1)

Διανύσματα

- Στην Φυσική, τα φυσικά μεγέθη χωρίζονται σε:

α) Μονόμετρα. Είναι τα μεγέθη που περιγράφονται με έναν αριθμό, π.χ. Θερμοκρασία, Μάζα, Φορτίο κ.τ.λ.

β) Διανυσματικά. Είναι τα μεγέθη που περιγράφονται από ένα θετικό αριθμό (το μέτρο) και μια διεύθυνση (μια κατεύθυνση), π.χ. Ταχύτητα, Επιτάχυνση, δύναμη, ορμή κ.τ.λ.

- Τα διανυσματικά μεγέθη αναπαρίστανται με ένα ευθύγραμμο τμήμα με ένα βελάκι στην άκρη. Το μήκος αυτού του διανύσματος είναι το μέτρο του διανύσματος και το ευθύγραμμο τμήμα με το βελάκι μας δίνει την διεύθυνση του διανύσματος.

- Ισοδυναμία διανυσμάτων: Δύο διανύσματα που έχουν ίδιο μέτρο και παράλληλες και ομόρροπες διευθύνσεις είναι ισοδύναμα και θεωρούνται αναπαραστάσεις του ίδιου διανύσματος.

- Στα μαθηματικά ένα διάνυσμα δίνεται από ένα σημείο P. Ο λόγος είναι ότι με παράλληλη μετατόπιση μπορούμε να φέρουμε την αρχή του διανύσματος στην αρχή των αξόνων συνεπώς αν μας δοθεί το τέλος του διανύσματος P καθώς και το σύστημα αξόνων μπορούμε να ζωγραφίσουμε το διάνυσμα.
Ωστόσο αυτός ο ορισμός του διανύσματος απαιτεί και ένα σύστημα αξόνων.

- Αφηρημένος μαθηματικός ορισμός: Για να αποφευχθεί η επιλογή συγκεκριμένου συστήματος αξόνων υπάρχει ο αφηρημένος ορισμός ενός διανύσματος ως ένα στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου V.

2

Διανυσματικός χώρος: Ένα σύνολο V εξοπλισμένο με μια πρόσθεση $+: V \times V \to V$ και ένα πολλαπλασιασμό $\cdot: \mathbb{R} \times V \to V$ με ουδέτερο στοιχείο (το 0) για την πρόσθεση, με ουδέτερο στοιχείο (το 1) για τον πολλαπλασιασμό και με αντίθετο στοιχείο (το $-u$) για κάθε στοιχείο u του V, λέγεται διανυσματικός χώρος αν ικανοποιεί τις ιδιότητες

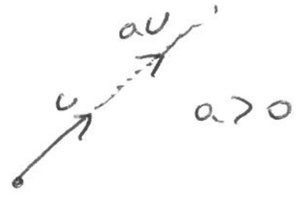
1. $u+v = v+u$ Αντιμεταθετική
2. $(u+v)+w = u+(v+w)$ Προσεταιριστική
3. $u+0 = u$ Ουδέτερο στοιχείο (Πρόσθεση)
4. $u+(-u) = 0$ Αντίθετο στοιχείο
5. $a(bu) = (ab)u = u(ab)$
6. $a(u+v) = au+av$ Επιμεριστική 1
7. $(a+b)u = au+bu$ Επιμεριστική 2
8. $1 \cdot u = u$ Ουδέτερο στοιχείο (Πολλαπλασιασμός)

Εδώ $0, u, v, w \in V$, $a, b, 1 \in \mathbb{R}$

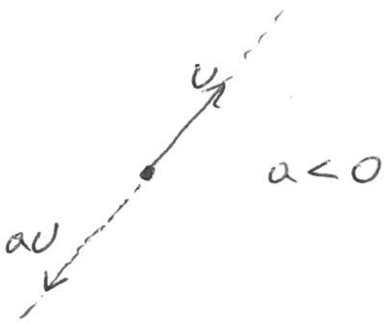
Πράξεις διανυσμάτων: Στα διανύσματα όπως ορίζονται στην Φυσική, οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ορίζονται ως εξής:

Πρόσθεση: Ορίζεται από τον κανόνα του παραλληλογράμμου

Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό:



- Αν $\alpha > 0$ τότε αu είναι ένα διάνυσμα στην φορά του u με μέτρο $|\alpha u| = \alpha |u|$ όπου $|u|$ είναι το μέτρο του u.
- Αν $\alpha < 0$ τότε αu είναι ένα διάνυσμα με φορά αντίθετη από την φορά του u με μέτρο $|\alpha u| = |\alpha| |u|$



- Βάση διανυσμάτων: Είναι ένα ελάχιστο σετ διανυσμάτων που παράγουν όλα τα διανύσματα μέσω γραμμικών συνδυασμών (σε κάποιο διανυσματικό χώρο).

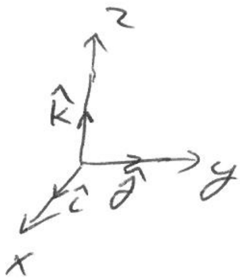
  π.χ. Τα e_1, e_2 αποτελούν βάση των διανυσμάτων στο επίπεδο αν κάθε διάνυσμα u στο επίπεδο γράφεται στην μορφή $u = a e_1 + b e_2$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.
  Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι κάθε διάνυσμα u στο επίπεδο γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των e_1, e_2.

- Κανονική βάση διανυσμάτων στο επίπεδο:

Αν για ένα δεδομένο σύστημα αξόνων στο επίπεδο, $\hat{i}$ είναι ένα διάνυσμα με μήκος 1 κατά την διεύθυνση του άξονα των x, και $\hat{j}$ είναι ένα διάνυσμα με μήκος 1 κατά την διεύθυνση του άξονα των y, τότε τα $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ αποτελούν μια βάση των διανυσμάτων του επιπέδου, την κανονική βάση του επιπέδου.

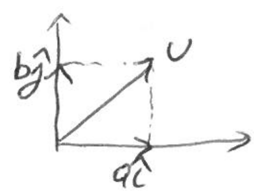
(4) Κανονική βάση διανυσμάτων στον χώρο:

Αν τα $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ είναι μοναδιαία διανύσματα (διανύσματα με μήκος 1) κατά μήκος των αξόνων x, y, z, τότε αυτά αποτελούν βάση του χώρου των διανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο. Αυτή είναι η κανονική βάση διανυσμάτων στον χώρο.

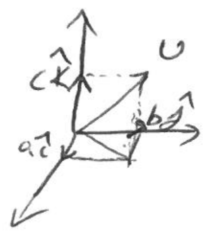


Συνιστώσες διανύσματος:

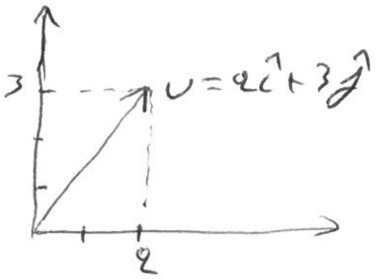
- Αν στο επίπεδο $u = a\hat{i} + b\hat{j}$ τότε τα $a\hat{i}, b\hat{j}$ ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος u



- Αν στο χώρο $u = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ τότε τα $a\hat{i}, b\hat{j}, c\hat{k}$ ονομάζονται συνιστώσες του διανύσματος u.

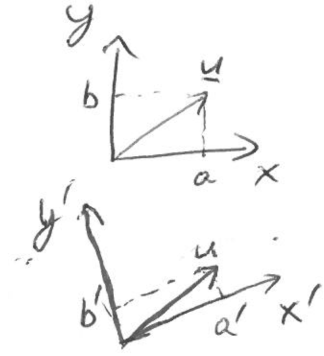


π.χ. Σχεδιάστε το διάνυσμα $u = 2\hat{i} + 3\hat{j}$



Συμβολισμός: Τα διανύσματα τα συμβολίζουμε ή με βελάκια πάνω από το γράμμα, π.χ. $\vec{u}$, ή με γραμμή κάτω από το γράμμα, π.χ. $\underline{u}$. Σε τυπωμένο κείμενο συμβολίζονται και με bold.

⑤ Μήκος διανύσματος από συνιστώσες:



- Αν $\underline{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ τότε $|\underline{u}| = \sqrt{a^2+b^2}$

  Το μήκος δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων

  ($|\underline{u}| = \sqrt{a'^2+b'^2}$)

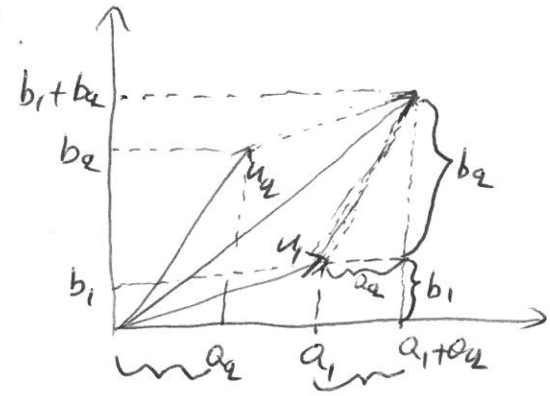
- Αν $\underline{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ τότε $|\underline{u}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Πρόσθεση διανυσμάτων με συνιστώσες:

- Αν $\underline{u}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ και $\underline{u}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$,

  τότε $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = (a_1+a_2)\hat{i} + (b_1+b_2)\hat{j}$.

  Η εξήγηση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



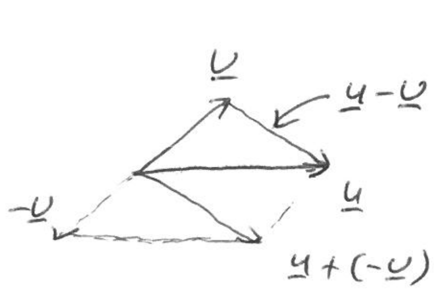
- Αν $\underline{u}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ και

  $\underline{u}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ τότε

  $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = (a_1+a_2)\hat{i} + (b_1+b_2)\hat{j} + (c_1+c_2)\hat{k}$

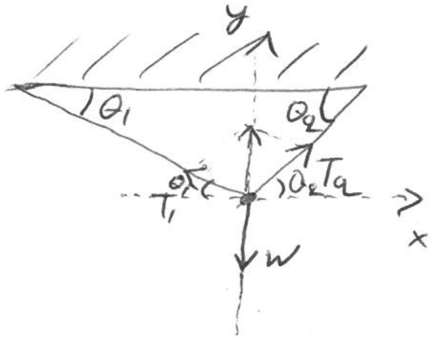
Αφαίρεση διανυσμάτων: $\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$

Το $\underline{u}-\underline{v}$ είναι ένα διάνυσμα που αρχίζει στο τέλος του $\underline{v}$ και φτάνει μέχρι το τέλος του $\underline{u}$.



π.χ. Ισορροπία δυνάμεων:

Ένα βάρος $|\underline{W}| = 200N$ αναρτάται σε δύο σχοινιά στερεωμένα στην οροφή όπως στο σχήμα. Εδώ $\theta_1 = 33^\circ$, $\theta_2 = 50^\circ$. Βρείτε τις τάσεις $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$ στα δύο σχοινιά ώστε να έχουμε ισορροπία.



Λύση: $\underline{T}_1 = -|\underline{T}_1|\cos\theta_1\,\hat{i} + |\underline{T}_1|\sin\theta_1\,\hat{j}$

$$\underline{T}_2 = |\underline{T}_2|\cos\theta_2\,\hat{i} + |\underline{T}_2|\sin\theta_2\,\hat{j}$$

$$\underline{W} = -|\underline{W}|\hat{j}$$

Για ισορροπία, $\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{W} = 0 \Rightarrow$

$$(-|\underline{T}_1|\cos\theta_1 + |\underline{T}_2|\cos\theta_2)\hat{i} + (|\underline{T}_1|\sin\theta_1 + |\underline{T}_2|\sin\theta_2 - |\underline{W}|)\hat{j} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\underline{T}_1|\cos\theta_1 = |\underline{T}_2|\cos\theta_2 \qquad (1)$$

$$|\underline{T}_1|\sin\theta_1 + |\underline{T}_2|\sin\theta_2 = |\underline{W}| \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow |T_1| = \frac{|\underline{T}_2|\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \qquad (3)$$

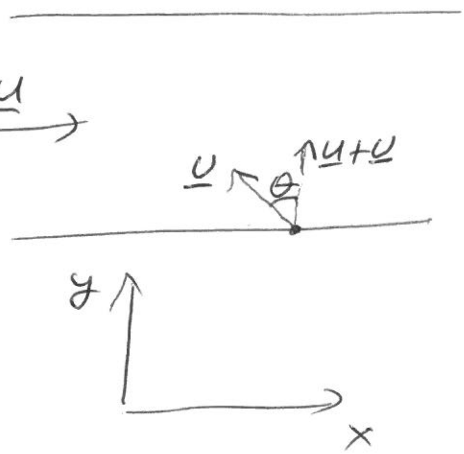
$$(2) \underset{(3)}{\Rightarrow} \frac{|\underline{T}_2|\cos\theta_2}{\cos\theta_1}\sin\theta_1 + |\underline{T}_2|\sin\theta_2 = |\underline{W}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\underline{T}_2| = \frac{|\underline{W}|\cos\theta_1}{\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1} = \frac{|\underline{W}|\cos\theta_1}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = 168{,}99N$$

$$(3) \Rightarrow |T_1| = \frac{|\underline{W}|\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = 129{,}52\,N$$

πχ. <u>Κίνηση σε ποταμό</u>: Ένας ποταμός πλάτους $d = 0{,}64\,km$ ρέει με ταχύτητα $|\underline{u}| = 6\,\frac{km}{h}$. Μια βάρκα που αναπτύσσει ταχύτητα $|\underline{v}| = 20\,\frac{km}{h}$ θέλει να περάσει ακριβώς απέναντι. Ποιά πρέπει να είναι η διεύθυνση της ταχύτητος της βάρκας και πόσο χρόνο t θα χρειαστεί για να περάσει απέναντι;

<u>Λύση</u>:



$\underline{u} = 6\hat{i}$

$\underline{v} = -20\sin\theta\,\hat{i} + 20\cos\theta\,\hat{j}$

$\underline{u} + \underline{v} = (6 - 20\sin\theta)\hat{i} + 20\cos\theta\,\hat{j}$

Για να είναι το $\underline{u}+\underline{v}$ κατά μήκος του άξονα των y, πρέπει

$6 - 20\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{6}{20} = 0.3 \Rightarrow \boxed{\theta = 17{,}46^\circ}$

Αυτή είναι η διεύθυνση της ταχύτητος του σκάφους.

$\underline{u}+\underline{v} = 20\cos 17{,}46^\circ\,\hat{j} = 19{,}08\,\hat{j}$

$|\underline{u}+\underline{v}| = 19{,}08\,\frac{km}{h}$. Άρα $t = \frac{d}{|\underline{u}+\underline{v}|} = \frac{0{,}64}{19{,}08}\,h = 0{,}0325\,h = 1{,}95\,min$

<u>Εσωτερικό Γινόμενο (2D)</u>: Αν $\underline{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ και $\underline{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ τότε

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

<u>Εσωτερικό Γινόμενο (3D)</u>: Αν $\underline{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ και
$\underline{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ τότε

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

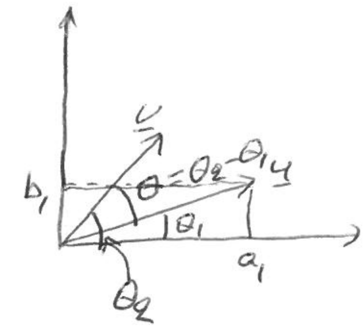
<u>Πρόταση (2D)</u>: Αν $\underline{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$ και $\underline{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ τότε

$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\theta$ όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\underline{u}, \underline{v}$.

<u>Απόδειξη</u>:

$a_1 = |\underline{u}|\cos\theta_1$, $b_1 = |\underline{u}|\sin\theta_1$

$a_2 = |\underline{v}|\cos\theta_2$, $b_2 = |\underline{v}|\sin\theta_2$



$$\underline{u} \cdot \underline{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\theta_1 \cos\theta_2 + $$
$$+ |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 =$$

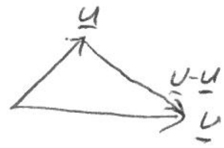
$$= |\underline{u}||\underline{v}| (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2) =$$

$$= |\underline{u}||\underline{v}| \cos(\theta_2 - \theta_1) = |\underline{u}||\underline{v}| \cos\theta \qquad \square$$

<u>Παρατήρηση</u>: Το εσωτερικό γινόμενο δεν επηρεάζεται από περιστροφή αξόνων παρόλο που οι συντεταγμένες a_1, a_2, b_1, b_2 επηρεάζονται. Ο λόγος είναι ότι τόσο το μήκος διανύσματος όσο και η γωνία θ μεταξύ διανυσμάτων παραμένουν αναλλοίωτα.

<u>Πρόταση (3D)</u>: Αν $\underline{u} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ και $\underline{v} = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ τότε $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \cos\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\underline{u}$ και $\underline{v}$.

<u>Απόδειξη</u>: Από το θεώρημα συνημιτόνων:



$$|\underline{v}-\underline{u}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2 - 2|\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\theta$$

Αλλά $|\underline{u}-\underline{v}|^2 = (\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v}) = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u}\cdot\underline{v} + |\underline{v}|^2$.

Άρα $\cancel{|\underline{u}|^2} - 2\underline{u}\cdot\underline{v} + \cancel{|\underline{v}|^2} = \cancel{|\underline{u}|^2} + \cancel{|\underline{v}|^2} - 2|\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\theta \Rightarrow$

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = |\underline{u}|\,|\underline{v}|\cos\theta$$

□

<u>Κριτήριο καθετότητας</u>: Τα διανύσματα $\underline{u}, \underline{v}$ είναι κάθετα αν $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

<u>Απόδειξη</u>: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$ $\square$

π.χ. Βρείτε την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\underline{u} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$ και $\underline{v} = 5\hat{i} + 12\hat{j}$

<u>Λύση</u>: $|\underline{u}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

$|\underline{v}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 8 \cdot 5 + 6 \cdot 12 = 40 + 72 = 112$. Αλλά

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}||\underline{v}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}||\underline{v}|} = \frac{112}{10 \cdot 13} = 0.862$$

Άρα $\theta = \arccos(0.862) = 30.5^\circ$ $\square$

π.χ. Βρείτε το b έτσι ώστε τα διανύσματα
$\underline{u} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$
$\underline{v} = 3\hat{i} + b\hat{j}$
να είναι κάθετα

<u>Λύση</u>: $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 8 + 6 \cdot b = 0 \Rightarrow b = -\frac{24}{6} = -4$ $\square$

π.χ. Αν $\overset{\Delta}{ABC}$ είναι το τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $A(4,3)$, $B(1,-1)$, $C(6,-4)$, βρείτε την γωνία $A\hat{B}C$

<u>Λύση</u>: Αν O είναι η αρχή των αξόνων, τότε

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (\hat{i} - \hat{j}) - (4\hat{i} + 3\hat{j}) = -3\hat{i} - 4\hat{j} \Rightarrow \vec{BA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (6\hat{i} - 4\hat{j}) - (\hat{i} - \hat{j}) = 5\hat{i} - 3\hat{j}$

Έχουμε τώρα ότι

$$\cos(A\hat{B}C) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{3 \cdot 5 - 4 \cdot 3}{\sqrt{3^2+4^2} \cdot \sqrt{5^2+(-3)^2}} = \frac{3}{5\sqrt{34}} = 0.1029 \Rightarrow$$

$A\hat{B}C = \arccos(0.1029) = 84.09^\circ$ $\square$

Έργο σταθερής δύναμης

<u>Ορισμός</u>: Αν $\underline{D}$ είναι το διάνυσμα κατά το οποίο μετατοπίζεται ένα σώμα στο οποίο ασκείται η σταθερή δύναμη $\underline{F}$, τότε το έργο της $\underline{F}$ είναι $W = \underline{F} \cdot \underline{D}$.

π.χ. Μια δύναμη $\underline{F} = 8\hat{i} + 5\hat{j}$ Newton μετακινεί ένα αντικείμενο από το σημείο $(1,0)$ στο $(7,1)$, όπου η κλίμακα στους άξονες είναι σε μέτρα. Βρείτε το έργο της δύναμης

<u>Λύση</u>: $\underline{D} = (7\hat{i}+\hat{j}) - \hat{i} = 6\hat{i}+\hat{j}$

$W = \underline{F} \cdot \underline{D} = (8\hat{i}+5\hat{j}) \cdot (6\hat{i}+\hat{j}) = 48+5 = 53$ joule $\square$

Διανυσματικές Συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση $\underline{F}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n=2,3$ λέγεται διανυσματική συνάρτηση στο επίπεδο ή στον χώρο αντίστοιχα. Το σημείο του $\mathbb{R}^n$ στο οποίο απεικονίζεται το t, συνήθως γράφεται σαν διάνυσμα, οπότε έχουμε:

Στο επίπεδο: $\underline{F}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$

Στον χώρο: $\underline{F}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$

Διανυσματική συνάρτηση σε διάστημα: Έστω ότι έχουμε την διανυσματική συνάρτηση $\underline{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ στο διάστημα $a \le t \le b$. Τότε η αποτίμηση των διανυσμάτων $\underline{r}(t)$ μας δίνουν ένα κομμάτι καμπύλης στο $\mathbb{R}^n$. Αυτός είναι συνήθως ο διανυσματικός τρόπος με τον οποίο ορίζουμε καμπύλες στο επίπεδο ή στον χώρο.

Όριο διανυσματικής συνάρτησης: Θα λέμε ότι

$\lim_{t \to c} \underline{F}(t) = \underline{L}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $|\underline{F}(t) - \underline{L}| < \varepsilon$ όταν $|t-c| < \delta$.

Αυτός είναι ο συνηθισμένος ορισμός του ορίου, με την διαφορά ότι το απόλυτο στα διανύσματα υποδηλώνει μήκος.

Παρατήρηση: Αν $\underline{F}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$ τότε

$$\lim_{t \to c} \underline{F}(t) = \lim_{t \to c} f(t)\hat{i} + \lim_{t \to c} g(t)\hat{j}$$

<u>Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης</u>: Αν $\underline{F}(t)$ μια διανυσματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$ ή στο $\mathbb{R}^3$, τότε

$$\underline{F}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{F}(t+h) - \underline{F}(t)}{h}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $\underline{F}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$ τότε

$$\underline{F}'(t) = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j}$$

<u>Απόδειξη</u>: $\underline{F}'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\underline{F}(t+h) - \underline{F}(t)}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)\hat{i} + g(t+h)\hat{j} - f(t)\hat{i} - g(t)\hat{j}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}\hat{i} + \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}\hat{j} =$$

$$= f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} \qquad \square$$

<u>Κίνηση στο επίπεδο</u>: Δίνεται από την θέση του κινητού $\underline{r}(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή t.

Αν $\underline{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$ τότε η <u>ταχύτητα</u> του κινητού είναι $\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j}$ και η <u>επιτάχυνση</u> του κινητού είναι

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = f''(t)\hat{i} + g''(t)\hat{j}$$

<u>Ανάλογοι τύποι ισχύουν και στον χώρο</u>. Εδώ αν

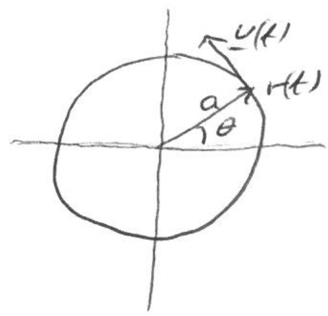
$$\underline{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k} \quad \text{τότε}$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = f'(t)\hat{i} + g'(t)\hat{j} + h'(t)\hat{k} \quad \text{και}$$

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \ddot{\underline{r}}(t) = f''(t)\hat{i} + g''(t)\hat{j} + h''(t)\hat{k}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Στην κινηματική, όταν η παράγωγος είναι ως προς χρόνο, συμβολίζεται με κουκίδα και όχι με τόνο.

(14) π.χ. <u>Ομαλή κυκλική κίνηση:</u>



Η ομαλή κυκλική κίνηση χαρακτηρίζεται από το ότι η γωνία θ μεταβάλλεται γραμμικά στον χρόνο, έχουμε δηλαδή $\theta = \omega t$. Άρα $x(t) = a\cos\omega t$ και $y(t) = a\sin\omega t$. Άρα

$$\underline{r}(t) = a\cos\omega t\,\hat{i} + a\sin\omega t\,\hat{j} \Rightarrow$$

$$\underline{v}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = -a\omega\sin\omega t\,\hat{i} + a\omega\cos\omega t\,\hat{j} \quad \text{και}$$

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = -a\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - a\omega^2\sin\omega t\,\hat{j} = -\omega^2\underline{r}(t)$$

Επειδή $\underline{r}(t)\cdot\underline{v}(t) = 0$ η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτίνα.

Επειδή $\underline{a}(t) = -\omega^2\underline{r}(t)$ η διεύθυνση της επιτάχυνσης είναι αντίθετη στο $\underline{r}(t)$ και κατά συνέπεια βλέπει προς το κέντρο του κύκλου. Το μέτρο της επιτάχυνσης είναι $|\underline{a}(t)| = \omega^2|\underline{r}(t)| = \omega^2 a$ και κατά συνέπεια το μέτρο της δύναμης που προκαλεί την επιτάχυνση (κεντρομόλος δύναμη) είναι

$$|\underline{F}(t)| = m|\underline{a}(t)| = ma\omega^2$$

(15)

πχ. Κίνηση σε έλλειψη: Έστω ότι η θέση του κινητού την χρονική στιγμή t δίνεται από την διανυσματική συνάρτηση $\underline{r}(t) = 3\cos t\,\hat{i} + 2\sin t\,\hat{j}$. Δείξτε ότι το κινητό κινείται σε έλλειψη και βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση την χρονική στιγμή t.

Λύση: $\underline{r}(t) = 3\cos t\,\hat{i} + 2\sin t\,\hat{j} = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$

Άρα $x(t) = 3\cos t$ και $y(t) = 2\sin t$. Επειδή $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ έχουμε $\dfrac{x(t)^2}{3^2} + \dfrac{y(t)^2}{2^2} = 1$.

Αυτό είναι εξίσωση έλλειψης, άρα οι απολήξεις των διανυσμάτων $\underline{r}(t)$, $(x(t), y(t))$ βρίσκονται πάνω σε έλλειψη.

- Εδώ $\underline{r}(t) = 3\cos t\,\hat{i} + 2\sin t\,\hat{j} \Rightarrow$

$$\underline{u}(t) = \dot{\underline{r}}(t) = -3\sin t\,\hat{i} + 2\cos t\,\hat{j} \quad \text{και}$$

$$\underline{a}(t) = \dot{\underline{u}}(t) = -3\cos t\,\hat{i} - 2\sin t\,\hat{j} = -\underline{r}(t)$$

Άρα και στην ομαλή κίνηση σε έλλειψη η επιτάχυνση έχει διεύθυνση αντίθετη προς το $\underline{r}(t)$. Σε αντίθεση όμως με την κυκλική κίνηση, $\underline{r}(t) \cdot \underline{u}(t) \neq 0$ άρα η ταχύτητα δεν είναι κάθετη στο $\underline{r}(t)$.

Μήκος Καμπύλης και Εσωτερική Παράμετρος

Έστω μια καμπύλη $\underline{r}(t)$ στο επίπεδο ή στον χώρο.

→ Για να βρούμε το μήκος της καμπύλης από το $\underline{r}(a)$ στο $\underline{r}(b)$ αρκεί να αθροίσουμε τα μήκη $|\delta\vec{r}|$ από $t=a$ έως $t=b$. Συνεπώς

$$s = \int_a^b |d\underline{r}| = \int_a^b \left|\frac{d\underline{r}}{dt}\right| dt$$

- Στο επίπεδο, αν $\underline{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j}$ έχουμε

$$s = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

- Στον χώρο, αν $\underline{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$ έχουμε

$$s = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2}\, dt$$

– Είναι δυνατόν να παραμετρίσουμε την ίδια την καμπύλη από το μήκος της αν πάρουμε κάποια αρχή. Έστω, για παράδειγμα, ότι παίρνουμε για αρχή το $\underline{r}(a)$. Το μήκος καμπύλης μέχρι το $\underline{r}(t)$ είναι

$$s(t) = \int_a^t \left|\frac{d\underline{r}(u)}{du}\right| du .$$

Το μήκος $s(t)$ προσδιορίζει μονότονα το t συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως παράμετρος και να μιλήσουμε για την καμπύλη $\underline{r}(s)$. Η παράμετρος s είναι φυσική παράμετρος μια και ορίζεται από την ίδια την καμπύλη, και λέγεται <u>εσωτερική παράμετρος</u> της καμπύλης.

Εφαπτόμενα και κάθετα διανύσματα

<u>Εφαπτόμενο διάνυσμα</u>: Το διάνυσμα $\delta\underline{r} = \underline{r}(t+h) - \underline{r}(t)$ είναι ένα διάνυσμα που συνδέει δύο σημεία της καμπύλης $\underline{r}(t)$. Όταν το h γίνει μικρό αυτό προσεγγίζει την εφαπτομένη της καμπύλης. Επομένως το $\underline{r}'(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\underline{r}(t+h) - \underline{r}(t)}{h}$ είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $\underline{r}(t)$. Έχει όμως μήκος που εξαρτάται από τον ρυθμό μεταβολής της $\underline{r}(t)$.

<u>Μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα</u>: Για να προσδιορίσουμε την διεύθυνση της εφαπτομένης στην $\underline{r}(t)$ χρειάζεται να ορίσουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\boxed{\hat{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{|\underline{r}'(t)|}}$$

Αν για παράμετρο χρησιμοποιήσουμε την φυσική παράμετρο s της καμπύλης με κάποια αρχή, τότε $\hat{T}(s) = \dfrac{\frac{d\underline{r}(s)}{ds}}{\left|\frac{d\underline{r}(s)}{ds}\right|}$. Αλλά $|\delta\underline{r}| = \delta s$ επομένως

$$\left|\frac{d\underline{r}(s)}{ds}\right| = 1 \quad \text{άρα} \quad \boxed{\hat{T}(s) = \frac{d\underline{r}(s)}{ds}}.$$

<u>Κάθετο διάνυσμα</u>: Ισχύει ότι $\hat{T}(t) \cdot \hat{T}(t) = 1$. Αν παραγωγίσουμε αυτή την σχέση παίρνουμε $\dfrac{d\hat{T}(t)}{dt} \cdot \hat{T}(t) = 0$ κατά συνέπεια το $\hat{T}'(t)$ είναι κάθετο στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{T}(t)$.

<u>Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα</u>: Ορίζεται ως το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση του $\hat{T}'(t)$, δηλ. $\boxed{\hat{N}(t) = \dfrac{\hat{T}'(t)}{|\hat{T}'(t)|}}$

<u>Καμπυλότητα</u>: Χρησιμοποιώντας την εσωτερική παράμετρο το κάθετο διάνυσμα παίρνει την μορφή

$$\hat{N}(s) = \frac{\dfrac{d\hat{T}(s)}{ds}}{\left|\dfrac{d\hat{T}(s)}{ds}\right|} .$$

Η παράγωγος $\left|\dfrac{d\hat{T}(s)}{ds}\right|$ μας δίνει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εφαπτόμενο διάνυσμα $\hat{T}(s)$ ως προς το μήκος καμπύλης. Αυτό είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας της καμπύλης $\underline{r}(s)$. Για αυτό λοιπόν ορίζουμε την καμπυλότητα $\kappa(s)$ ως

$$\kappa(s) = \left|\frac{d\hat{T}(s)}{ds}\right|$$

• Ως προς την γενική παράμετρο t η καμπυλότητα παίρνει την μορφή

$$\kappa(t) = \left|\frac{\dfrac{d\hat{T}(t)}{dt}}{\dfrac{ds(t)}{dt}}\right| \Rightarrow \boxed{\kappa(t) = \frac{|\hat{T}'(t)|}{|\underline{r}'(t)|}} \quad \text{επειδή } |\delta\underline{r}| = \delta s .$$

π.χ. Κύκλος $\underline{r}(t) = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j}$ ακτίνας a

$$\underline{r}'(t) = -a\sin t\,\hat{i} + a\cos t\,\hat{j}, \quad |\underline{r}'(t)| = a\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = a$$

Άρα $\hat{T}(t) = \dfrac{\underline{r}'(t)}{|\underline{r}'(t)|} = -\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα.

$$\hat{T}'(t) = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}, \quad |\hat{T}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

Άρα $\hat{N}(t) = \dfrac{\hat{T}'(t)}{|\hat{T}'(t)|} = -\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα. Βλέπει προς το κέντρο του κύκλου.

Η καμπυλότητα $\kappa = \dfrac{|\hat{T}'(t)|}{|\underline{r}'(t)|} = \dfrac{1}{a}$. Άρα η καμπυλότητα του κύκλου είναι το αντίστροφο της ακτίνας του.

Εξωτερικό γινόμενο

Εκτός από το εσωτερικό γινόμενο, που είναι ένας αριθμός, υπάρχει και ένα δεύτερο γινόμενο διανυσμάτων που το αποτέλεσμα του δεν είναι αριθμός αλλά διάνυσμα. Αυτό είναι το <u>εξωτερικό γινόμενο</u> και έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον στις 3 διαστάσεις.

- Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\underline{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ και $\underline{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ορίζεται μέσω της παρακάτω ορίζουσας

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ο παραπάνω ορισμός μέσω της ορίζουσας μας δίνει αμέσως δυο βασικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

<u>Ιδιότητα 1</u>: Για κάθε διάνυσμα $\underline{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ισχύει ότι $\underline{u} \times \underline{u} = 0$.

<u>Απόδειξη</u>: $\underline{u} \times \underline{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$ γιατί η ορίζουσα έχει δυο γραμμές ίδιες. $\square$

<u>Ιδιότητα 2</u>: Για δύο διανύσματα $\underline{u}, \underline{v}$ ισχύει ότι

$$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}$$

<u>Απόδειξη</u>: Από ιδιότητα 1, $(\underline{u}+\underline{v}) \times (\underline{u}+\underline{v}) = 0 \Rightarrow$

$$\cancel{\underline{u} \times \underline{u}} + \underline{u} \times \underline{v} + \underline{v} \times \underline{u} + \cancel{\underline{v} \times \underline{v}} = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{u} \times \underline{v} = -\underline{v} \times \underline{u}. \quad \square$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η ιδιότητα 1 μας λέει ότι αν δύο διανύσματα $\underline{u}, \underline{v}$ είναι παράλληλα, τότε $\underline{u} \times \underline{v} = 0$.

Ένας εναλλακτικός τρόπος να ορίσουμε το εξωτερικό γινόμενο, που βολεύει όμως στον αλγεβρικό υπολογισμό του, είναι μέσω των γινομένων των διανυσμάτων βάσης:

$$\hat{\imath}\times\hat{\imath}=0,\quad \hat{\jmath}\times\hat{\jmath}=0,\quad \hat{k}\times\hat{k}=0,$$
$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath}=\hat{k},\quad \hat{\jmath}\times\hat{k}=\hat{\imath},\quad \hat{k}\times\hat{\imath}=\hat{\jmath},$$
$$\hat{\jmath}\times\hat{\imath}=-\hat{k},\quad \hat{k}\times\hat{\jmath}=-\hat{\imath},\quad \hat{\imath}\times\hat{k}=-\hat{\jmath}$$

Αυτά τα γινόμενα κωδικοποιούνται στο διάγραμμα στα δεξιά. Στην φορά που δείχνουν τα βελάκια τα γινόμενα είναι θετικά, στην αντίθετη αρνητικά.

π.χ. Υπολογίστε το $\underline{u}\times\underline{v}$ αν $\underline{u}=\hat{\imath}+2\hat{\jmath}$ και $\underline{v}=\hat{\jmath}+3\hat{k}$

Λύση: $\underline{u}\times\underline{v}=(\hat{\imath}+2\hat{\jmath})\times(\hat{\jmath}+3\hat{k})=\hat{\imath}\times\hat{\jmath}+3\hat{\imath}\times\hat{k}+2\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}+6\hat{\jmath}\times\hat{k}=$

$$=\hat{k}-3\hat{\jmath}+0+6\hat{\imath}=6\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+\hat{k} \qquad \square$$

Μονόμετρο τριπλό γινόμενο: Αυτό είναι το $\underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w})$ και είναι αριθμός.

Λήμμα: Αν $\underline{u}=a_1\hat{\imath}+a_2\hat{\jmath}+a_3\hat{k}$, $\underline{v}=b_1\hat{\imath}+b_2\hat{\jmath}+b_3\hat{k}$ και $\underline{w}=c_1\hat{\imath}+c_2\hat{\jmath}+c_3\hat{k}$ τότε

$$\underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

Απόδειξη: $\underline{v}\times\underline{w}=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=\hat{\imath}\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-\hat{\jmath}\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$

$$\underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w})=a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

υπολογίζοντας απλά το εσωτερικό γινόμενο. Αυτό όμως είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$. $\square$

(21)

Πρόταση 1: Το $\underline{u} \times \underline{v}$ είναι κάθετο και στο $\underline{u}$ και στο $\underline{v}$, συνεπώς είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα $\underline{u}$ και $\underline{v}$.

Απόδειξη: $\underline{u} \cdot (\underline{u} \times \underline{v}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ γιατί η ορίζουσα έχει δύο γραμμές ίδιες. Συνεπώς $\underline{u} \perp \underline{u} \times \underline{v}$.

Όμοια $\underline{v} \perp \underline{u} \times \underline{v}$. □

Πρόταση 2: Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\underline{u} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ και $\underline{v} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ τότε

$$|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta$$

Απόδειξη: $\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}.$$

Άρα $|\underline{u} \times \underline{v}|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$

$$= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 -$$

$$- 2 a_2 a_3 b_2 b_3 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2 -$$

$$- 2 a_2 a_3 b_2 b_3 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$

$$= |\underline{u}|^2 |\underline{v}|^2 - (\underline{u} \cdot \underline{v})^2 = |\underline{u}|^2 |\underline{v}|^2 - |\underline{u}|^2 |\underline{v}|^2 \cos^2\theta =$$

$$= |\underline{u}|^2 |\underline{v}|^2 \sin^2\theta.$$

Άρα $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}|\,|\underline{v}| \sin\theta$ όπου θ η γωνία μεταξύ των $\underline{u}, \underline{v}$. □

Παρατήρηση: Για να προσδιοριστεί πλήρως το διάνυσμα $\underline{u} \times \underline{v}$ χρειαζόμαστε και τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Αυτός μας λέει ότι το $\underline{u} \times \underline{v}$ βλέπει στην φορά που δείχνει ο αντίχειρας του δεξιού μας χεριού όταν τα δάχτυλα δείχνουν από το $\underline{u}$ στο $\underline{v}$. Συνεπώς το $\underline{u} \times \underline{v}$ είναι ένα διάνυσμα με μέτρο $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}||\underline{v}| \sin\theta$, κάθετο στο επίπεδο των $\underline{u}, \underline{v}$ και με φορά που προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία. Συνεπώς και το εξωτερικό γινόμενο, όπως και το εσωτερικό, δεν εξαρτάται από την θέση των αξόνων και την περιστροφική τους κατάσταση.

Τανυστικός συμβολισμός

Εδώ ένα διάνυσμα συμβολίζεται μέσω των συντεταγμένων του. Αν $\underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ τότε το διάνυσμα $\underline{a}$ γίνεται το σύνολο συντεταγμένων (a_i).

- Για την περιγραφή των γινομένων των διανυσμάτων χρησιμοποιείται η <u>σύμβαση αθροίσματος του Einstein</u> που λέει ότι όταν ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές τότε αυτόματα αθροίζουμε σε αυτό τον δείκτη.

Έτσι για παράδειγμα το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\underline{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ και $\underline{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ παίρνει την μορφή $\underline{a}\cdot\underline{b} = a_i b_i$. Εδώ επειδή ο δείκτης i εμφανίζεται δυο φορές έχουμε άθροιση και $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

<u>Σύμβολο Kronecker δ_{ij}</u> Το σύμβολο Kronecker, δ_{ij} ορίζεται να είναι 1 αν $i=j$ και 0 διαφορετικά.

π.χ. Χρησιμοποιώντας το Kronecker δ_{ij} και την σύμβαση αθροίσματος μπορούμε να γράψουμε το εσωτερικό γινόμενο ως

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = \delta_{ij} a_i b_j .$$

Επειδή $\delta_{ij} \neq 0$ μόνο όταν $i=j$ αυτό είναι το ίδιο με το $a_i b_i$ που είχαμε πριν.

<u>Αντισυμμετρικό σύμβολο ε_{ijk}</u>:

Το αντισυμμετρικό σύμβολο ορίζεται μέσω των σχέσεων

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$

$\varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1$

και ορίζεται να είναι 0 όταν δυο δείκτες είναι ίδιοι.

Από τον ορισμό του, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$ και

$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$

Εξωτερικό γινόμενο σε τανυστική μορφή: Το εξωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί σύντομα με την χρήση του ε_{ijk} ως $(\underline{a}\times\underline{b})_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$ όπου φυσικά εννοείται άθροιση στους δείκτες j και k.

Πράγματι, αν $i=1$, τότε $(a\times b)_1 = \varepsilon_{1jk}\, a_j b_k =$

$$= \varepsilon_{123}\, a_2 b_3 + \varepsilon_{132}\, a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

που είναι η πρώτη συντεταγμένη του $\underline{a}\times\underline{b}$.

Λήμμα: $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{\ell mk} = \delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}$. Εδώ η άθροιση είναι στον δείκτη k

Απόδειξη: Απλά ελέγχουμε περιπτώσεις.

π.χ. Αποδείξτε ότι $\underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w}) = (\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{w}$

Λύση: $\underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w}) = u_i\, \varepsilon_{ijk}\, v_j w_k = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j w_k$

$(\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{w} = \varepsilon_{ijk}\, u_j v_k \cdot w_i$

Εδώ έχουμε άθροισμα και στους 3 δείκτες, και κατά συνέπεια μπορούμε να τους μετονομάσουμε. Αν στο δεύτερο γινόμενο μετονομάσουμε $j\to i$, $k\to j$, $i\to k$

παίρνουμε $(\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{w} = \varepsilon_{kij}\, u_i v_j w_k = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j w_k$

Άρα το δεύτερο γινόμενο είναι ίδιο με το πρώτο.

Παρατήρηση: Το μονόμετρο τριπλό γινόμενο επιδέχεται γεωμετρική ερμηνεία. Είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$.

$$V = |\underline{u}\cdot(\underline{v}\times\underline{w})|.$$

<u>Διανυσματικό τριπλό γινόμενο $\underline{u}\times(\underline{v}\times\underline{w})$</u>: Αυτό είναι ένα τριπλό γινόμενο που το αποτέλεσμα είναι διάνυσμα και όχι αριθμός.

<u>Πρόταση</u>: $\underline{u}\times(\underline{v}\times\underline{w}) = (\underline{u}\cdot\underline{w})\underline{v} - (\underline{u}\cdot\underline{v})\underline{w}$

<u>Απόδειξη</u>: $[\underline{u}\times(\underline{v}\times\underline{w})]_i = \varepsilon_{ijk}\, u_j\, (\underline{v}\times\underline{w})_k =$

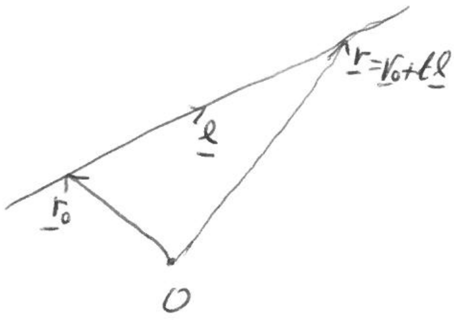
$$= \varepsilon_{ijk}\, u_j\, \varepsilon_{klm}\, v_l\, w_m = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk}\, u_j\, v_l\, w_m =$$

$$\overset{\text{λήμμα}}{=} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\, u_j\, v_l\, w_m =$$

$$= u_j v_i w_j - u_j v_j w_i = (\underline{u}\cdot\underline{w})\, v_i - (\underline{u}\cdot\underline{v})\, w_i$$

Άρα $\underline{u}\times(\underline{v}\times\underline{w}) = (\underline{u}\cdot\underline{w})\underline{v} - (\underline{u}\cdot\underline{v})\underline{w}$ $\square$.

Εξίσωση ευθείας στον χώρο



Διανυσματική μορφή:

Η διανυσματική παραμετρική μορφή της εξίσωσης της ευθείας είναι η

$$\boxed{\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{l}}$$

όπου $\underline{r}_0$ είναι το διάνυσμα θέσης κάποιου σημείου της ευθείας, και $\underline{l}$ είναι κάποιο διάνυσμα παράλληλο με την ευθεία.

Ο λόγος που ισχύει αυτή η εξίσωση είναι ότι το διάνυσμα θέσης $\underline{r}$ ενός τυχαίου σημείου της ευθείας είναι το άθροισμα του $\underline{r}_0$ και ενός πολλαπλασίου $t\underline{l}$ του διανύσματος $\underline{l}$.

Παραμετρική μορφή: Αν $\underline{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ και
$\underline{l} = l_1\hat{i} + l_2\hat{j} + l_3\hat{k}$ τότε

αν $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ έχουμε ότι

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k} + tl_1\hat{i} + tl_2\hat{j} + tl_3\hat{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + tl_1 \\ y = y_0 + tl_2 \\ z = z_0 + tl_3 \end{cases}}.$$

Αυτές οι τρεις εξισώσεις αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας και για κάθε τιμή του t μας δίνουν ένα σημείο της ευθείας.

Μη παραμετρική μορφή: Για να βρούμε την μη παραμετρική μορφή των εξισώσεων της ευθείας, απαλείφουμε την παράμετρο t.

Επειδή $t = \dfrac{x - x_0}{l_1} = \dfrac{y - y_0}{l_2} = \dfrac{z - z_0}{l_3}$ αν $l_1, l_2, l_3 \neq 0$, σε αυτή την περίπτωση η μη παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας είναι οι

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2} = \frac{z - z_0}{l_3}}$$

Π.Χ. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $P(5,1,3)$ και είναι παράλληλη στο $\underline{l} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

Λύση: Η διανυσματική εξίσωση παίρνει την μορφή

$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{l}$ όπου $\underline{r}_0 = 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$. Άρα

$$\boxed{\underline{r} = 5\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k} + t\hat{i} + 2t\hat{j} - t\hat{k} = (5+t)\hat{i} + (1+2t)\hat{j} + (3-t)\hat{k}}$$

Η παραμετρική μορφή της εξίσωσης δίνεται αν θέσουμε

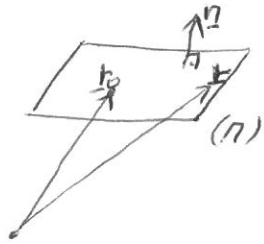
$\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, οπότε έχουμε

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 5+t \\ y &= 1+2t \\ z &= 3-t \end{aligned}}$$

Η μη παραμετρική μορφή δίνεται αν απαλείψουμε το t.

$$t = x-5 = \frac{y-1}{2} = 3-z \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-5 &= \frac{y-1}{2} \\ x-5 &= 3-z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} 2x-y &= 9 \\ x+z &= 8 \end{aligned}}$$

Εξίσωση επιπέδου



Διανυσματική μη παραμετρική μορφή:

Έστω ότι $\underline{r_0}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στο επίπεδο, και έστω $\underline{n}$ ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.
Αν $\underline{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου στο επίπεδο, τότε το $\underline{r}-\underline{r_0}$ είναι ένα διάνυσμα πάνω στο επίπεδο και άρα κάθετο στο $\underline{n}$. Επομένως έχουμε

$$\boxed{\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r_0})=0}$$

Μη παραμετρική μορφή: Αν $\underline{n}=n_1\hat{i}+n_2\hat{j}+n_3\hat{k}$, $\underline{r_0}=x_0\hat{i}+y_0\hat{j}+z_0\hat{k}$ και $\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, τότε

$$\boxed{n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0}$$

Παρατήρηση: Η παραμετρική διανυσματική εξίσωση του επιπέδου δίνεται από το $\underline{r_0}$ και από δύο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\underline{\ell_1}$ και $\underline{\ell_2}$ πάνω στο επίπεδο. Έχει την μορφή $\underline{r}=\underline{r_0}+t\,\underline{\ell_1}+s\,\underline{\ell_2}$ και έχει δύο ελεύθερες παραμέτρους, τις t,s, γιατί το επίπεδο είναι δυδιάστατο αντικείμενο.

29

π.χ. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P(1,0,2)$, $Q(3,-1,6)$ και $R(5,2,4)$

Λύση: Τα διανύσματα θέσης των P, Q, R είναι τα

$\underline{r}_P = \hat{i} + 2\hat{k}$, $\underline{r}_Q = 3\hat{i} - \hat{j} + 6\hat{k}$ και $\underline{r}_R = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

Οι διαφορές τους είναι διανύσματα που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο. Επομένως δύο διανύσματα πάνω στο επίπεδο είναι τα

$$\underline{PQ} = \underline{r}_Q - \underline{r}_P = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\underline{PR} = \underline{r}_R - \underline{r}_P = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

• Σαν $\underline{r}_0$ μπορούμε να πάρουμε το διάνυσμα θέσης οποιουδήποτε σημείου από τα P, Q, R. Εδώ επιλέγουμε το P, άρα $\underline{r}_0 = \hat{i} + 2\hat{k}$

• Η παραμετρική διανυσματική εξίσωση του επιπέδου είναι η

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\,\underline{PQ} + s\,\underline{PR}$$

Επομένως $\underline{r} = \hat{i} + 2\hat{k} + 2t\hat{i} - t\hat{j} + 4t\hat{k} + 4s\hat{i} + 2s\hat{j} + 2s\hat{k} \Rightarrow$

$$\underline{r} = (1 + 2t + 4s)\hat{i} + (-t + 2s)\hat{j} + (2 + 4t + 2s)\hat{k}$$

Σε συντεταγμένες αυτό μας δίνει τις εξισώσεις

$$x = 1 + 2t + 4s$$
$$y = -t + 2s$$
$$z = 2 + 4t + 2s$$

που μας δίνουν τα σημεία του επιπέδου συναρτήσει των παραμέτρων t, s.

• Για να βρούμε την μη παραμετρική διανυσματική εξίσωση του επιπέδου χρειαζόμαστε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο. Αυτό είναι το

$$\underline{n} = \underline{PQ} \times \underline{PR} = (2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}) \times (4\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) =$$
$$= 4\hat{k} - 4\hat{j} + 4\hat{k} - 2\hat{i} + 16\hat{j} - 8\hat{i} = -10\hat{i} + 12\hat{j} + 8\hat{k}$$

30

Η εξίσωση μας παίρνει τώρα την μορφή

$$\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)=0 \Rightarrow \boxed{(-10\hat{i}+12\hat{j}+8\hat{k})\cdot(\underline{r}-\hat{i}-2\hat{k})=0}$$

Σε συντεταγμένες, παίρνοντας $\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ έχουμε

$$(-10\hat{i}+12\hat{j}+8\hat{k})\cdot((x-1)\hat{i}+y\hat{j}+(z-2)\hat{k})=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-10(x-1)+12y+8(z-2)=0}\ .$$

Αυτή είναι η μη παραμετρική εξίσωση του επιπέδου. □

Διαφορική γεωμετρία στον χώρο

Μια καμπύλη στον χώρο δίνεται από μια εξίσωση της μορφής $\underline{r}(t) = f(t)\hat{i} + g(t)\hat{j} + h(t)\hat{k}$

π.χ. Έλικα: $\underline{r}(t) = 2\cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$

Εδώ $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$.

Επειδή $\left(\frac{x(t)}{2}\right)^2 + y(t)^2 = 1$ η καμπύλη ανήκει στον ελλειπτικό κύλινδρο $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$, $z =$ ελεύθερο.

Όσο το t αυξάνει κινούμαστε δεξιόστροφα στην έλλειψη $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$, και η z συντεταγμένη αυξάνει γραμμικά. Αυτό μας δίνει μια δεξιόστροφη ελλειπτική έλικα. $\square$

Βάση διανυσμάτων προσαρμοσμένη στην καμπύλη:

Ήδη έχουμε δει δύο μοναδιαία διανύσματα προσαρμοσμένα στην καμπύλη $\underline{r}(t)$. Αυτά είναι τα

$$\hat{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{|\underline{r}'(t)|} \quad \text{και} \quad \hat{N}(t) = \frac{\hat{T}'(t)}{|\hat{T}'(t)|}$$

που είναι εφαπτόμενο και κάθετο στην καμπύλη.

Για να φτιάξουμε όμως μια βάση διανυσμάτων στον τρισδιάστατο χώρο, χρειαζόμαστε και ένα τρίτο κάθετο σε αυτά τα δύο. Αυτό είναι το

$$\hat{B}(t) = \hat{T}(t) \times \hat{N}(t)$$

Τα $\hat{T}(t), \hat{N}(t), \hat{B}(t)$ αποτελούν μια βάση του τρισδιάστατου χώρου προσαρμοσμένη στην καμπύλη $\underline{r}(t)$.

π.χ. Επίπα: Αν $\underline{r}(t) = 2\cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j} + t\,\hat{k}$ βρείτε την βάση διανυσμάτων που είναι προσαρμοσμένη στην καμπύλη.

Λύση: $r'(t) = -2\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + \hat{k}$

$$|r'(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2+3\sin^2 t}$$

$$\boxed{\hat{T}(t) = \frac{-2\sin t}{\sqrt{2+3\sin^2 t}}\,\hat{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2+3\sin^2 t}}\,\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2+3\sin^2 t}}\,\hat{k}}$$

Εχούμε τώρα $\hat{T}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2+3\sin^2 t}}\left(-2\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + \hat{k}\right) =$

$$= (2+3\sin^2 t)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$T'(t) = -\frac{1}{2}(2+3\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6\sin t\cos t\left(-2\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + \hat{k}\right) +$$

$$+ (2+3\sin^2 t)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\cos t\,\hat{i} - \sin t\,\hat{j}\right) =$$

$$= (2+3\sin^2 t)^{-\frac{3}{2}}\Big[-3\sin t\cos t\left(-2\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + \hat{k}\right) -$$
$$- (2+3\sin^2 t)\left(2\cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j}\right)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+3\sin^2 t)^3}}\Big[\cancel{6\sin^2 t\cos t}\,\hat{i} - 3\sin t\cos^2 t\,\hat{j} - 3\sin t\cos t\,\hat{k} -$$
$$- 4\cos t\,\hat{i} - 2\sin t\,\hat{j} - \cancel{6\sin^2 t\cos t}\,\hat{i} - 3\sin^3 t\,\hat{j}\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+3\sin^2 t)^3}}\Big[-3\sin t(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\hat{j} - 3\sin t\cos t\,\hat{k} -$$
$$- 4\cos t\,\hat{i} - 2\sin t\,\hat{j}\Big] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+3\sin^2 t)^3}}\left[-4\cos t\,\hat{i} - 5\sin t\,\hat{j} - 3\sin t\cos t\,\hat{k}\right]$$

$$|T'(t)| = \frac{1}{\sqrt{(2+3\sin^2 t)^3}}\sqrt{16\cos^2 t + 25\sin^2 t + 9\sin^2 t\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+3\sin^2 t)^3}}\sqrt{25 - 9\cos^2 t + 9\sin^2 t\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2+3\sin^2 t)^3}}\sqrt{25 - 9\cos^4 t}$$

(33)

Συνεπώς $\boxed{\hat{N}(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{25-9\cos^4 t}}\left[-4\cos t\,\hat{i} - 5\sin t\,\hat{j} - 3\sin t\cos t\,\hat{k}\right]}$

Έχουμε τώρα

$$\hat{B}(t) = \hat{T}(t)\times\hat{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2+3\sin^2 t}}\,\frac{1}{\sqrt{25-9\cos^4 t}}$$

$$\cdot\left[-2\sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j} + \hat{k}\right]\times\left[-4\cos t\,\hat{i} - 5\sin t\,\hat{j} - 3\sin t\cos t\,\hat{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5-3\cos^2 t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(5-3\cos^2 t)(5+3\cos^2 t)}}\cdot$$

$$\left[10\sin^2 t\,\hat{k} - 6\sin^2 t\cos t\,\hat{j} + 4\cos^2 t\,\hat{k} - 3\sin t\cos^2 t\,\hat{i} - 4\cos t\,\hat{j} + 5\sin t\,\hat{i}\right] =$$

$$= \frac{1}{(5-3\cos^2 t)\sqrt{5+3\cos^2 t}}\cdot$$

$$\cdot\left[\sin t(5-3\cos^2 t)\,\hat{i} - 2\cos t(2+3\sin^2 t)\,\hat{j} + (4\cos^2 t + 10\sin^2 t)\,\hat{k}\right] =$$

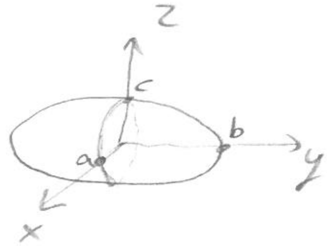
$$= \frac{1}{(5-3\cos^2 t)\sqrt{5+3\cos^2 t}}\cdot$$

$$\cdot\left[(5-3\cos^2 t)\sin t\,\hat{i} - (5-3\cos^2 t)2\cos t\,\hat{j} + 2(5-3\cos^2 t)\,\hat{k}\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{5+3\cos^2 t}}\left[\sin t\,\hat{i} - 2\cos t\,\hat{j} + 2\hat{k}\right]}$$

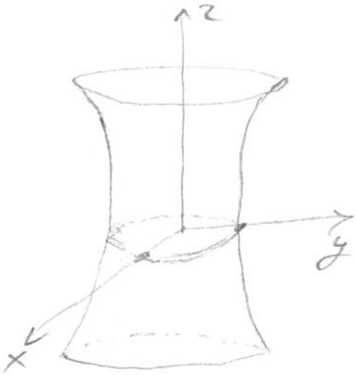
□

Δευτεροβάθμιες επιφάνειες



Ελλειψοειδές: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Η τομή του ελλειψοειδούς με τα τρία επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$ είναι έλλειψη. Για παράδειγμα η τομή του με το επίπεδο $z=0$ (xy επίπεδο) είναι $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ που είναι έλλειψη.



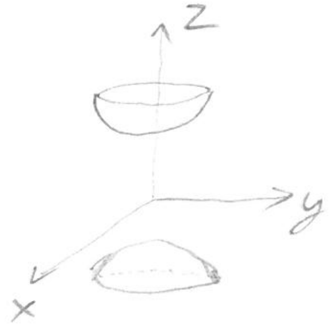
Υπερβολοειδές μίας συνιστώσας: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(Επίσης $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$)

Τομή με επίπεδο $z=0$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ Έλλειψη

Τομή με επίπεδο $y=0$: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Υπερβολή

Τομή με επίπεδο $x=0$: $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ Υπερβολή



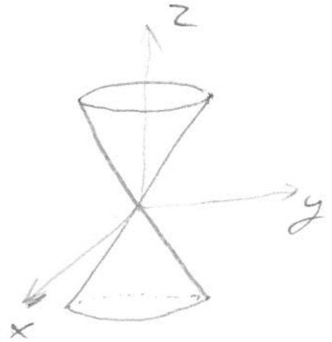
Υπερβολοειδές δύο συνιστωσών: $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

(Επίσης $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$)

Τομή με επίπεδο $z=0$: $-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ αδύνατη

Τομή με επίπεδο $y=0$: $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ υπερβολή

Τομή με επίπεδο $x=0$: $-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ υπερβολή



Κώνος: $\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

(Επίσης $\dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$, $\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$)

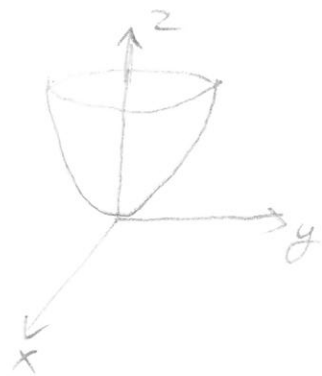
Τομή με επίπεδο $z=0$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow \begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}$ σημείο

Τομή με επίπεδο $z=k$: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{k^2}{c^2}$ Έλλειψη

Τομή με επίπεδο $x=0$: $\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{y^2}{b^2} \Rightarrow \dfrac{z}{c}=\pm\dfrac{y}{b}$ δύο ευθείες

Τομή με επίπεδο $y=0$: δύο ευθείες.

Παραβολοειδές (ελλειπτικό): $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$



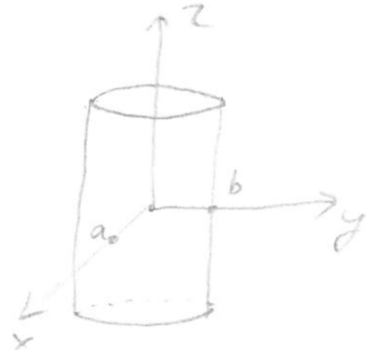
(Επίσης $\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ και $\frac{y}{b} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$)

Τομή με $z = k > 0$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c}$ Έλλειψη

Αν $a = b$, τότε $x^2 + y^2 = \frac{a^2 z}{c}$

Αυτό είναι κύκλος με ακτίνα που μεγαλώνει ανάλογα με το $\sqrt{z}$

Κύλινδρος: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



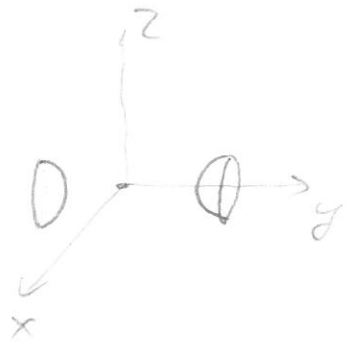
Τομή με $z = k$: Έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Εδώ η z συντεταγμένη είναι ελεύθερη,
κατά συνέπεια παίρνουμε όλα τα σημεία
που αποτελούν μετατόπιση της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
παράλληλα με τον άξονα των z.

π.χ. Αναγνωρίστε τι τύπου επιφάνεια είναι η
$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

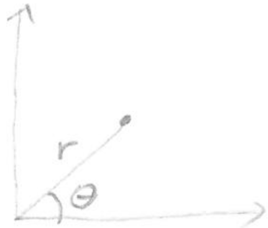
Λύση: $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = -1 \Rightarrow -x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$

Αυτό είναι ένα υπερβολοειδές δύο συνιστωσών
στον άξονα των y.



Συστήματα συντεταγμένων πέρα από τις Καρτεσιανές

Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο:



$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{array}$$

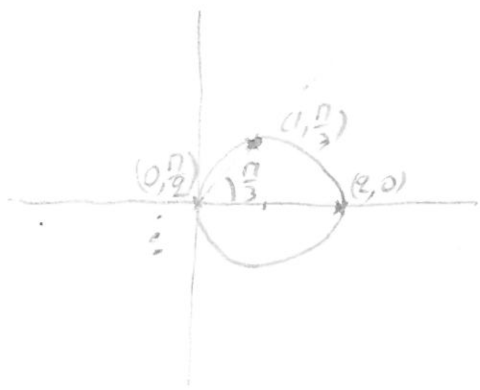
π.χ. Γράψτε το σημείο $(x,y)=(1,-1)$ σε πολικές συντεταγμένες

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow (r,\theta) = \left(\sqrt{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right).$$

Προσέξτε ότι και η γωνία $\theta = \frac{3\pi}{4}$ έχει $\tan\theta = -1$ αλλά αυτή η γωνία απορρίπτεται γιατί $\cos\frac{3\pi}{4} < 0$ ενώ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

π.χ. Σχεδιάστε την καμπύλη $r = 2\cos\theta$

r	θ
2	0
1	$\frac{\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$
-1	$\frac{2\pi}{3}$
-2	π
-1	$\frac{4\pi}{3}$
0	$\frac{3\pi}{2}$
1	$\frac{5\pi}{3}$
2	2π



Εναλλακτικά μπορούμε να πάμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$r = 2\cos\theta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2+y^2 = 2x \Rightarrow x^2-2x+1+y^2 = 1 \Rightarrow$$
$$(x-1)^2+y^2 = 1$$

Αυτό είναι κύκλος με κέντρο το $(1,0)$ και ακτίνα 1.

Παρατήρηση: Συνήθως η αλλαγή συντεταγμένων δεν βοηθάει στον σχεδιασμό γιατί οι καμπύλες με απλές εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες έχουν περίπλοκες σε καρτεσιανές.

π.χ. Σχεδιάστε την καμπύλη $r=\cos(2\theta)$ και βρείτε το εμβαδόν του ενός φύλλου στο σχήμα που προκύπτει.

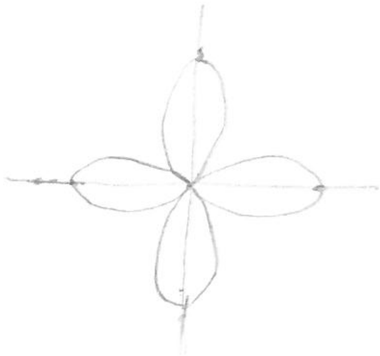
Λύση:

r	θ
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
0	$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
-1	$\frac{\pi}{2}$

r	θ
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
1	π

r	θ
$\frac{1}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$
0	$\frac{5\pi}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$
-1	$\frac{3\pi}{2}$

r	θ
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
0	$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$
1	2π



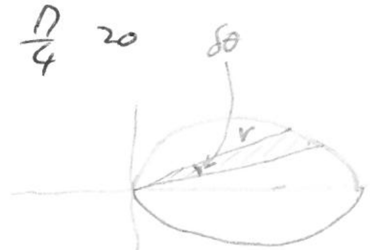
Το σχήμα που προκύπτει είναι ένα τετράφυλλο τριφύλλι!

- Η εξίσωση του σε καρτεσιανές συντεταγμένες δεν είναι καθόλου απλή.

$$r=\cos(2\theta) \Rightarrow r=\cos^2\theta-\sin^2\theta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=x^2-y^2 .$$

- Για να βρούμε το εμβαδόν του πρώτου φύλλου πρέπει να αθροίσουμε από $-\frac{\pi}{4}$ έως $\frac{\pi}{4}$ το εμβαδόν κυκλικών τομέων.



Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα με ακτίνα r και γωνία $\delta\theta$ σε ακτίνια είναι $\delta A=\frac{1}{2}r^2\delta\theta$. Ο τύπος είναι η απλή μέθοδος των τριών. Για $\theta=2\pi$ έχουμε επιφάνεια πr^2 για $\delta\theta$ πόση επιφάνεια δA έχουμε;

$$\delta A=\frac{\pi r^2\delta\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\delta\theta .$$

Αθροίζοντας την επιφάνεια των κυκλικών τομέων παίρνουμε $A=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2 d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\cos^2(2\theta)\,d\theta=$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos(4\theta)}{4}d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta+\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 4\theta\, d\theta=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\sin 4\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}(\sin\pi-\sin(-\pi))=\frac{\pi}{8}. \quad \square$$

38

π.χ. Για το καρδιοειδές $r = 1+\sin\theta$ βρείτε την κλίση της εφαπτομένης όταν $\theta = \frac{\pi}{3}$.

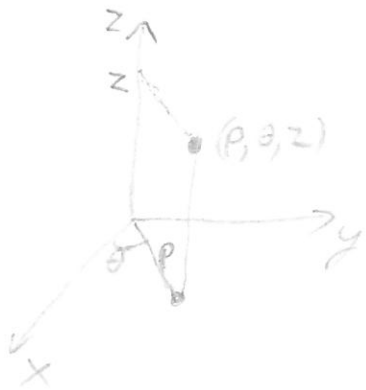
<u>Λύση</u>: $m = \frac{dy}{dx}$. Εδώ έχουμε $x = r\cos\theta = (1+\sin\theta)\cos\theta$

και $y = r\sin\theta = (1+\sin\theta)\sin\theta$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

Για $\theta = \frac{\pi}{3}$, $m = \dfrac{\frac{1}{2} + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}} = -1$ $\square$.

Κυλινδρικές συντεταγμένες στον χώρο:



Εδώ $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ και
z είναι η Καρτεσιανή z συντεταγμένη.
Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το Καρτεσιανό (x,y,z) παίρνει την μορφή (ρ,θ,z).

π.χ. Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες του κυλινδρικού $\left(2,\frac{2\pi}{3},1\right)$

<u>Λύση</u>:
$$\left.\begin{aligned} x&=\rho\cos\theta=2\cos\frac{2\pi}{3}=-1\\ y&=\rho\sin\theta=2\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}\\ z&=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x,y,z)=(-1,\sqrt{3},1).$$

π.χ. Βρείτε τις κυλινδρικές συντεταγμένες του καρτεσιανού $(3,-3,-7)$

<u>Λύση</u>: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=3\sqrt{2}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-3}{3}=-1$, y αρνητικό $\Rightarrow \theta=\frac{7\pi}{4}$

$z=-7$

Άρα $(\rho,\theta,z)=\left(3\sqrt{2},\frac{7\pi}{4},-7\right)$

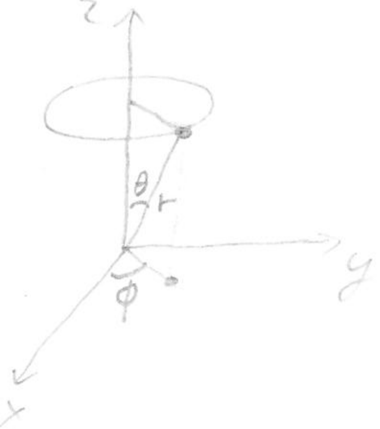
<u>Παρατήρηση</u>: Στις κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε $0\le\theta<2\pi$ από σύμβαση. Έτσι στο παραπάνω παράδειγμα δεν θα πούμε $\theta=-\frac{\pi}{4}$ αλλά $\theta=\frac{7\pi}{4}$.

π.χ. Βρείτε την επιφάνεια $z=\rho$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

<u>Λύση</u>: Η ακτίνα ρ αυξάνει γραμμικά με το z, για $z>0$. Αν επιτρέψουμε στο ρ να πάρει και αρνητικές τιμές, μεταγράφοντας τις ως τιμές αντίθετα, από την ημιευθεία που ορίζει το θ, τότε έχουμε ένα διπλό κώνο.

Εναλλακτικά, σε καρτεσιανές συντεταγμένες
$z=\rho\Rightarrow z=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow z^2=x^2+y^2$ που είναι κώνος. □

Σφαιρικές συντεταγμένες στον χώρο:



Εδώ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\tan\theta = \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$, $\tan\phi = \frac{y}{x}$

Το καρτεσιανό σημείο (x,y,z) δίνεται σε σφαιρικές συντεταγμένες από το (r,θ,ϕ).

Εδώ $x = \underbrace{r\sin\theta}_{\rho}\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$

π.χ. Μετατρέψτε το $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$ από σφαιρικές συντεταγμένες σε καρτεσιανές

Λύση: $x = r\sin\theta\cos\phi = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$y = r\sin\theta\sin\phi = 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$z = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$

Άρα $(x,y,z) = (\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, 1)$. □

π.χ. Μετατρέψτε το καρτεσιανό $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ σε σφαιρικές συντεταγμένες

Λύση: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{0+12+4} = 4$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$, $\cos\theta = \frac{z}{r} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$

$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, $\sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$.

Άρα $(r,\theta,\phi) = (4, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. □

π.χ. Βρείτε σε σφαιρικές συντεταγμένες την εξίσωση του υπερβολοειδούς δύο χιτώνων $x^2-y^2-z^2=1$

Λύση: $r^2\sin^2\theta\cos^2\phi - r^2\sin^2\theta\sin^2\phi - r^2\cos^2\theta = 1 \Rightarrow r^2\sin^2\theta\cos(2\phi) - r^2\cos^2\theta = 1$. □

π.χ. Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της επιφάνειας $r = \sin\theta\sin\phi$

Λύση: $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow x^2+y^2+z^2 = y \Rightarrow x^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2 = \frac{1}{4}$.

Άρα η επιφάνεια είναι σφαίρα με κέντρο $(0,\frac{1}{2},0)$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$. □

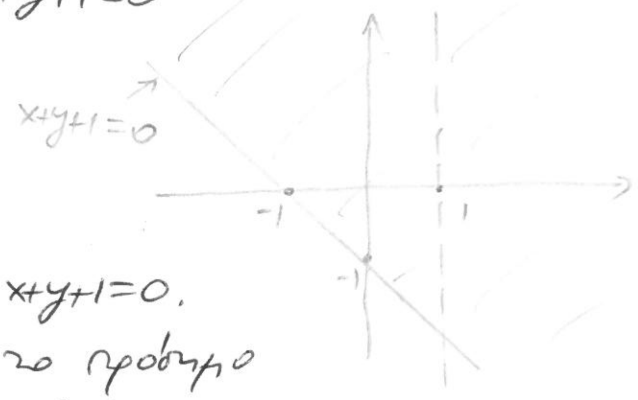
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Είναι συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ όπου το $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Εδώ συχνά θα χρησιμοποιήσουμε τον διανυσματικό συμβολισμό $f(\underline{x})$ για το $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ όπου $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ είναι το διάνυσμα των μεταβλητών.

π.χ. Βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

<u>Λύση</u>: Εδώ χρειαζόμαστε $x+y+1 \geq 0$ και $x \neq 1$

Για να λύσουμε την πρώτη ανίσωση σχεδιάζουμε στο επίπεδο την ευθεία $x+y+1=0$

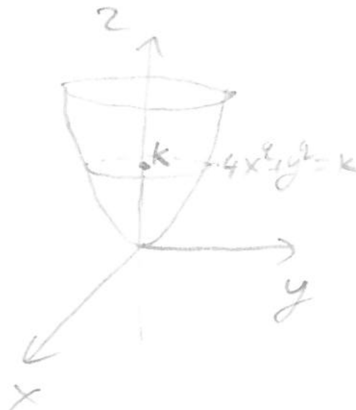


Για να αλλάξει πρόσημο το $x+y+1$ πρέπει να περάσει από το 0, και άρα να περάσει την ευθεία $x+y+1=0$.
Συνεπώς το $x+y+1$ διατηρεί το πρόσημο του σε κάθε πλευρά της ευθείας.
Επειδή στο $(0,0)$ το $x+y+1$ είναι θετικό, στην δεξιά πλευρά της ευθείας έχουμε $x+y+1 \geq 0$ (και πάνω στην ευθεία).
Αν τα (x,y) που παίρνουμε είναι στα δεξιά της ευθείας $x+y+1=0$ και δεν έχουν $x=1$ τότε ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y)$. □

(42) <u>Ισοϋψείς καμπύλες</u>: Έστω $f(x,y)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Τότε οι καμπύλες $f(x,y)=k$, για k πραγματικό, λέγονται ισοϋψείς καμπύλες της $f(x,y)$. Ο όρος προέρχεται από το ότι μια ισοϋψής καμπύλη $f(x,y)=k$ αποτελεί τομή της επιφάνειας $z=f(x,y)$ με το επίπεδο (επίπεδο ύψους) $z=k$.

π.χ. Σχεδιάστε την επιφάνεια $z=h(x,y)$ όπου $h(x,y)=4x^2+y^2$. Περιγράψτε τις ισοϋψείς καμπύλες.

<u>Λύση</u>: Η επιφάνεια $z=4x^2+y^2$ είναι ένα ελλειπτικό παραβολοειδές.



Οι ισοϋψείς καμπύλες είναι οι $4x^2+y^2=k \Rightarrow \dfrac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{k})^2}=1$

Αυτό είναι ελλείψεις με άξονες $\frac{\sqrt{k}}{2}$ και $\sqrt{k}$. □

Όρια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Έστω $f(\underline{x})$ μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Νόρμα στο $\mathbb{R}^n$: $\|\underline{x}-\underline{a}\| = \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}$

Μια νόρμα μας δίνει μια έννοια απόστασης. Έτσι πρέπει να σκεφτόμαστε την $\|\underline{x}-\underline{a}\|$ ως την απόσταση των διανυσμάτων $\underline{x}$ και $\underline{a}$ στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός ορίου στο $\mathbb{R}^n$: Θα λέμε ότι $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = L$ αν $\underset{\text{για κάθε}}{\forall} \varepsilon>0$ $\underset{\text{υπάρχει}}{\exists} \delta$ έτσι ώστε όταν $\underset{\text{νόρμα}}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}<\delta$ τότε $\underset{\text{απόλυτο}}{|f(\underline{x})-L|}<\varepsilon$

π.χ. Όριο σε δύο διαστάσεις: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta$ έτσι ώστε όταν $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ τότε $|f(x,y)-L|<\varepsilon$.

Παρατήρηση: Για να έχουμε $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$ είναι απαραίτητο το $f(x,y)$ να τείνει στο L από όποια καμπύλη $y=g(x)$ και αν πλησιάσουμε το (a,b). Πρέπει δηλαδή $\lim_{x\to a} f(x,g(x)) = L$.

Αυτό είναι χρήσιμο κριτήριο για να αποκλείσουμε την ύπαρξη ορίου.

π.χ. Ελέγξτε αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Λύση: Έστω ότι πλησιάζουμε το $(0,0)$ μέσω της καμπύλης $y=x$. Τότε $\lim_{x\to 0} f(x,g(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x^2}{x^2+x^2}=0$

Αν πλησιάσουμε μέσω της $y=2x$ έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x,g(x)) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x^2}{x^2+4x^2} = -\frac{3}{5}\neq 0$ άρα το όριο δεν υπάρχει. □

(44)

π.χ. Αν $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$;

Λύση: Έστω ότι πλησιάζουμε το $(0,0)$ μέσω ευθειών της μορφής $y=kx$. Τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x,g(x)) = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = 0$$

Άρα με όποια ευθεία και να πλησιάσουμε το $(0,0)$ το όριο μας δίνει την ίδια τιμή 0.

Αυτό δεν αρκεί για την ύπαρξη του ορίου! Πρέπει και με όποια καμπύλη και να πλησιάσουμε να πάρουμε το ίδιο όριο.

Έστω ότι πλησιάζουμε το $(0,0)$ από την καμπύλη $y=\sqrt{x}$. Τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x,g(x)) = \lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει. □

π.χ. Βρείτε το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ αν υπάρχει.

Λύση: Αν $y=f(x)$ με $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ τότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2f(x)}{x^2+f(x)^2}$$

Αλλά $\left|\frac{3x^2f(x)}{x^2+f(x)^2}\right| < \left|\frac{3(x^2+f(x)^2)f(x)}{x^2+f(x)^2}\right| = 3|f(x)| \to 0$

όταν $x\to 0$. Άρα από όποια καμπύλη και αν πλησιάσουμε το $(0,0)$ το όριο είναι 0.

Αυτό είναι ισχυρή ένδειξη για την ύπαρξη του ορίου. Για απόδειξη πρέπει να πάμε από τον ορισμό.

Επειδή $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{3(x^2+y^2)y}{x^2+y^2}\right| \leq 3|y|$, όταν $\sqrt{x^2+y^2} < \delta = \frac{\varepsilon}{3}$, τότε $\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$. Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

□

Συνέχεια

Ορισμός: Θα λέμε ότι η $f(\underline{x})$ είναι συνεχής στο $\underline{a}$ αν $\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$ και τόσο το όριο όσο και το $f(\underline{a})$ υπάρχουν.

Η $f(\underline{x})$ είναι συνεχής στο D αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του D.

π.χ. Που είναι συνεχής η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

Λύση:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \overset{(a,b)\neq(0,0)}{=} \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)}(x^2-y^2)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)}(x^2+y^2)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}, \quad (a,b)\neq(0,0).$$

Αν $(a,b)=(0,0)$ τότε το όριο δεν υπάρχει γιατί αν $y=kx$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-(kx)^2}{x^2+(kx)^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

εξαρτάται από το k, δηλαδή τον τρόπο που πλησιάζουμε το $(0,0)$. $\square$

(46)

Παράγωγοι

Μερικές παράγωγοι σε 2D: Θεωρήστε την συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και ένα σημείο (a,b) στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \equiv f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} \equiv f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Παρατήρηση: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{d f(x,b)}{dx}\right|_{x=a}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \left.\frac{d f(a,y)}{dy}\right|_{y=b}$$

Συνεπώς οι μερικές παράγωγοι μπορούν να υπολογιστούν ως κανονικές παράγωγοι θεωρώντας την άλλη μεταβλητή ως σταθερή.

Πχ. Αν $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ υπολογίστε τα $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, και βρείτε τα $f_x(2,1)$, $f_y(2,1)$.

Λύση: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_x(2,1) = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 1^3 = 16$$

$$f_y(2,1) = 3\cdot 2^2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 = 8$$

□

π.χ. Αν $f(x,y) = \sin \frac{x}{1+y}$ βρείτε τα $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Λύση: $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d \sin \frac{x}{1+y}}{d \frac{x}{1+y}} \cdot \frac{\partial \frac{x}{1+y}}{\partial x} = \cos \frac{x}{1+y} \cdot \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+y} \cos \frac{x}{1+y}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d \sin \frac{x}{1+y}}{d \frac{x}{1+y}} \cdot \frac{\partial \frac{x}{1+y}}{\partial y} = \cos \frac{x}{1+y} \cdot \left(-\frac{x}{(1+y)^2}\right) = -\frac{x}{(1+y)^2} \cos \frac{x}{1+y}.$$

Παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) \equiv f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \equiv f_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = f_{yy}(x,y)$$

Όμοια ορίζονται οι παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης

Θεώρημα μικτών παραγώγων (Clairaut): Αν η $f(x,y)$ ορίζεται σε κάποιο μικρό δίσκο D που περιέχει το (x_0,y_0), και αν οι συναρτήσεις f_{xy} και f_{yx} είναι συνεχείς στον δίσκο, τότε
$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0).$$

Απόδειξη: Έστω $\Delta(h) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0,y_0)$

και έστω $g(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$. Τότε

$\Delta(h) = g(x_0+h) - g(x_0)$. Από θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, x_0+h]$ έχουμε ότι υπάρχει $c_1 \in [x_0, x_0+h]$ ώστε

$$\Delta(h) = h\, g'(c_1) = h\left(f_x(c_1, y_0+h) - f_x(c_1, y_0)\right).$$

Από θεώρημα μέσης τιμής στο $[y_0, y_0+h]$ παίρνουμε ότι υπάρχει c_2 στο $[y_0, y_0+h]$ έτσι ώστε

$$\Delta(h) = h^2 f_{xy}(c_1, c_2).$$

Επειδή τώρα f_{xy} είναι συνεχής στο D και όταν $h \to 0$, $c_1 \to x_0$ και $c_2 \to y_0$ έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{xy}(x_0, y_0).$$

- Αν τώρα ορίσουμε $k(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$ τότε $\Delta(h) = k(y_0+h) - k(y_0)$.

Όμοια παίρνουμε ότι $\Delta(h) = h\, k'(c_2) = h\left(f_y(x_0+h, c_2) - f_y(x_0, c_2)\right) =$
$= h^2 f_{yx}(c_1, c_2)$ όπου $c_2 \in [y_0, y_0+h]$ και $c_1 \in [x_0, x_0+h]$.

Και πάλι, από συνέχεια των μικτών παραγώγων

$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}(x_0, y_0)$. Συνεπώς

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0) \quad \square.$$

(49)

Ορισμός μερικών παραγώγων σε περισσότερες διαστάσεις:

Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{x}$ διάνυσμα στο $\mathbb{R}$ και $\underline{e}_i = (0,0,\dots,\overset{\text{θέση } i}{1},0\dots,0)$ τα διανύσματα της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}_n$. Τότε

$$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}+h\underline{e}_i) - f(\underline{x})}{h}$$

Ο χειρισμός των μερικών παραγώγων στο $\mathbb{R}^n$ γίνεται ακριβώς όπως και στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης το θεώρημα των μικτών παραγώγων ισχύει.

π.χ. Υπολογίστε το $f_{xxyz}(x,y,z)$ αν $f(x,y,z)=\sin(3x+yz)$

Λύση: $f_x(x,y,z) = 3\cos(3x+yz)$

$f_{xx}(x,y,z) = -9\sin(3x+yz)$

$f_{xxy}(x,y,z) = -9z\cos(3x+yz)$

$f_{xxyz}(x,y,z) = -9\cos(3x+yz) + 9zy\sin(3x+yz)$ □

Μερικές διαφορικές εξισώσεις: Είναι διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν μερικές παραγώγους (π.χ. $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$. Αυτή είναι η κυματική εξίσωση)

π.χ. Δείξτε ότι η $u(x,t)=\sin(x-ct)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης

Λύση: $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c\cos(x-ct)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -c^2\sin(x-ct)$

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \cos(x-ct)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\sin(x-ct)$. Επομένως

$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ □

Εφαπτόμενα επίπεδα και διαφορικά

- Ένα γενικό επίπεδο στον χώρο που περνάει από το σημείο (x_0, y_0, z_0) έχει εξίσωση της μορφής

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0.$$

- Ας πούμε τώρα ότι θέλουμε το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $z = f(x,y)$, στο σημείο (x_0, y_0, z_0).

Μια καμπύλη που περνάει από το (x_0, y_0, z_0) είναι η $z = f(x, y_0)$, $y = y_0$, και μια δεύτερη η $z = f(x_0, y)$, $x = x_0$.

Μια εφαπτόμενη ευθεία στην πρώτη καμπύλη είναι η

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \quad , \quad y = y_0 \qquad (E_1)$$

και μια εφαπτόμενη στην δεύτερη καμπύλη η

$$z - z_0 = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) , \quad x = x_0 \qquad (E_2)$$

Το επίπεδο που ορίζουν αυτές οι εφαπτόμενες ευθείες είναι το εφαπτόμενο επίπεδο.

- Το γενικό επίπεδο που περιέχει την ευθεία (E_1) έχει την μορφή

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + A(y - y_0)$$

Αν $x = x_0$, τότε $z - z_0 = A(y - y_0)$ και για να περιέχει το επίπεδο και την ευθεία (E_2) πρέπει $A = f_y(x_0, y_0)$.

- Άρα το εφαπτόμενο επίπεδο της $z = f(x,y)$ στο (x_0, y_0, z_0) είναι το

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

51

π.χ. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο παραβολοειδές $z = 2x^2 + y^2$ στο σημείο $(1,1,3)$.

<u>Λύση</u>: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,3)} = 4$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,3)} = 2$$

Άρα $\underbrace{z-3}_{z_0} = \underbrace{4}_{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,3)}}(x-\underbrace{1}_{x_0}) + \underbrace{2}_{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1,3)}}(y-\underbrace{1}_{y_0}) \Rightarrow$

$$\boxed{4x + 2y - z = 3}$$ □

<u>Παραγωγισιμότητα σε 2D</u>: Έστω $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και σημείο (x_0, y_0) στο πεδίο ορισμού της f. Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0) αν υπάρχουν συναρτήσεις $A(x,y)$, $B(x,y)$, $\varepsilon_1(x,y)$, $\varepsilon_2(x,y)$ έτσι ώστε

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x_0,y_0)(x-x_0) + B(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x-x_0) + \varepsilon_2(y-y_0)$$

με $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_2(x,y) = 0$.

<u>Διαφορικό σε 2D</u>: Το διαφορικό της $f(x,y)$ στο (x_0,y_0) ορίζεται ως το διάνυσμα $df(x_0,y_0)$ όπου

$$df(x_0,y_0) = A(x_0,y_0)\,dx + B(x_0,y_0)\,dy$$

Εδώ το $df(x_0,y_0)$ είναι ένα αφηρημένο διάνυσμα στον διανυσματικό χώρο που παράγεται από τα διανύσματα βάσης $\{dx, dy\}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Επειδή $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} =$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{A(x_0,y_0)(x-x_0) + 0 + \varepsilon_1(x,y)(x-x_0) + 0}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(A(x_0,y_0) + \varepsilon_1(x,y)\right) = A(x_0,y_0)$$

και όμοια $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = B(x_0,y_0)$ έχουμε

$$\boxed{df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy}$$

<u>Σχέση εφαπτόμενου επιπέδου και διαφορικού:</u>

Αν $z = f(x,y)$ τότε το διαφορικό στο (x_0,y_0) παίρνει την μορφή $dz = f_x(x_0,y_0)\,dx + f_y(x_0,y_0)\,dy$ ενώ το εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0,y_0,z_0) όπου $z_0 = f(x_0,y_0)$ παίρνει την μορφή $z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

- Συνεπώς <u>αν στο διαφορικό αλλάξουμε τα dx, dy, dz με τις πεπερασμένες διαφορές $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ παίρνουμε</u> από το διαφορικό <u>το εφαπτόμενο επίπεδο</u>.

<u>Παρατήρηση:</u> Ο ορισμός της παραγωγισιμότητος και του διαφορικού μεταφέρεται ίδιος σε γενικότερες συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το μόνο που αλλάζει είναι ο αριθμός των μεταβλητών.

(53)

Τα διαφορικά ως προσεγγίσεις: Επειδή το εφαπτόμενο επίπεδο προσεγγίζει την επιφάνεια $z=f(x,y)$ τοπικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διαφορικό για να προσεγγίσουμε την τιμή της $f(x,y)$ κοντά στο (x_0,y_0) αλλάζοντας τα dx, dy, dz με πεπερασμένες διαφορές.

π.χ. Βρείτε την προσεγγιστική τιμή του $\sqrt{9(1.95)^2+(8.1)^2}$

Λύση: Έστω $f(x,y)=\sqrt{9x^2+y^2}$ και $(x_0,y_0)=(2,8)$

Το $f(x_0,y_0)=\sqrt{9\cdot 2^2+8^2}=10$

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{9x}{\sqrt{9x^2+y^2}}dx+\frac{y}{\sqrt{9x^2+y^2}}dy \Rightarrow$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{9x_0}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}(x-x_0)+\frac{y_0}{\sqrt{9x_0^2+y_0^2}}(y-y_0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(1.95,8.1)-10=\frac{18}{10}(1.95-2)+\frac{8}{10}(8.1-8)\Rightarrow$$

$$f(1.95,8.1)-10=1.8(-0.05)+0.8\cdot(0.1)=-0.09+0.08=-0.01$$

Άρα $f(1.95,8.1)=\sqrt{9(1.95)^2+(8.1)^2}\simeq 9.99$ $\square$

Κανόνας αλυσίδας

• Σε μια μεταβλητή είχαμε δει ότι αν $y=y(x)$ και $x=x(t)$ τότε

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

• Σε δύο μεταβλητές, αν $z=z(x,y)$ και $x=x(t)$, $y=y(t)$

τότε $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Απόδειξη: $\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$ από την παραγωγισιμότητα της $z(x,y)$. Εδώ έχουμε $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ όταν $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.

Άρα $$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

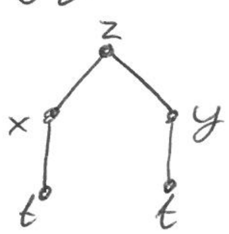
Επειδή όμως $x(t)$, $y(t)$ παραγωγίσιμες, άρα και συνεχείς, έχουμε ότι όταν $\Delta t\to 0$, $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$. Άρα

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_1(x,y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+$$

$$+\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon_2(x,y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+0+0 \qquad \square$$

Παρατήρηση: Υπάρχουν πολλοί κανόνες αλυσίδας, ανάλογα με την εξάρτηση που έχουν οι μεταβλητές, και όλοι αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο. Γενικά ένας κανόνας αλυσίδας δίνεται από ένα δέντρο εξάρτησης. Για τον παραπάνω κανόνα αλυσίδας έχουμε το εξής δέντρο



Για να βρούμε το $\frac{dz}{dt}$ πρέπει να αθροίσουμε όλους τους δρόμους από το z στο t.

55

Π.χ. Σε ένα mole ιδανικό αέριο ισχύει ότι $PV = 8.31\,T$. Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της πίεσης όταν η θερμοκρασία είναι $T = 300\,^{\circ}K$ και αυξάνει με ρυθμό $\frac{dT}{dt} = 0.1\ K/sec$, ενώ ο όγκος $V = 100\,m^3$ και αυξάνει με ρυθμό $\frac{dV}{dt} = 0.2\ m^3/sec$.

Λύση: $P = 8.31 \frac{T}{V}$, $T = T(t)$, $V = V(t)$

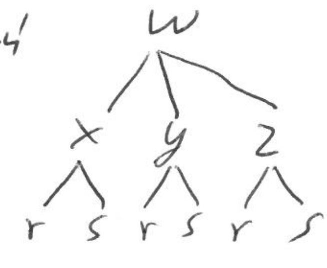
Άρα $\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} =$

$$= 8.31 \cdot \frac{1}{V} \cdot \frac{dT}{dt} - 8.31 \frac{T}{V^2}\frac{dV}{dt} =$$

$$= \frac{8.31}{100} \cdot 0.1 - 8.31 \frac{300}{100^2} \cdot 0.2 = -0.04155\ Pa/sec \, . \quad \square$$

Π.χ. Γράψτε τον κανόνα αλυσίδας αν $w = w(x,y,z)$ και $x = x(r,s)$, $y = y(r,s)$, $z = z(r,s)$

Λύση: Το δέντρο εξάρτησης έχει την μορφή

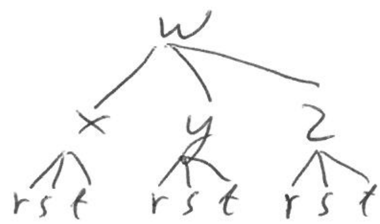


Συνεπώς $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$ και

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \, . \quad \square$$

Π.χ. Αν $w = x^4 y + y^2 z^3$, $x = rse^t$, $y = rs^2 e^{-t}$ και $z = r^2 s \sin t$ βρείτε το $\frac{\partial w}{\partial s}$ όταν $r=2, s=1, t=0$.

Λύση: $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} =$



$$= 4x^3 y r e^t + (x^4 + 2yz^3)2rse^{-t} + 3y^2 z^2 r^2 \sin t$$

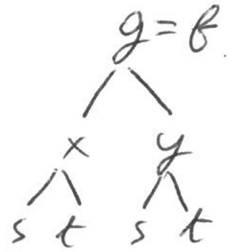
Όταν $r=2, s=1, t=0$, τότε $x=2, y=2, z=0$, άρα

$$\left.\frac{\partial w}{\partial s}\right|_{(r,s,t)=(2,1,0)} = 128 + 64 + 0 = 192 \quad \square$$

π.χ. Αν $g(s,t) = f(s^2-t^2, t^2-s^2)$ και η f είναι παραγωγίσιμη δείξτε ότι η g ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0$$

Λύση: $g(s,t) = f(x,y)$ όπου $x = s^2-t^2$, $y = t^2-s^2$



$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2s\frac{\partial f}{\partial x} - 2s\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -2t\frac{\partial f}{\partial x} + 2t\frac{\partial f}{\partial y}$$

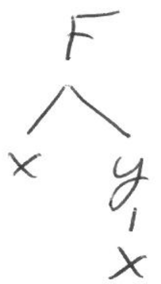
$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = t\left(2s\frac{\partial f}{\partial x} - 2s\frac{\partial f}{\partial y}\right) + s\left(-2t\frac{\partial f}{\partial x} + 2t\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= 2st\frac{\partial f}{\partial x} - 2st\frac{\partial f}{\partial y} - 2st\frac{\partial f}{\partial x} + 2st\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \, . \quad \square$$

π.χ. Έμμεση παραγώγιση: Αν $F(x,y) = 0$ βρείτε το $\frac{dy}{dx}$

Λύση: $$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$

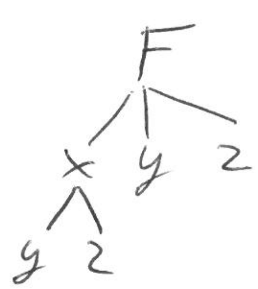
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$



π.χ. Έμμεση παραγώγιση σε 3D: Αν $F(x,y,z) = 0$ βρείτε το $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Λύση: $$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \, . \quad \square$$



Παράγωγος διεύθυνσης

Ορισμός: Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\underline{r}_0$, και έστω ένα μοναδιαίο διάνυσμα διεύθυνσης $\hat{u}$.

Τότε η παράγωγος της $f(\underline{r})$ στην διεύθυνση $\hat{u}$ ορίζεται ως το όριο

$$D_{\hat{u}} f(\underline{r}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{r}_0 + h\hat{u}) - f(\underline{r}_0)}{h}$$

Ορισμός (Gradient): Αν $f(\underline{r}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, τότε η gradient (κλίση) της $f(\underline{r})$ που συμβολίζεται με $\underline{\nabla} f(\underline{r})$ ή με $\text{grad}(f(\underline{r}))$ ορίζεται ως το διάνυσμα των μερικών παραγώγων της $f(\underline{r})$.

Σε 2D: $\underline{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath}$

Σε 3D: $\underline{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

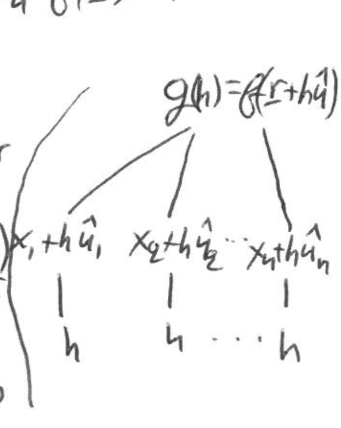
Πρόταση: $D_{\hat{u}} f(\underline{r}) = \hat{u}\cdot \underline{\nabla} f(\underline{r})$

Απόδειξη: Έστω $g(h) = f(\underline{r} + h\hat{u})$

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\underline{r}+h\hat{u}) - f(\underline{r})}{h} = D_{\hat{u}} f(\underline{r})$$

Άρα το $g'(0)$ είναι η παράγωγος διεύθυνσης $D_{\hat{u}} f(\underline{r})$.

Αλλά στο $g(h)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας με διάγραμμα εξάρτησης



$$\frac{dg(h)}{dh} = \frac{\partial f(\underline{r}+h\hat{u})}{\partial(x_1+h\hat{u}_1)}\cdot\frac{\partial(x_1+h\hat{u}_1)}{\partial h} + \dots + \frac{\partial f(\underline{r}+h\hat{u})}{\partial(x_n+h\hat{u}_n)}\cdot\frac{\partial(x_n+h\hat{u}_n)}{\partial h} =$$

$$= \frac{\partial f(\underline{r}+h\hat{u})}{\partial x_1}\cdot\hat{u}_1 + \dots + \frac{\partial f(\underline{r}+h\hat{u})}{\partial x_n}\hat{u}_n .$$ Στο $h=0$

έχουμε $D_{\hat{u}} f(\underline{r}) = g'(0) = \frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_1}\hat{u}_1 + \dots + \frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_n}\hat{u}_n = \underline{\nabla} f(\underline{r})\cdot\hat{u}$ $\square$.

Π.χ. Βρείτε την παράγωγο διεύθυνσης $D_{\hat{u}} f(x,y)$ αν $f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ και $\hat{u}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση $\theta = \frac{\pi}{6}$. Ποιό είναι το $D_u f(1,2)$;

<u>Λύση</u>: $\hat{u} = \cos\frac{\pi}{6}\,\hat{i} + \sin\frac{\pi}{6}\,\hat{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$

$$\underline{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} = (3x^2-3y)\hat{i} + (-3x+8y)\hat{j}$$

$$D_{\hat{u}} f(x,y) = \hat{u}\cdot\underline{\nabla} f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3x^2-3y) + \frac{1}{2}(-3x+8y)$$

$$D_{\hat{u}} f(1,2) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3\cdot 1^2 - 3\cdot 2) + \frac{1}{2}(-3\cdot 1 + 8\cdot 2) =$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{13}{2} = \frac{13-3\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν και η παράγωγος διεύθυνσης μπορεί να οριστεί και για μη μοναδιαία διανύσματα, αλλάζει ο χαρακτήρας της. Για αυτό τον λόγο, <u>αν μας ζητήσουν την παράγωγο διεύθυνσης κατά μήκος ενός διανύσματος που δεν είναι μοναδιαίο, πρώτα το κάνουμε μοναδιαίο και μετά υπολογίζουμε την παράγωγο διεύθυνσης</u>.

Π.χ. Αν $f(x,y,z) = x\sin(yz)$

a) Βρείτε την gradient της f

b) Βρείτε την παράγωγο διεύθυνσης κατά μήκος του διανύσματος $\underline{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, στο $(1,3,0)$.

<u>Λύση</u>: a) $\underline{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} = \sin(yz)\hat{i} + xz\cos(yz)\hat{j} + xy\cos(yz)\hat{k}$.

b) $\hat{u} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \frac{\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$

$\underline{\nabla} f(1,3,0) = 3\hat{k}$

$D_{\hat{u}} f(1,3,0) = \hat{u}\cdot\underline{\nabla} f(1,3,0) = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}. \quad \square$

(59)

Θεωρήματα gradient

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Η μέγιστη τιμή της παραγώγου διεύθυνσης $D_{\hat{u}} f(\underline{x})$ είναι $|\nabla f(\underline{x})|$ και είναι στην διεύθυνση του διανύσματος $\nabla f(\underline{x})$. Αντίθετα η ελάχιστη τιμή είναι $-|\nabla f(\underline{x})|$ και είναι στην διεύθυνση $-\nabla f(\underline{x})$.

<u>Απόδειξη</u>: $D_{\hat{u}} f(\underline{x}) = \hat{u} \cdot \nabla f(\underline{x}) = |\hat{u}|\,|\nabla f(\underline{x})| \cos\theta$

Αυτό είναι μέγιστο όταν $\theta = 0$ και ελάχιστο όταν $\theta = \pi$. $\square$

π.χ. Έστω $f(x,y) = x e^y$.

α) Βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της f στο $P(2,0)$ στην διεύθυνση από το P στο $Q(5,4)$

β) Σε ποια διεύθυνση έχει η $f(x,y)$ μέγιστο ρυθμό μεταβολής;

<u>Λύση</u>: α) Έστω $\underline{u} = \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{i} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$

$$\hat{u} = \frac{\underline{u}}{|\underline{u}|} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

$$D_{\hat{u}} f(x,y) = \hat{u} \cdot \nabla f(x,y) = \left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4}{5}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{5} e^y + \frac{4}{5} x e^y$$

Στο σημείο $P(2,0)$ αυτή η παράγωγος διεύθυνσης είναι $D_{\hat{u}} f(2,0) = \frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5}$.

β) Η $f(x,y)$ έχει μέγιστο ρυθμό μεταβολής στην διεύθυνση του $\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} = e^y\hat{i} + x e^y\hat{j}$. Στο $P(2,0)$ έχουμε $\nabla f(2,0) = \hat{i} + 2\hat{j}$. Σε αυτή την διεύθυνση έχουμε μέγιστο ρυθμό μεταβολής της $f(x,y)$. $\square$

Πχ. Έστω ότι η θερμοκρασία στο σημείο (x,y,z) δίνεται από τον τύπο $T(x,y,z) = \dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$ $(°C)$

Σε ποια διεύθυνση η θερμοκρασία μεγαλώνει γρηγορότερα στο $(1,1,-2)$; Ποιος ο ρυθμός αύξησης;

<u>Λύση</u>: $\nabla T = \dfrac{\partial T}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial T}{\partial y}\hat{j} + \dfrac{\partial T}{\partial z}\hat{k} =$

$$= -\frac{80}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\left(2x\hat{i}+4y\hat{j}+6z\hat{k}\right)$$

Η διεύθυνση του ∇T είναι ίδια με την διεύθυνση του $\underline{u}(x,y,z) = 2x\hat{i}+4y\hat{j}+6z\hat{k}$.

Στο σημείο $(1,1,-2)$, $\underline{u}(1,1,-2) = 2\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k}$

Άρα η θερμοκρασία αυξάνει γρηγορότερα στην διεύθυνση $\underline{u} = 2\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k}$.

Ο ρυθμός αύξησης είναι $D_{\hat{u}}T = |\nabla T| =$

$$= \frac{80}{(1+1^2+2\cdot 1^2+3(-2)^2)^2}\left|2\hat{i}+4\hat{j}-12\hat{k}\right| =$$

$$= \frac{80}{16^2}\,2\sqrt{1^2+2^2+(-6)^2} = \frac{5}{16}\cdot 2\sqrt{41} = \frac{5}{8}\sqrt{41}.$$

<u>Gradient και εφαπτόμενο επίπεδο</u>: Έστω η επιφάνεια $F(x,y,z)=0$. Έχουμε δει ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια δίνεται από το διαφορικό

$$dF(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

αν κάνουμε τα dx, dy, dz πεπερασμένα. Συνεπώς η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο (x_0, y_0, z_0) είναι

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\underline{r}_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\underline{r}_0}(y-y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\underline{r}_0}(z-z_0) = 0$$

όπου $\underline{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$.

Αν $\underline{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, τότε αυτό γράφεται

$$\underline{\nabla} F(\underline{r}_0)\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0) = 0$$

Εδώ όμως $\underline{r}-\underline{r}_0$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα στο επίπεδο συνεπώς $\underline{\nabla}F(\underline{r}_0) \perp$ επίπεδο. Συνεπώς έχουμε την παρακάτω πρόταση:

<u>Πρόταση</u>: Το $\underline{\nabla}F(\underline{r}_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $F(\underline{r})=0$ στο σημείο $\underline{r}_0$.

<u>Παρατήρηση</u>: Η παραπάνω πρόταση ισχύει και σε δύο διαστάσεις μόνο που το εφαπτόμενο επίπεδο αλλάζει με την εφαπτόμενη ευθεία. Έτσι αν $F(x,y)=0$ είναι μια καμπύλη στο επίπεδο, τότε το $\underline{\nabla}F(x_0,y_0)$ είναι κάθετο στην εφαπτόμενη ευθεία στο (x_0,y_0).

π.χ. Βρείτε τις εξισώσεις του εφαπτόμενου επιπέδου και της κάθετης ευθείας στο $(-2,1,-3)$, στο ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$$

<u>Λύση</u>: Εδώ έχουμε $F(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}-3=0$

$dF=\frac{x}{2}dx+2y\,dy+\frac{2}{9}z\,dz=0$. Συνεπώς η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(-2,1,-3)$ είναι

$$-\frac{2}{2}(x-(-2))+2\cdot 1(y-1)+\frac{2}{9}(-3)(z-(-3))=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{-(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0}.$$

Η εξίσωση τώρα ενός επιπέδου έχει την μορφή $\underline{n}\cdot(\underline{r}-\underline{r}_0)=0$ όπου $\underline{n}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο. Εδώ $\underline{n}=-\hat{i}+2\hat{j}-\frac{2}{3}\hat{k}=\underline{\nabla} F(-2,1,-3)$.

Συνεπώς η εξίσωση της κάθετης ευθείας είναι

$$\underline{r}=\underline{r}_0+t\,\underline{n} \Rightarrow \underline{r}=(-2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})+t\left(-\hat{i}+2\hat{j}-\frac{2}{3}\hat{k}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\underline{r}=(-2-t)\hat{i}+(1+2t)\hat{j}+\left(-3-\frac{2}{3}t\right)\hat{k}}$$

Μέγιστα - Ελάχιστα

<u>Ορισμός</u>: Θα λέμε ότι η $f(\underline{r})$ έχει τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) στο $\underline{r}_0$ αν υπάρχει μια γειτονιά του $\underline{r}_0$ στην οποία $f(\underline{r}) \leq f(\underline{r}_0)$ ($f(\underline{r}) \geq f(\underline{r}_0)$ για τοπικό ελάχιστο).

<u>Θεώρημα</u>: Αν η $f(\underline{r})$ έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο $\underline{r}_0$ τότε $Df(\underline{r}_0) = 0$, δηλαδή όλες οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται στο $\underline{r}_0$.

<u>Απόδειξη για 2D</u>: Εδώ $f(\underline{r}) = f(x,y)$ και έστω $\underline{r}_0 = a\hat{i} + b\hat{j}$.

Έστω $g(x) = f(x,b)$ και $h(y) = f(a,y)$. Αν η $f(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) στο (a,b), τότε η $g(x)$ έχει τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) στο $x=a$ και η $h(y)$ στο $y=b$.

Άρα $\left.\dfrac{dg(x)}{dx}\right|_{x=a} = \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(a,b)} = 0$ και

$$\left.\frac{dh(y)}{dy}\right|_{y=b} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(a,b)} = 0 . \qquad \square$$

<u>Ορισμός</u>: Ένα σημείο της $f(\underline{r})$ στο οποίο οι μερικές παράγωγοι μηδενίζονται λέγεται κρίσιμο σημείο.

<u>Παρατήρηση</u>: Ένα κρίσιμο σημείο, όπως και στην μια διάσταση, δεν είναι απαραίτητα τοπικό ακρότατο. Ένα τοπικό όμως ακρότατο είναι απαραίτητα κρίσιμο σημείο αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

π.χ. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$

<u>Λύση</u>:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 &\Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{aligned}\right\}$$ Άρα το $(1,3)$ είναι κρίσιμο σημείο.

Επειδή $f(x,y) = 4 + (x-1)^2 + (y-3)^2$ το $(1,3)$ είναι ολικό ελάχιστο. $\square$

<u>Ορισμός (Σαγματικό σημείο)</u>: Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(\underline{r})$ έχει σαγματικό σημείο στο $\underline{r_0}$ αν το $\underline{r_0}$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(\underline{r})$ και αν υπάρχουν δύο καμπύλες της μορφής $z(t)=f(\underline{r_0}+t\underline{u})$ και $z(t)=f(\underline{r_0}+t\underline{v})$ έτσι ώστε στην μια καμπύλη να έχουμε μέγιστο όταν $t=0$ και στην άλλη να έχουμε ελάχιστο όταν $t=0$.

<u>Τεστ δεύτερης παραγώγου (2D)</u>: Αν οι δεύτερες παράγωγοι της $f(x,y)$ είναι συνεχείς σε ένα δίσκο γύρω από το κρίσιμο σημείο (a,b), και αν

$$D(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$$

τότε

a) Αν $f_{xx}(a,b)>0$ και $D(a,b)>0$ τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο

b) Αν $f_{xx}(a,b)<0$ και $D(a,b)>0$ τότε έχουμε τοπικό μέγιστο

c) Αν $D(a,b)<0$ τότε έχουμε σαγματικό σημείο

<u>Παρατήρηση 1</u>: Η περίπτωση (c) δεν υπάρχει στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής γιατί εκεί δεν ορίζεται το σαγματικό σημείο

<u>Παρατήρηση 2</u>: Αν $D(a,b)=0$ το τεστ δεν προσδιορίζει τον τύπο του κρίσιμου σημείου. Μπορεί να είναι τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, σαγματικό σημείο ή τίποτα.

(65)

Απόδειξη: Έστω μια καμπύλη $\underline{r}(t)$ που περνάει από το κρίσιμο σημείο $\underline{r}_0 = a\hat{i} + b\hat{j}$, παραμετρισμένη έτσι ώστε $\underline{r}(0) = \underline{r}_0$.

$$\frac{d f(\underline{r}(t))}{dt} = \underline{\nabla} f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}(t).$$

Επειδή στο $\underline{r}_0$ έχουμε κρίσιμο σημείο, $\underline{\nabla} f(\underline{r}(0)) = \nabla f(\underline{r}_0) = 0$.

Άρα $\left.\frac{d f(\underline{r}(t))}{dt}\right|_{t=0} = 0$. Άρα η $f(\underline{r}(t))$ έχει κρίσιμο σημείο στο $t=0$. Η δεύτερη παράγωγος τώρα γίνεται

$$\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2} = \frac{d\, \underline{\nabla} f(\underline{r}(t))}{dt} \cdot r'(t) + \underline{\nabla} f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}''(t) =$$

$$= (\underline{r}'(t) \cdot \underline{\nabla})(\underline{r}'(t) \cdot \underline{\nabla}) f(\underline{r}(t)) + \underline{\nabla} f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}''(t)$$

Για $t=0$, έστω ότι $\underline{r}'(0) = (h, k)$. Τότε

$$\left.\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\underline{r}(t))\Big|_{t=0} +$$

$$+ \underbrace{\underline{\nabla} f(\underline{r}_0)}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ επειδή } \underline{r}_0 \text{ κρίσιμο σημείο.}}} \cdot \underline{r}''(0)$$

Άρα $\left.\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = h^2 f_{xx}(\underline{r}_0) + 2hk f_{xy}(\underline{r}_0) + k^2 f_{yy}(\underline{r}_0) =$

$$= f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right)$$

a) Αν $f_{xx}(\underline{r}_0) > 0$ και $D(\underline{r}_0) = f_{xx}(\underline{r}_0) f_{yy}(\underline{r}_0) - f_{xy}^2(\underline{r}_0) > 0$ τότε $\left.\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0} > 0$ συνεπώς η $f(\underline{r}(t))$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $t=0$ για όλες τις ομαλές καμπύλες $\underline{r}(t)$ που περνούν από το $\underline{r}_0$. Άρα το $f(\underline{r}_0) = f(a,b)$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f(\underline{r})$.

b) Αν $f_{xx}(\underline{r_0})<0$ και $D(\underline{r_0})>0$ τότε

$$\left.\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = f_{xx}\left[\left(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2+\frac{k^2}{f_{xx}^2}D(\underline{r_0})\right]<0$$

Άρα στο $t=0$ έχουμε τοπικό μέγιστο για όλες τις ομαλές καμπύλες που περνούν από το $\underline{r_0}$.
Άρα το $f(\underline{r_0})$ είναι τοπικό μέγιστο της $f(\underline{r})$.

c) Αν $f_{xx}(\underline{r_0})\neq 0$ και $D(\underline{r_0})<0$ τότε

$$\left.\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = f_{xx}\left[\left(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2-\frac{k^2}{f_{xx}^2}|D(\underline{r_0})|\right]$$

Μεταβάλλοντας τα (h,k), μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε θετική τιμή στο $\left(h+\frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2$ και άρα υπάρχουν (h_1,k_1) έτσι ώστε $\left.\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0}>0$ και (h_2,k_2) έτσι ώστε $\left.\frac{d^2 f(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0}<0$.

Άρα αν $\underline{u}_1=h_1\hat{i}+k_1\hat{j}$ και $\underline{u}_2=h_2\hat{i}+k_2\hat{j}$ τότε η

$z_1(t)=f(\underline{r_0}+t\underline{u}_1)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $t=0$ και

η $z_2(t)=f(\underline{r_0}+t\underline{u}_2)$ έχει τοπικό μέγιστο στο $t=0$.

Συνεπώς έχουμε σαγματικό σημείο.

• Αν $f_{xx}(\underline{r_0})=0$ και $D(\underline{r_0})<0$ τότε

$$\left.\frac{d^2(\underline{r}(t))}{dt^2}\right|_{t=0} = 2hk f_{xy}+k^2 f_{yy} = k^2\left(2\frac{h}{k}f_{xy}+f_{yy}\right)$$

Επειδή $D(\underline{r_0})\neq 0$, $f_{xy}\neq 0$ συνεπώς πάλι μπορούμε να βρούμε (h_1,k_1) και (h_2,k_2) όπως πριν. Συνεπώς πάλι έχουμε σαγματικό σημείο. $\square$

Π.χ. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα και σαγματικά σημεία της $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

<u>Λύση</u>: Πρώτα θα βρούμε τα κρίσιμα σημεία

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4y = 0 \Rightarrow x^3 = y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4y^3 - 4x = 0 \Rightarrow y^3 = x$$

Άρα $x^9 = x \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x(x^4-1)(x^4+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

Αν $x=0$, $y=0 \Rightarrow$ Το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο

Αν $x=1$, $y=1 \Rightarrow$ Το $(1,1)$ είναι κρίσιμο σημείο

Αν $x=-1$, $y=-1 \Rightarrow$ Το $(-1,-1)$ είναι κρίσιμο σημείο

Θα εφαρμόσουμε τώρα το τεστ της δεύτερης παραγώγου

$f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 12y^2$

Άρα $D(x,y) = 144x^2y^2 - 16$

- Για το $(0,0)$, $f_{xx}(0,0) = 0$, $D(0,0) = -16 < 0$

  Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο.

- Για το $(1,1)$, $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$, $D(1,1) = 128 > 0$

  Άρα το $(1,1)$ είναι τοπικό ελάχιστο

- Για το $(-1,-1)$, $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$, $D(-1,-1) = 128 > 0$

  Άρα το $(-1,-1)$ είναι επίσης τοπικό ελάχιστο.

(68) π.χ. Βρείτε την κοντινότερη απόσταση από το $(1,0,-2)$ στο επίπεδο $x+2y+z=4$

Λύση: Η απόσταση ενός σημείου (x,y,z) του επιπέδου από το $(1,0,-2)$ είναι

$$d=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+2)^2} \quad \text{όπου} \quad x+2y+z=4$$

Αντικαθιστώντας $z=4-x-2y$ παίρνουμε

$$\boxed{d^2=(x-1)^2+y^2+(6-x-2y)^2}$$

Ένα σύνηθες τρικ που χρησιμοποιούμε όταν ελαχιστοποιούμε αποστάσεις, είναι να ελαχιστοποιήσουμε αντί την απόσταση το τετράγωνο της απόστασης, γιατί όταν η απόσταση είναι ελάχιστη το ίδιο είναι και το τετράγωνό της. Έτσι όμως αποφεύγουμε τις ρίζες.
Για τα κρίσιμα σημεία του d^2 έχουμε

$$\frac{\partial d^2}{\partial x}=2(x-1)-2(6-x-2y)=0 \Rightarrow 4y+4x=14 \Rightarrow x+y=\frac{7}{2}$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial y}=2y-4(6-x-2y)=0 \Rightarrow 4x+10y=24 \Rightarrow 2x+5y=12$$

Άρα $3y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{3}$ και $x=\frac{7}{2}-\frac{5}{3}=\frac{11}{6}$

Άρα το $(x,y)=\left(\frac{11}{6},\frac{5}{3}\right)$ είναι κρίσιμο σημείο.

Γεωμετρικά είναι φανερό ότι είναι ελάχιστο, μπορούμε όμως και να το επαληθεύσουμε

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}=4, \quad \frac{\partial^2 d^2}{\partial x \partial y}=4, \quad \frac{\partial^2 d^2}{\partial y^2}=10$$

$$\left.\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=24>0 \\ \frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}=4>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{έχουμε τοπικό ελάχιστο.}$$

LT

19) <u>Για ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο</u>

a) Βρείτε τις τιμές της $f(\mathbf{x})$ στα κρίσιμα σημεία

b) Βρείτε τα ακρότατα στο σύνορο του πεδίου ορισμού της f

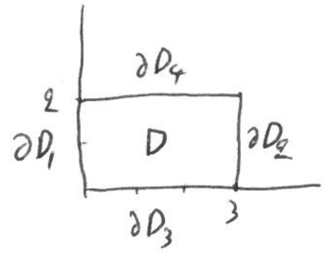
c) Βρείτε τις τιμές της $f(\mathbf{x})$ σε σημεία μη παραγωγισιμότητας

Η μεγαλύτερη τιμή στα a), b), c) είναι το ολικό μέγιστο και η μικρότερη το ολικό ελάχιστο.

πχ. Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της

$$f(x,y)=x^2-2xy+2y \quad \text{στο} \quad D=\{(x,y) \mid 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2\}$$

<u>Λύση</u>: a) Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x-2y=0 \Rightarrow x=y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x+2=0 \Rightarrow x=1$$

Άρα το $(x,y)=(1,1)$ είναι κρίσιμο σημείο εντός του χωρίου D. Έχουμε $f(1,1)=1$.

b) • Στο ∂D_1, $f(x,y)=f(0,y)=2y$ — Μέγιστο: $(0,2)$, $f(0,2)=4$; Ελάχιστο: $(0,0)$, $f(0,0)=0$

• Στο ∂D_2, $f(x,y)=f(3,y)=9-4y$ — Μέγιστο: $(3,0)$, $f(3,0)=9$; Ελάχιστο: $(3,2)$, $f(3,2)=1$

• Στο ∂D_3, $f(x,y)=x^2$ — Μέγιστο: $(3,0)$, $f(3,0)=9$; Ελάχιστο: $(0,0)$, $f(0,0)=0$

• Στο ∂D_4, $f(x,y)=x^2-4x+4=(x-2)^2$ — Μέγιστο: $(0,2)$, $f(0,2)=4$; Ελάχιστο: $(2,2)$, $f(2,2)=0$

c) Δεν υπάρχουν σημεία μη παραγωγισιμότητας.

Συνεπώς το ολικό μέγιστο είναι 9 και είναι στο $(3,0)$ και το ολικό ελάχιστο είναι 0 και είναι στα σημεία $(0,0)$ και $(2,2)$. □

Πολλαπλασιαστές Lagrange

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το μέγιστο της $f(x,y)$ αν έχουμε τον περιορισμό $g(x,y)=K$. Αν πάρουμε τις ισοϋψείς καμπύλες της $f(x,y)$, τότε το σημείο που εφάπτεται η $f(x,y)=a$ για κάποιο a με την $g(x,y)=K$ είναι το μέγιστο της $f(x,y)$.
Αυτό όμως σημαίνει ότι η $f(x,y)=a$ και η $g(x,y)=K$ έχουν κοινή κάθετο, και άρα ότι

$$\boxed{Df(x_0,y_0)=\lambda\, Dg(x_0,y_0)}$$

- Συνεπώς στο (x_0,y_0) πρέπει να έχουμε ότι
  α) Υπάρχει κάποιο λ έτσι ώστε $Df(x_0,y_0)=\lambda Dg(x_0,y_0)$
  β) $g(x_0,y_0)=K$ για να ικανοποιείται ο περιορισμός.

  Το α) μας δίνει δύο εξισώσεις και το β) μία, και αυτές οι εξισώσεις είναι για τους 3 αγνώστους x_0, y_0, λ. Συνεπώς, εν γένει, μπορούμε να βρούμε το μέγιστο (x_0,y_0).

<u>Αλγεβρική εξήγηση</u>: Έστω $F_\lambda(x,y)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-K)$

Το μέγιστο της $F_\lambda(x,y)$ υπό την συνθήκη $g(x,y)=K$ είναι ίδιο με το μέγιστο της $f(x,y)$ υπό την $g(x,y)=K$, και αυτό ισχύει για <u>οποιοδήποτε λ</u>.

- Καταργούμε τώρα την συνθήκη $g(x,y)=K$ και βρίσκουμε το μέγιστο $(x(\lambda), y(\lambda))$ της $F_\lambda(x,y)$, για κάθε λ.
- Τέλος επιλέγουμε το μέγιστο $(x(\lambda_0), y(\lambda_0))=(x_0,y_0)$ για το οποίο ισχύει και ο περιορισμός $g(x(\lambda), y(\lambda))=K$, λύνοντας ως προς λ. Αυτό είναι το μέγιστο της $f(x,y)$ υπό τον περιορισμό $g(x,y)=K$.

71

Παρατήρηση: Η τεχνική των πολλαπλασιαστών Lagrange λειτουργεί και όταν έχουμε περισσότερες από 2, π.χ. n μεταβλητές γιατί η εξίσωση $\nabla f(\underline{r}) - \lambda \nabla g(\underline{r}) = 0$ μας δίνει n εξισώσεις για τους n+1 αγνώστους $\underline{r}_0, \lambda$ και η $g(\underline{r}(t)) = k$ μας δίνει την έξτρα εξίσωση που χρειαζόμαστε.

π.χ. Βρείτε τις ακραίες τιμές της $f(x,y) = x^2 + y$ στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$

Λύση: $F(x,y) = x^2 + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x - 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } \lambda = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow 1 - 2\lambda y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2\lambda} \text{ αν } \lambda \neq 0$$

- Αν $\lambda = 1$, τότε $y = \frac{1}{2}$ και το x είναι ελεύθερη παράμετρος. Ο περιορισμός τώρα μας δίνει $x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα έχουμε δυο κρίσιμα σημεία, τα $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

- Αν $x = 0$ τότε $y = \frac{1}{2\lambda}$ και ο περιορισμός δίνει $0^2 + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow 4\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$

  Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία, τα $(0,1)$ και $(0,-1)$

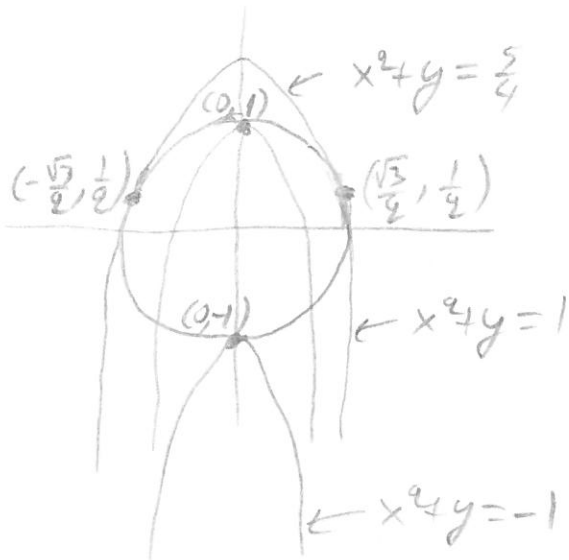
- Υπολογίζουμε τώρα την συνάρτηση στα κρίσιμα σημεία και έχουμε

$$\left.\begin{aligned} f\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{5}{4} \\ f\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{5}{4} \end{aligned}\right\} \max \qquad \begin{aligned} f(0,1) &= 1 \\ f(0,-1) &= -1 \Big\} \min \end{aligned}$$

(72)

· Γεωμετρικά μπορούμε να δούμε τις παραπάνω λύσεις ζωγραφίζοντας τις ισοϋψείς καμπύλες της $f(x,y) = x^2+y$. Αυτές είναι οι καμπύλες $x^2+y=a \Rightarrow y-a=-x^2$ που είναι παραβολές που βλέπουν προς τον αρνητικό y άξονα με κορυφή στο $(0,a)$.

· Ο περιορισμός $g(x,y) = x^2+y^2=1$ είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Άρα έχουμε



Π.Χ. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κουτί χωρίς καπάκι φτιάχνεται από $S=12m^2$ κόντρα πλακέ. Βρείτε τον μέγιστο δυνατό όγκο του κουτιού.

<u>Λύση</u>: Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση $V = xyz$ υπό τον περιορισμό

$$A = xy + 2xz + 2yz = 12$$

Έστω $F(x,y,z) = V - \lambda(A-12) = xyz - \lambda(xy+2xz+2yz-12)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - \lambda(y+2z) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz - \lambda(x+2z) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = xy - \lambda(2x+2y) = 0 \qquad (3)$$

$$xy + 2xz + 2yz = 12 \qquad (4)$$

για τα κρίσιμα σημεία υπό τον περιορισμό (4).

• Για να λύσουμε το σύστημα διαιρούμε την (1) με το yz, την (2) με το xz και την (3) με το xy, αφού $xyz \neq 0$, που ισχύει αφού $V=xyz$.

Έτσι παίρνουμε
$$\lambda\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{y}\right) = 1 \qquad (1')$$
$$\lambda\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) = 1 \qquad (2')$$
$$\lambda\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{x}\right) = 1 \qquad (3')$$

Λύνοντας τις (1'), (2'), (3') ως προς $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{4\lambda}, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{4\lambda}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2\lambda} \Rightarrow x = 4\lambda, \; y = 4\lambda, \; z = 2\lambda, \; \lambda \neq 0.$$

• Για τα κρίσιμα σημεία $(x,y,z) = (4\lambda, 4\lambda, 2\lambda)$, η (4) μας δίνει $16\lambda^2 + 16\lambda^2 + 16\lambda^2 = 12 \Rightarrow 4\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$. Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία που ικανοποιούν τον περιορισμό, τα $(-2,-2,-1)$ και $(2,2,1)$. Το $(x,y,z) = (2,2,1)$ μας δίνει τον μέγιστο όγκο $V(2,2,1) = 4m^3$. □

π.χ. Βρείτε τα σημεία της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=4$ που είναι κοντινότερα και μακρύτερα από το σημείο $(3,1,-1)$

<u>Λύση</u>: $d=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$. Θα βρούμε τα ακρότατα του $d^2=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$ υπό τον περιορισμό
$$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=4.$$
Έστω

$$F(x,y,z)=(x-3)^2+(y-1)^2+(z+1)^2-\lambda(x^2+y^2+z^2-4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \Rightarrow 2(x-3)-2\lambda x=0 \Rightarrow (1-\lambda)x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{1-\lambda},\ \lambda\neq 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0 \Rightarrow 2(y-1)-2\lambda y=0 \Rightarrow (1-\lambda)y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{1-\lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=0 \Rightarrow 2(z+1)-2\lambda z=0 \Rightarrow (1-\lambda)z=-1 \Rightarrow z=-\frac{1}{1-\lambda}$$

Ο περιορισμός τώρα μας δίνει

$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \frac{9}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2}=4 \Rightarrow 4(1-\lambda)^2=11 \Rightarrow 1-\lambda=\pm\frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=1\mp\frac{\sqrt{11}}{2}}.$$

Άρα έχουμε δύο κρίσιμα σημεία όταν $1-\lambda=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$, τα

$$(x_1,y_1,z_1)=\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

$$(x_2,y_2,z_2)=\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{-2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Επειδή $d^2\left(\frac{6}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}}\right)<d^2\left(-\frac{6}{\sqrt{11}},-\frac{2}{\sqrt{11}},\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$

το (x_1,y_1,z_1) είναι το κοντινότερο σημείο της σφαίρας και το (x_2,y_2,z_2) το μακρύτερο σημείο της σφαίρας. □

Η μέθοδος Lagrange μπορεί να λειτουργήσει και όταν έχουμε πάνω από ένα περιορισμό, χρησιμοποιώντας περισσότερους από ένα πολλαπλασιαστές Lagrange.

π.χ. Βρείτε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z)=x+2y+3z$ στην καμπύλη που αποτελεί τομή του επιπέδου $x-y+z=1$ και του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$

Λύση: Έστω $F(x,y,z)=x+2y+3z-\lambda(x-y+z-1)-\mu(x^2+y^2-1)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \Rightarrow 1-\lambda-2\mu x=0 \Rightarrow x=\frac{1-\lambda}{2\mu}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0 \Rightarrow 2+\lambda-2\mu y=0 \Rightarrow y=\frac{2+\lambda}{2\mu}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=0 \Rightarrow 3-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=3$$

Άρα $x=-\frac{1}{\mu}$ και $y=\frac{5}{2\mu}$, z ελεύθερη παράμετρος.

Επιβάλλουμε τώρα τους δύο περιορισμούς

$$x-y+z=1 \Rightarrow -\frac{1}{\mu}-\frac{5}{2\mu}+z=1 \Rightarrow z-\frac{7}{2\mu}=1$$

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \frac{1}{\mu^2}+\frac{25}{4\mu^2}=1 \Rightarrow \frac{29}{4\mu^2}=1 \Rightarrow \mu=\pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

Άρα $z=1+\frac{7}{2\mu}=1\pm\frac{7}{\sqrt{29}}$

Άρα έχουμε τα κρίσιμα σημεία

$(x_1,y_1,z_1)=\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}},1+\frac{7}{\sqrt{29}}\right)$, $f(x_1,y_1,z_1)=3+\sqrt{29}$

$(x_2,y_2,z_2)=\left(\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}},1-\frac{7}{\sqrt{29}}\right)$, $f(x_2,y_2,z_2)=3-\sqrt{29}$

Άρα στο (x_1,y_1,z_1) έχουμε μέγιστο και στο (x_2,y_2,z_2) έχουμε ελάχιστο. □