(6.1)

Πολλαπλά Ολοκληρώματα

• Το απλό ορισμένο ολοκλήρωμα ορίζεται μέσω των αθροισμάτων Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \qquad \text{όπου}$$

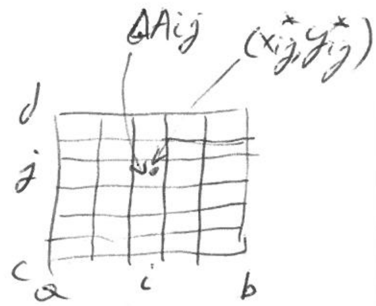
P είναι η διαμέριση

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b \quad \text{και}$$

$\|P\| = \max\{x_i - x_{i-1}\ i=1\dots n\}$, ενώ x_i^* είναι ένα σημείο στο $[x_{i-1}, x_i]$.

• Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε και το διπλό ολοκλήρωμα σε ένα ορθογώνιο $R=[a,b]\times[c,d]$ ως

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A_{ij}$$



όπου η διαμέριση P ορίζεται από τα

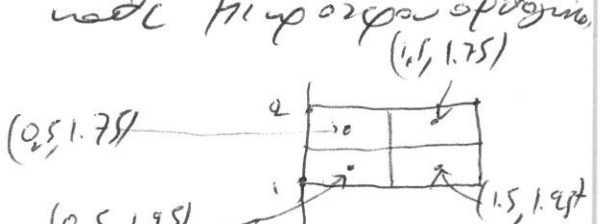
$$a=x_0<x_1<\dots<x_m=b$$
$$c=y_0<y_1<\dots<y_n=d$$

και $\|P\| = \max\{x_i-x_{i-1},\ i=1,\dots,m\} \cup \{y_i-y_{i-1},\ i=1,\dots,n\}$.

π.χ. Εκτιμήστε την τιμή του $\iint_R (x-3y^2)\,dA$ όπου $R = \{(x,y)\,/\,0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$ με το άθροισμα Riemann ως ~~χωρίζοντας~~ το R σε μικρότερα ορθογώνια με τις ευθείες $x=1$, $y=\frac{3}{2}$ και παίρνοντας (x_{ij}^*, y_{ij}^*) το κέντρο κάθε μικρότερου ορθογωνίου.

Λύση: $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\underset{0.5}{\Delta A_{ij}} =$

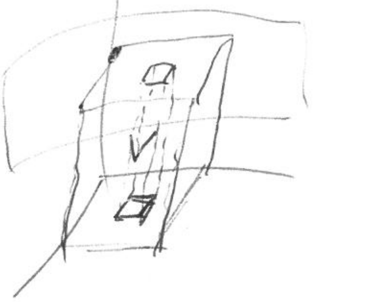
$= f(0.5, 1.25)\cdot 0.5 + f(0.5, 1.75)\cdot 0.5 + f(1.5, 1.25)\cdot 0.5 + f(1.5, 1.75)\cdot 0.5 = -11.875$



$f(x,y) = x-3y^2$.

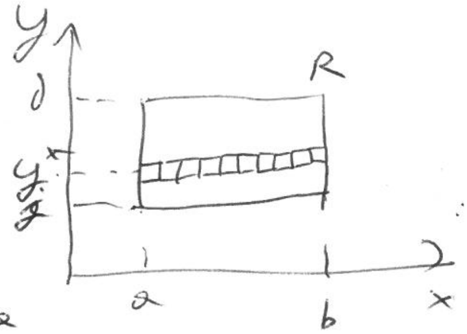
• Το διπλό ολοκλήρωμα ως όγκος:

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$



Όγκος πάνω από το R στο xy επίπεδο και της επιφάνειας $z = f(x,y)$ στο περιοχή του $(x,y) \in R$.

• Το διπλό ολοκλήρωμα ως διαδοχικά απλά ολοκληρώματα:



Έχουμε την δυνατότητα σε ένα διπλό άθροισμα Riemann να αθροίσουμε πρώτα στην διεύθυνση x ώστε να πάρουμε ορισμένες λωρίδες από ορθογώνια και μετά να αθροίσουμε τις λωρίδες στην διεύθυνση y. Αυτό γίνεται με απλά ολοκληρώματα.

Για την λωρίδα έχουμε $\sum_{i=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j$

που αν $P_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, τότε

$$\lim_{\|P_x\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j = \underbrace{\int_a^b f(x, y_j^*)\,dx}_{g(y_j^*)} \cdot \Delta y_j$$

και αν $P_y = c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b$ τότε

$$\lim_{\|P_y\|\to 0} \sum_{j=1}^{n} g(y_j^*)\Delta y_j = \int_c^d g(y_j)\,dy_j$$

Άρα $\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{m\\ n}} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j =$

$$= \lim_{\|P_y\|\to 0} \sum_{j=1}^{m} \left(\lim_{\|P_x\|\to 0} \sum_{i=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \right) \Delta y_j = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

(6) Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το $\iint_R f(x,y)\,dA$ σαν δύο διαδοχικά απλά ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας το Θ.Θ. του ολοκληρωτικού λογισμού:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

(Θ. Fubini).

Π.χ. $I = \int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx$

$$I = \int_0^3 x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 dx = \int_0^3 x^2 \left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{27}{3} - 0\right) = \frac{27}{2}.$$

Ισοδύναμα: $\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 y\right) dy =$

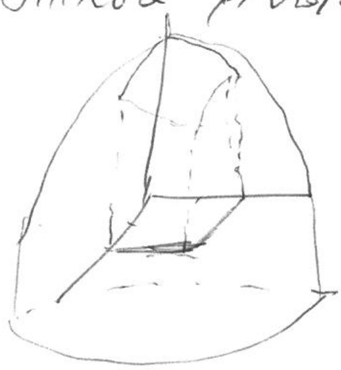
$$= \int_1^2 y\left(\frac{27}{3} - 0\right) dy = 9\int_1^2 y\,dy = 9\,\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= 9\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}.$$

Παρατήρηση: Αν $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy.$$

70) Πχ. Βρείτε τον όγκο του στερεού S που φράσσεται από το παραβολοειδές ~~[illegible]~~ $z=16-x^2-y^2$ και τα επίπεδα $x=2$ και $y=2$ και τα επίπεδα μεταξύ αξόνων.



Λύση: $V \overset{=}{\underset{R}{\iint}} z\,dA = \iint_R (16-x^2-y^2)\,dA$

όπου $R=[0,2]\times[0,2]$

Από Fubini,

$$V=\int_0^2\left(\int_0^2 (16-x^2-y^2)\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^2 \left(16x-\frac{x^3}{3}-y^2x\right)\Big|_0^2 dy =$$

$$= \int_0^2 \left(32-\frac{8}{3}-2y^2\right)dy = \int_0^2\left(\frac{88}{3}-2y^2\right)dy =$$

$$= \frac{88}{3}y-2\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = \left(\frac{176}{3}-\frac{16}{3}\right)-0=\frac{160}{3}.$$

(7) Π.χ. Υπολογίστε το $I=\iint_R y\sin(xy)\,dA$ στο $R=[1,2]\times[0,\pi]$

Λύση: $I=\int_0^\pi\left(\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\right)dy =$

$$=\int_0^\pi -\cos(xy)\Big|_1^2 dy = \int_0^\pi(-\cos 2y+\cos y)\,dy =$$

$$= -\frac{\sin 2y}{2}+\sin y\Big|_0^\pi = -\frac{\sin 2\pi}{2}+\sin\pi = 0$$

Και αντίστροφα.

Διπλά ολοκληρώματα σε γενικές περιοχές

Έστω D μια φραγμένη περιοχή στο επίπεδο

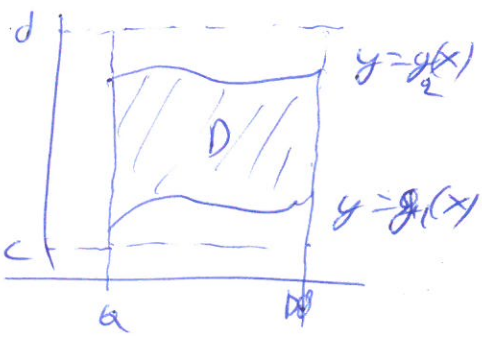
Έστω R ένα ορθογώνιο που έχει στο εσωτερικό του το D.

Έστω $f(x,y)$ ορισμένη στο D και έστω

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in R,\ (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Τότε $\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA}$.

Διπλά ολοκληρώματα μεταξύ συναρτήσεων

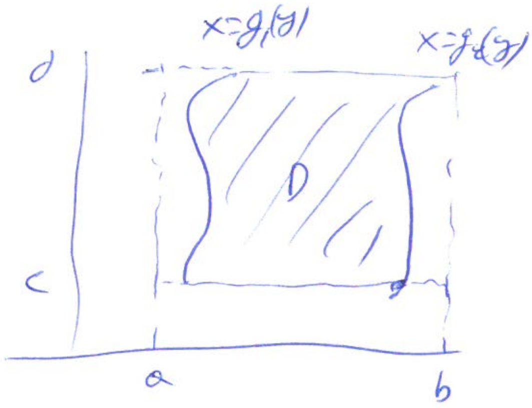


$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d F(x,y)\,dy\,dx =$$

$$=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

(7)

Όμοια $\iint_D f(x,y)\,dA =$

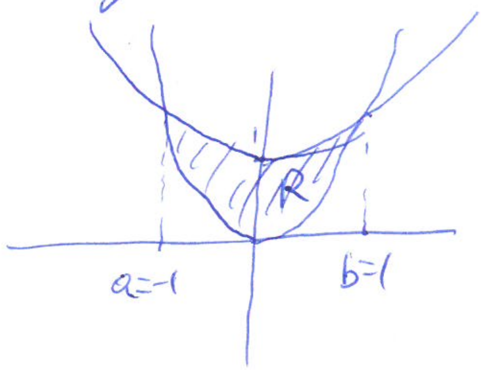


$= \iint_R F(x,y)\,dA =$

$= \int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dx\,dy \Rightarrow$

$\cancel{\iint_D f\,dA} = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$

π.χ. $\iint_D (x+2y)\,dA$ όπου D η περιοχή μεταξύ των παραβολών $y=2x^2$ και $y=1+x^2$



Λύση: $\iint_D (x+2y)\,dA =$

$= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y)\,dy\,dx =$

$= \int_{-1}^1 (xy+y^2)\Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx = \int_{-1}^1 (x(1+x^2)+(1+x^2)^2-2x^3-4x^4)\,dx =$

$= \int_{-1}^1 (x+x^3+1+2x^2+x^4-2x^3-4x^4)\,dx =$

$= \int_{-1}^1 (-3x^4-x^3+2x^2+x+1)\,dx =$

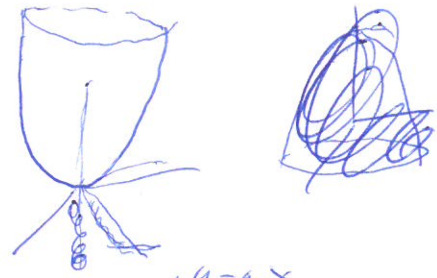
$= \left(-3\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^1 = -\frac{3}{5}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1 - \left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1\right) =$

$= -\frac{3}{5}-\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{2}{3}+\cancel{\frac{1}{2}}+1-\frac{3}{5}+\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{2}{3}-\cancel{\frac{1}{2}}+1 = -\frac{6}{5}+\frac{4}{3}+2 = \frac{-18+20+30}{15} =$

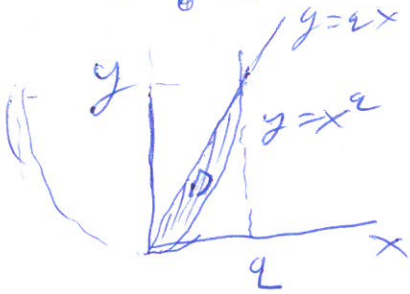
$= \frac{32}{15}$ □

π.χ. Βρείτε τον όγκο κάτω από το παραβολοειδές $z=x^2+y^2$ και πάνω από την περιοχή D που φράσσεται από την ευθεία $y=2x$ και την παραβολή $y=x^2$

Λύση:



$$V=\iint_D z\,dA=\iint_D (x^2+y^2)\,dA=$$



$$=\int_0^2\int_{x^2}^{2x}(x^2+y^2)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^{2x}dx=$$

$$=\int_0^2\left[2x^3+\frac{8x^3}{3}-\left(x^4+\frac{x^6}{3}\right)\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left(-\frac{x^6}{3}-x^4+\frac{14x^3}{3}\right)dx=-\frac{x^7}{21}-\frac{x^5}{5}+\frac{14x^4}{12}\Big|_0^2=\frac{216}{35}$$

π.χ. Υπολογίστε το $\iint_D xy\,dA$ όπου D είναι η περιοχή που φράσσεται από την ευθεία $y=x-1$ και την παραβολή $y^2=2x+6$.

Ρ4

Μερικές βασικές ιδιότητες διπλού ολοκληρώματος

Ιδιότητα 1: Αν $D = D_1 \cup D_2$ τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA$$

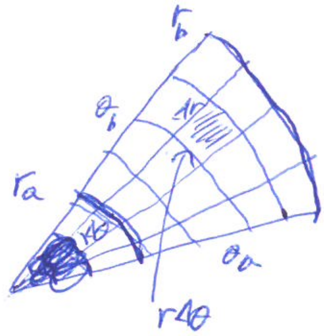
Ιδιότητα 2: $\iint_D 1\,dA = A(D)$ = επιφάνεια περιοχής D.

Ιδιότητα 3: Αν $m \leq f(x,y) \leq M$ στο D, τότε

$$m\,A(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq M\,A(D).$$

Διπλά ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες

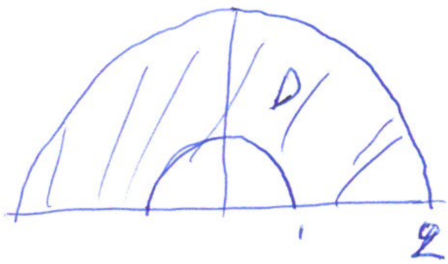
$\Delta A = \Delta r \cdot r\Delta\theta = r\Delta r\Delta\theta$



$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{\theta_a}^{\theta_b}\int_{r_a}^{r_b} \underbrace{f(r\cos\theta, r\sin\theta)}_{g(r,\theta)}\, r\,dr\,d\theta = \int_{\theta_a}^{\theta_b}\int_{r_a}^{r_b} g(r,\theta)\, r\,dr\,d\theta.$$

π.χ. Να βρείτε το $I = \iint_R (3x+4y^2)\,dA$ όπου R είναι η περιοχή στο άνω ημιεπίπεδο που φράσσεται από τους κύκλους $x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2=4$

Λύση:



$$I = \iint_R (3x+4y^2)\,dA =$$

$$= \int_0^\pi\int_1^2 (3x+4y^2)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^\pi\int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$

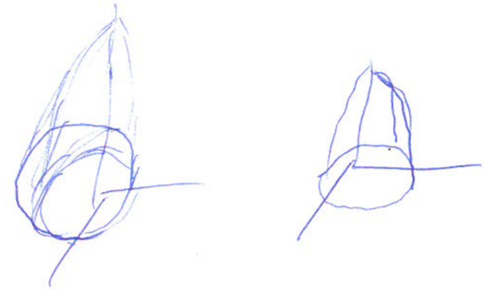
$$= \int_0^\pi\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)\,dr\,d\theta = \int_0^\pi (r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta)\Big|_1^2\,d\theta =$$

$$= \int_0^\pi (8\cos\theta + 16\sin^2\theta - \cos\theta - \sin^2\theta)\,d\theta = 7\int_0^\pi \cos\theta\,d\theta + 15\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= 7(\sin\pi - \sin 0) + 15\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 15\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^\pi =$$

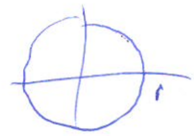
$$= 15\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} - 0\right) = \frac{15\pi}{2}.$$

π.χ. Βρείτε τον όγκο μεταξύ του xy επιπέδου και του παραβολοειδούς $z=1-x^2-y^2$



Λύση: $V=\iint_R z\,dA=$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)r\,dr\,d\theta=$$



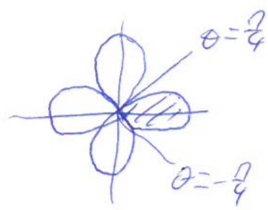
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Άσκηση: Κάντε το σε καρτεσιανές συντεταγμένες

π.χ. Χρησιμοποιώντας το διπλό ολοκλήρωμα για να βρείτε την επιφάνεια ενός φύλλου του ~~[illegible]~~ τετράφυλλου τριφυλλιού $r=\cos 2\theta$

Λύση: $A=\iint_R dA=\iint_R r\,dr\,d\theta=$



$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\cos 2\theta} r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\cos 2\theta}d\theta=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 2\theta}{2}d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{16}\sin 4\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

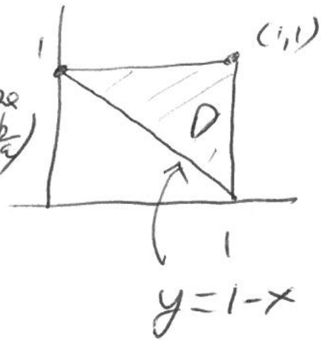
$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{16}\sin\pi-\frac{1}{16}\sin(-\pi)=\frac{\pi}{8}$$

(7)

Εφαρμογές διπλών ολοκληρωμάτων

~~Παραδείγματα~~

π.χ. (Πυκνότητα): Φορτίο είναι κατανεμημένο επιφανειακά στην τριγωνική περιοχή D έτσι ώστε η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου να είναι $\sigma(x,y) = xy$. $\left(\frac{C}{m^2}\right)$ Βρείτε το συνολικό φορτίο.



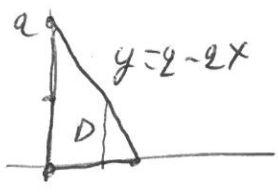
Λύση: $Q = \iint_D \sigma(x,y)\,dA = \iint_D xy\,dA =$

$$= \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_{1-x}^1 dx = \int_0^1 \left[\frac{x}{2} - x\frac{(1-x)^2}{2}\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{2} + x^2\right) dx = \left(-\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}\,C$$

π.χ. (Κέντρο μάζας): Βρείτε το κέντρο μάζας μιας τριγωνικής πλάκας, που αν οι κορυφές της βρίσκονται στα $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ τότε $\rho(x,y) = 1+3x+y$.



Λύση: $\bar{x} = \dfrac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dA}{\iint_D \rho(x,y)\,dA} = \dfrac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dA}{m}$

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dA}{m}$$

$$m = \iint_D \rho(x,y)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \rho(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1+3x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(y + 3xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2-2x + 3x(2-2x) + \frac{(2-2x)^2}{2}\right) dx = \int_0^1 (2-2x+6x-6x^2+2-4x+2x^2)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (-4x^2+4)\,dx = \left(-\frac{4}{3}x^3 + 4x\right)\Big|_0^1 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

(72)

$$I_1=\iint_D x\,\rho(x,y)\,dA=\int_0^1\int_0^{2-2x} x(1+3x+y)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1 \left(xy+3x^2y+x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{2-2x} dx=$$

$$=\int_0^1\left[x(2-2x)+3x^2(2-2x)+x\frac{4(1-x)^2}{2}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left(2x(x^2-2x+1)+6x^2-6x^3+2x-2x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1(-4x^3+4x)\,dx=\left(-x^4+2\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=1$$

Άρα $\bar{x}=\dfrac{I_1}{m}=\dfrac{1}{\frac{8}{3}}=\dfrac{3}{8}$

$$I_2=\iint_D y\,\rho(x,y)\,dA=\int_0^1\int_0^{2-2x} y(1+3x+y)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}+3x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^{2-2x}dx=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{(2-2x)^2}{2}+3x\frac{(2-2x)^2}{2}+\frac{(2-2x)^3}{3}\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{8}{3}(1-3x+3x^2-x^3)+6x(x^2-2x+1)+2(x^2-2x+1)\right]dx=$$

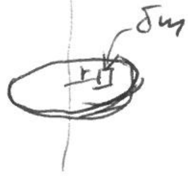
$$=\int_0^1\left[\frac{10}{3}x^3-2x^2-6x+\frac{14}{3}\right]dx=\left(\frac{5}{6}x^4-\frac{2}{3}x^3-3x^2+\frac{14}{3}x\right)\Big|_0^1=$$

$$=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}-3+\frac{14}{3}=\frac{5}{6}-\frac{4}{6}-\frac{18}{6}+\frac{28}{6}=\frac{11}{6}$$

$\bar{y}=\dfrac{I_2}{m}=\dfrac{11}{16}$ $\quad(\bar{x},\bar{y})=\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{11}{16}\right)$.

(79)

π.χ. (Ροπή αδρανείας): Βρείτε την ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των z ενός ομογενούς δίσκου D συμπαγούς $\rho(x,y)=\rho$ και ακτίνας a τοποθετημένου κάθετα στον άξονα των z.



Λύση: $\delta I = \delta m\, r^2 = \rho\, \delta A \cdot r^2$. Άρα

$$I_z = \iint_D \delta I = \iint_D \rho r^2 dA =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho r^2 r\, dr\, d\theta = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3 dr\, d\theta =$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{a} r^3 dr = 2\pi\rho \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2}\rho\pi a^4 .$$

π.χ. (Ροπή αδρανείας) Βρείτε στο παραπάνω παράδειγμα την ροπή αδρανείας ως προς τον άξονα των y.

Λύση: $$I_x = \iint_D r^2 \delta m = \rho \iint_D r^2 dA =$$

$$= \rho \iint_D x^2 dA = \rho \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x^2 dy\, dx =$$

$$= \rho \int_{-a}^{a} x^2 y \Big|_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2\rho \int_{-a}^{a} x^2 \sqrt{a^2-x^2}\, dx =$$

$$\overset{x=a\sin u}{=} 2\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 u \sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}\; a\cos u\, du =$$

$$= 2\rho a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u \cos^2 u\, du = \frac{\rho a^4}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2u\, du =$$

$$= \frac{\rho a^4}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4u}{2} du = \frac{\rho a^4}{2} \frac{1}{2} u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\rho a^4}{4} = \frac{I_z}{2} .$$

Δεν είναι τυχαίο! $I_x + I_y = I_z$ αλλά $I_x = I_y$ άρα $I_x = \frac{I_z}{2}$.

Τριπλά ολοκληρώματα

Ορισμός: Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$B=\{(x,y,z) \mid a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ r\le z\le s\}$$

και έστω P μια διαμέριση του σε μικρά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα B_{ijk} που δίνεται από το

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_l=b$$
$$c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$$
$$r=z_0<z_1<\cdots<z_n=s,$$

$$B_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k]$$

Αν $\Delta V_{ijk}=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})(z_k-z_{k-1})$ ο όγκος του B_{ijk}, και αν $(x^*_{ijk},y^*_{ijk},z^*_{ijk})$ ένα τυχαίο σημείο μέσα στο B_{ijk} τότε

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk},y^*_{ijk},z^*_{ijk})\,\Delta V_{ijk}$$

B (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο)

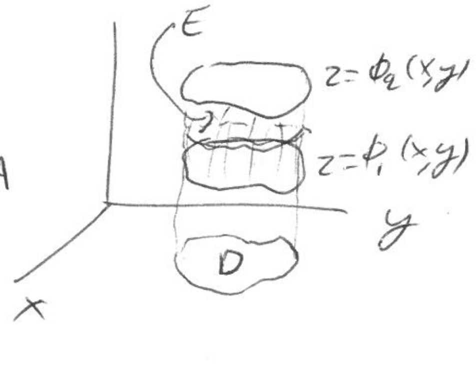
Θεώρημα Fubini:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV=\int_r^s\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Το θεώρημα Fubini σε ένα χωρίο μεταξύ των επιφανειών $z=\phi_1(x,y)$ και $z=\phi_2(x,y)$ πάνω από το χωρίο D παίρνει την μορφή

Θεώρημα Fubini (Μεταξύ επιφανειών)

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV=\iint_D\left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dA$$



όπου $\iint_D$ το διπλό ολοκλήρωμα του απλά ολοκληρώματος στο χωρίο D.

π.χ. Υπολογίστε το $\iiint_B xyz^2\,dV$ όπου

$B=\{(x,y,z) / 0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\}$

Λύση: $\iiint_B xyz^2\,dV \overset{Fubini}{=} \int_0^3\int_{-1}^2\int_0^1 xyz^2\,dx\,dy\,dz =$

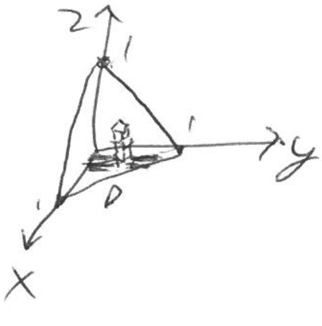
$=\int_0^3\int_{-1}^2 \frac{x^2}{2}yz^2\Big|_0^1 dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^3\int_{-1}^2 yz^2\,dy\,dz =$

$=\frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{y^2}{2}z^2\right)\Big|_{-1}^{2} dz = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)z^2\,dz =$

$=\frac{3}{4}\int_0^3 z^2\,dz = \frac{3}{4}\,\frac{z^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{27}{4}.$

~~π.χ. Υπολογίστε τον όγκο του τετραέδρου που φράσσεται~~

π.χ. Υπολογίστε το $I=\iiint_E z\,dV$ όπου E είναι το τετράεδρο που φράσσεται από τα επίπεδα $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$



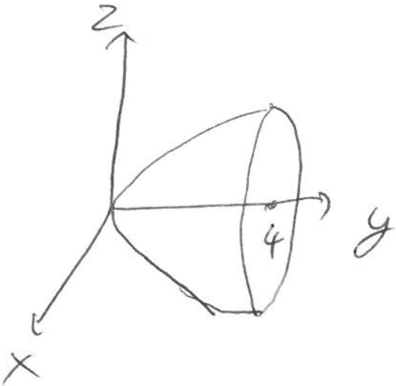
Λύση: Εδώ θα αθροίσουμε στήλες από κυβάκια στην διεύθυνση z, και μετά στήλες στην διεύθυνση y, και τέλος τα φύλλα από κουτιά στην διεύθυνση x.

$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx =$

$=\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{(x+y-1)^3}{6}\Big|_0^{1-x} dx =$

$=\int_0^1 -\frac{(x-1)^3}{6}\,dx = -\frac{(x-1)^4}{24}\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$

Π.χ. Υπολογίστε το $I=\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\,dV$ όπου E είναι η περιοχή που φράσσεται από το παραβολοειδές $y=x^2+z^2$ και το επίπεδο $y=4$



Λύση: Θα αθροίσουμε σε στήλες στην διεύθυνση y πάνω από τον ~~κύκλο~~ δίσκο $D=\{(x,z)/\ x^2+z^2\le 4\}$

$$I=\iint_D \int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\,dy\,dA =$$

$$=\iint_D y\sqrt{x^2+z^2}\Big|_{x^2+z^2}^{4} dA =$$

$$=\iint_D \left(4\sqrt{x^2+z^2}-(x^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2}\right)dA=\iint_D (4-x^2-z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA$$

Επειδή το χωρίο D έχει κυκλική συμμετρία το διπλό ολοκλήρωμα βολεύει να υπολογιστεί σε πολικές συντεταγμένες. Άρα $\sqrt{x^2+z^2}=r$ και $dA=r\,dr\,d\theta$.

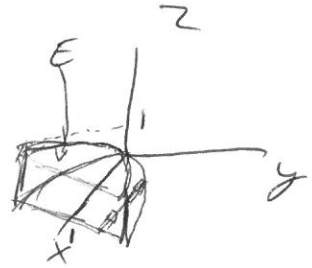
$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r^2)r\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2}(4r^2-r^4)\,dr=$$

$$=2\pi\left(4\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^{2}=2\pi\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)=2\pi\frac{64}{15}=\frac{128\pi}{15}.$$

$\square$

(83)

Πχ. Βρείτε το κέντρο μάζας του στερεού που φράσσεται από τον παραβολικό κύλινδρο $x=y^2$ και τα επίπεδα $x=z$, $z=0$, $x=1$ αν αυτό έχει σταθερή πυκνότητα.



Λύση: $\bar{x} = \dfrac{\iiint_E x\, dV}{\iiint_E dV}$

$$\bar{y} = \frac{\iiint_E y\, dV}{\iiint_E dV}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_E z\, dV}{\iiint dV}$$

$$V = \iiint_E dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x dz\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} z\Big|_0^x dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\Big|_{y^2}^{1} dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{y^4}{2}\right) dy =$$

$$= \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{10}y^5\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

$$I_x = \iiint_E x\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^x x\, dz\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} xz\Big|_0^x dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{3}\Big|_{y^2}^{1} dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3}\right) dy =$$

$$= 2\int_0^1\left(\frac{1}{3} - \frac{y^6}{3}\right) dy =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}y - \frac{y^7}{21}\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21}\right) = \frac{4}{7}$$

$I_y = 0$ από συμμετρία

$$I_z = \iiint_E z\,dV = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^{x} z\,dz\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} \frac{z^2}{2}\Big|_0^{x} dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} \frac{x^2}{2}\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{6}\Big|_{y^2}^{1} dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{6} - \frac{y^6}{6}\right)dy =$$

$$= 2\int_0^{1}\left(\frac{1}{6} - \frac{y^6}{6}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(y - \frac{y^7}{7}\right)\Big|_0^{1} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7}$$

Άρα $\bar{x} = \dfrac{I_x}{V} = \dfrac{\frac{4}{7}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{5}{7}$

$\bar{y} = 0$

$\bar{z} = \dfrac{I_z}{V} = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{5}{14}$

Άρα το κέντρο μάζας είναι το

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$$

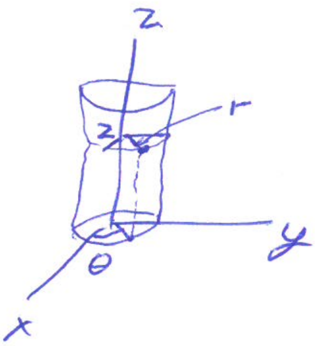
Κυλινδρικές Συντεταγμένες

~~[illegible]~~

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$\Delta V = \Delta A \cdot \Delta z = r \Delta r \Delta \theta \Delta z \Rightarrow$

$dV = r\, dr\, d\theta\, dz$

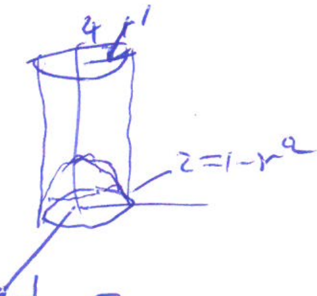


Αν ο όγκος E είναι μεταξύ των επιφανειών $z=\phi_1(x,y)$ και $z=\phi_2(x,y)$ και πάνω από το πολικά περιγραφόμενο χωρίο D, τότε

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz\, dA =$$

$$= \iint_D \int f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, dz\, r\, dr\, d\theta .$$

π.χ. Ένα στερεό E βρίσκεται μεταξύ του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$, κάτω από το επίπεδο $z=4$ και πάνω από το παραβολοειδές $z=1-x^2-y^2$. Η πυκνότητα σε κάθε σημείο είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του κυλίνδρου, $\rho = Kr$. Βρείτε τη μάζα του E συναρτήσει του K.



Λύση: Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το χωρίο περιγράφεται ως

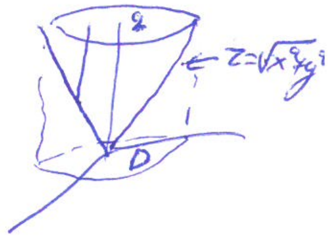
$E=\{(r,\theta,z) \,/\, 1-r^2 \le z \le 4,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 1\}$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 Kr\, r\, dz\, d\theta\, dr = K\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (4-1+r^2) r^2\, dr =$$

$$= 2\pi K \left(r^3 + \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 = 2\pi K \frac{6}{5} = \frac{12\pi K}{5}$$

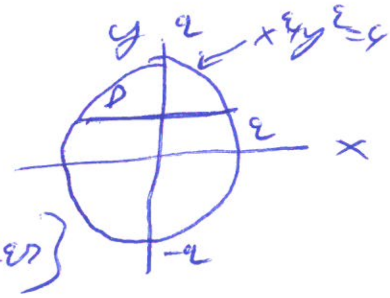
06

Πχ. Υπολογίστε το $I=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$



Λύση: Ολοκληρώνουμε στο εσωτερικό του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και κάτω από το επίπεδο $z=2$.

Επειδή το D έχει κυκλική συμμετρία θα δουλέψουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες



$E=\{(r,\theta,z)\ |\ r<z<2,\ 0<r<2,\ 0<\theta<2\pi\}$

Άρα $I=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{2} r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta =$

$=2\pi\int_0^2(2-r)r^3\,dr=2\pi\int_0^2(2r^3-r^4)\,dr=$

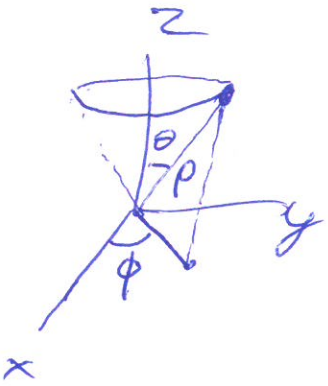
$=2\pi\left(\frac{r^4}{2}-\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^2=16\pi-\frac{64\pi}{5}=\frac{16\pi}{5}$ $\square$

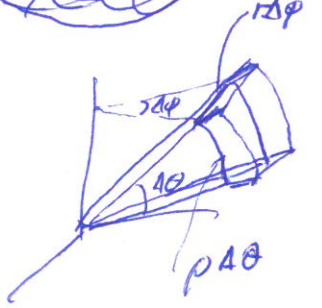
Σφαιρικές Συντεταγμένες

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \phi < 2\pi$

$\rho > 0$





$$\Delta V = \rho\Delta\theta \cdot r\Delta\phi \cdot \Delta\rho = \rho\Delta\theta \cdot \rho\sin\theta\Delta\phi \cdot \Delta\rho =$$
$$= \rho^2 \sin\theta \, \Delta\rho\Delta\theta\Delta\phi .$$

Άρα $dV = \rho^2 \sin\theta \, d\rho d\theta d\phi$.

Οι σφαιρικές συντεταγμένες βοηθάνε όταν το χωρίο ολοκλήρωσης προέρχεται από τμήματα σφαίρας.

π.χ. Υπολογίστε το $I = \iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$

στην μπάλα $B = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

<u>Λύση</u>: Εδώ ολοκληρώνουμε στο εσωτερικό μιας σφαίρας άρα θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες.

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{3} e^{\rho^3} \sin\theta \Big|_0^1 d\rho \, d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\frac{e}{3} - \frac{1}{3}\right) \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = 2\pi \frac{e-1}{3} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 2\pi \frac{e-1}{3} \cdot 2 = 4\pi(e-1)$$

(Καρτεσιανό $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$)

Π.χ. Βρείτε τον όγκο του στερεού μεταξύ του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=z$

Λύση: $x^2+y^2+z^2=z \Rightarrow x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$.

Άρα η σφαίρα έχει κέντρο το $(0,0,\frac{1}{2})$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$. Επίσης εφάπτεται στο $(0,0,0)$.

• Η τομή με τον κώνο είναι όταν

$$z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2+z^2=z \Rightarrow z^2+z^2=z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z^2-z=0 \Rightarrow z(2z-1)=0 \Rightarrow z=0 \text{ ή } z=\frac{1}{2}.$$

Άρα $x^2+y^2=1/4 \Rightarrow r=\frac{1}{2}$ και

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \rho=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\tan\theta=\frac{r}{z}=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$ κώνος.

Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες

$$E=\{(\rho,\theta,\phi) \,/\, 0\le\rho\le\rho_{\text{σφαίρας}},\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\phi\le 2\pi\}$$

όπου στην σφαίρα, $\rho^2=z \Rightarrow \rho^2=\rho\cos\theta \Rightarrow \rho=\cos\theta$.

Άρα $E=\{(\rho,\theta,\phi) \,/\, 0\le\rho\le\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 0\le\phi\le 2\pi\}$.

Άρα $V=\iiint dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\phi=$

$$=2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{\rho^3}{3}\sin\theta\Big|_0^{\cos\theta}d\theta=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta=$$

$$=-\frac{2\pi}{3}\,\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^{\pi/4}=-\frac{\pi}{6}\left(\cos^4\frac{\pi}{4}-1\right)=-\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{4}-1\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8}.$$

Αλλαγή μεταβλητών στα πολλαπλά ολοκληρώματα

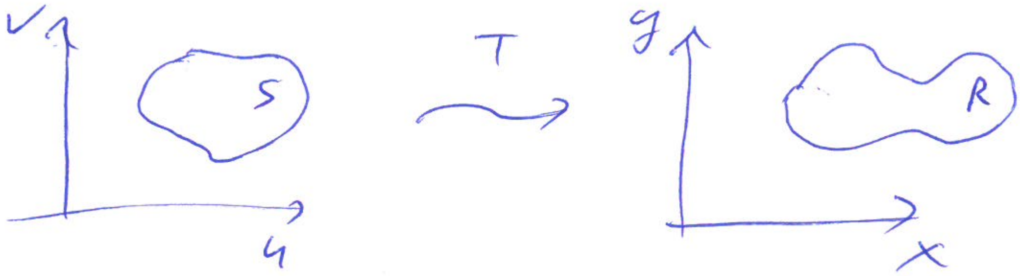
• Έστω ένας μετασχηματισμός $T(u,v)=(x,y)$ από το u,v επίπεδο στο (x,y) επίπεδο.

Θα υποθέσουμε ότι ο T είναι C^1 δηλαδή έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους.

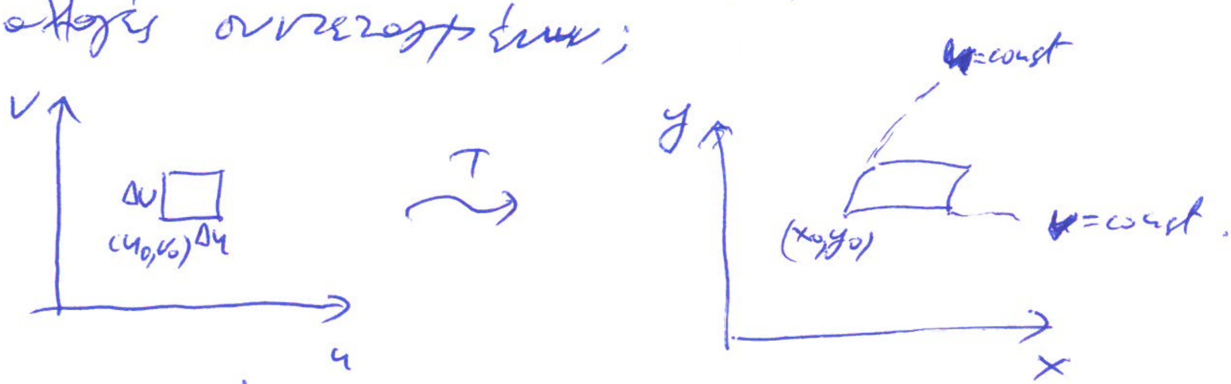
Ο T δίνεται από δύο συναρτήσεις, τις
$$x=g(u,v)$$
$$y=h(u,v)$$

Αν ο T είναι 1-1, τότε είναι αντιστρέψιμος και μπορούμε να λύσουμε ως προς u,v συναρτήσει των x,y, $u=G(x,y)$, $v=H(x,y)$.

Σε αυτή την περίπτωση, λέμε ότι έχουμε μια <u>αλλαγή συντεταγμένων</u> στο επίπεδο.



• Πώς αλλάζει το διπλό ολοκλήρωμα κάτω από αλλαγές συντεταγμένων;



Στο (x,y) επίπεδο, $\underline{r}=x\hat{i}+y\hat{j}=g(u,v)\hat{i}+h(u,v)\hat{j}$

Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στην $u=\text{const}$ δίνεται από το

$$\underline{T}_v=\frac{\partial r}{\partial v}=\frac{\partial g(u_0,v_0)}{\partial v}\hat{i}+\frac{\partial h(u_0,v_0)}{\partial v}\hat{j}=\frac{\partial x}{\partial v}\hat{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\hat{j}$$

90)

και στην $v = const$ από

$$\underline{T_u} = \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial g(u_0, v_0)}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial h(u_0, v_0)}{\partial u}\hat{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\hat{j}$$

• Το μήκος των στοιχειωδών πλευρών του καμπυλόγραμμου παραλληλογράμμου στο xy επίπεδο είναι

$|\underline{T_u}\,\delta u|$ και $|\underline{T_v}\,\delta v|$, και το εμβαδόν του στοιχειώδους καμπυλόγραμμου παραλληλογράμμου

$$\delta A_{xy} = |\underline{T_u}\,\delta u \times \underline{T_v}\,\delta v| = \big|\,|\underline{T_u} \times \underline{T_v}|\,\delta u \delta v\big| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} \delta u \delta v \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \delta u \delta v \right| = |J(u,v)\,\overbrace{\delta u \delta v}^{\delta A_{uv}}|.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Άρα $\delta A_{xy} = J(u,v)\,\delta A_{uv}$ και

$$\iint_R f(x,y)\, dA_{xy} = \iint_{T(R)} f(u,v)\,|J(u,v)|\, dA_{uv} \Rightarrow$$

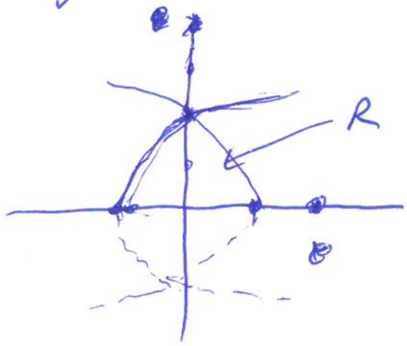
$$\iint_R f(x,y)\, dx\,dy = \iint_{T(R)} f(u,v)\,|J(u,v)|\, du\,dv$$

91) ΑΧ. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητών $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$

για να υπολογίσετε το $I = \iint_R y\,dA$ όπου R είναι η περιοχή που φράσσεται από τον άξονα των x και τις παραβολές $y^2 = 4-4x$ και $y^2 = 4+4x$

Λύση: $y^2 = -4(x-1)$ (1)

$y^2 = 4(x+1)$ (2)



$(1) \Rightarrow 4u^2v^2 = -4(u^2-v^2-1) \Rightarrow$

$4u^2 - 4v^2 + 4u^2v^2 = 4 \Rightarrow$

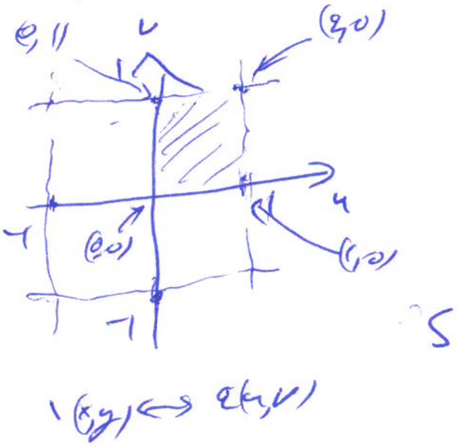
$4u^2(1+v^2) = 4(1+v^2) \Rightarrow \boxed{u = \pm 1}$

$(2) \Rightarrow 4u^2v^2 = 4(u^2-v^2+1) \Rightarrow$

$4u^2v^2 + 4v^2 = 4(u^2+1) \Rightarrow 4v^2(u^2+1) = 4(u^2+1) \Rightarrow$

$\boxed{v = \pm 1}$

~~$y=0 \Rightarrow u=0$ ή $v=0$.~~



$I = \iint_R y\,dA =$

$= \iint_S y \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv =$

$= \int_0^1\int_0^1 y \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv = \int_0^1\int_0^1 2uv \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} du\,dv =$

$= 8\int_0^1\int_0^1 uv(u^2+v^2)\,du\,dv = 8\int_0^1\int_0^1 (u^3v + v^3u)\,du\,dv =$

$= 8\int_0^1 \left(\frac{u^4}{4}v + v^3\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^1 dv = 8\int_0^1 \left(\frac{1}{4}v + \frac{1}{2}v^3\right)dv = 8\left(\frac{v^2}{8} + \frac{v^4}{8}\right)\Big|_0^1 = 2.$

π.χ. Δείξτε την μετατροπή ολοκληρώματος σε σφαιρικές συντεταγμένες

Λύση: $x = \rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = \rho \sin\theta \sin\phi$, $z = \rho\cos\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \rho\cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} \rho\cos\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} +$$

$$+\rho\sin\theta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta\left(\rho^2 \sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + \rho^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\right) +$$

$$+\rho\sin\theta\left(\rho\sin^2\theta\cos^2\phi + \rho\sin^2\theta\sin^2\phi\right) =$$

$$= \rho^2\cos^2\theta\sin\theta + \rho^2\sin^3\theta = \rho^2\sin\theta$$

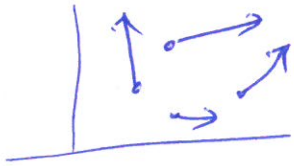
Άρα $dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

(93)

Διανυσματικοί Λογισμοί

Διανυσματικό πεδίο: Έστω D μια περιοχή στο $\mathbb{R}^2$ ή στο $\mathbb{R}^3$. Ένα διανυσματικό πεδίο είναι μια συνάρτηση $F: D \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$.

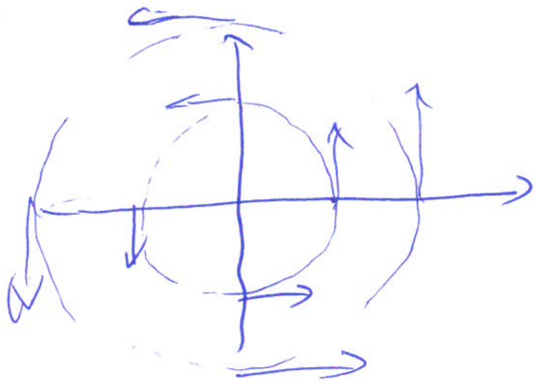
Ένα διανυσματικό πεδίο στο επίπεδο αντιστοιχεί σε κάθε σημείο ένα διάνυσμα.



παραδείγματα:
$\underline{E}$, $\underline{B}$, $\underline{u}$, $\underline{T}$, ...

π.χ. Σχεδιάστε το διανυσματικό πεδίο

$$\underline{F}(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$$



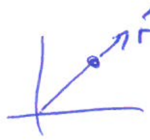
Λύση: $|\underline{F}| = x^2+y^2 = r^2$

$$\underline{F}\cdot\underline{r} = (-y\hat{i}+x\hat{j})\cdot(x\hat{i}+y\hat{j}) = 0$$

π.χ. Γράψτε τον νόμο του Coulomb σε διανυσματική μορφή

Λύση: $|F| = k\dfrac{|q_1||q_2|}{|\underline{r}|^2}$

Έστω $\hat{r} = \dfrac{\underline{r}}{|\underline{r}|}$



Τότε αν q_1, q_2 έχουν ίδιο πρόσημο

$\underline{F} = k\dfrac{q_1 q_2}{|\underline{r}|^2}\hat{r}$. Αν έχουν αντίθετο

$\underline{F} = -k\dfrac{|q_1 q_2|}{|\underline{r}|^2}\hat{r} = k\dfrac{q_1 q_2}{|\underline{r}|^2}\hat{r}$ Άρα $\boxed{\underline{F} = k\dfrac{q_1 q_2}{|\underline{r}|^3}\underline{r}}$.

Δυναμικό: Συχνά ένα διανυσματικό πεδίο δίνεται από μια συνάρτηση (το δυναμικό) μέσω της gradient. Τότε το πεδίο λέγεται συντηρητικό.

Έτσι $\underline{F} = -\underline{\nabla} V$ όπου $V = V(x,y,z)$ είναι το δυναμικό.

π.χ. $V = k\dfrac{q_1 q_2}{|\underline{r}|} = k\dfrac{q_1 q_2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} =$$

$$= -k\frac{q_1 q_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2x\hat{i} - k\frac{q_1 q_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}\right)2y\hat{j} -$$

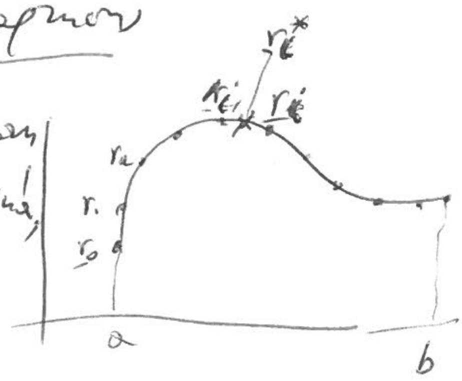
$$- k\frac{q_1 q_2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(-\frac{1}{2}\right)2z\hat{k} =$$

$$= k\frac{q_1 q_2}{|\underline{r}|^3}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = k\frac{q_1 q_2}{|\underline{r}|^3}\underline{r}.$$

95

Επικαμπύλια ολοκληρώματα συναρτήσεων

Έστω μια δυδιάστατη ή τρισδιάστατη καμπύλη $\underline{r}(t)$ που δίνεται παραμετρικά, και έστω ότι θέλουμε να ολοκληρώσουμε κατά μήκος της καμπύλης από το $t=a$ στο $t=b$.



Έστω μια διαμέριση $P: a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ του $[a,b]$. Αυτή μας δίνει μια διαμέριση της καμπύλης, την $\underline{r}(t_0), \underline{r}(t_1), \dots, \underline{r}(t_n)$.
Θα λέμε ότι $\|P\|\to 0$ αν $\max|\underline{r}(t_i)-\underline{r}(t_{i-1})|\to 0$.

Ορισμός: $$\int_C f(\underline{r})\,ds = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\underline{r}_i^*)\,\Delta s_i$$

όπου $\Delta s_i = |\underline{r}(t_i)-\underline{r}(t_{i-1})|$.

Παρατήρηση: $$\lim_{\|P\|\to 0}\frac{\Delta s_i}{\Delta t_i} = \left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| \quad \text{άρα}$$

$$\int_C f(\underline{r})\,ds = \int_a^b f(\underline{r}(t))\,\frac{ds}{dt}\,dt = \int_a^b f(\underline{r}(t))\left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right|dt$$

Άρα $$\boxed{\int_C f(\underline{r})\,ds = \int_a^b f(\underline{r}(t))\left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right|dt}$$

Σε συντεταγμένες σε 2D: $\underline{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d\underline{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \Rightarrow \left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Άρα $$\boxed{\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x,y)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

Σε 3D: $$\boxed{\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x,y,z)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt}$$

π.χ. Υπολογίστε το $\int_C (2+x^2y)\,ds$ όπου C το άνω ημικύκλιο του κύκλου $x^2+y^2=1$.

<u>Λύση</u>: Παραμετρίζουμε τον κύκλο θέτοντας $x=\cos t$ και $y=\sin t$. Το άνω ημικύκλιο είναι για $0\le t\le \pi$. Άρα

$$\int_C (2+x^2y)\,ds = \int_a^b \left(2+x(t)^2y(t)\right)\left|\frac{dr(t)}{dt}\right| dt =$$

$$= \int_0^\pi (2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt =$$

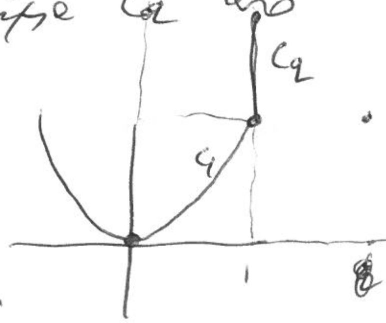
$$= \int_0^\pi (2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi (2+\cos^2 t\sin t)\,dt = 2\pi + \int_0^\pi \cos^2 t\sin t\,dt =$$

$$= 2\pi - \frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^\pi = 2\pi - \left(\frac{\cos^3\pi}{3}-\frac{\cos^3 0}{3}\right) =$$

$$= 2\pi - \left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = 2\pi+\frac{2}{3}. \quad ∎$$

π.χ. Υπολογίστε το $I=\int_C 2x\,ds$ όπου η καμπύλη C αποτελείται από το τόξο C_1 της παραβολής $y=x^2$ από το $(0,0)$ στο $(1,1)$ που ακολουθείται από το κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα C_2 από το $(1,1)$ στο $(1,2)$



<u>Λύση</u>: $I=\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds$

Για την παραβολή, $\underline{r}(x) = x\hat{i}+x^2\hat{j}$, παράμετρος x.

$\left|\frac{dr}{dx}\right| = |\hat{i}+2x\hat{j}| = \sqrt{1+4x^2}$.

Άρα $I_1=\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 (1+4x^2)^{1/2}\,d(1+4x^2) = \frac{1}{4}\frac{(1+4x^2)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^1$
$= \frac{1}{6}(5^{3/2}-1) = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)$

$I_2=\int_{C_2} 2x\,ds = 2\int_1^2 dy = 2$. Άρα $I=I_1+I_2=\frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1)+2$. ∎

(27)

π.χ. Υπολογίστε το $I=\int_C y\sin z\, ds$ όπου C είναι η κυκλική έλικα $x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$.

$(I=\sqrt{2}\,\pi)$

Διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Έστω ~~...~~ ένα διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(\underline{r})$ και μια καμπύλη $\underline{r}(t)$ στο επίπεδο ή στον χώρο, $a\le t\le b$.

Τότε $\boxed{\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_a^b \underline{F}(\underline{r}(t))\cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt}$

π.χ. Βρείτε το έργο της δύναμης $F(x,y)=-y^2\hat{i}+xy\hat{j}$ για να μετακινήσουμε ένα σώμα κατά μήκος του ημικυκλίου $\underline{r}(t)=\cos t\,\hat{i}+\sin t\,\hat{j}$, $0\le t\le \pi$.

<u>Λύση</u>: $W=\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^\pi \underline{F}(\underline{r})\cdot\frac{d\underline{r}}{dt}\,dt =$

$= \int_0^\pi (-y^2\hat{i}+xy\hat{j})\cdot(-\sin t\,\hat{i}+\cos t\,\hat{j})\,dt =$

$= \int_0^\pi (y^2\sin t + xy\cos t)\,dt = \int_0^\pi (\sin^3 t+\sin t\cos^2 t)\,dt =$

$= \int_0^\pi \sin t\,dt = -\cos t\Big|_0^\pi = 2.$ □

π.χ. Βρείτε το $I=\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ όπου $\underline{F}(x,y,z)=xy\hat{i}+yz\hat{j}+xz\hat{k}$ και C είναι το twisted cubic $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ για $0\le t\le 1$.

<u>Λύση</u>: $\underline{r}(t)=t\hat{i}+t^2\hat{j}+t^3\hat{k} \Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt}=\hat{i}+2t\hat{j}+3t^2\hat{k}$

$I=\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^1 \underline{F}\cdot\frac{d\underline{r}}{dt}\,dt = \int_0^1 (t^3\hat{i}+t^5\hat{j}+t^4\hat{k})\cdot(\hat{i}+2t\hat{j}+3t^2\hat{k})\,dt =$

$= \int_0^1 (t^3+2t^6+3t^6)\,dt = \frac{t^4}{4}+5\frac{t^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{5}{7} = \frac{27}{28}.$ □

Συντηρητικά Πεδία

Θεώρημα: Αν $\underline{F}(\underline{r}) = \nabla f(\underline{r})$ όπου $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $n=2,3$, και η C δίνεται από την $\underline{r}(t)$, $a \le t \le b$, τότε αν $\underline{\nabla} f(r)$ συνεχής στην C έχουμε

$$\int_C \underline{\nabla} f \cdot d\underline{r} = f(\underline{r}(b)) - f(\underline{r}(a)).$$

Απόδειξη:

$$\int_C \underline{\nabla} f \cdot d\underline{r} = \int_a^b \nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \frac{d\underline{r}(t)}{dt}\, dt =$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d\, f(\underline{r}(t))}{dt}\, dt = f(\underline{r}(b)) - f(\underline{r}(a)). \quad \square$$

Ορισμός: Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται συντηρητικό αν $\underline{F} = \underline{\nabla} V$ για κάποια συνάρτηση βαθμωτού $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $n=2,3$.

~~Έργο δύναμης: Το έργο κατά διανυσματικό πεδ~~

Έργο συντηρητικού πεδίου: $W = \int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} =$

$$= \cancel{\int_a^b \underline{F}(\underline{r}) \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt} = \int_C \underline{\nabla} V \cdot d\underline{r} = V(\underline{r}(b)) - V(\underline{r}(a))$$

ανεξάρτητο από την καμπύλη C!!!

Άρα για ένα συντηρητικό πεδίο το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση αλλά όχι από την διαδρομή. Συντηρητικά πεδία είναι το βαρυτικό και το ηλεκτρικό, αλλά όχι το μαγνητικό.

Π.χ. Βρείτε το έργο του βαρυτικού πεδίου

$$\underline{F}(\underline{r}) = -G\frac{mM}{|\underline{r}|^3}\underline{r}$$

για να μετακινήσουμε ένα σώμα μάζας m από το (3,4,12) στο (2,2,0).

Λύση: Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό

με $V(\underline{r}) = G\frac{mM}{|\underline{r}|} = G\frac{mM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Ισχύει ότι $\underline{F}(\underline{r}) = \nabla V(\underline{r})$. Άρα

$$W = \int \underline{F}(\underline{r})\cdot d\underline{r} = \int_{(3,4,12)}^{(2,2,0)} \underline{\nabla} V(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = V(2,2,0) - V(3,4,12) =$$

$$= G\frac{mM}{\sqrt{8}} - G\frac{mM}{\sqrt{169}} = GmM\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right).$$

(109)

Παρατήρηση: Αν ένα πεδίο $\underline{F}(\underline{r})$ είναι συντηρητικό, τότε $I = \oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$

Απόδειξη: Έστω δύο σημεία A, B στην καμπύλη C. Επειδή η C είναι απλή κλειστή καμπύλη έχουμε δύο διαδρομές από το A στο B, τις C_1, C_2.

$$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{C_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} - \int_{C_2} \underline{F}\cdot d\underline{r}$$

Αλλά τα δύο ολοκληρώματα εξαρτώνται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο, άρα είναι ίσα. Επομένως $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$. ∎

Θεώρημα: Έστω ότι το $\underline{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε ένα ανοιχτό συνεκτικό χωρίο D.

Αν $\int_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου για όλα τα C στο D, τότε το $\underline{F}$ είναι συντηρητικό πεδίο στο D.

Απόδειξη: Έστω $\underline{r}_0$ ένα σημείο στο D.

Έστω $f(\underline{r}) = \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F}\cdot d\underline{r}$, ανεξάρτητο της διαδρομής.

Αν $\underline{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ τότε

$$\frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}+(0,0,\dots,h,0,\dots,0)} \underline{F}\cdot d\underline{r} - \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}} \underline{F}\cdot d\underline{r}}{h} =$$

Έστω $\underline{e}_i = (0,\dots,0,\overset{i}{1},0,\dots,0)$. Τότε

$$\frac{\partial f(\underline{r})}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}+h\underline{e}_i}\underline{F}\cdot d\underline{r} - \int_{\underline{r}_0}^{\underline{r}}\underline{F}\cdot d\underline{r}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{\underline{r}}^{\underline{r}+h\underline{e}_i}\underline{F}\cdot d\underline{r}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\underline{F}(\underline{r})\cdot h\underline{e}_i}{h} = F_i(\underline{r}).$$

Συνεπώς για κάθε i, $F_i(\underline{r}) = \frac{\partial f(\underline{r})}{\partial e_i} \Rightarrow \underline{F}(\underline{r}) = \nabla f(\underline{r})$ □.

Θεώρημα: Αν $\underline{F}(x,y) = F_1(x,y)\hat{i} + F_2(x,y)\hat{j}$ είναι ένα συντηρητικό πεδίο, και τα F_1, F_2 έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους, σε ένα ανοικτό συνεκτικό χωρίο D, τότε σε όλο το D έχουμε

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Απόδειξη: $\underline{F}(x,y) = \nabla V(x,y)$ αφού $\underline{F}$ συντηρητικό.

Άρα $F_1(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}$, $F_2(x,y) = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}.$$

Από ισότητα μικτών παραγώγων, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$. □

Παρατήρηση: Το αντίστροφο αυτού του θεωρήματος ισχύει μόνο για απλά συνεκτικά χωρία D, (χωρίς τρύπες) όπου δηλαδή κάθε κλειστή καμπύλη στο D περιέχει μόνο σημεία του D. Άρα έχουμε το θεώρημα

Θεώρημα: Αν $\underline{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j}$ με τα F_1, F_2 να έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και αν

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$ για κάθε σημείο του D, (απλά συνεκτικό)

τότε το $\underline{F}$ είναι συντηρητικό στο D.

π.χ. Προσδιορίστε αν το $\underline{F}(x,y) = 2xy\hat{i} + xy^3\hat{j}$ είναι συντηρητικό στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση: Το $\underline{F}$ ορίζεται και έχει συνεχείς παραγώγους σε όλο το $\mathbb{R}^2$, άρα βρίσκεται σε απλά συνεκτικό χωρίο.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = y^3$$

Επειδή $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}$ δεν μπορεί το πεδίο να είναι συντηρητικό.

π.χ. Προσδιορίστε αν το $F(x,y) = (3+2xy)\hat{i} + (x^2-3y^2)\hat{j}$ είναι συντηρητικό

__Λύση__: $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$.

π.χ. α) Αν $\underline{F}(x,y) = (3+2xy)\hat{i} + (x^2-3y^2)\hat{j}$ βρείτε ένα ~~...~~ δυναμικό $V(x,y)$ έτσι ώστε

$\underline{F}(x,y) = \underline{\nabla} V(x,y)$.

β) Υπολογίστε το $\int_C \underline{F}\cdot \underline{dr}$ όπου C είναι η καμπύλη $\underline{r}(t) = e^t \sin t\,\hat{i} + e^t \cos t\,\hat{j}$, $0 \le t \le \pi$

__Λύση__: α) $V(x,y) = 3x + x^2y - y^3$

β) $\underline{r}(0) = \hat{j}$, $\underline{r}(\pi) = -e^{\pi}\hat{j}$

$$I = \int_C \underline{F}\cdot\underline{dr} = V(\underline{r}(\pi)) - V(\underline{r}(0)) = V(0,-e^{\pi}) - V(0,1) = e^{3\pi}+1 .$$

Διαφορετικά, $I = \int_0^{\pi} \underline{F}(x(t),y(t)) \cdot \dfrac{d\underline{r}(t)}{dt}\,dt =$

$$= \int_0^{\pi}\Big[(3+2x(t)y(t))\, e^t(\sin t + \cos t) + (x^2(t) - 3y^2(t))\, e^t(\cos t - \sin t)\Big]dt$$

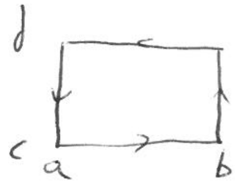
όπου $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$.

Θεώρημα Green: Έστω $\underline{F}(x,y) = F_1(x,y)\hat{i} + F_2(x,y)\hat{j}$ ένα διανυσματικό πεδίο στο επίπεδο. Έστω C μια θετικά προσανατολισμένη, ομαλή κατά κομμάτια απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο, και έστω D η επιφάνεια που περικλείει. Αν τα $F_1(x,y)$, $F_2(x,y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε μια ανοικτή περιοχή που περιέχει το D, τότε

$$\oint_C \underline{F}(x,y)\cdot d\underline{r} \equiv \oint_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\right) dA .$$

Απόδειξη: Έστω μια ορθογώνια περιοχή $R = \{(x,y) / a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ και έστω ∂R η δεξιόστροφη καμπύλη που την περιβάλλει. Τότε



$$\oint_{\partial R} \underline{F}(x,y)\cdot d\underline{r} = \int_a^b F_1(x,c)dx + \int_c^d F_2(b,y)dy -$$

$$- \int_a^b F_1(x,d)dx - \int_c^d F_2(a,y)dy$$

Επίσης

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dy\,dx =$$

$$= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\,dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy\,dx =$$

$$= \int_c^d \left(F_2(b,y) - F_1(a,y)\right)dy - \int_a^b \left(F_1(x,d) - F_1(x,c)\right)dx =$$

$$= \int_a^b F_1(x,c)dx + \int_c^d F_2(b,y) - \int_a^b F_1(x,d)dx - \int_c^d F_2(b,y)dy .$$

(105) Άρα για το ορθογώνιο R έχουμε ότι

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial R} \underline{F}\cdot d\underline{r} .$$

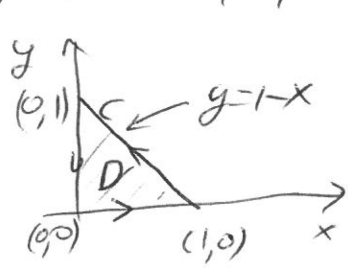
Το υπόλοιπο της απόδειξης είναι θέμα τεμαχισμού της περιοχής D σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Εκεί που εφάπτονται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αλληλοαναιρείται ενώ το επιφανειακό ολοκλήρωμα προστίθεται.

Συνεπώς παίρνουμε

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial D} \underline{F}\cdot d\underline{r}$$ σε κάθε

περιοχή D που μπορεί να τεμαχιστεί με αυθαίρετα καλή προσέγγιση σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Παρ. Επαληθεύστε το θεώρημα Green για το ολοκλήρωμα
$I = \int_C x^4 dx + xy\,dy$ για την καμπύλη C του σχήματος



Λύση: Το θεώρημα Green μας λέει ότι

$$\int_C x^4 dx + xy\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial xy}{\partial x} - \frac{\partial x^4}{\partial y}\right) dA = \iint_D y\, dA$$

όπου D το εσωτερικό του τριγώνου.

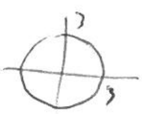
$$\iint_D y\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{2} dx =$$
$$= \frac{(x-1)^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6} .$$

$$\int_C x^4 dx + xy\,dy = \int_0^1 x^4 dx + \int_1^0 x^4 dx + x(1-x)\,d(1-x) + \int_1^0 0\,dy =$$
$$= \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \int_0^1 x^4 dx + \int_0^1 x(1-x)dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Παρατήρηση: Αν $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ και το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}$ ορίζεται στο εσωτερικό μιας απλής και κλειστής καμπύλης C, τότε το θεώρημα Green μας λέει ότι $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$.
Αυτό με την σειρά του μας λέει ότι το πεδίο $\underline{F}(\underline{r})$ είναι συντηρητικό σε μια απλά συνεκτική περιοχή.

π.χ. Υπολογίστε το $I = \oint_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x+\sqrt{y^4+1})\,dy$

όπου C είναι ο κύκλος $x^2+y^2=9$



Λύση: Από θεώρημα Green,

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial(7x+\sqrt{y^4+1})}{\partial x} - \frac{\partial(3y-e^{\sin x})}{\partial y}\right)dA =$$

$$= \iint_D (7-3)\,dA = 4\iint_D dA = 4\cdot\pi\cdot 3^2 = 36\pi . \quad \square$$

π.χ. Αν $\underline{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\hat{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{j}$ δείξτε ότι

$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = 2\pi$ για κάθε απλό κλειστό μονοπάτι C

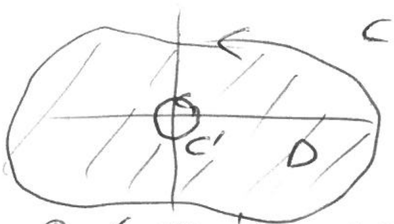
που περικλείει την αρχή των αξόνων.

Λύση: $$\frac{\partial\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + y\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial \frac{x}{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - x\frac{2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$

Συνεπώς το πεδίο $\underline{F}(x,y)$ είναι συντηρητικό σε κάθε περιοχή που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων, γιατί στο $(0,0)$ δεν ορίζεται το $\underline{F}(x,y)$.

(107)



Έστω τώρα η περιοχή D μεταξύ της καμπύλης C και ενός μικρού κύκλου C' γύρω από το O. Στην D από το Θ. Green έχουμε ~~το πεδίο είναι συντηρητικό~~

άρα $$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} - \oint_{C'} \underline{F}\cdot d\underline{r} \overset{\text{Green}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = 0 .$$

Άρα $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{C'} \underline{F}\cdot d\underline{r}$ για ένα οποιοδήποτε μικρό κύκλο C'.

Ας παραμετρίσουμε τώρα τον κύκλο ~~...~~ ακτίνας ε ως $r(t) = \varepsilon \cos t\, \hat{i} + \varepsilon \sin t\, \hat{j}$

$$\int_{C'} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}\cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{y}{x^2+y^2}(-\varepsilon \sin t) + \frac{x}{x^2+y^2}\varepsilon \cos t\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon^2 \sin^2 t}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 \cos^2 t}{\varepsilon^2}\right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi .$$

Άρα $I = \oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = 2\pi$ για κάθε απλή ~~...~~ κλειστή δεξιόστροφη καμπύλη C που περιέχει την αρχή των αξόνων.

Divergence και curl (απόκλιση και στροβιλισμός)

Έστω ένα διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x,y,z)$ στο $\mathbb{R}^3$ και έστω ότι $\underline{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\hat{i} + F_2(x,y,z)\hat{j} + F_3(x,y,z)\hat{k}$

Τότε έχουμε τον εξής ορισμό για την divergence του διανυσματικού πεδίου

Ορισμός (divergence): $\mathrm{div}(\underline{F}) = \underline{\nabla}\cdot\underline{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

και τον εξής ορισμό για τον στροβιλισμό (curl) του διανυσματικού πεδίου

Ορισμός (curl): $\mathrm{curl}(\underline{F}) = \underline{\nabla}\times\underline{F} =$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}.$$

π.χ. Υπολογίστε την divergence και την curl του διανυσματικού πεδίου $\underline{F}(x,y,z) = xz\hat{i} + xyz\hat{j} - y^2\hat{k}$

Λύση: $\underline{\nabla}\cdot\underline{F} = \dfrac{\partial(xz)}{\partial x} + \dfrac{\partial(xyz)}{\partial y} + \dfrac{\partial(-y^2)}{\partial z} = z + xz$

$$\underline{\nabla}\times\underline{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(xz\hat{i} + xyz\hat{j} - y^2\hat{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial(xyz)}{\partial x}\hat{k} + \frac{\partial y^2}{\partial x}\hat{j} - \frac{\partial(xz)}{\partial y}\hat{k} - \frac{\partial y^2}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial(xz)}{\partial z}\hat{j} - \frac{\partial(xyz)}{\partial z}\hat{i} =$$

$$= yz\hat{k} - 2y\hat{i} + x\hat{j} - xy\hat{i} = (-2y - xy)\hat{i} + x\hat{j} + yz\hat{k}$$

$\square$

<u>Πρόταση</u>: Αν $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ έχει συνεχείς δεύτερες παραγώγους, τότε $\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} f = 0$.

<u>Απόδειξη</u>: $$\underline{\nabla}\times\underline{\nabla} f = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)\hat{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\hat{k} = 0$$

από το θεώρημα μικτών παραγώγων. □

<u>Πρόταση</u>: Αν $\underline{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ έχει συνεχείς δεύτερες παραγώγους τότε $\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times\underline{F}) = 0$

<u>Απόδειξη</u>: $$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\times F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y\partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial y\partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial z\partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\partial y}} = 0$$

από θεώρημα μικτών παραγώγων. □

<u>Συντηρητικά πεδία στις 3D</u>: Στις 2D είχαμε ένα πολύ βοηθικό κριτήριο για το αν ένα πεδίο $\underline{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j}$ είναι συντηρητικό. Αυτό έλεγε ότι αν το χωρίο στο οποίο θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}$ δεν έχει τρύπες και

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} = 0$$ τότε το πεδίο $\underline{F}$ είναι συντηρητικό, δηλαδή υπάρχει δυναμικό $V(x,y)$ με $\underline{F} = \underline{\nabla} V$.

- Στις 3D το αντίστοιχο θεώρημα λέει ότι αν το $\underline{F}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και $\underline{\nabla}\times\underline{F} = 0$ τότε υπάρχει δυναμικό $V(x,y,z)$ με $\underline{F} = \underline{\nabla} V$ αρκεί το χωρίο στο οποίο θεωρούμε το $\underline{F}$ να μην έχει τρύπες. Άρα σε αυτή την περίπτωση το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό.

π.χ. Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}(x,y,z)=y^2z^3\hat{i}+2xyz^3\hat{j}+3xy^2z^2\hat{k}$ είναι συντηρητικό. Βρείτε μια συνάρτηση $V(x,y,z)$ έτσι ώστε $\underline{F}(x,y,z)=\nabla V(x,y,z)$

<u>Λύση</u>: $$\underline{\nabla}\times\underline{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(y^2z^3\hat{i}+2xyz^3\hat{j}+3xy^2z^2\hat{k}\right)=$$

$$=\cancel{2yz^3\hat{k}}-\cancel{3y^2z^2\hat{j}}-\cancel{2yz^3\hat{k}}+6xyz^2\hat{i}+\cancel{3y^2z^2\hat{j}}-6xyz^2\hat{i}=0$$

Το διανυσματικό πεδίο ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}^3$ συνεπώς το χωρίο δεν έχει τρύπες. Άρα το διανυσματικό πεδίο είναι συντηρητικό.

- Η συνάρτηση δυναμικού $V(x,y,z)$ πρέπει να ικανοποιεί ότι

$$\frac{\partial V}{\partial x}=y^2z^3 \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=2xyz^3 \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=3xy^2z^2 \quad (3)$$

$(1)\Rightarrow V(x,y,z)=xy^2z^3+C(y,z)$

$(2)\Rightarrow 2xyz^3+\dfrac{\partial C(y,z)}{\partial y}=2xyz^3\Rightarrow C(y,z)=C(z)$

$(3)\Rightarrow 3xy^2z^2+C'(z)=3xy^2z^2\Rightarrow C(z)=C$

Άρα $V(x,y,z)=xy^2z^3+C$. Επιλέγοντας το C να είναι ίσο με 0 παίρνουμε

$$\boxed{V(x,y,z)=xy^2z^3}$$

Για αυτό το δυναμικό έχουμε $\underline{F}(x,y,z)=\underline{\nabla}V(x,y,z)$, και άρα το πεδίο μας είναι συντηρητικό από τον ορισμό.

□

Επιφανειακά ολοκληρώματα συναρτήσεων

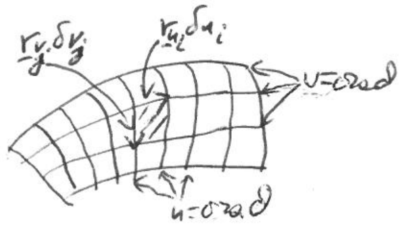
Ορισμός: $$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{ij} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

όπου έχουμε διαμερίσει την επιφάνεια S σε κομμάτια ΔS_{ij} το μέγιστο εμβαδόν των οποίων τείνει στο 0 $(\|P\|\to 0)$. Το P_{ij}^* είναι κάποιο σημείο, δεν έχει σημασία ποιό, στο ΔS_{ij}.

Λήμμα: Αν η ομαλή παραμετρική επιφάνεια $\underline{r}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)\hat{k}$ καλύπτεται μια μόνο φορά όταν τα (u,v) διατρέχουν την περιοχή D, τότε

$$I = \iint_S f(\underline{r})\,dS = \iint_D f(\underline{r})\,|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,dA$$

όπου $\underline{r}_u = \dfrac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial u}$ και $\underline{r}_v = \dfrac{\partial \underline{r}(u,v)}{\partial v}$ είναι εφαπτόμενα διανύσματα στην επιφάνεια εφαπτομενικά στις καμπύλες $v=$ και $u=$σταθ.



Απόδειξη: Τα διαστήματα $\delta u_i, \delta v_j$ διαμερίζουν την επιφάνεια σε στοιχειώδη καμπυλόγραμμα παραλληλόγραμμα που έχουν επιφάνεια

$$\delta S_{ij} = |\underline{r}_{u_i}\delta u_i \times \underline{r}_{v_j}\delta v_j| = |\underline{r}_{u_i}\times \underline{r}_{v_j}|\,\delta A_{ij} \quad \text{όπου } \delta A_{ij} = \delta u_i\,\delta v_j$$

Συνεπώς $dS = |\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,dA$ και ολοκληρώνοντας σε όλες τις τιμές των παραμέτρων u,v που χρειάζονται για να διατρέξουμε την επιφάνεια S μια φορά παίρνουμε

$$I = \iint_S f(\underline{r})\,dS = \iint_D f(\underline{r})\,|\underline{r}_u \times \underline{r}_v|\,dA \qquad \square$$

Πρόταση: Αν η επιφάνεια S δίνεται από την εξίσωση $z = g(x,y)$ για τιμές των (x,y) που ανήκουν στο χωρίο D, τότε

$$I = \iint_S f(\underline{r})\, dS = \iint_D f(\underline{r}) \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Απόδειξη: Μπορούμε εδώ να πάρουμε σαν παραμέτρους τα x, y, συνεπώς $\underline{r}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + g(x,y)\hat{k}$.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\hat{k} = \hat{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\hat{k}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \hat{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{k} = \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{k}$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}\right| = \left|\left(\hat{i} + \frac{\partial z}{\partial x}\hat{k}\right) \times \left(\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{k}\right)\right| =$$

$$= \left|\hat{k} - \frac{\partial z}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial z}{\partial x}\hat{i}\right| = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

Άρα $\displaystyle I = \iint_S f(\underline{r})\, dS \overset{\text{Λήμμα}}{=} \iint_D f(\underline{r}) \left|\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y}\right| dA =$

$$= \iint_D f(\underline{r}) \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

π.χ. Υπολογίστε την επιφάνεια του παραβολοειδούς $z = x^2+y^2$ που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z = 9$.

Λύση: Οι τιμές των (x,y) που προβάλλονται πάνω στο παραβολοειδές $z = x^2+y^2$ κάτω από το επίπεδο $z=9$, είναι η "σκιά" D του παραβολοειδούς στο επίπεδο xy και δίνεται από την ανίσωση $x^2+y^2 \le 9$. Έχουμε τώρα

$$S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dA$$

Πηγαίνοντας τώρα σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^3 (1+4r^2)^{1/2} \frac{d(1+4r^2)}{8} = \frac{\pi}{4} \left.\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{3/2}\right|_0^3 = \frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$$

□

Επιφανειακά ολοκληρώματα διανυσματικών πεδίων – ροές

Ορισμός
Αν το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}$ ορίζεται στην προσανατολισμένη (oriented) επιφάνεια S, με κάθετο διάνυσμα $\hat{n}$ τότε

$$I=\iint_S \underline{F}\cdot d\underline{S} = \iint_S \underline{F}\cdot\hat{n}\, dS$$

είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου στην επιφάνεια S, ή αλλιώς η ροή του διανυσματικού πεδίου $\underline{F}$ από την oriented επιφάνεια S.

π.χ. Βρείτε την ροή του διανυσματικού πεδίου $\underline{F}(x,y,z)=z\hat{i}+y\hat{j}+x\hat{k}$ έξω από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$

Λύση: Επειδή έχουμε σφαιρική γεωμετρία, το λογικό είναι να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ,θ,ϕ)

Το διάνυσμα θέσης της σφαίρας είναι

$\underline{r}(\theta,\phi)=\sin\theta\cos\phi\,\hat{i}+\sin\theta\sin\phi\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{k}$

ενώ το διανυσματικό πεδίο $\underline{F}$ πάνω στην σφαίρα είναι

$\underline{F}(\theta,\phi)=\cos\theta\,\hat{i}+\sin\theta\sin\phi\,\hat{j}+\sin\theta\cos\phi\,\hat{k}$

Το μοναδιαίο διάνυσμα έξω από την σφαίρα είναι ίδιο με το $\underline{r}(\theta,\phi)$ έχουμε δηλαδή

$\hat{n}=\underline{r}(\theta,\phi)=\sin\theta\cos\phi\,\hat{i}+\sin\theta\sin\phi\,\hat{j}+\cos\theta\,\hat{k}$

$\underline{F}\cdot\hat{n}=\sin\theta\cos\theta\cos\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\sin\theta\cos\theta\cos\phi$

$|r_\theta\times r_\phi| = |(\cos\theta\cos\phi\,\hat{i}+\cos\theta\sin\phi\,\hat{j}-\sin\theta\,\hat{k})\times(-\sin\theta\sin\phi\,\hat{i}+\sin\theta\cos\phi\,\hat{j})|=$

$=|\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\,\hat{k}+\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\,\hat{k}+\sin^2\theta\sin\phi\,\hat{j}+\sin^2\theta\cos\phi\,\hat{i}|=$

$=|\sin^2\theta\cos\phi\,\hat{i}+\sin^2\theta\sin\phi\,\hat{j}+\sin\theta\cos\theta\,\hat{k}|=$

$=\sqrt{\sin^4\theta\cos^2\phi+\sin^4\theta\sin^2\phi+\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{\sin^4\theta+\sin^2\theta\cos^2\theta}=$

$=\sqrt{\sin^2\theta}=|\sin\theta|=\sin\theta$ γιατί σε σφαιρικές συντεταγμένες $0\le\theta<\pi$.

Άρα η ροή Φ έξω από την σφαίρα είναι

$$\Phi = \iint_S \underline{F}\cdot \underline{dS} = \iint_S \underline{F}\cdot \hat{n}\, dS = \iint_D \underline{F}\cdot\hat{n}\, |\underline{r_\theta}\times\underline{r_\phi}|\, dA =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underline{F}\cdot\hat{n}\, |\underline{r_\theta}\times\underline{r_\phi}|\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin\theta\cos\theta\cos\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \sin\theta\cos\theta\cos\phi)\cdot\sin\theta\, d\theta\, d\phi =$$

$$= \cancel{\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta} + \int_0^{2\pi}\sin^2\phi d\phi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta \; +$$

$$+ \int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi\int_0^{\pi}\sin^2\theta \quad = 0 + \frac{1}{2}2\pi\cdot\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta + 0 =$$

$$= -\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta = -\pi\cos\theta\Big|_0^{\pi} + \pi\,\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi} = \pi+\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \square$$

<u>Παρατήρηση</u>: Το διάνυσμα $\underline{r_\theta}\times\underline{r_\phi}$ έχει την διεύθυνση $\hat{n}$. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι

$$\Phi = \iint_D \underline{F}\cdot\hat{n}\,|\underline{r_\theta}\times\underline{r_\phi}|\, dA = \iint_D \underline{F}\cdot(\underline{r_\theta}\times\underline{r_\phi})\, dA .$$

Αυτό ισχύει γενικά για παραμετρικές επιφάνειες, άρα

$$\Phi = \iint_S \underline{F}\cdot\underline{dS} = \iint_D \underline{F}\cdot(\underline{r_u}\times\underline{r_v})\, dA$$

Θεώρημα Stokes και Θεώρημα Divergence

<u>Θεώρημα Stokes</u>: Αν S είναι μια προσανατολισμένη ομαλή κατά κομμάτια επιφάνεια που έχει σαν σύνορο μια απλή, κλειστή κατά κομμάτια ομαλή καμπύλη C με θετικό προσανατολισμό, και αν $\underline{F}(\underline{r})$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο του οποίου οι συντεταγμένες έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε μια ανοικτή περιοχή που περιέχει την επιφάνεια S, τότε

$$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \iint_S \underline{\nabla}\times\underline{F}\cdot dS$$

<u>Απόδειξη για επιφάνειες $z=g(x,y)$</u>: Έστω $\underline{F} = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}$.

Τότε $\nabla\times\underline{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$

και $\underline{r}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} + g(x,y)\hat{k} \Rightarrow$

$\underline{r}_x(x,y) = \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\hat{k}$, $\underline{r}_y = \hat{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{k}$ άρα

$\underline{r}_x \times \underline{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\hat{j} + \hat{k}$. Άρα

- $I_1 = \iint_S \underline{\nabla}\times\underline{F}\cdot d\underline{S} = \iint_D (\underline{\nabla}\times\underline{F})\cdot(\underline{r}_x\times\underline{r}_y)\, dA =$

$$= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial x} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dA$$

Έστω τώρα μια παραμέτρηση $\underline{r}(t)$ της καμπύλης C, $a\leq t\leq b$. Τότε

- $I_2 = \oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_a^b \underline{F}\cdot\frac{d\underline{r}}{dt}\,dt = \int_a^b\left(F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\frac{dz}{dt}\right)dt$

Αλλά $z = z(x,y)$ άρα

$$I_2 = \int_a^b\left[F_1\frac{dx}{dt} + F_2\frac{dy}{dt} + F_3\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right]dt =$$

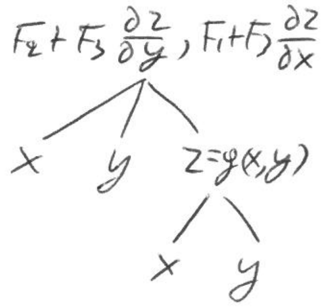
$$= \int_a^b\left[\left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right]dt = \int_a^b\left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$$

Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα Green στο επίπεδο παίρνουμε

$$I_2 = \iint_D \left[\left.\frac{\partial\left(F_2+F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}\right|_{y=\sigma\tau\alpha\theta} - \left.\frac{\partial\left(F_1+F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right|_{x=\sigma\tau\alpha\theta} \right] dA$$

D είναι το εσωτερικό της σκιάς της καμπύλης C στο επίπεδο xy.

Εδώ υπάρχει ένα θέμα που θέλει προσοχή. Στην εφαρμογή του θεωρήματος Green, έχουμε μόνο δύο μεταβλητές, τις x,y, και όχι τις x,y,z που είχαμε νωρίτερα. Άρα για να πάρουμε τις προηγούμενες μερικές παραγώγους πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα της αλυσίδας με εξάρτηση



Άρα $$\left.\frac{\partial\left(F_2+F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}\right|_{y=\sigma\tau\alpha\theta} = \frac{\partial\left(F_2+F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(F_2+F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial\left(F_1+F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}\right|_{x=\sigma\tau\alpha\theta} = \frac{\partial\left(F_1+F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(F_1+F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$I_2 = \iint_D \left[\frac{\partial\left(F_2+F_3\frac{\partial g}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(F_2+F_3\frac{\partial g}{\partial y}\right)}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial\left(F_1+F_3\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(F_1+F_3\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} \right] dA =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \cancel{F_3\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} - \cancel{F_3\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}} \right] dA =$$

$$= \iint_D \left[\left(-\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \left(-\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \right] dA$$

Άρα $I_1 = I_2$ και το θεώρημα Stokes ισχύει $\square$.

π.χ. Υπολογίστε το $\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r}$ όπου $\underline{F}(x,y,z) = -y^2\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k}$ και C είναι η καμπύλη τομής του επιπέδου $y+z=2$ και του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$. Η φορά της C είναι θετική.

<u>Λύση</u>: $I = \oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \iint_S \underline{\nabla}\times\underline{F}\cdot d\underline{S}$

$$\underline{\nabla}\times\underline{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(-y^2\hat{i} + x\hat{j} + z^2\hat{k}\right) =$$

$$= \hat{k} + 2y\hat{k} = (1+2y)\hat{k}$$

Η επιφάνεια S είναι κάποια επιφάνεια με σύνορο την καμπύλη C. Μπορούμε να την πάρουμε να είναι πάνω στο επίπεδο $y+z=2$.

$$I = \iint_S (1+2y)\,\hat{k}\cdot d\underline{S}$$

Επειδή η προβολή του S στο xy επίπεδο είναι ο δίσκος $D=\{x^2+y^2\le 1\}$ και το $\hat{k}\cdot d\underline{S}$ παίρνει προβολή της στοιχειώδους επιφάνειας δS στο D έχουμε ότι $I = \iint_D (1+2y)\,dA$.

Σε πολικές συντεταγμένες,

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}(r+2r^2\sin\theta)\,d\theta\,dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} r\,d\theta\,dr =$$

$$= 2\pi\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 = \pi. \quad \square$$

Θεώρημα Divergence: Αν E είναι μια απλή χωροδιάστατη περιοχή της οποίας το σύνορο S έχει θετική (προς τα έξω) διεύθυνση. Έστω F ένα διανυσματικό πεδίο με συνιστώσες που έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους σε μια ανοικτή περιοχή που περιέχει το E. Τότε

$$\oiint_S \underline{F} \cdot d\underline{S} = \iiint_E \underline{\nabla} \cdot \underline{F} \, dV$$

Απόδειξη: Έστω ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο

$$R = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f\}$$

Αν $\underline{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ τότε

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$\iiint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \int_e^f \int_c^d \int_a^b \frac{\partial F_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz + \int_e^f \int_a^b \int_c^d \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dy \, dx \, dz +$$

$$+ \int_c^d \int_a^b \int_e^f \frac{\partial F_3}{\partial z} \, dz \, dx \, dy =$$

$$= \int_e^f \int_c^d (F_1(b,y,z) - F_1(a,y,z)) \, dy \, dz +$$

$$+ \int_e^f \int_a^b (F_2(x,d,z) - F_2(x,c,z)) \, dx \, dz +$$

$$+ \int_c^d \int_a^b (F_3(x,y,f) - F_3(x,y,e) \, dx \, dy =$$

$$= \int_e^f \int_c^d \underline{F}(b,y,z) \cdot \hat{i} \, dy \, dz - \int_e^f \int_c^d \underline{F}(a,y,z) \cdot \hat{i} \, dy \, dz +$$

$$+ \int_e^f \int_a^b \underline{F}(x,d,z) \cdot \hat{j} \, dx \, dz - \int_e^f \int_a^b \underline{F}(x,c,z) \cdot \hat{j} \, dx \, dz +$$

$$+ \int_c^d \int_a^b \underline{F}(x,y,f) \cdot \hat{k} \, dx \, dy - \int_c^d \int_a^b \underline{F}(x,y,e) \cdot \hat{j} \, dx \, dy =$$

$= \oiint \underline{F} \cdot d\underline{S}$ γιατί απλά αθροίζουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε όλες τις πλευρές του παραλληλεπιπέδου.

Η υπόλοιπη απόδειξη βασίζεται στον χωρισμό της οποιασδήποτε περιοχής E σε παραλληλεπίπεδα τα οποία ορίζονται την κατάσταση. $\square$

π.χ. Βρείτε την ροή του πεδίου $\underline{F}(x,y,z) = z\hat{i} + y\hat{j} + x\hat{k}$ έξω από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$

Λύση: Από Θ. divergence, η ροή ϕ είναι

$$\phi = \oiint_S \underline{F} \cdot \underline{dS} = \iiint_B \underline{\nabla} \cdot \underline{F} \, dV$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{F} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z} = 1 . \quad \text{Άρα}$$

$$\phi = \oiint_S \underline{F} \cdot \underline{dS} = \iiint_B dV$$

Εδώ S είναι η επιφάνεια της σφαίρας και B η σφαίρα με το εσωτερικό της.

Συνεπώς ϕ = όγκος της μοναδιαίας σφαίρας $= \frac{4\pi}{3}$. $\square$