική θεωρία προβλέπει την ύπαρξη ΗΜ κυμάτων, τα οποία μπορούν να διαδίδονται ακόμα και στο κενό. Ας ιδούμε πώς μπορεί να συμβαίνει αυτό. Εάν θεωρήσουμε την τέταρτη εξίσωση του Maxwell στο κενό, όπου δεν υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο και ρεύμα, η εξ. 13.4 γράφεται

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{13.10}$$

Γράφοντας τώρα την ηλεκτρική ροή ως $\Phi_E = \int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS}$, και την αντίστοιχη μαγνητική ως $\Phi_B = \int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dS}$, ο νόμος του Faraday και η εξ. 13.10, γράφονται αντιστοίχως ως

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dl} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dS} \tag{13.11}$$

και

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \mu_o \varepsilon_o \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} \tag{13.12}$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 13.11 και 13.12, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια εμφανέστατη συμμετρία και αλληλοεξάρτηση μεταξύ του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Η χρονική μεταβολή του ενός πεδίου προκαλεί την δημιουργία του άλλου και αντιστρόφως. Με αυτόν τον τρόπο, μια διαταραχή του ενός πεδίου δημιουργεί το άλλο, με αποτέλεσμα η διαταραχή αυτή να διαδίδεται στο χώρο συνεχώς υπό μορφή κύματος. Οι διαταραχές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που διαδίδονται στο χώρο, ονομάζονται **ηλεκτρομαγνητικά κύματα**, και ο πρώτος που τα προέβλεψε μέσω της θεωρίας του ήταν ο Maxwell. Το εκπληκτικό με τα ΗΜ κύματα είναι ότι, ενώ έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τα μηχανικά κύματα και περιγράφονται μαθηματικώς με τον ίδιο τρόπο, μπορούν να διαδίδονται ακόμα και στο κενό, δηλ. με απουσία μέσου διάδοσης. Αυτή η ιδιότητά τους είναι συγκλονιστική, διότι συνεπάγεται ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο μπορούν να υπάρχουν ακόμη και εκεί όπου δεν υπάρχουν φορτία και ρεύμα! Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο είναι δηλαδή πραγματικές φυσικές οντότητες, και όχι απλά μαθηματικές επινοήσεις που μας βοηθούν στην περιγραφή φαινομένων. Αντιθέτως με τα ΗΜ κύματα, η διάδοση των μηχανικών κυμάτων στο κενό είναι αδύνατη, μιας και για να διαδοθούν στο χώρο πρέπει να υπάρχει μέσο διάδοσης, όπως π.χ. είναι ο αέρας, το νερό και γενικά κάποιο είδος ύλης. Ο Maxwell προέβλεψε επίσης ότι τα ΗΜ κύματα μπορούν να έχουν διάφορες συχνότητες, αλλά και να κινούνται στο κενό πάντα με την ταχύτητα του φωτός. Πράγματι, σήμερα γνωρίζουμε ότι όλων των ειδών οι ακτινοβολίες, όπως αυτές των ραδιοκυμάτων, του υπέρυθρου, του ορατού φωτός, του υπεριώδους, των ακτίνων–Χ κ.ά., πρόκειται για ΗΜ κύματα διαφορετικών συχνοτήτων.

13.2.1 Δημιουργία ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Η θεωρητική πρόβλεψη του Maxwell για την ύπαρξη των ΗΜ κυμάτων, επαληθεύθηκε πειραματικώς το 1887 από τον Γερμανό φυσικό και μηχανικό Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), ο οποίος παρήγαγε και ανίχνευσε για πρώτη φορά στο εργαστήριο ΗΜ κύματα. Ο Hertz χρησιμοποιώντας ταλαντωνούμενα κυκλώματα *LC*, δημιούργησε ΗΜ κύματα συχνότητας 10^9 Hz, των οποίων η ταχύτητα διάδοσής τους μετρήθηκε αργότερα, σχεδόν ίση με την ταχύτητα του φωτός, c=300,000 km/s, όπως ακριβώς προέβλεπε η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Παρόλο την μεγαλειώδη ανακάλυψη των ΗΜ κυμάτων, ο ίδιος ο εφευρέτης τους, την θεώρησε ως μια απλή επιβεβαίωση της πρόβλεψης της θεωρίας του ΗΜ. Ο Hertz δεν μπορούσε να φανταστεί την τεχνολογική επανάσταση που θα έφερναν τα ΗΜ κύματα μερικά χρόνια αργότερα, στον τότε νεότευκτο κλάδο των τηλεπικοινωνιών. Πράγματι, τα ΗΜ κύματα και συγκεκριμένα τα ραδιοκύματα, συνέβαλαν τα μέγιστα , στην ανακάλυψη της ασύρματης

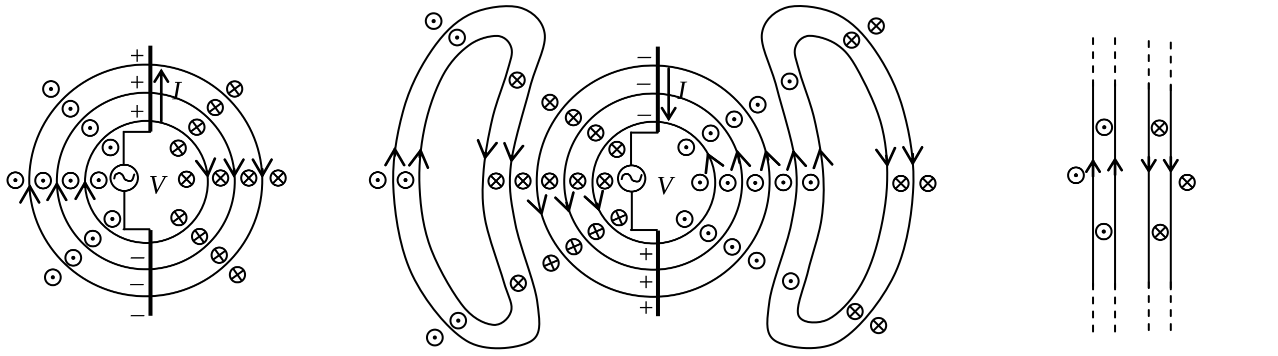
Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894)
(https://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz#/media/File:Heinrich_Rudolf_Hertz.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

τηλεγραφίας και του ραδιοφώνου, από τον Ιταλό εφευρέτη και μηχανικό Guglielmo Marconi (1874-1937). Αυτές οι ανακαλύψεις αποτέλεσαν την απαρχή της ανάπτυξης και εξέλιξης του σημαντικότατου κλάδου των τηλεπικοινωνιών. Γι’ αυτήν την εξαιρετική του προσφορά στην επιστήμη, ο Marconi τιμήθηκε με το βραβείο Νομπέλ στη Φυσική το 1909.

Guglielmo Marconi (1874-1937) *(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Marconi_1909.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).*

Πώς δημιουργούνται όμως τα ΗΜ κύματα; Από τον νόμο του Faraday συμπεραίνουμε ότι ηλεκτρικό πεδίο παράγεται όταν μεταβάλλεται ένα μαγνητικό πεδίο. Επίσης μαγνητικό πεδίο παράγεται όταν μεταβάλλεται ένα ηλεκτρικό πεδίο, όπως περιγράφει ο νόμος των Ampere-Maxwell. Επομένως, τα στατικά ηλεκτρικά φορτία και τα σταθερά ρεύματα δεν μπορούν να παράγουν μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Αντιθέτως, όταν το ρεύμα που διαρρέει έναν αγωγό μεταβάλλεται με το χρόνο, τότε σύμφωνα με την τρίτη και τέταρτη εξίσωση του Maxwell, ο αγωγός παράγει στο χώρο μεταβαλλόμενα αλληλεπιδρώντα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία, τα οποία διαδίδονται στο χώρο ως κύμα και είναι γνωστά ως ΗΜ κύματα, ή αλλιώς **ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία**. Επομένως, ΗΜ κύματα παράγονται μόνο όταν ηλεκτρικά φορτία επιταχύνονται ή επιβραδύνονται. Έτσι λοιπόν, ένας συνήθης τρόπος παραγωγής ΗΜ κυμάτων, είναι η εφαρμογή μιας εναλλασσομένης τάσης στα άκρα ενός ευθυγράμμου αγωγού, δηλ. μιας κεραίας. Εφόσον η εναλλασσόμενη τάση είναι αρμονικής φύσεως, τα ελεύθερα φορτία της κεραίας θα ταλαντώνονται αρμονικά γύρω από ένα σημείο ισορροπίας. Κατά την απλή αρμονική τους ταλάντωση, τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού, είτε επιταχύνονται είτε επιβραδύνονται. Μόνο την χρονική στιγμή που περνούν από το κέντρο ισορροπίας της ταλάντωσής τους κινούνται με σταθερή ταχύτητα. Τα ταλαντευόμενα φορτία λοιπόν, παράγουν ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, που με την σειρά του δημιουργεί ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο και ούτω καθεξής. Με αυτόν τον τρόπο η αρχική ταλάντωση των ελευθέρων ηλεκτρονίων παράγει μια διαταραχή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, η οποία διαδίδεται στο χώρο ως ΗΜ κύμα. Αυτή είναι η διαδικασία με την οποία εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητικά σήματα, οι ραδιοφωνικοί και τηλεοπτικοί σταθμοί, οι ασύρματοι, τα κινητά τηλέφωνα, τα ραντάρ κ.ά., και ονομάζεται ακτινοβολία διπολικού τύπου, μιας και η κεραία αποτελεί ένα δίπολο του οποίου η πολικότητα αλλάζει συνεχώς με την ταλάντωση των ελευθέρων ηλεκτρονίων.

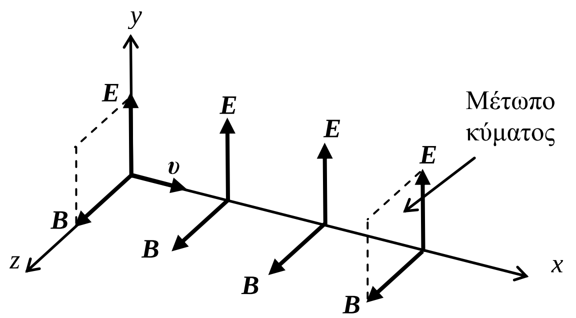
Βάσει των παραπάνω, ας ιδούμε σχηματικά πώς παράγει ΗΜ κύματα μια κεραία. Έστω δυο αγώγιμες ράβδοι οι οποίες συνδέονται με γεννήτρια AC ρεύματος, όπως δείχνει το σχ. 13.2 (Giancoli, 2012), (Halliday, Resnick & Krane, 2009). Εάν η πολωσιμότητα της γεννήτριας είναι τέτοια, ώστε η πάνω ράβδος να έχει θετικά φορτία και η κάτω ράβδος αρνητικά, τότε δημιουργείται στο χώρο ένα ηλεκτρικό πεδίο, όπως δείχνει το σχ. 13.2α. Λόγω του ηλεκτρικού ρεύματος που παράγεται κατά μήκος των δυο ραβδών, στο κάθετο



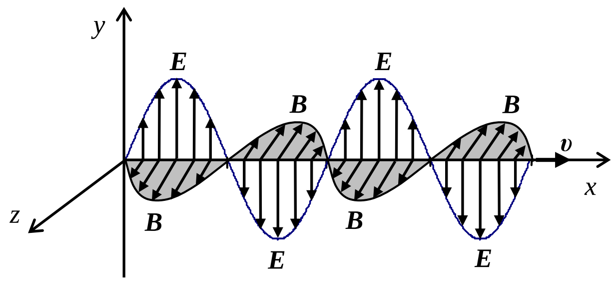
Σχήμα 13.2 *(α) Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων στο χώρο, από κεραία συνδεόμενη με γεννήτρια AC ρεύματος. (β) Αλλαγή της πολικότητας της κεραίας προξενεί αλλαγή στη φορά των ηλεκτρικών και μαγνητικών δυναμικών γραμμών στο χώρο. (β) Μεταβολή της τάσης και του ρεύματος στα άκρα της αντίστασης συναρτήσει του χρόνου.(γ) Για αποστάσεις αρκετά μεγάλες από την κεραία, οι δυναμικές γραμμές μπορούν να θεωρηθούν σχεδόν ευθείες, έτσι ώστε να σχηματίζουν επίπεδα κύματα (βλ. κείμενο).*

επίπεδο της ράβδου δημιουργείται μαγνητικό πεδίο, όπως περιγράφεται από τα διανύσματα κάθετα στο επίπεδο της σελίδας (σχ. 13.2α). Όπως έχουμε παρουσιάσει στο κεφάλαιο 9, το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ρευματοφόρο αγωγό είναι κάθετο στην κατεύθυνση του ρεύματος σχηματίζοντας μαγνητικές δυναμικές γραμμές με μορφή ομόκεντρων κύκλων (νόμος των Biot-Savart, κανόνας δεξιόστροφου κοχλία, βλ. εδάφιο 9.3). Βεβαίως οι ομόκεντροι αυτοί κύκλοι δεν φαίνονται στο σχ. 13.2β μιας και το επίπεδό τους είναι κάθετο σ’ αυτό της σελίδας (βλ. τα κάθετα βέλη). Το ρεύμα όμως στις ράβδους κάποια στιγμή θα αλλάξει φορά, λόγω της αρμονικής ταλάντωσης των φορτίων σ’ αυτές. Έτσι, όταν η πάνω ράβδος γίνει αρνητικά και η κάτω θετικά φορτισμένη, οι δυναμικές γραμμές του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου αλλάζουν φορά, (αντίθετη από πριν) όπως δείχνει το σχ. 13.2β. Οι αρχικές δυναμικές γραμμές τόσο του ηλεκτρικού, όσο και του μαγνητικού πεδίου, ταξιδεύουν προς τα εμπρός, συγκλίνοντας όμως προς τις νέες ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές αντίθετης φοράς που έπονται των αρχικών, ώστε γενικά να υπάρχει μια συνέχεια των δυναμικών γραμμών. Η σύγκλιση αυτή έχει ως συνέπεια οι αρχικές ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές να μετασχηματίζονται σε κλειστούς βρόχους (λοβούς στις τρεις διαστάσεις), μιας και απουσία φορτίων στο χώρο, οι γραμμές πρέπει να είναι κλειστές, χωρίς αρχή και τέλος [42] (σχ. 13.2β). Για τις μαγνητικές δυναμικές γραμμές ισχύει το ίδιο, μιας και πάντα είναι κλειστές. Στη συνέχεια η διαδικασία επαναλαμβάνεται, όταν η φορά του ρεύματος θα αλλάξει ξανά στην κεραία. Έτσι δημιουργούνται ομάδες δυναμικών γραμμών του μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου, κάθετες πάντα μεταξύ τους ($\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$), με μια περιοδικότητα στο χώρο και χρόνο την οποία την καθορίζει η συχνότητα της γεννήτριας της κεραίας. Οι ομάδες αυτές των δυναμικών γραμμών των πεδίων ***E*** και ***B***, ταξιδεύουν στο χώρο μακριά από την κεραία, και ανεξάρτητα από αυτήν, μιας και τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία τελικά αλληλοσυντηρούν το ένα το άλλο.

Έτσι μια ηλεκτρομαγνητική διαταραχή, δηλ. ένα ΗΜ κύμα, μπορεί να διαδίδεται στο χώρο με ταχύτητα *υ* και κατεύθυνση κάθετη στην διεύθυνση της κεραίας. Βεβαίως οι κάθετες διευθύνσεις εκπομπής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ως προς την κεραία είναι άπειρες, οπότε το ΗΜ κύμα διαδίδεται προς όλες τις διευθύνσεις του χώρου, με εξαίρεση αυτήν της ίδιας της κεραίας. Για αρκετά μεγάλες αποστάσεις από την κεραία, ή γενικότερα από την πηγή του ΗΜ κύματος, οι ηλεκτρικές και μαγνητικές δυναμικές γραμμές παρουσιάζουν μικρή καμπυλότητα, έτσι ώστε να είναι σχεδόν ευθείες (σχ. 13.2γ). Αυτή η μορφή των δυναμικών γραμμών του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, έχει ως συνέπεια τον σχηματισμό επιπέδων στο χώρο, τα οποία ορίζονται από τα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα ***E*** και ***B***, έτσι ώστε να δημιουργούνται επίπεδα μέτωπα κύματος. Τα ΗΜ κύματα των οποίων τα διαδιδόμενα μέτωπά τους είναι επίπεδα και διαδίδονται στον χώρο με ταχύτητα *υ*, όπως δείχνει το σχ. 13.3, ονομάζονται **επίπεδα κύματα** (Αλεξόπουλος & Μαρίνος, 1992), (Young & Freedman, 2010), (Serway & Jewett, 2013). Βεβαίως η εικόνα του σχήματος 13.3 είναι λίγο παραπλανητική, διότι οι εντάσεις των πεδίων ***E*** και ***B*** σε ένα σημείο του χώρου μεταβάλλονται με τον ίδιο τρόπο που μεταβάλλεται το ηλεκτρικό ρεύμα στην κεραία, όπου για την περίπτωση της AC γεννήτριας είναι αρμονική, δηλ. ημιτονοειδής ή συνημιτονοειδής. Έτσι λοιπόν, το αρμονικό ΗΜ κύμα που παράγει μια γεννήτρια AC ρεύματος σε κεραία, περιγράφεται με το αρμονικό κύμα του σχήματος 13.4, το οποίο διαδίδεται κατά την *x* κατεύθυνση με ταχύτητα *υ*, η κατεύθυνση της οποίας καθορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$. Επειδή τα διανύσματα των ***E*** και ***B*** πεδίων είναι πάντα κάθετα στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, δηλ. στην ταχύτητα ***υ***, τα ΗΜ κύματα είναι εγκάρσια κύματα. Επίσης τα πεδία ***E*** και ***B*** είναι πάντα σε φάση μεταξύ



Σχήμα 13.3 *Επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται προς την x κατεύθυνση με ταχύτητα υ.*



Σχήμα 13.4 *Διάδοση αρμονικού ΗΜ κύματος κατά την x κατεύθυνση. Οι εντάσεις των πεδίων E και B σε κάθε σημείο του χώρου μεταβάλλονται αρμονικώς με το E πάντα κάθετο στο B, και το επίπεδο αυτών κάθετο στην ταχύτητα υ και την κατεύθυνση διάδοσης.*

[42] Μην ξεχνάτε ότι έχουμε υποθέσει ότι ο χώρος γύρω από την κεραία είναι κενός.

τους, μιας και μηδενίζονται αλλά και μεγιστοποιούνται και τα δύο ταυτοχρόνως, σε αντίστοιχες χρονικές στιγμές. Τα ΗΜ κύματα διαδίδονται σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις από την πηγή παραγωγής τους, και η έντασή του μειώνεται αντιστρόφως ανάλογα με την απόσταση, δηλ. $1/r$. Για τα αρμονικά ΗΜ κύματα, η ένταση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σ' ένα σημείο του χώρου μεταβάλλεται με τον χρόνο αρμονικά, σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$E = E_o \sin(kx - \omega t) \tag{13.13α}$$

και

$$B = B_o \sin(kx - \omega t) \tag{13.13β}$$

όπου τα E_o και B_o συμβολίζουν τα πλάτη, δηλ. τις μέγιστες τιμές των πεδίων E και B αντιστοίχως. Οι εξισώσεις 13.13α και β, περιγράφουν αρμονικά κύματα τα οποία διαδίδονται κατά μήκος του θετικού ημιάξονα x. Το k ονομάζεται **κυματαριθμός** του κύματος και ισούται με

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{13.14}$$

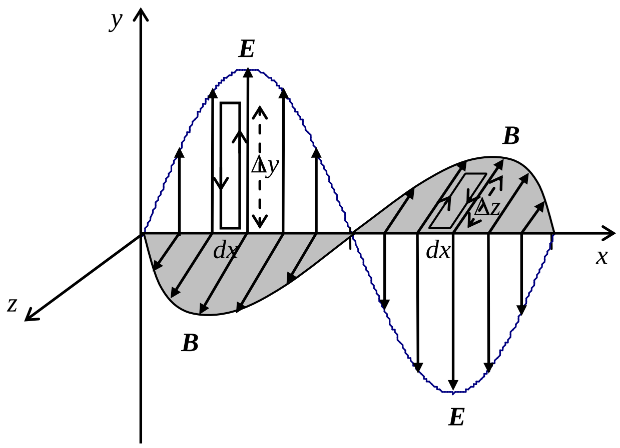
όπου λ είναι το **μήκος κύματος**, που ορίζεται ως απόσταση που διανύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου T. Γενικότερα, οι ποσότητες k, λ, και ω είναι χαρακτηριστικά μεγέθη κάθε αρμονικού κύματος, τα οποία περιγράφουν την διάδοση της κυματικής διαταραχής στο χώρο. Για την γωνιακή συχνότητα ω ισχύει

$$\omega = 2\pi f \overset{(13.14)}{\Rightarrow} \omega = k\lambda f \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \upsilon \tag{13.15}$$

όπου f και υ είναι η συχνότητα και η ταχύτητα διάδοσης του κύματος αντιστοίχως. Η εξ. 13.15 είναι σημαντική, διότι ισχύει για κάθε είδους αρμονικό κύμα, το οποίο διαδίδεται μέσω οποιουδήποτε μέσου.

13.2.2 Εξαγωγή της ταχύτητας των ΗΜ κυμάτων από τις εξισώσεις του Maxwell

Θα προσπαθήσουμε τώρα να εξαγάγουμε την ταχύτητα των ΗΜ κυμάτων από τις εξισώσεις του Maxwell. Με άλλα λόγια θα υπολογίσουμε την ταχύτητα διάδοσης κάθε ΗΜ κύματος, δηλ. κάθε είδους ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στο κενό, έτσι όπως την προέβλεψε η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell. Στην προσπάθειά μας αυτή θα θεωρήσουμε την διάδοση ενός επιπέδου αρμονικού ΗΜ κύματος, όπως αυτό που αναπαριστάται στο σχ. 13.4. Οι εξισώσεις του Maxwell τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε, είναι η τρίτη και η τέταρτη, μιας και αυτές αναφέρονται σε μεταβολές του ηλεκτρικού και μαγνητικού επιπέδου, οι οποίες στην ουσία αποτελούν ένα ΗΜ κύμα. Αρχικά υπολογίζουμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$, για την ορθογώνια κλειστή διαδρομή διαστάσεων dx και Δy, όπως φαίνεται στο σχ. 13.5, και παίρνουμε



Σχήμα 13.5 *Διάδοση αρμονικού ΗΜ κύματος κατά την x κατεύθυνση. Εφαρμογή του νόμου του Faraday, για την ορθογώνια διαδρομή διαστάσεων dx και Δy. Επίσης εφαρμογή του νόμου των Ampere και Maxwell για την ορθογώνια διαδρομή διαστάσεων dx και Δz (βλ. κείμενο).*

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = (E + dE)\Delta y - E\Delta y \Rightarrow \oint \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{dl} = dE\Delta y \tag{13.16}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την τρίτη εξίσωση του Maxwell (νόμος του Faraday) και βάσει της πιο πάνω εξίσωσης, γράφουμε

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dl} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = dE\Delta y \qquad (13.17)$$

Υπολογίζοντας τώρα την μεταβολή της μαγνητικής ροής διαμέσου της κλειστής ορθογώνιας διαδρομής διαστάσεων Δy και dx, όπως φαίνεται στο σχ. 13.5, παίρνουμε

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(B\Delta y dx)}{dt} = \Delta y dx\frac{dB}{dt} \qquad (13.18)$$

Από τις εξισώσεις 13.17 και 13.18 γράφουμε

$$\Delta y dx\frac{dB}{dt} = -dE\Delta y \Rightarrow \frac{dB}{dt} = -\frac{dE}{dx} \qquad (13.19)$$

Γνωρίζουμε όμως από τις εξισώσεις 13.13, ότι για ένα αρμονικό επίπεδο ΗΜ κύμα, τόσο το πεδίο E όσο και το B, εξαρτώνται και από την απόσταση x και από τον χρόνο t. Έτσι, η εξ. 13.19 μπορεί να γραφτεί υπό μορφή μερικών παραγώγων, ως

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x} \qquad (13.20)$$

Εάν εφαρμόσουμε τώρα την τέταρτη εξ. του Maxwell (νόμος των Ampere-Maxwell) για μια ορθογώνια κλειστή διαδρομή διαστάσεων dx και Δz, όπως αυτή του σχήματος 13.5, γράφουμε

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{dl} = \mu_o\varepsilon_o\frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow B\Delta z - (B+dB)\Delta z = \mu_o\varepsilon_o\frac{d\Phi_E}{dt} \Rightarrow -dB\Delta z = \mu_o\varepsilon_o\frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (13.21)$$

Υπολογίζοντας την μεταβολή της ηλεκτρικής ροής διαμέσου της ίδιας κλειστής ορθογώνιας επιφάνειας, γράφουμε

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d(Edx\Delta z)}{dt} = dx\Delta z\frac{dE}{dt} \qquad (13.22)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. 13.22 στην 13.21, παίρνουμε

$$-dB\Delta z = \mu_o\varepsilon_o dx\Delta z\frac{dE}{dt} \Rightarrow \frac{dB}{dx} = -\mu_o\varepsilon_o\frac{dE}{dt} \qquad (13.23)$$

Γράφοντας την εξ. 13.23 υπό μορφή μερικών παραγώγων, ισχύει

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial E}{\partial t} \qquad (13.24)$$

Έχουμε καταλήξει στις εξισώσεις 13.20 και 13.24, οι οποίες δείχνουν ότι η χωρική μεταβολή του κάθε πεδίου, συνδέεται άμεσα με την χρονική μεταβολή του άλλου πεδίου. Ας εφαρμόσουμε τώρα τις εξισώσεις αυτές για τις αρμονικές συναρτήσεις του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, έτσι όπως εκφράζονται μέσω των εξισώσεων 13.13. Από την εξ. 13.20, γράφουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[B_o\sin(kx-\omega t)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[E_o\sin(kx-\omega t)\right] \Rightarrow -\omega B_o\cos(kx-\omega t) = -kE_o\cos(kx-\omega t) \Rightarrow$$

$$\omega B_o = kE_o \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{E_o}{B_o} \qquad (13.25)$$

Από την εξ. 13.24 γράφουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[B_o\sin(kx-\omega t)\right] = -\mu_o\varepsilon_o\frac{\partial}{\partial t}\left[E_o\sin(kx-\omega t)\right] \Rightarrow kB_o\cos(kx-\omega t) = \mu_o\varepsilon_o\omega E_o\cos(kx-\omega t) \Rightarrow$$

$$kB_o = \mu_o\varepsilon_o\omega E_o \Rightarrow \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\mu_o\varepsilon_o}\frac{B_o}{E_o} \qquad (13.26)$$

Λόγω της εξίσωσης 13.15, η εξ. 13.25 γράφεται

$$\frac{\omega}{k} = \frac{E_o}{B_o} = \upsilon \qquad (13.27)$$

Η εξ. 13.26 λόγω της 13.27, γράφεται

$$\upsilon = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o}\frac{1}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o} \Rightarrow \upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \qquad (13.28)$$

Από την εξ 13.28 συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα των ΗΜ κυμάτων στο κενό συνδέονται άμεσα με δυο σταθερές φυσικές ποσότητες του κενού, την διηλεκτρική σταθερά ε_o και την μαγνητική επιδεκτικότητα μ_o .Αν υπολογίσουμε τώρα την ταχύτητα υ, παίρνουμε

$$\upsilon = \sqrt{\frac{1}{4\pi \times 10^{-7}\ \frac{\mathrm{T \cdot m}}{\mathrm{A}} \times 8.85 \times 10^{-12}\ \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{N \cdot m^2}}}} \Rightarrow \upsilon = 3.00 \times 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Η τιμή αυτή είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό. Από τις εξισώσεις του Maxwell καταλήξαμε λοιπόν ότι κάθε ΗΜ κύμα που διαδίδεται στο κενό, διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός, δηλ. $\upsilon = c$. Είναι εκπληκτικό ότι οι σταθερές φυσικές ποσότητες του κενού ε_o και μ_o συνδέονται άμεσα με την ταχύτητα του φωτός c. Η ισχύ της εξίσωσης 13.28 είναι γενικότερη. Εάν ένα ΗΜ κύμα δεν διαδίδεται στο κενό, αλλά διαμέσου ενός υλικού ή μέσου του οποίου η διηλεκτρική σταθερά είναι ε και η μαγνητική επιδεκτικότητα είναι μ, τότε το ΗΜ κύμα όπως και το φως θα διαδίδονται με ταχύτητα υ, όπου

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \qquad (13.29)$$

13.2.3 Εξαγωγή της κυματικής εξίσωσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Έχουμε δείξει ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αλληλοεξαρτώνται μεταξύ τους, και οι μεταβολές τους ως προς την απόσταση και τον χρόνο, περιγράφονται από τις εξισώσεις 13.20 και 13.24. Εάν παραγωγίσουμε την εξ. 13.20 ως προς x, παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \qquad (13.30)$$

Επίσης παραγωγίζοντας την εξ. 13.24 ως προς τον χρόνο, γράφουμε

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad (13.31)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 13.30 και 13.31, λόγω της ισότητας των αριστερών μελών, παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \qquad (13.32)$$

Αυτή η εξίσωση είναι η κυματική εξίσωση που περιγράφει την διάδοση του ηλεκτρικού πεδίου ενός επίπεδου ΗΜ κύματος κατά την διεύθυνση x. Με ανάλογο τρόπο μπορεί να εξαχθεί παρόμοια εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο (βλ. πρόβλημα 13.1), δηλαδή

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_o \varepsilon_o}\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \qquad (13.33)$$

Οι εξισώσεις 13.32 και 13.33, μπορούν να γραφτούν συναρτήσει της ταχύτητας διάδοσης στο κενό, ως

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \qquad (13.34\alpha)$$

και

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \qquad (13.34β)$$

Μπορούμε τώρα να γενικεύσουμε την κυματική εξίσωση των πεδίων **E** και **B**, ώστε να περιγράψουμε οποιαδήποτε κυματική διαταραχή D, η οποία διαδίδεται ως επίπεδο κύμα κατά την κατεύθυνση x με ταχύτητα υ, με την **κυματική εξίσωση**

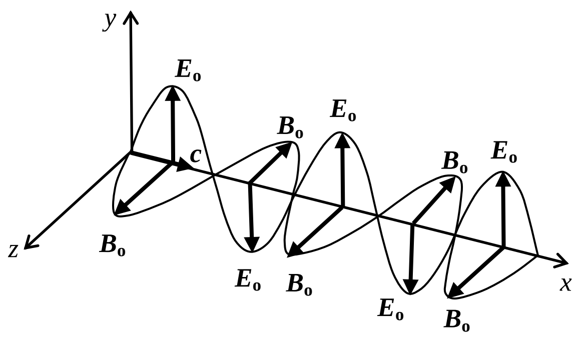
$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \qquad (13.35)$$

η οποία είναι δευτέρου βαθμού διαφορική εξίσωση ως προς την μετατόπιση και τον χρόνο. Η κυματική εξίσωση 13.35 περιγράφει τόσο τα ηλεκτρομαγνητικά όσο και τα μηχανικά κύματα.

13.3 Πόλωση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο ΗΜ κύμα διαδίδεται στο κενό προς την κατεύθυνση x με ταχύτητα c, όπως δείχνει το σχ. 13.6. Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου **E** κείται στην διεύθυνση y, ενώ το αντίστοιχο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου **B** κείται στην διεύθυνση z. Ένα τέτοιο κύμα που τα πεδία **E** και **B** είναι πάντα παράλληλα προς δυο σταθερές διευθύνσεις, όπως οι y και z αντιστοίχως, ονομάζεται **γραμμικώς πολωμένο κύμα**, και η ιδιότητά του αυτή ονομάζεται **πόλωση**. Τα διανύσματα **E** και **B** είναι σε φάση και δημιουργούν ένα επίπεδο που ονομάζεται **μέτωπο** ή **επίπεδο κύματος**, το οποίο διαδίδεται προς την διεύθυνση x με ταχύτητα c. Έτσι το επίπεδο του κύματος διανύει απόσταση x σε χρόνο dt ίση με $x = cdt$. Τα πλάτη των πεδίων E_o και B_o είδαμε ότι συνδέονται μεταξύ τους, μέσω της ταχύτητας του φωτός (βλ. εξ. 13.27), δηλ.

$$\frac{E_o}{B_o} = c \qquad (13.36)$$



Σχήμα 13.6 *Γραφική αναπαράσταση ενός γραμμικώς πολωμένου αρμονικού (ημιτονοειδούς) ΗΜ κύματος που διαδίδεται προς την x κατεύθυνση με ταχύτητα c.*

Επειδή τα πεδία **E** και **B** είναι σε φάση κάθε χρονική στιγμή σε κάθε σημείο του χώρου, η εξ. 13.36 ισχύει γενικότερα υπό την μορφή

$$\frac{E}{B} = c \qquad (13.37)$$

Αρκετές πηγές ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, όπως είναι οι συσκευές λέιζερ και οι κεραίες ραδιοφωνικών σταθμών, εκπέμπουν γραμμικώς πολωμένα ΗΜ κύματα. Αντιθέτως οι περισσότερες πηγές ακτινοβολίας στη Φύση, όπως π.χ. ο Ήλιος, ή ένα πυρακτωμένο σύρμα, εκπέμπουν μη πολωμένα ΗΜ κύματα,. Εκτός της γραμμικής πόλωσης, ένα ΗΜ κύμα μπορεί να παρουσιάζει ελλειπτική πόλωση ή κυκλική πόλωση (Kraus, 1993), (Alonso & Finn, 1992). Στην πρώτη περίπτωση το διάνυσμα **E** (αλλά και το αντίστοιχο **B**), περιστρέφεται γύρω από την διεύθυνση διάδοσης, διαγράφοντας μια ελλειψοειδή έλικα καθώς το κύμα διαδίδεται στο χώρο, ενώ στην δεύτερη περίπτωση διαγράφει αντίστοιχη κυκλική έλικα. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια, ορμή και στροφορμή, και μπορούν να ανιχνευθούν σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή τους. Παρακάτω θα εξετάσουμε την διάδοση της ενέργειας των ΗΜ κυμάτων στο χώρο και πώς η έντασή τους μεταβάλλεται με την απόσταση.

Παράδειγμα 13.1 Διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος

Ένα ημιτονοειδές επίπεδο ΗΜ κύμα συχνότητας 40 MHz διαδίδεται προς την θετική κατεύθυνση x, όπως δείχνει το σχ. 13.6. Σε κάποιο σημείο μια δεδομένη στιγμή, το ηλεκτρικό πεδίο E έχει τη μέγιστη τιμή των 750 N/C και είναι παράλληλο προς τον άξονα y. α) Υπολογίστε το μήκος και την περίοδο του κύματος. β) Υπολογίστε τη μέγιστη τιμή και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. γ) Γράψτε τις εξισώσεις που περιγράφουν την μεταβολή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου του κύματος ως προς τον χώρο και τον χρόνο.

Λύση

α) Για την ταχύτητα του ΗΜ κύματος ισχύει

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}}{40\times 10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow \lambda = 7.50\mathrm{m}$$

Η περίοδος του κύματος είναι

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{40\times 10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow T = 2.50\times 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

β) Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ισχύει

$$c = \frac{E_o}{B_o} \Rightarrow B_o = \frac{E_o}{c} \Rightarrow B_o = \frac{750\mathrm{N/C}}{3\times 10^{8}\,\mathrm{m/s}} \Rightarrow B_o = 2.50\times 10^{-6}\,\mathrm{T}$$

Επειδή το ***B*** είναι κάθετο στο ***E*** με το επίπεδό τους να είναι κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης *x*, και εφόσον το ***E*** έχει την κατεύθυνση του άξονα *y*, το διάνυσμα ***B*** πρέπει να έχει την κατεύθυνση του άξονα *z*.

γ) Οι εξισώσεις του ημιτονοειδούς ΗΜ κύματος είναι

$$E = E_o \sin(kx - \omega t) \quad \text{και} \quad B = B_o \sin(kx - \omega t),$$

όπου E_o=750 N/C και B_o=2.50×10^{-6} T.

Για τον κυματαριθμό έχουμε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{7.50\mathrm{m}} \Rightarrow k = 0.838\mathrm{m^{-1}},$$

ενώ για την κυκλική συχνότητα ισχύει

$$\omega = \frac{2\pi}{f} = \frac{2\pi}{40\times 10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow \omega = 1.57\times 10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$$

Τελικά παίρνουμε τις εξισώσεις κύματος

$$E = 750 \sin(0.838x - 1.57\times 10^{-7} t),$$

και

$$B = 2.50\times 10^{-6} \sin(0.838x - 1.57\times 10^{-7} t)$$

Παράδειγμα 13.2 Διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος

Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο χώρο και έχει ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = -(3.10\times 10^{5}\,\mathrm{V/m})\sin[ky - (12.65\times 10^{12}\,\mathrm{rad.s^{-1}})t]\hat{\boldsymbol{k}}$. α) Προς ποια διεύθυνση διαδίδεται το κύμα; β) Ποιο είναι το μήκος κύματός του; γ) Διατυπώστε την κυματική εξίσωση για το πεδίο ***B***(*y*,*t*).

Λύση

α) Όπως βλέπουμε το πεδίο ***E*** είναι παράλληλο προς τον άξονα -*z* μιας και το πλάτος του είναι $\boldsymbol{E_o} = -(3.10\times 10^{5}\,\mathrm{V/m})\hat{\boldsymbol{k}}$, δηλ. εκφράζεται με το μοναδιαίο διάνυσμα $-\hat{\boldsymbol{k}}$ του *z* άξονα. Επίσης, από την συνάρτηση του ***E*** βλέπουμε ότι υπάρχει στο ημίτονο χωρική εξάρτηση από την μετατόπιση *y*, επομένως συμπεραίνουμε ότι η διάδοση του κύματος γίνεται κατά μήκος του *y* άξονα.

β) Το μήκος κύματος δίνεται από την σχέση

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \qquad (1)$$

όπου f είναι η συχνότητα του κύματος. Από την εξίσωση του $\boldsymbol{E}$ έχουμε ότι η γωνιακή συχνότητα του κύματος είναι $\omega = 12.65\times10^{12}\,\text{rad.s}^{-1}$. Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2}$$

Η εξ. 2 στην 1 δίνει

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\times3\times10^{8}\,\text{m/s}}{12.65\times10^{12}\,\text{rad.s}^{-1}} \Rightarrow \lambda = 1.5\times10^{-4}\,\text{m}$$

γ) Η κυματική εξίσωση του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}(y,t)$ είναι ανάλογη αυτής του $\boldsymbol{E}(y,t)$. Καταρχήν γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο πάντα στο ηλεκτρικό και διαδίδεται στην ίδια κατεύθυνση και με τα ίδια ω και k με αυτό. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το $\boldsymbol{B}$ είναι παράλληλο στον άξονα x και διαδίδεται στην κατεύθυνση y. Από τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\boldsymbol{B} = B_\text{o}\sin[ky-(12.65\times10^{12}\,\text{rad.s}^{-1})t]\hat{\boldsymbol{i}} \tag{3}$$

Το πλάτος του μαγνητικού πεδίου B_o το ευρίσκουμε από την σχέση

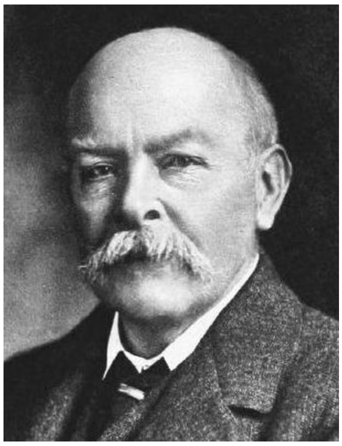
$$E = cB \Rightarrow E_o = cB_\text{o} \Rightarrow B_\text{o} = \frac{E_\text{o}}{c} \Rightarrow B_\text{o} = \frac{3.10\times10^{5}\,\text{V/m}}{3\times10^{8}\,\text{m/s}} \Rightarrow B_\text{o} = 1.03\times10^{-3}\,\text{T}$$

Επειδή το $\boldsymbol{B}_\text{o}\perp\boldsymbol{E}_\text{o}$ και το $\boldsymbol{E}_\text{o}$ κείται στον $-z$ ημιάξονα, το $\boldsymbol{B}_\text{o}$ θα κείται στον $-x$ ημιάξονα. Επίσης ο κυματαριθμός μπορεί να υπολογιστεί ως

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{1.5\times10^{-4}\,\text{m}} \Rightarrow k = 4.2\times10^{4}\,\text{m}^{-1}$$

Τελικά καταλήγουμε για την εξίσωση $\boldsymbol{B}(y,t)$

$$\boldsymbol{B} = -(1.03\times10^{-3}\,\text{T})\sin[(4.2\times10^{4}\,\text{m}^{-1})y-(12.65\times10^{12}\,\text{rad.s}^{-1})t]\hat{\boldsymbol{i}}$$



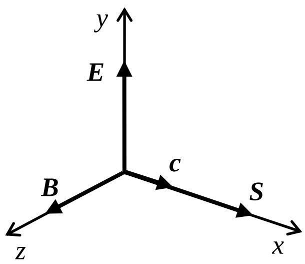
John Henry Poynting (1852-1914) (https://en.wikipedia.org/wiki/John_Henry_Poynting#/media/File:John_Henry_Poynting.jpg). Το παρόν έργο αποτελεί κοινό κτήμα (public domain).

13.4 Ενέργεια ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Όπως κάθε κύμα στην Φύση, έτσι και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταφέρουν ενέργεια, ορμή και στροφορμή. Ο ρυθμός της ενέργειας που μεταφέρεται από το ηλεκτρομαγνητικό κύμα ανά μονάδα επιφανείας κάθετη στην διεύθυνση κίνησης στον κενό χώρο, δίδεται από το **διάνυσμα Poynting** $\boldsymbol{S}$, το οποίο ορίζεται ως

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_\text{o}}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{13.38}$$

και ονομάστηκε έτσι λόγω του Άγγλου φυσικού John Henry Pointing (1852-1914), που πρώτος το όρισε. Η κατεύθυνση του διανύσματος $\boldsymbol{S}$ ορίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$, όπως δείχνει το σχ. 13.7, η οποία συμπίπτει με την κατεύθυνση διάδοσης του κύματος και επομένως της ταχύτητάς του υ, η οποία στον κενό χώρο είναι c. Οι μονάδες του $\boldsymbol{S}$ στο ΔΣΜ είναι $\text{J/s}\cdot\text{m}^2$ ή αλλιώς W/m^2. Το μέτρο του διανύσματος Poyinting S, εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο διαδίδεται η ενέργεια του κύματος, ή αλλιώς την ισχύ του, μέσω μιας μοναδιαίας επιφάνειας κάθετης στην κατεύθυνση διάδοσης του κύματος (Serway & Jewett, 2013), (Halliday, Resnick & Walker, 2013).



Σχήμα 13.7 *Το διάνυσμα Poynting ενός επιπέδου ΗΜ κύματος, έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος.*

Εφόσον το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{B}$, η εξ. 13.38 δίνει για το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{S}$,

$$S = \frac{EB}{\mu_o} \tag{13.39}$$

Από την εξ. 13.37 παίρνουμε για την 13.39

$$S = \frac{E^2}{\mu_o c} = \frac{c}{\mu_o} B^2 \tag{13.40}$$

Επειδή τα πεδία ***E*** και ***B*** ενός αρμονικού κύματος αλλάζουν συνεχώς με τον χρόνο, και είναι πάντα σε φάση, η εξ. 13.40 ισχύει για κάθε χρονική στιγμή. Συνεπώς, το διάνυσμα ***S*** εξαρτάται από τον χρόνο μιας και τα E και B μεταβάλλονται με τον χρόνο. Έτσι λοιπόν, παρατηρώντας τη διάδοση του κύματος στο σχ. 13.6, συμπεραίνουμε ότι, όταν τα πεδία E και B παίρνουν τις μέγιστες τιμές τους, δηλ. E_o και B_o αντιστοίχως (βλ. εξισώσεις 13.13α και 13.13β), το διάνυσμα ***S*** γίνεται μέγιστο. Έτσι γράφουμε

$$S_{\max} = \frac{E_o^{\,2}}{\mu_o c} = \frac{c}{\mu_o} B_o^{\,2} \tag{13.41}$$

Αντιθέτως, όταν τα πεδία παίρνουν τη μικρότερη απόλυτη τιμή τους, δηλ. μηδέν, τότε το διάνυσμα ***S*** ελαχιστοποιείται, οπότε $S_{\min}$=0. Συμπερασματικά λοιπόν, επειδή τα πεδία E και B ταλαντώνονται ή αλλιώς πάλλονται με τον χρόνο, το ίδιο κάνει και το διάνυσμα Poynting ***S***. Αυτή η ταλάντωση βέβαια δεν είναι αντιληπτή διότι γίνεται με πολύ μεγάλη συχνότητα. Έτσι είναι πιο ορθό να μιλάμε για μέση μεταφορά ενέργειας του κύματος, η οποία αν μετρηθεί σε μια περίοδο ορίζει την **ένταση** I του κύματος. Επομένως, ισχύει για την ένταση του ΗΜ κύματος

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \bar{S} \tag{13.42}$$

όπου $\bar{P}$ είναι η μέση ισχύς, δηλ. η ενέργεια ανά δευτερόλεπτο του κύματος που διαρρέει επιφάνεια εμβαδού A. Επομένως η ένταση του ΗΜ κύματος, είναι ίση με την μέση τιμή του διανύσματος Poynting, $\bar{S}$. Για αρμονικό ΗΜ κύμα ισχύουν οι εξισώσεις 13.13$^{\alpha}$ και β, οπότε βάσει της εξίσωσης 13.40 γράφουμε

$$\bar{S} = \frac{\overline{E^2}}{\mu_o c} \overset{(13.13\alpha)}{\Rightarrow} \bar{S} = \frac{\overline{E_o^{\,2}\sin^2(kx-\omega t)}}{\mu_o c} = \frac{E_o^{\,2}}{\mu_o c}\overline{\sin^2(kx-\omega t)} \Rightarrow \bar{S} = \frac{E_o^{\,2}}{2\mu_o c} \tag{13.43}$$

διότι η μέση τιμή του τετραγώνου του ημιτόνου (και του συνημιτόνου) είναι 1/2. Έτσι λοιπόν, λόγω των εξισώσεων 13.42 και 13.43 γράφουμε για την ένταση του ΗΜ κύματος

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2\mu_o c} E_o^2 \tag{13.44}$$

Μια ισοδύναμη έκφραση λαμβάνεται μέσω της εξίσωσης 13.36, ως

$$I = \bar{S} = \frac{c}{2\mu_o} B_o^2 \tag{13.45}$$

Η ένταση του ΗΜ κύματος μπορεί να γραφθεί και ως συνάρτηση των ενεργών τιμών των πεδίων E και B, δηλ.

$$I = \bar{S} = \frac{1}{\mu_o c} E_{\varepsilon\nu}^2 \tag{13.46}$$

και

$$I = \bar{S} = \frac{c}{\mu_o} B_{\varepsilon\nu}^2 \tag{13.47}$$

Το επίπεδο κύμα είναι μια ιδανική περίπτωση κύματος. Στην πραγματικότητα πολλές πηγές κυμάτων εκπέμπουν κύματα προς όλες τις κατευθύνσεις του χώρου. Έτσι για μια πηγή κύματος σταθερής ισχύος, όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή, η ένταση του κύματος αναμένεται να μειώνεται με την απόσταση. Για παράδειγμα, εάν έχουμε σφαιρική κατανομή της ενέργειας στο χώρο, θεωρώντας σφαιρικά κύματα όπου το μέτωπο κύματος είναι σφαιρική επιφάνεια, η ένταση του κύματος σε κάθε σφαιρική επιφάνεια είναι

$$I = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2} \tag{13.48}$$

Κάποιες πηγές κυμάτων όπως για παράδειγμα οι κεραίες, εκπέμπουν κύματα προς ορισμένες κατευθύνσεις. Παρόλο που η εξ. 13.48 δεν ισχύει για αυτές τις περιπτώσεις, η ένταση του κύματος ελαττώνεται με το τετράγωνο της απόστασης κατά μήκος αυτών των κατευθύνσεων διάδοσης.

Παράδειγμα 13.3 Ένταση φωτεινού ηλεκτρομαγνητικού κύματος

Το 10% της ισχύος ενός λαμπτήρα 100 W, ακτινοβολείται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις ως φως. Υπολογίστε τα μεγέθη των μεγίστων ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου E_o και B_o αυτής της ορατής ακτινοβολίας σε απόσταση 3.00 m από την φωτεινή πηγή. Δίδεται $\mu_o = 4\pi\times10^{-7}$ W/A·m.

Λύση

Η ένταση του φωτεινού κύματος σε απόσταση r από την πηγή είναι

$$I = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2} \tag{1}$$

όπου P=0.1×100 W, και r=3.00 m.

Όμως η ένταση I είναι η μέση τιμή του διανύσματος Poynting $\overline{S}$, άρα

$$I = \overline{S} = \frac{1}{2c\mu_o} E_o^2 \Rightarrow E_o^2 = 2c\mu_o I \Rightarrow E_o = \sqrt{2c\mu_o I} \tag{2}$$

Η εξ. 1 στην 2 δίνει

$$E_o = \sqrt{2c\mu_o \frac{\overline{P}}{4\pi r^2}} \Rightarrow E_o = \sqrt{c\mu_o \frac{\overline{P}}{2\pi r^2}} = \sqrt{3\times10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 4\pi\times10^{-7} \frac{\text{W}}{\text{A}\cdot\text{m}} \frac{0.1\times100\text{W}}{2\pi(3\text{m})^2}} \Rightarrow E_o = 8.16\text{V/m}$$

Για να υπολογίσουμε το B_o, γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$E_o = cB_o \Rightarrow B_o = \frac{E_o}{c} \Rightarrow B_o = \frac{8.16\text{V/m}}{3\times10^8\text{m/s}} \Rightarrow B_o = 2.72\times10^{-8}\text{T}$$

13.5 Ιδιότητες των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Έως τώρα αποδείξαμε ότι ένα αρμονικό και συγκεκριμένα ημιτονοειδές ΗΜ κύμα ικανοποιεί τις εξισώσεις του Maxwell, και την κυματική εξίσωση (εξ. 13.35). Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε είδους ΗΜ κύμα, ανεξαρτήτως αν είναι αρμονικό ή όχι, ικανοποιεί τις ίδιες εξισώσεις, οι οποίες εξάγουν τις κάτωθι κοινές βασικές ιδιότητες για όλα τα ΗΜ κύματα.

1) Τα πεδία $\boldsymbol{E}$ και $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και είναι επίσης κάθετα στην ταχύτητα διάδοσης του κύματος, έτσι ώστε το διάνυσμα $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ να έχει την ίδια κατεύθυνση με την $\boldsymbol{\upsilon}$.

2) Κάθε ΗΜ κύμα διαδίδεται στο κενό με ταχύτητα $c = 1/\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}$.

3) Σε κάθε σημείο του ΗΜ κύματος ισχύει $E = cB$.

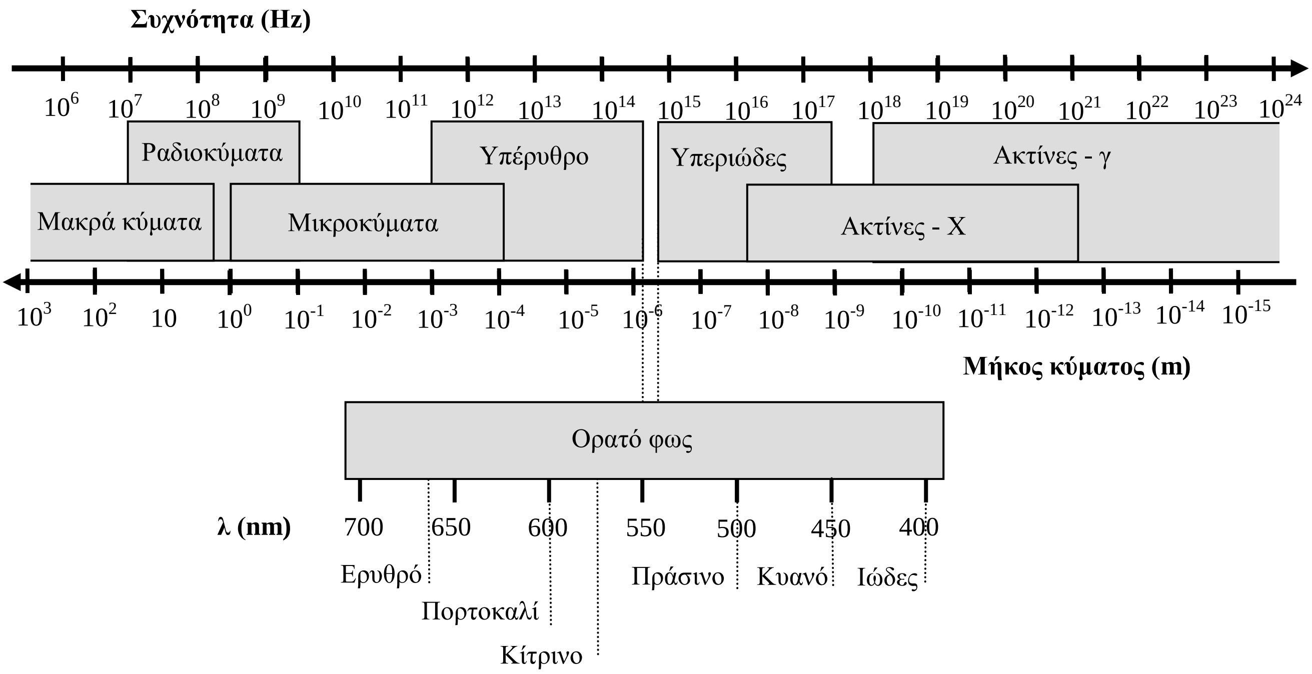
4) Ο ρυθμός της ενέργειας που μεταφέρεται από το ΗΜ κύμα ανά μονάδα επιφανείας κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης δίδεται από το διάνυσμα Poynting $\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_o}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$.

13.6 Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

Τα ΗΜ κύματα παρουσιάζουν ένα μεγάλο εύρος ενέργειας και επομένως μηκών κύματος και συχνότητας. Ξεκινούν από τα μακρά κύματα με μήκος κύματος δεκάδες χιλιόμετρα και φτάνουν στις ακτίνες *γ* με μήκος κύματος μικρότερα του Άνγκστρομ (1Å=10^{-10} m). Στο σχ. 13.8 φαίνονται οι περιοχές του μήκους κύματος και της συχνότητας στις οποίες εκτείνονται τα ΗΜ κύματα, και που αποτελούν το **ηλεκτρομαγνητικό φάσμα**. Ας ιδούμε όμως εν συντομία κάθε μια από τις επιμέρους περιοχές του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

Τα **ραδιοκύματα** ή **ραδιοφωνικά κύματα** έχουν μήκος κύματος από δεκάδες χιλιόμετρα έως 0.1 m. Χρησιμοποιούνται στις ραδιοφωνικές εκπομπές στις ζώνες των AM και FM, αλλά και στις τηλεοπτικές εκπομπές με υψηλότερη όμως συχνότητα από εκείνα του ραδιοφώνου. Τα ραδιοκύματα παράγονται συνήθως με κυκλώματα *LC* ηλεκτρομαγνητικών ταλαντώσεων. Τα ραδιοκύματα με μεγάλο μήκος κύματος (δεκάδες χιλιόμετρα) ονομάζονται **μακρά ραδιοκύματα**, και μπορούν και ταξιδεύουν στο διάστημα διανύοντας τεράστιες αποστάσεις, με αποτέλεσμα να μπορούμε να παρατηρούμε και να μελετούμε άστρα και άλλα ουράνια σώματα σε πολύ μακρινές αποστάσεις από την Γη. Έτσι, βάσει των ραδιοκυμάτων έχει αναπτυχθεί ένας ειδικός κλάδος της αστρονομίας, η ραδιοαστρονομία, όπου χρησιμοποιούνται ειδικά τηλεσκόπια που ονομάζονται **ραδιοτηλεσκόπια**.

Τα **μικροκύματα** είναι ΗΜ κύματα με μήκος κύματος από περίπου 1 m έως 10^{-4} m, τα οποία όπως τα ραδιοκύματα δημιουργούνται κυρίως από ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις ηλεκτρικών κυκλωμάτων, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των φούρνων μικροκυμάτων. Χρησιμοποιούνται επίσης στις τηλεπικοινωνίες με την χρήση κινητών τηλεφώνων και στον ραδιοεντοπισμό με την χρήση ραντάρ (συχνότητες γύρω στα 3×10^9 Hz). Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία στην περιοχή των μικροκυμάτων καταφθάνει συνεχώς στην Γη από το διάστημα. Η ακτινοβολία αυτή ονομάζεται **ακτινοβολία του υποβάθρου**, και σχετίζεται με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμφθηκε κατά την «Μεγάλη Έκρηξη» (Bing Bang – Μπιγκ Μπανγκ) τη στιγμή της δημιουργίας του σύμπαντος. Η ανίχνευση και μελέτη της ακτινοβολίας του υποβάθρου, βοηθά τους αστροφυσικούς και άλλους επιστήμονες να κατανοήσουν την φύση και την εξέλιξη του σύμπαντος.



Σχήμα 13.8 *Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα βάσει του μήκους κύματος και της συχνότητας. Οι διάφορες περιοχές του φάσματος αλληλεπικαλύπτονται χωρίς να υπάρχουν σαφή όρια. Η περιοχή του ορατού φωτός παρουσιάζεται μεγενθυμένη και απαρτίζεται από ποικιλία μηκών κύματος τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικά χρώματα.*

Το **υπέρυθρο** είναι μια περιοχή ΗΜ κυμάτων, τα οποία έχουν μήκος κύματος από 1 mm έως περίπου 1 μm, και δημιουργούνται από εκπομπή ακτινοβολίας ατόμων ή μορίων που αλλάζουν την περιστροφική τους ή την ταλαντωτική τους κατάσταση. Αποτέλεσμα αυτής της αλλαγής είναι τα συστήματα των ατόμων ή μορίων να εκπέμπουν ενέργεια υπό μορφή θερμότητας, η οποία ονομάζεται **υπέρυθρη ακτινοβολία** (infrared-IR), ή αλλιώς **θερμική ακτινοβολία**. Κάθε σώμα λόγω της θερμοκρασίας του εκπέμπει θερμική ακτινοβολία κατά το πλείστον στην υπέρυθρη περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Η θερμότητα που αισθάνεται το χέρι μας όταν ευρίσκεται κοντά σε φωτιά οφείλεται στην υπέρυθρη ακτινοβολία. Η Γη εκπέμπει θερμότητα προς το διάστημα στο υπέρυθρο, όπως και τα ουράνια σώματα εκπέμπουν υπέρυθρη ακτινοβολία προς τη Γη. Η υπέρυθρη ακτινοβολία που φθάνει στην Γη από το διάστημα, σε συνδυασμό με την ορατή ακτινοβολία, μάς βοηθά σε μια πληρέστερη χαρτογράφηση του γαλαξία μας. Γενικότερα, η ακτινοβολία υπερύθρου έχει αρκετές εφαρμογές στην φυσιοθεραπεία, στην αστρονομία και στην υπέρυθρη φασματοσκοπία.

Το **ορατό φως** είναι η πιο οικεία σε μας ΗΜ ακτινοβολία, μιας και την ανιχνεύουμε με τους οφθαλμούς μας, με την αίσθηση της οράσεως. Έχει μήκος κύματος της τάξης μεγέθους μερικών εκατοντάδων νανομέτρων, που κυμαίνεται από ~700 nm για το βαθύ ερυθρό, έως ~400 nm για το βαθύ ιώδες. Στο μεγενθυμένο ένθετο του σχήματος 13.8, φαίνονται προσεγγιστικά τα αντίστοιχα μήκη κύματος του κάθε χρώματος. Το φως εκπέμπεται κατά την αλλαγή των ενεργειακών καταστάσεων των ηλεκτρονίων σθένους των ατόμων (οπτικές μεταβάσεις), και αναλόγως την ενέργεια εκπομπής της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας αντιλαμβανόμαστε φως διαφορετικού χρώματος. Λόγω της στενής σχέσης μεταξύ συχνότητας (ή μήκους κύματος) και χρώματος της ορατής ακτινοβολίας, οποιαδήποτε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία καθορισμένης συχνότητας ονομάζεται **μονοχρωματική ακτινοβολία** (Alonso & Finn, 1992). Από την ανάλυση της ορατής ακτινοβολίας ενός σώματος, μπορούμε να συμπεράνουμε τα είδη των ατόμων, δηλ. τα στοιχεία που απαρτίζουν το σώμα που φωτοβολεί.

Η **υπεριώδης ακτινοβολία** (ultraviolet-UV) έχει μήκη κύματος στην περιοχή από 400 nm έως 1 nm, και προέρχεται από αποδιεγέρσεις ηλεκτρονίων τα οποία ευρίσκονται στις εξωτερικές στοιβάδες των ατόμων και είναι πιο χαλαρά δεσμευμένα στον πυρήνα. Η υπεριώδης ακτινοβολία είναι επικίνδυνη για τα έμβια όντα, επειδή έχει μικρότερο μήκος από το ορατό φως, με αποτέλεσμα να είναι πιο διεισδυτική. Ο Ήλιος επίσης εκπέμπει στο υπεριώδες, αλλά ευτυχώς το στρώμα όζοντος στα ανώτερα στρώματα της γήινης ατμόσφαιρας φιλτράρει τις υπεριώδεις ακτίνες που μπορούν να προκαλέσουν εγκαύματα ή και καρκίνο του δέρματος. Οι αντηλιακές κρέμες απορροφούν μέρος της υπεριώδους ακτινοβολίας που διαπερνά την ατμόσφαιρα, παρέχοντάς μας προστασία. Η υπεριώδης ακτινοβολία έχει πρακτικές εφαρμογές στην αστρονομία και την χειρουργική στην οφθαλμολογία.

Οι **ακτίνες –Χ** είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με σχετικά μικρό μήκος κύματος που κυμαίνεται περίπου από 10 nm έως δέκατα του pm (10^{-12} m). Οι ακτίνες –Χ εκπέμπονται από αποδιεγέρσεις ηλεκτρονίων εσωτερικών ατομικών στοιβάδων, τα οποία είναι πιο ισχυρά δεσμευμένα με τον πυρήνα. Οι ακτίνες –Χ είναι πολύ διεισδυτικές και επικίνδυνες για τους έμβιους οργανισμούς, αν και σε περιορισμένη έκθεση μπορούν να διαγνώσουν διάφορες παθήσεις στην Ιατρική. Επίσης χρησιμοποιούνται για την χημική ανάλυση υλικών αλλά και για την δομική τους μελέτη μέσω σκέδασης, επειδή τα μήκη κύματός τους είναι συγκρίσιμα με τις ενδοατομικές αποστάσεις των στερεών.

Οι **ακτίνες –*γ*** είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με πολύ μικρό μήκος κύματος που κυμαίνεται από περίπου 10^{-10} m έως 10^{-15} m, και εκπέμπεται από πυρήνες ατόμων κατά τις μεταβάσεις από μια κατάσταση σε μια άλλη. Επίσης ακτίνες –*γ* εκπέμπουν και τα στοιχειώδη σωμάτια κατά τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις. Είναι πολύ διεισδυτικές και επικίνδυνες ακτίνες που μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές οργανικές βλάβες. Εντούτοις, μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμες στην Ιατρική, κυρίως για την καταστροφή καρκινικών κυττάρων.

Παράδειγμα 13.4 Μήκος κύματος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Ποιο είναι το μήκος κύματος σε μέτρα και νανόμετρα α) ακτίνων-*γ* συχνότητας 6.50×10^{21}Hz, και β) ορατού φωτός συχνότητας 5.75×10^{14} Hz; Σε κάθε περίπτωση θεωρείστε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία διαδιδόμενη στον αέρα.

Λύση

α) Για την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στον αέρα ισχύει

$$c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{6.50\times10^{21}\,\mathrm{s^{-1}}} \Rightarrow \lambda = 4.61\times10^{-14}\,\mathrm{m}$$

Η ίδια ποσότητα εκφράζεται σε νανόμετρα ως $\lambda = 4.61\times10^{-5}\,\mathrm{nm}$

β) Ομοίως για f=5.75×10^{14} Hz ευρίσκουμε

$$\lambda = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m/s}}{5.75\times10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}} \Rightarrow \lambda = 5.21\times10^{-7}\,\mathrm{m} \quad \text{ή} \quad \lambda\text{=521 nm.}$$

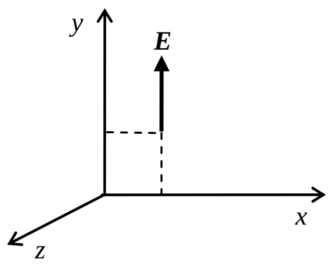
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 13

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

E13.1 Για ποιόν λόγο είναι απαραίτητος ο όρος του ρεύματος μετατόπισης $\varepsilon_o \dfrac{d\Phi_E}{dt}$ στο νόμο του Ampere (τέταρτη εξίσωση του Maxwell), για την κατανόηση της διάδοσης των ΗΜ κυμάτων;

E13.2 Ενώ είναι σχετικά εύκολο να δείξουμε ότι ένα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο παράγει ένα επαγόμενο ηλεκτρικό πεδίο, είναι πολύ δυσκολότερο να δείξουμε ότι ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει ένα μαγνητικό πεδίο. Γιατί συμβαίνει αυτό;

E13.3 Ένα επίπεδο ΗΜ κύμα διαδίδεται κατά την διεύθυνση z. Το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ σε μια χρονική στιγμή σε ένα σημείο του χώρου, είναι όπως δείχνει το σχ. 13.9. Να ευρεθεί η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{B}$ στο ίδιο σημείο την ίδια χρονική στιγμή.



Σχήμα 13.9 *Ερώτηση 13.3.*

E13.4 Είναι δυνατόν να έχουμε ένα αμιγώς ηλεκτρικό κύμα (μόνο πεδίο E, χωρίς πεδίο B), που να διαδίδεται στον κενό χώρο; Τι θα λέγατε για την δυνατότητα διάδοσης αμιγούς μαγνητικού κύματος; Εξηγείστε.

E13.5 Χτενίζεστε με μια χτένα η οποία φορτίζεται ηλεκτρικά. Στη συνέχεια τοποθετείτε την χτένα κοντά σε ραβδόμορφο μαγνήτη, ώστε στην περιοχή τους να δημιουργείται ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Απαντήστε σε ποια από τις παρακάτω περιπτώσεις παράγεται ΗΜ κύμα στο χώρο από την συνύπαρξη χτένας και μαγνήτη. α) Παράγεται ΗΜ κύμα οπωσδήποτε. β) Παράγεται ΗΜ κύμα επειδή στο εσωτερικό του μαγνήτη κινούνται φορτισμένα σωμάτια. γ) Παράγεται ΗΜ κύμα μόνο εάν το $\boldsymbol{E}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{B}$. δ) Παράγεται ΗΜ κύμα μόνο αν κινούνται και τα δύο σώματα ταυτοχρόνως (χτένα και μαγνήτης). ε) Παράγεται ΗΜ κύμα αν κάποιο από τα δύο σώματα κινείται, ή αν κινούνται και τα δυο ταυτοχρόνως.

E13.6 ΗΜ κύματα φθάνουν στην Γη από το διάστημα με όλο το εύρος των μηκών κύματος. Αναλύοντας αυτήν την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορούμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα, για το πώς είναι τώρα το σύμπαν ή για το πώς ήταν στο παρελθόν. Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

E13.7 Μπορεί ένα ΗΜ κύμα να εκτραπεί από ένα μαγνητικό πεδίο; Από ένα ηλεκτρικό πεδίο;

E13.8 Όταν πατάτε τον ηλεκτρικό διακόπτη σε ένα δωμάτιο για να ανάψει το φως, αυτό ανάβει αμέσως. Η ταχύτητα με την οποία ανάβει το φως είναι c ή όχι; Εξηγείστε.

E13.9 Το ημιτονοειδές ΗΜ κύμα του σχήματος 13.4, αναπαριστάνει δύο μήκη κύματος. Από το σημείο x=0 έως το σημείο x=2λ, σε ποια ενδιάμεσα σημεία η στιγμιαία πυκνότητα ενέργειας του ΗΜ κύματος, έτσι όπως εκφράζεται από το διάνυσμα Poynting α) μηδενίζεται, και β) μεγιστοποιείται;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Π13.1 Ρεύμα μετατόπισης. Υπολογίστε το ρεύμα μετατόπισης που αναπτύσσεται μεταξύ των τετραγωνικών οπλισμών ενός πυκνωτή, πλευράς 8.50 cm, εάν το ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή μεταβάλλεται με ρυθμό 1.50×10^6 V/m·s.

Π13.2 Επαγόμενο πεδίο *B* από μεταβολή πεδίου *E*. Ένας πυκνωτής έχει παράλληλους κυκλικούς οπλισμούς ακτίνας r_o=3.50 cm ο καθένας, και η μεταξύ τους απόσταση είναι d=6.00 mm. Εάν στα άκρα του πυκνωτή εφαρμοσθεί μια ημιτονοειδής διαφορά δυναμικού $V = V_o \sin(2\pi ft)$, όπου V_o=310 V και f=50 Hz, δείξτε ότι α) το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο στο χώρο μεταξύ των οπλισμών του πυκνωτή δίνεται από μια σχέση της μορφής, $B = B_o(r)\cos(2\pi ft)$, όπου r είναι η ακτινική απόσταση από τον κεντρικό άξονα του πυκνωτή. β) Καθορίστε την έκφραση για το πεδίο B για $r\leq r_o$ και $r> r_o$.

Π13.3 Κυματική εξίσωση. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις 13.20 και 13.24, αποδείξτε την κυματική εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο, έτσι όπως εκφράζεται από την εξ. 13.33.

Π13.4 Παραγωγή ΗΜ κύματος. Πόση είναι η τιμή της αυτεπαγωγής L που απαιτείται σε ένα κύκλωμα RLC, του οποίου η χωρητικότητα C είναι 20 μF, ώστε να παραχθεί ηλεκτρομαγνητική ταλάντωση ικανή να δώσει ΗΜ κύμα μήκους κύματος 600 nm δηλ. ορατό φως;

Π13.5 Ενέργεια ΗΜ κύματος. Ένας τηλεοπτικός σταθμός εκπέμπει σήμα του οποίου η μέση ένταση όταν φθάνει σε δορυφορική κεραία διαμέτρου 80 cm, είναι 1.5×10^{13} W/m^2. α) Να υπολογίσετε την συνολική λαμβανόμενη ενέργεια από την κεραία σε χρονικό διάστημα τηλεοπτικής εκπομπής 5 ωρών. β) Ποια είναι τα πλάτη E_o και B_o του ΗΜ κύματος που εκπέμπει ο σταθμός;

Π13.6 Ισχύς ΗΜ κύματος. Ο εγγύτερος αστέρας στην Γη είναι ο *α* Κενταύρου, ο οποίος απέχει 4.30 έτη φωτός. Τηλεοπτικά και ραδιοφωνικά ΗΜ κύματα που εκπέμπονται από σταθμούς στην Γη, έχουν ήδη φθάσει στην περιοχή του αστέρα. α) Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν κάποιοι εξελιγμένοι κάτοικοι (ιδίας εξέλιξης με εμάς) σε έναν πλανήτη κοντά στον *α* Κενταύρου, ποια είναι η ένταση με την οποία λαμβάνουν ένα τηλεοπτικό σήμα από την Γη, του οποίου ο τηλεοπτικός σταθμός εκπέμπει με ισχύ 1.30 MW; β) Εάν εκπέμψουμε ένα ραδιοφωνικό σήμα τώρα, μετά από πόσο χρόνο θα πάρουμε πιθανή τους απάντηση;

Π13.7 Σημειακή πηγή φωτός. Μία ισοτροπική σημειακή πηγή φωτός εκπέμπει κύματα προς όλες τις κατευθύνσεις. Σε απόσταση 8.0 m η μέγιστη ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι 3.50 V/m. Υπολογίστε α) τη μέγιστη τιμή του μαγνητικού πεδίου στην ίδια απόσταση. β) Πόση είναι η μέση ένταση του φωτός σ' αυτήν την απόσταση; γ) Πόση είναι η ισχύς της φωτεινής πηγής; *Απάντηση*: α) 11.7 nT, β) 16×10^{-3} W/m^2, και γ) 12.9 W.

Π13.8 Κεραία ραδιοφωνικών συχνοτήτων. Ένας κυκλικός συρμάτινος βρόχος διαμέτρου 0.500 m χρησιμοποιείται ως κεραία λήψης ραδιοφωνικών συχνοτήτων. Ο βρόχος απέχει απόσταση 4.50 km από ραδιοφωνικό σταθμό ισχύος 3.5 MW που εκπέμπει στην συχνότητα των 93.0 MHz. Υπολογίστε τη μέγιστη επαγόμενη ΗΕΔ $\mathcal{E}_o$ που αναπτύσσεται στον βρόχο. *Υπόδειξη*: Θεωρείστε ότι το μαγνητικό πεδίο του εκπεμπόμενου ΗΜ κύματος είναι της μορφής $B = B_o\sin(kx - \omega t)$, και ότι το πεδίο $\boldsymbol{B}$ είναι κάθετο στο επίπεδο του βρόχου. *Απάντηση*: 1.23 V.

Βιβλιογραφία/Αναφορές

Alonso, M., & Finn, E. J. (1992). *Physics*. Copyright © 1992 by Addison Westley Longman Ltd. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate. ISBN: 0-201-56518-8.

Grant, I. S., & Phillips, W. R. (1975). *Electromagnetism*. The Manchester physics series. Copyright © 1975, by John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0 471 32246 6.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2009). *Οι διαλέξεις Φυσικής του Feynman – Ηλεκτρομαγνητισμός και Ύλη*. Copyright © 2009, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-181-0 (τόμος Β′).

Giancoli, D. (2012). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς*. 4η Έκδοση Copyright © 2012, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ. ISBN: 978-960-418-376-0 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Krane, K. (2009). *Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2009, Εκδόσεις Γ. & Α. ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΟΣ. ISBN: 978-960-7258-75-5 (τόμος Β′).

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2013). Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Σύγχρονη Φυσική, *Σχετικότητα.* Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Gutenberg. ISBN: 978-960-01-1594-9 (τόμος Β′).

Knight, R. D. (2010). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Κύματα, Οπτική, Ηλεκτρικό και Μαγνητικό Πεδίο.* 1η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ίων/ΜΑΚΕΔΟΝΙΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ, Σ. Παρίκου & ΣΙΑ Ε. Ε. ISBN: 978-960-319-306-7 (τόμος ΙΙ).

Kraus, J. (1993). *Ηλεκτρομαγνητισμός*. 4η Έκδοση, Copyright © 1993, Εκδόσεις Α. ΤΖΙΟΛΑ. Ε. ISBN: 960-7219-23-4.

Serway, P. A., & Jewett, J. W. (2013). *Φυσική για επιστήμονες και μηχανικούς - Ηλεκτρισμός και Μαγνητισμός, Φως και Οπτική, Σύγχρονη Φυσική*. Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2013, Εκδόσεις Κλειδάριθμος. ISBN: 978-960-461-509-4.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2010). *Πανεπιστημιακή Φυσική – Ηλεκτρομαγνητισμός, Οπτική*. 2η Ελληνική Έκδοση, Copyright © 2010, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 978-960-02-2473-3 (τόμος Β′).

Αλεξόπουλος, Κ. Δ., & Μαρίνος, Δ. Ι. (1992). *Γενική Φυσική Τόμος Δεύτερος –Ηλεκτρισμός.* 1η Έκδοση, Copyright © 1992, Εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗ ΑΕΒΕ. ISBN: 960-02-0981-2.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Ι. ΘΕΜΕΛΕΙΩΔΕΙΣ ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ

Σταθερά	**Σύμβολο**	**Τιμή (ΔΣΜ)***
Στοιχειώδες φορτίο	e	1.60×10^{-19} C
Μάζα ηρεμίας ηλεκτρονίου	m_e	9.11×10^{-31} kg
Μάζα ηρεμίας πρωτονίου	m_p	1.67×10^{-27} kg
Μάζα ηρεμίας νετρονίου	m_n	1.67×10^{-27} kg
Αναλογία φορτίου-μάζας ηλεκτρονίου	e/m_e	$1.\ 76\times10^{11}$ C/kg
Ταχύτητα του φωτός στο κενό	c	3.00×10^{8} m/s
Ηλεκτρική σταθερά	K	8.9875×10^{9} Nm^2/C^2
Βαρυτική σταθερά	G	6.67×10^{-11} $m^3/\ kg\cdot s^2$
Διηλεκτρική σταθερά του κενού	ε_o	8.85×10^{-12} $C^2/N\cdot m^2$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	μ_o	1.26×10^{-6} T·m/A
Μαγνητική διπολική ροπή ηλεκτρονίου	μ_e	9.28×10^{-24} J/T
Μαγνητική διπολική ροπή πρωτονίου	μ_p	1.41×10^{-26} J/T
Ακτίνα του Borh	a	5.29×10^{-11} m
Μονάδα ατομικής μάζας	u	1.66×10^{-27} kg
Σταθερά του Planck	h	6.63×10^{-34} J·s
Σταθερά του Boltzman	k	1.38×10^{-23} J/K
Σταθερά των Stefan-Boltzman	σ	5.67×10^{-8} $W/m^2\cdot K^4$
Αριθμός του Avogadro	N_A	6.022×10^{23} mol^{-1}
Παγκόσμια σταθερά των αερίων	R	8.31 J/mol·K
Όγκος γραμμομορίου ιδανικού αερίου (Κ.Σ.)	V_{mol}	22.4 lit/mol
Κανονική ατμοσφαιρική πίεση	1 atm	1.013×10^{5} Pa
Απόλυτο μηδέν θερμοκρασίας	0 K	-273.15 ^oC

* Οι τιμές είναι αυτές που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς και όχι οι ακριβέστερες πειραματικώς μετρούμενες.

ΙΙ. ΠΡΟΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΚΑ

Δύναμη	**Πρόθεμα**	**Σύμβολο**
10^{-24}	yocto (γιόκτο-)	y
10^{-21}	zepto (ζέπτο-)	z
10^{-18}	atto (άτο-)	a
10^{-15}	femto (φέμτο-)	f
10^{-12}	pico (πίκο-)	p
10^{-9}	nano (νάνο-)	n
10^{-6}	micro (μίκρο-)	μ
10^{-3}	milli (μίλι-)	m
10^{-2}	centi (σέντι-)	c
10^{3}	kilo (κίλο-)	k
10^{6}	mega (μέγα-)	M
10^{9}	giga (γίγα-)	G
10^{12}	tera (τέρα-)	T
10^{15}	peta (πέτα-)	P
10^{18}	exa (έξα-)	E
10^{21}	zetta (ζήτα--)	Z
10^{24}	yotta (γιώτα-)	Y

Παραδείγματα

1 fs =1 femptosecond = 1×10^{-15} s

1 nm = 1 nanometer = 1×10^{-9} m

1 μF = 1 microfarad = 1×10^{-6} F

1 mV = 1 milivolt = 1×10^{-3} V

1 kW = 1 kilowatt = 1×10^{3} W

1 MΩ = 1 megaohm = 1×10^{6} Ω

1 GHz = 1 gigahertz = 1×10^{9} Hz

1 ZJ = 1 zettajoule = 1×10^{21} J

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Π2.1 Στοιχεία διανύσματος

Στη Φυσική πολύ συχνά μια φυσική ποσότητα εκφράζεται με ένα διάνυσμα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τις διανυσματικές φυσικές ποσότητες πρέπει να γνωρίζουμε τις ιδιότητες των διανυσμάτων καθώς επίσης και τις πράξεις που γίνονται μεταξύ των διανυσμάτων. Για αυτόν τον λόγο, στο παρόν παράρτημα θα αναφερθούμε εν συντομία στις ιδιότητες των διανυσμάτων και στις πράξεις τους. Ένα διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, ώστε να αποτελεί το άθροισμα ενός αριθμού συνιστωσών. Για παράδειγμα ένα διάνυσμα στο επίπεδο, μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες χρησιμοποιώντας ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων *x*, *y* όπως φαίνεται στο σχ. Π1. Τότε ισχύει

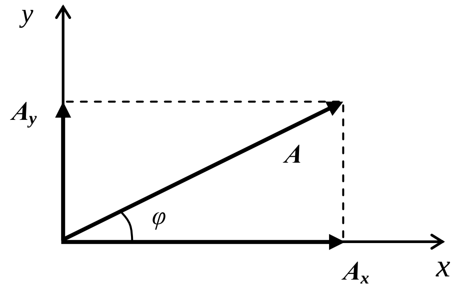
$$\boldsymbol{A} = A_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{j}}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{i}}$ και $\hat{\boldsymbol{j}}$ τα μοναδιαία διανύσματα στους *x* και *y* άξονες αντίστοιχα. Το μέτρο του διανύσματος ***A*** ορίζεται ως

$$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2}}$$

και η διεύθυνση ως

$$\tan\varphi = \frac{A_y}{A_x}$$



Σχήμα Π.1 *Ανάλυση διανύσματος σε δυο συνιστώσες A_x και A_y σε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα xy.*

Για ανάλυση του διανύσματος σε ορθοκανονικό σύστημα τριών διαστάσεων *x*, *y* και *z*, το διάνυσμα γράφεται

$$\boldsymbol{A} = A_x\,\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\,\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$$

Ενώ το μέτρο του ***A*** είναι

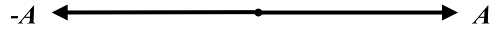
$$A = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}$$

Π2.2 Ιδιότητες και πράξεις διανυσμάτων

Οι πράξεις μεταξύ διανυσματικών ποσοτήτων στην Φυσική είναι συχνές, γι' αυτό πρέπει να γνωρίζουμε τις πράξεις και τις ιδιότητες των διανυσμάτων.

Ισότητα δύο διανυσμάτων: Δύο διανύσματα είναι ίσα, δηλ. ***A*=*B***, όταν έχουν ίσα μέτρα (|*A*|=|*B*|) και ίδια κατεύθυνση.

Αντίθετα διανύσματα: Αντίθετο διάνυσμα του ***A*** ορίζεται το διάνυσμα **-*A*** ώστε να ισχύει ***A*+(-*A*)=0.** Δηλαδή δύο αντίθετα διανύσματα έχουν το ίδιο μέτρο και αντίθετες κατευθύνσεις όπως φαίνεται στο σχ. Π2, ώστε το άθροισμά τους να είναι το μηδενικό διάνυσμα.

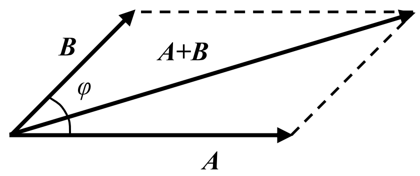


Σχήμα Π2 *Το άθροισμα δυο αντιθέτων διανυσμάτων είναι το μηδενικό διάνυσμα.*

Είναι δυνατόν να εκτελεστούν πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων όπως η πρόσθεση, η αφαίρεση και ο πολλαπλασιασμός. Πιο κάτω αναφέρουμε επί μέρους την κάθε πράξη.

Πρόσθεση διανυσμάτων*:* Το άθροισμα δυο διανυσμάτων ***A*** και ***B*** είναι ένα νέο διάνυσμα με αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του δευτέρου διανύσματος, όταν το ***B*** μεταφερθεί παραλλήλως στο χώρο, έτσι ώστε η αρχή του να συμπέσει με το τέλος του ***A***. Το άθροισμα ***A+B*** φαίνεται σχηματικά στο σχ. Π3, όπου εφαρμόζεται ο κανόνας του παραλληλογράμμου. Το μέτρο του διανυσματικού αθροίσματος ***A+B*** δίνεται από την σχέση

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=\sqrt{|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2+2|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cos\varphi}$$



Σχήμα Π3 *Το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων **A** και **B** με γωνία φ μεταξύ τους.*

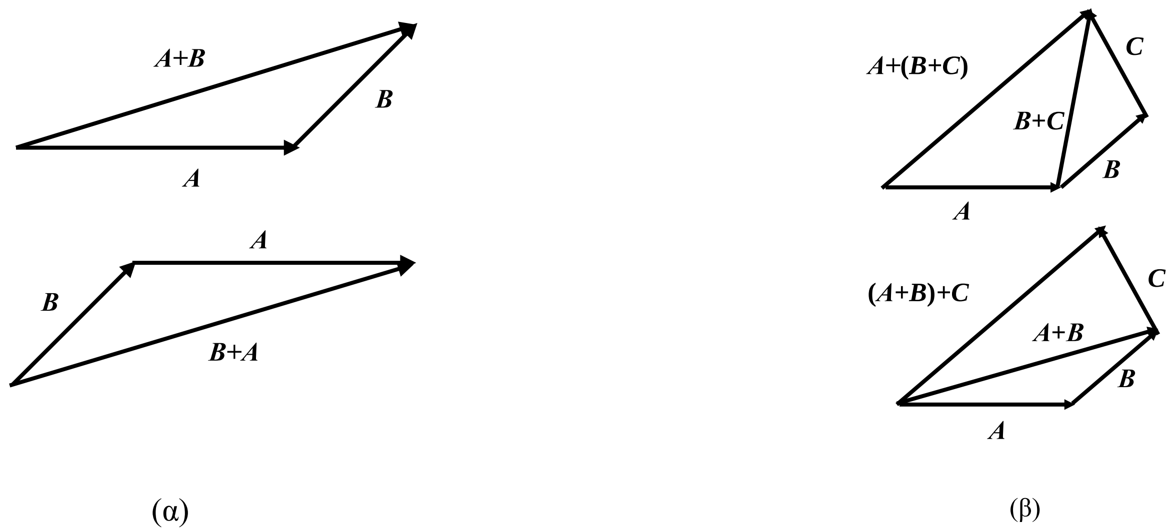
Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύει η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα. Δηλαδή ισχύει

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \qquad \textbf{αντιμεταθετική ιδιότητα}$$

και

$$\boldsymbol{A}+\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}\right)=\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)+\boldsymbol{C} \qquad \textbf{προσεταιριστική ιδιότητα}$$

Στο σχ. Π4α περιγράφεται σχηματικά η αντιμεταθετική ιδιότητα, ενώ στο σχ. Π4β η προσεταιριστική.



Σχήμα Π4. *Ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων: α) αντιμεταθετική ιδιότητα και β) προσεταιριστική ιδιότητα.*

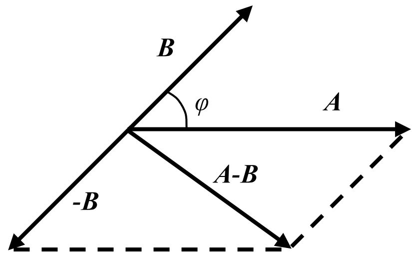
Αφαίρεση διανυσμάτων*:* Η αφαίρεση ενός διανύσματος ***B*** από ένα άλλο ***A***, είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση του αντιθέτου **–*B*** στο ***A*** όπως φαίνεται σχηματικά στο σχ. Π5. Δηλαδή ισχύει

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\left(-\boldsymbol{B}\right)$$

Το μέτρο της διανυσματικής διαφοράς δίνεται από την σχέση

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\sqrt{|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2-2|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cos\varphi}$$

όπου *φ* είναι η γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων.



Σχήμα Π5 *Η αφαίρεση του διανύσματος B από το A είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση του –B στο A.*

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με βαθμωτή ποσότητα*: mA* Το γινόμενο είναι διάνυσμα με μέτρο *m*|***A***| και κατεύθυνση αυτή του ***A.***

Πολλαπλασιασμός μεταξύ διανυσμάτων: Υπάρχουν δύο είδη γινομένου διανυσμάτων:
α) Το **εσωτερικό γινόμενο** το οποίο είναι βαθμωτό μέγεθος και ορίζεται ως

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\cos\varphi$$

όπου η γωνία φ είναι η μικρότερη γωνία γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων όπως φαίνεται στο σχ. Π6α.
β) Το **εξωτερικό γινόμενο** είναι ένα νέο διάνυσμα που ορίζεται ως

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

Το μέτρο του διανύσματος $\boldsymbol{C}$ είναι

$$|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|\sin\varphi$$

όπου φ είναι η μικρότερη γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων όπως φαίνεται στο σχ. Π6β. Το διάνυσμα $\boldsymbol{C}$ έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν τα $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ διανύσματα (επίπεδο σελίδας) και φορά αυτή του δεξιόστροφου κοχλία. Η φορά του $\boldsymbol{C}$ μπορεί να ευρεθεί πρακτικά αν με τα ακροδάκτυλα του δεξιού μας χεριού περιστρέψουμε κατά γωνία φ το $\boldsymbol{A}$ προς το $\boldsymbol{B}$, με κέντρο περιστροφής την κοινή αρχή των δυο διανυσμάτων. Τότε η φορά του διανύσματος $\boldsymbol{C}$ δεικνύεται από τον αντίχειρα.

Σχήμα Π6 *(α) Διανύσματα **A** και **B** με γωνία φ μεταξύ τους. (β) Το εξωτερικό γινόμενο αυτών των διανυσμάτων είναι διάνυσμα **C** κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα **A** και **B**.*

Γινόμενα μοναδιαίων διανυσμάτων

Για το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}=\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}=1 \qquad \text{και} \qquad \hat{\boldsymbol{i}}\cdot\hat{\boldsymbol{j}}=\hat{\boldsymbol{j}}\cdot\hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\hat{\boldsymbol{i}}=0$$

Για το εξωτερικό γινόμενο μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=\hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{j}}=\hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{k}}=0 \qquad \text{και} \qquad \hat{\boldsymbol{i}}\times\hat{\boldsymbol{j}}=\hat{\boldsymbol{k}},\quad \hat{\boldsymbol{j}}\times\hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\boldsymbol{i}},\quad \hat{\boldsymbol{k}}\times\hat{\boldsymbol{i}}=\hat{\boldsymbol{j}}$$

Γινόμενα διανυσμάτων τριών συνιστωσών

Εάν το διάνυσμα $\boldsymbol{a}$ είναι $\boldsymbol{a}=a_x\hat{\boldsymbol{i}}+a_y\hat{\boldsymbol{j}}+a_z\hat{\boldsymbol{k}}$ και το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ είναι $\boldsymbol{b}=b_x\hat{\boldsymbol{i}}+b_y\hat{\boldsymbol{j}}+b_z\hat{\boldsymbol{k}}$, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο είναι

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\hat{\boldsymbol{i}}+a_y\hat{\boldsymbol{j}}+a_z\hat{\boldsymbol{k}})\cdot(b_x\hat{\boldsymbol{i}}+b_y\hat{\boldsymbol{j}}+b_z\hat{\boldsymbol{k}})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

ενώ το εξωτερικό τους γινόμενο μπορεί να υπολογισθεί με βάση την θεωρία των οριζουσών, ως

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{\boldsymbol{i}}-(a_xb_z-a_zb_x)\hat{\boldsymbol{j}}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{\boldsymbol{k}}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

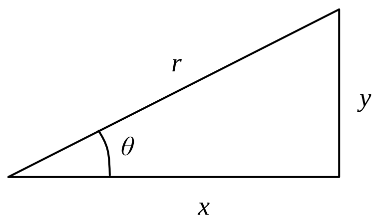
Π3.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις γωνίας

Στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος Π7 ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις της γωνίας θ, ως

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}$$



Σχήμα Π7 *Ορθογώνιο τρίγωνο καθέτων πλευρών x και y, και υποτείνουσας r.*

Π3.2 Τριγωνομετρικές σχέσεις

Για τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου του σχήματος Π6 ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα σύμφωνα με το οποίο

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Για ένα τυχαίων διαστάσεων τρίγωνο με γωνίες Α,Β και Γ, και αντίστοιχες πλευρές μήκους α,β και γ, όπως αυτό του σχήματος Π8 ισχύουν οι σχέσεις

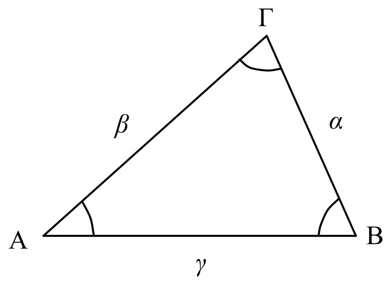
$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma = 180^{\circ}$$

και

$$\frac{\sin \mathrm{A}}{a} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\beta} = \frac{\sin \Gamma}{\gamma} \qquad \text{(νόμος ημιτόνων)}$$

και επίσης

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\Gamma \qquad \text{(νόμος συνιμητόνων)}$$



Σχήμα Π8 *Τρίγωνο τυχαίων διαστάσεων με γωνίες Α,Β και Γ, και αντίστοιχες πλευρές μήκους α,β και γ.*

Π3.3 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Ισχύουν οι παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$
2. $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$
3. $\sin\theta = \cos(90^{\circ} - \theta)$
4. $\cos\theta = \sin(90^{\circ} - \theta)$
5. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
6. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
7. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
8. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
9. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
10. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
11. $\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$
12. $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

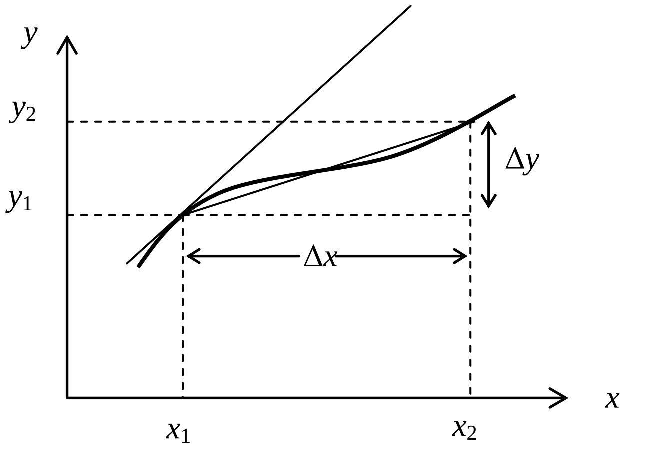
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Π4.1 Παράγωγος συνάρτησης

Παράγωγος της συνεχούς συνάρτησης $y=f(x)$ ως προς το x ορίζεται το όριο των κλίσεων των χορδών που φέρονται μεταξύ δυο σημείων στη γραφική παράσταση του y ως προς x, καθώς Δx τείνει στο μηδέν. Μαθηματικά ο ορισμός της παραγώγου είναι

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

όπου $\Delta y = y_2 - y_1$ και $\Delta x = x_2 - x_1$.



Σχήμα Π9 *Γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης y=f(x) και της παραγώγου ως κλίση της εφαπτομένης.*

Η παράγωγος dy/dx σε κάποιο σημείο x_1 της συνάρτησης ισοδυναμεί με την κλίση της εφαπτομένης σ' αυτό το σημείο της συνάρτησης όπως δείχνει το σχ. Π9.

Π4.2 Ιδιότητες παραγώγου

Αναφέρουμε επιγραμματικά κάποιες ιδιότητες της πράξεως της παραγώγισης:

1) **Παράγωγος του αθροίσματος δυο συναρτήσεων**

Αν $f(x)=g(x)+h(x)$, τότε $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{dg(x)}{dx} + \dfrac{dh(x)}{dx}$

2) **Παράγωγος γινομένου δυο συναρτήσεων**

Αν $f(x)=g(x)h(x)$, τότε $\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left[g(x)h(x)\right] = g(x)\dfrac{dh(x)}{dx} + h(x)\dfrac{dg(x)}{dx}$

3) **Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

Αν $y=f(z)$ και $z=g(x)$ τότε $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx}$

4) **Δεύτερη παράγωγος**

Αν $y=f(x)$, τότε $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

5) **Μερική παράγωγος**

Αν $y=f(x,z)$ τότε ορίζεται η μερική παράγωγος της y ως προς x, εάν παραγωγίσουμε την συνάρτηση $f(x,z)$ μόνο ως προς x θεωρώντας την μεταβλητή z ως σταθερή ποσότητα. Η μερική παράγωγος της y ως προς x, συμβολίζεται ως

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z=\frac{d[f(x,z)]}{dx}$$

Αναλόγως ορίζεται η μερική παράγωγος της y ως προς z, εάν παραγωγίσουμε την συνάρτηση $f(x,z)$ μόνο ως προς z θεωρώντας την μεταβλητή x ως σταθερή ποσότητα. Η μερική παράγωγος της y ως προς z, συμβολίζεται ως

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x=\frac{d[f(x,z)]}{dz}$$

Σε μια τέτοια περίπτωση η στοιχειώδης μεταβολή dy της y ποσότητας, εκφράζεται ως συνάρτηση αμφοτέρων των μεταβολών των dx και dz, ως

$$dy=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_Z dx+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_X dz$$

Ισχύει για τις μερικές παραγώγους μιας συνάρτησης $y=f(x,z)$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 y}{\partial z\partial x}$$

Π4.3 Παράγωγοι συνήθων συναρτήσεων

Στη συνέχεια παραθέτονται οι παράγωγοι ορισμένων συνηθισμένων συναρτήσεων, όπου a είναι μια σταθερά.

1. $\dfrac{da}{dx}=0$, όπου a σταθερά

2. $\dfrac{dx}{dx}=1$

3. $\dfrac{d(ax)}{dx}=a$

4. $\dfrac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}$

5. $\dfrac{d(e^{ax})}{dx}=ae^{ax}$

6. $\dfrac{d(\ln x)}{dx}=\dfrac{1}{x}$

7. $\dfrac{d(\sin x)}{dx}=\cos x$

8. $\dfrac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$

9. $\dfrac{d(\tan x)}{dx}=\sec^2 x$

10. $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}ax=\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

11. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1}ax=\dfrac{-a}{\sqrt{1-a^2x^2}}$

12. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}ax=\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2x^2}}$

Π4.4 Παραδείγματα παραγωγίσεων

Να ευρεθούν οι παράγωγοι των κάτωθι συναρτήσεων

1) Αν $y = x^5 + x^3 + x + 9$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^5 + x^3 + x + 9\right) = \frac{dx^5}{dx} + \frac{dx^3}{dx} + \frac{dx}{dx} + \frac{d(9)}{dx} = 5x^4 + 3x^2 + 1$$

2) Αν $y = (2x+1)^2$, και θέσουμε z=(2x+1), τότε $y = z^2$ και εφαρμόζοντας παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης, έχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dz^2}{dz}\frac{dz}{dx} = 2z\frac{d(2x+1)}{dx} = 4z = 4(2x+1) = 8x+4$$

3) Αν $y(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, τότε εφαρμόζοντας τον κανόνα παραγώγισης του γινομένου συναρτήσεων, όπου

$f(x) = x^3$ και $h(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}$, παίρνουμε

$$\frac{dy}{dx} = x^3\frac{d(x+1)^{-2}}{dx} + (x+1)^{-2}\frac{dx^3}{dx} = x^3(-2)(x+1)^{-2-1} + (x+1)^{-2}3x^2 = -2x^3(x+1)^{-3} + 3x^2(x+1)^{-2} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{(x+1)^2} - \frac{2x^3}{(x+1)^3}$$

4) Αν $y(x) = 5x^2 - x + 2$, να ευρεθεί η δεύτερη παράγωγος της y ως προς x.

Η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(5x^2 - x + 2)\right) = \frac{d}{dx}(10x-1) = 10$$

5) Αν $z = f(x,y) = 3x^3y + 2x\ln y$, να ευρεθούν οι μερικές παράγωγοι της z ως προς x και ως προς y αντιστοίχως.

Η μερική παράγωγος της z ως προς x είναι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{d(3x^3y + 2x\ln y)}{dx} \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 9x^2y + 2\ln y$$

Ομοίως η μερική παράγωγος του z ως προς y είναι

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{d(3x^3y + 2x\ln y)}{dy} \Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 3x^3 + 2\frac{x}{y}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 5

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Π5.1 Ολοκλήρωμα συνάρτησης

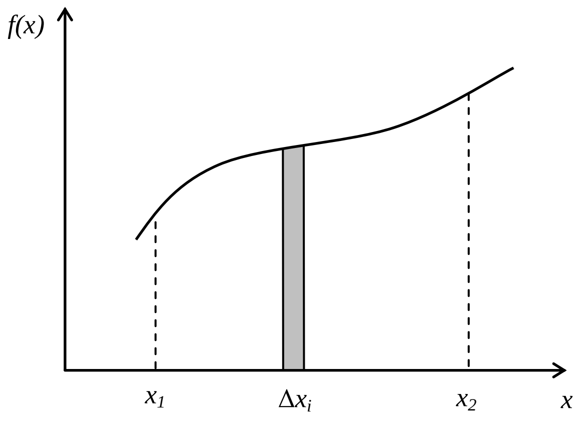
Η ολοκλήρωση είναι η αντίστροφη πράξη της παραγώγισης.

Αν $f(x) = \dfrac{dy(x)}{dx}$, τότε $y(x) = \int f(x)dx$ είναι το **αόριστο ολοκλήρωμα** της $f(x)$ ως προς x. Η συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **ολοκληρωτέα** συνάρτηση. Ισχύει λοιπόν ότι η παράγωγος του ολοκληρώματος δίνει την ολοκληρωτέα συνάρτηση. Για μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$, το ολοκλήρωμά της ως προς x μπορεί να περιγραφεί ως το εμβαδόν που ορίζεται από την καμπύλη της $f(x)$ και του άξονα των x, μεταξύ δυο ορισμένων τιμών x_1 και x_2 που αποτελούν τα όρια του ολοκληρώματος, που ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** όπως δείχνει το σχ. Π10. Συγκεκριμένα σε μια μικρή περιοχή τιμών Δx_i της μεταβλητής x, αντιστοιχεί εμβαδόν ΔE_i ίσο με

$$\Delta E_i = f_i(x)\Delta x_i$$

που φαίνεται ως σκιαγραφημένη περιοχή στο σχ. Π10. Ελαχιστοποιώντας τα διαστήματα Δx_i παίρνουμε στοιχειώδη διαστήματα dx_i στα οποία αντιστοιχούν στοιχειώδη εμβαδά dE_i . Αθροίζοντας όλα τα στοιχειώδη εμβαδά dE_i μεταξύ των τιμών x_1 και x_2 , παίρνουμε το συνολικό εμβαδόν E που εκφράζεται από το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\text{Εμβαδόν, } E \equiv \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i f_i(x)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



Σχήμα Π10. *Το εμβαδόν που ορίζει η καμπύλη f(x) και ο άξονας x μεταξύ των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής x_1 και x_2 , παριστάνει το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f(x).*

Π5.2 Ιδιότητες ολοκλήρωσης

Αναφέρουμε επιγραμματικά κάποιες ιδιότητες της πράξεως της ολοκλήρωσης, όπου c είναι σταθερά:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int e^x dx = e^x + c$
5. $\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$, ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

Π5.3 Ολοκληρώματα συνήθων συναρτήσεων

Στη συνέχεια παραθέτονται τα αόριστα ολοκληρώματα ορισμένων συνηθισμένων συναρτήσεων, όπου a και b είναι σταθερές.

1. $\int \alpha dx = \alpha x$

2. $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, όπου $n \neq$ -1

4. $\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}dx = \ln x$

5. $\int \ln axdx = (x\ln ax) - x$

6. $\int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$

7. $\int xe^{-ax}dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax+1)$

8. $\int x^2e^{-ax}dx = -\frac{e^{-ax}}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)$

9. $\int \sin axdx = -\frac{1}{a}\cos ax$

10. $\int \cos axdx = \frac{1}{a}\sin ax$

11. $\int \tan axdx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax)$

12. $\int \sin^2 axdx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}$

13. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx)$

14. $\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln(a+bx)$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} = -\cos^{-1}\frac{x}{a}$, για $a^2 - x^2 > 0$

17. $\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

18. $\int \frac{xdx}{(x^2 \pm a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

19. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

20. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln(\frac{x-a}{x+a})$ για $x^2 - a^2 > 0$,

    και $= -\frac{1}{2a}\ln(\frac{x+a}{x-a})$ για $x^2 - a^2 < 0$

Π5.4 Τέλειο διαφορικό

Μια χρήσιμη μέθοδος για υπολογισμό ολοκληρωμάτων είναι το τέλειο διαφορικό. Σε κάποιες περιπτώσεις είναι δυνατό να αλλάξουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης ώστε το διαφορικό της συνάρτησης να γίνει η νέα μεταβλητή ολοκλήρωσης. Τότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος είναι ευκολότερος.

Π.χ. $\int \cos^2 x \sin xdx = -\int \cos^2 xd\cos x$. Αν θέσουμε y=cos$x$, τότε έχουμε

$$-\int y^2dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 6

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Π6.1 Δευτεροβάθμια εξίσωση

Η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, έχει λύσεις

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \text{ για } \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$$

Π6.2 Αναπτύγματα

Διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{n}{1!} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots \text{ (για } x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{n}{1!} x + \frac{n(n+1)}{2!} x^2 \mp \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} x^3 + \ldots \text{ (για } x^2 < 1)$$

Εκθετικό ανάπτυγμα

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Λογαριθμικό ανάπτυγμα

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2} x^2 \pm \frac{1}{3} x^3 - \ldots \text{ (για } |x| < 1)$$

Τριγωνομετρικά αναπτύγματα (θ σε ακτίνια)

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \ldots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \ldots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \ldots, \text{ για } \theta < \frac{\pi}{2}$$

Σειρά Taylor

$$f(x) = f(a) + (x-a)\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} + \frac{(x-a)^2}{2!}\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=a} + \frac{(x-a)^3}{3!}\left.\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right|_{x=a} + \ldots$$

Π6.3 Ιδιότητες δυνάμεων

1. $x^n x^m = x^{n+m}$ 2. $x^n y^n = (xy)^n$ 3. $(x^n)^m = x^{nm}$ 4. $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$

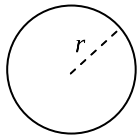
5. $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$ 6. $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ 7. $x^0 = 1$ 8. $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

Π6.4 Ιδιότητες λογαρίθμων

1. $\log(a \cdot \beta) = \log a + \log \beta$ 2. $\log\left(\dfrac{a}{\beta}\right) = \log a - \log \beta$ 3. $\log a^n = n \log a$

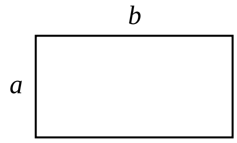
4. $\log 10 = 1$ 5. $\ln e = 1$ 6. $\ln e^x = x$

Π6.5 Γεωμετρικά στοιχεία σωμάτων



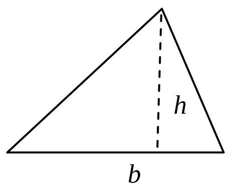
Κύκλος ακτίνας *r*

Περιφέρεια: $2\pi r$, Εμβαδόν: πr^2



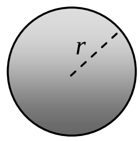
Παραλληλόγραμμο διαστάσεων *a* και *b*

Εμβαδόν: ab



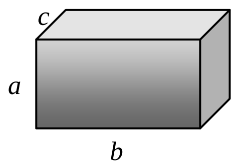
Τρίγωνο βάσης *b* και ύψους *h*

Εμβαδόν: $\dfrac{1}{2}bh$



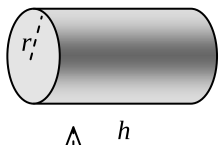
Σφαίρα ακτίνας *r*

Εμβαδόν: $4\pi r^2$, Όγκος: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$



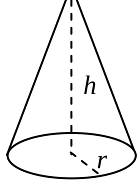
Παραλληλεπίπεδο διαστάσεων *a*, *b* και *c*

Εμβαδόν: $2(ab+bc+ac)$, Όγκος: abc



Κύλινδρος ακτίνας *r* και μήκους *h*

Εμβαδόν: $2\pi r^2 + 2\pi rh$, Όγκος: $\pi r^2 h$



Ορθός κώνος ακτίνας *r* και ύψους *h*

Εμβαδόν: $\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$, Όγκος: $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

Α

Αγωγιμότητα………………………....16, 105, 109
Αγωγοί…………………………...............16, 87
Ακροδέκτες…………………………….....117, 123
Ακτίνες
καθοδικές…………………………….....40
–Χ…………………………………….249
-*γ*………………………………248, 249
Ακτινοβολία του υποβάθρου...…………..……248
Αλεξικέραυνο……...……………………………54
Αμοιβαία επαγωγή……………………………196
Αμπερόμετρο…………………………….107, 118
Αντίσταση……………………………..106, 117
Αντιστάτης……………………………………107
Απόσβεση……………………………...202, 208
Αυτεπαγωγή…………………………………...194

Β

Βαθμίδα ηλεκτρικού δυναμικού………………..78
Βαθυπερατό φίλτρο συχνοτήτων……………...221
Βολτόμετρο…………………………….107, 118

Γ

Γαλβανόμετρο……………………………….....127
Γεννήτρια
εναλλασσομένου ρεύματος...189, 215, 225
Van de Graaff…………………………16
Γέφυρα Wheatstone…………………….…..127
Γωνία φάσης…………………………………..224
Γωνιακή συχνότητα…………...205, 214, 225, 240

Δ

Διαμαγνητικά υλικά………………………….....173
Διαμαγνητισμός………………………………173
Διάνυσμα Poynting………………………245, 247
Διηλεκτρικά υλικά……………………....16, 95, 98
διηλεκτρική
αντοχή…………………………………98
κατάρρευση……………………………96
σταθερά του κενού……………………..19
σταθερά υλικών………………...19, 49, 95
Δίπολο
Ηλεκτρικό…………………………32, 78
Μαγνητικό………………………137, 138
Δύναμη
van der Waals………………………...80
Lorentz………………………..143, 147
Δυναμικό
ηλεκτρικό…………………….…...68, 69, 71
κεντρικό………………………….……..…...71
Δινορεύματα…………………………….…….227

Ε

Ειδική αντίσταση………………………...106, 110
Εκφόρτιση πυκνωτή……………………...129, 130
Εμπέδηση…………………………………...223
Ενέργεια
ηλεκτρομαγνητικού κύματος…………245
μαγνητικού πεδίου………………….....199
πυκνωτή……………………………...94
Ενεργός
Ένταση……………………………...216
Τάση………………………………...217
Εναλλασσόμενη τάση………………189, 214, 217
Εναλλασσόμενο ρεύμα…………………..180, 214
Ένταση
ηλεκτρικού πεδίου……………………...30
ηλεκτρικού ρεύματος……………104, 107
Εξισώσεις του Maxwell…………………..234-236
Επαγόμενο ρεύμα……………………...178. 186
Επαγωγέας……………………………..118, 194
Επαγωγική
αντίσταση…………………………….220
εμπέδηση…………………………….220
ΗΕΔ…………………..178, 182, 186, 196
τάση…………………..178, 184, 189, 195
Επαγωγική σταθερά χρόνου……………...201, 202
Επαγωγικό ρεύμα…………………...178, 183, 186
Επίπεδα κύματα……………………239, 243, 246
Επίπεδο κύματος…………………………….246
Επιφάνεια Gauss…………………………49-51
Εσωτερική αντίσταση……………...……118, 127

Η

Ηλεκτρική
γεννήτρια…………16, 117, 118, 188, 189
διπολική ροπή…………………....79, 148
δύναμη……………….18, 21, 30, 104, 139
δυναμική ενέργεια………..65-67, 73, 150
ισχύς…………………..119, 190, 198, 227
σταθερά……………………………...18
ροή…………………………....46, 47
τάση………………………...70, 87, 107
Ηλεκτρικό
δίπολο………………………….....32, 78

δυναμικό……………..……………68-71
κύκλωμα…………117-119, 200, 203, 207
πεδίο…………………...30-32, 34, 39, 104
ρεύμα…………………………………104
στοιχείο………………………………117
Ηλεκτρικές δυναμικές γραμμές…...31, 46, 49, 187
Ηλεκτρικός
βρόχος……………………………….…..124
κόμβος……………………………….....124
Ηλεκτρόνιο…………………………...……15, 144
Ηλεκτρόνια
ελεύθερα……………16, 17, 104, 109, 146
Ηλεκτρομαγνητική
ακτινοβολία………………...238, 248, 249
δύναμη……………………………...143
επαγωγή……………………….....178, 179
θεωρία…………………………...234, 236
ταλάντωση………………………203-206
Ηλεκτρομαγνητικό
κύμα………………………………...236
πεδίο………………………………...142
φάσμα………………………………248
Ηλεκτροστατική δύναμη……………………21, 65
Ημιαγωγοί………………………………16, 111

Θ

Θερμική
ακτινοβολία…………………………...249
ισχύς………………………………...119
θερμικός συντελεστής ειδικής αντίστασης……110
θερμίστορ……………………………………...111
Θερμοκρασία Curie……………………………173

Ι

Ισοδύναμη
αντίσταση…………………...………120
χωρητικότητα………………………...91
Ισοδυναμική επιφάνεια……………………..70, 77

Κ

Καμπύλη
απόκρισης……………………….…….226
συντονισμού…………………………..226
Κανόνας
του Lenz………………….....183, 186, 187
των βρόχων…………………………...125
των κόμβων…………………………...124
Κανόνες του Kirchhoff…………………..….124
Κλωβός του Faraday……………………………54
Κρίσιμη
απόσβεση…………………………..209
θερμοκρασία…………………………112
Κύκλωμα
RC……………………………128, 219
RL……………………………...200-202
RLC……………………207-210, 221, 225
Κυματαριθμός……………………………240, 245
Κυματική εξίσωση………………………242, 243

Λ

Λυχνία καθοδικών ακτίνων……………………..40

Μ

Μαγνήτης……………………………………...137
Μαγνητίτης……………………………………137
Μαγνητικά υλικά…………………...149, 172, 173
Μαγνητικοί πόλοι……………………...137, 171
Μαγνητικές
δυνάμεις………………….....137, 148, 171
δυναμικές γραμμές………....138, 141, 157
Μαγνητική
διαπερατότητα του κενού……………..157
διπολική ροπή……………...149, 171, 172
δυναμική ενέργεια……………….150, 171
επαγωγή………………………………138
ροή………………………………140, 179
υστέρηση………………………..….227
Μαγνητικό
δίπολο……………………………....137
πεδίο……………...138, 141, 156-160, 169
Μαγνητισμός…………………………………..137
Μαγνήτιση
κόρου…………………………………173
Μακρά ραδιοκύματα…………………………..248
Μετασχηματιστής
ανύψωσης τάσεως……………..…227, 228
υποβιβασμού τάσεως……………228, 229
Μέτωπο κύματος………………………243, 247
Μήκος κύματος……………………..240, 248, 249
Μικροκύματα………………………………….248
Μονοχρωματική ακτινοβολία…………………249
Μονωτές…………………………..….16, 18, 87
Μπαταρία…………………………...69, 94, 117

Ν

Νετρόνιο……………………….……………..15
Νόμος
του Ampere……………166-168, 234-236
των Biot και Savart…………………...158
του Coulomb…………………………..18
του Curie……………………………...173
του Faraday……...179, 195, 197, 234, 236
του Gauss………………...48-50, 234, 236

του Lenz……………………183, 186, 187
του Ohm…………………………105, 118

Ο

Οπλισμοί πυκνωτή……………………………...87
Ορατό φως…………………………………….249

Π

Παλμογράφος…………………………………..40
Παραμαγνητικά υλικά………………………....173
Παραμαγνητισμός……………………………..173
Πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης…………117, 118
Πηνίο
δευτερεύον……………………………228
πρωτεύον…………………………...…228
Πολύμετρο……………………………………107
Πόλωση
ατόμων…………………………….…...18
διηλεκτρικού…………………………...96
κύματος………………………………243
πηγής ΗΕΔ……………………123, 124
Πρωτόνιο……………………………….….…15
Πτώση τάσης…………………………..112, 118
Πυκνωτής
επίπεδος…………………………….…..88
κυλινδρικός……………………………90
σφαιρικός……………………………89
Πυκνότητα
ενέργειας επαγωγέα…………………..199
ρεύματος……………………...105, 147
φορτίου………………………………22

Ρ

Ραδιοκύματα…………………………..237, 248
Ραδιοτηλεσκόπια…………………………...248
Ρεύμα μετατόπισης…………………………235
Ροοστάτης…………………………………..…127

Σ

Σιδηρομαγνητικά υλικά………………...……..172
Σιδηρομαγνητισμός…………………………172
Σταθερά
Curie…………………………………..173
χρόνου κυκλώματος………..129, 201, 202
Στατικά φορτία………………………………18
Σύζευξη εναλλαγής…………………………172
Συμμετρία
επιπέδου……………………………..50
κυλινδρική……………………………..50
σφαιρική…………………..……..51, 71
Συνεχές ρεύμα…………………………117, 216
Σύνθετη αντίσταση……………………………223
Συντελεστής
αυτεπαγωγής…………………………195
αμοιβαίας επαγωγής…………………..197
Συντονισμός………………………………...225
Συχνότητα συντονισμού……………………225
Σχετική διηλεκτρική σταθερά……………….…95
Σωλήνας του Braun…………………………..40

Τ

Τάση
εναλλασσομένη………………….214, 217
ηλεκτρική……………………..70, 87, 107
κατάρρευσης…………………………..98
πόλωσης…………………………….....118
Hall……………………………………146
Ταχύτητα διολίσθησης……………...105, 110, 146

Υ

Υπεραγωγιμότητα……………………………..112
Υπεραγωγοί……………..…………………..112
Υπεραπόσβεση……………………………...209
Υπεριώδης ακτινοβολία……………………249
Υπέρυθρη ακτινοβολία………………...…...249
Υψιπερατό φίλτρο συχνοτήτων…………219, 221

Φ

Φαινόμενο Hall……………………………..…146
Φασματογράφος μάζας……………………..144
Φάσορας……………………………………222
Φασιθέτης…………………………………...222
Φθίνουσα ΗΜ ταλάντωση………………..207-209
Φόρτιση πυκνωτή…………………………...128

Χ

Χωρητική
αντίσταση……………………………..218
εμπέδηση………………………......218
σταθερά χρόνου……………………129
Χωρητικότητα……………………….………87

Ω

Ωμική αντίσταση……………..………..106, 117
Ωμικά υλικά…………………………...105, 110
Ωμόμετρο……………………………...107, 126