



# Autonomous Robotic Vehicles

Hellenic Mediterranean University

## Lecture 3

Dr. Alina Eqtami

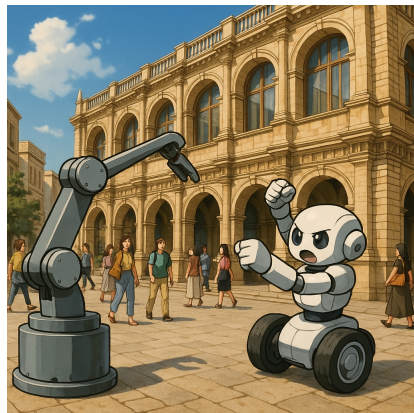
# Lecture Goals - Στόχοι σημερινού μαθήματος!

## Μετά το σημερινό μάθημα θα μπορείτε:

- Να διακρίνετε τη διαφορά μεταξύ manipulator arms και κινητών ρομπότ.
- Να εξηγείτε τους **μη-ολονομικούς περιορισμούς** και πώς αυτοί επηρεάζουν την κίνηση.
- Να εφαρμόζετε forward and inverse kinematics σε κινητά ρομπότ.
- Να αναγνωρίζετε διαφορετικές διατάξεις τροχών και τους κινηματικούς τους περιορισμούς.

# Manipulator vs Mobile Robot

- **Manipulator Arms:** Σταθερά στη βάση, αρθρωτή κινηματική αλυσίδα.
- **Mobile Robots:** Κινούνται ελεύθερα στο περιβάλλον.
- No direct (instantaneous) position measurement → η θέση υπολογίζεται με ολοκλήρωση στο χρόνο.
- Εξαρτάται από την τροχιά που ακολουθήθηκε → σφάλματα εκτίμησης θέσης.



- **Holonomic constraints** είναι **γεωμετρικοί περιορισμοί** που περιγράφουν **πού μπορεί να βρίσκεται** το ρομπότ λόγω της μηχανικής του κατασκευής.
- Εκφράζονται ως **αλγεβρικές εξισώσεις θέσης** της μορφής:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$$

όπου  $q_i$  οι generalized coordinates.

- Ο χρόνος  $t$ , παίζει ρόλο αν οι περιορισμοί είναι δυναμικοί.
- Με λίγα λόγια οι ολονομικοί περιορισμοί εκφράζονται ως αλγεβρικές εξισώσεις θέσης και δεν εξαρτώνται από ταχύτητες.

# Holonomic Constraints - Ολονομικοί Περιορισμοί -2

- Παράδειγμα: Αν ένα σημείο είναι δεμένο σε σχοινί μήκους  $L$ , η θέση του  $(x, y)$  ικανοποιεί:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - L^2 = 0$$

δηλ. κινείται πάνω σε κύκλο ακτίνας  $L$ .

- Οι ολονομικοί περιορισμοί δεν περιορίζουν πάντα το σύστημα σε μια καμπύλη (1 διάσταση), αλλά σε γενικότερες γεωμετρικές πολλαπλότητες, όπως επιφάνειες ή και υψηλότερες διαστάσεις.

## Ανεξάρτητες Συντεταγμένες και Πολλαπλότητες

Αν έχουμε  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ , με  $n$  τις γενικευμένες συντεταγμένες και  $k$  τους ανεξάρτητους ολονομικούς περιορισμούς, δηλ.  $f_i(\mathbf{q}) = 0$ , με  $i = 1, \dots, k$ , τότε το σύστημα κινείται πάνω σε μια πολλαπλότητα διάστασης  $n - k$ , με  $n - k$  τις ανεξάρτητες συντεταγμένες.

- Παράδειγμα: Αν  $n = 3$ ,  $k = 1$ , τότε κινείται σε επιφάνεια μέσα σε 3-διάστατο χώρο.

# Holonomic Constraints - Ολονομικοί Περιορισμοί -3

- Έστω επίπεδος ρομποτικός βραχίονας με 2 συνδέσμους (μήκη  $l_1, l_2$ ) και γωνίες αρθρώσεων  $\theta_1, \theta_2$ .
- Η θέση του άκρου  $(x, y)$  δίνεται από:

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

- Οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν τη σχέση μεταξύ  $(x, y)$  και των  $(\theta_1, \theta_2)$ . Αντίστροφα, μπορούμε να τις δούμε σαν **\*\*ολονομικούς περιορισμούς\*\*** στη θέση του άκρου:

$$f(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0$$

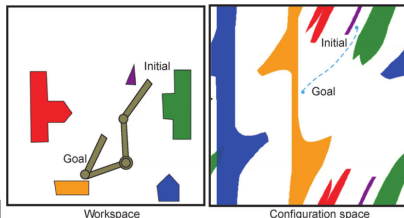
- Η εξίσωση αυτή περιγράφει μια **επιφάνεια** στο χώρο διαμορφώσεων (configuration space) όπου επιτρέπεται να κινηθεί το ρομπότ.

# Configuration Space vs Workspace

- **Configuration space (C-space):**

The set of all possible joint configurations  $(\theta_1, \theta_2)$ . For a 2-link planar manipulator  $\rightarrow$  2D surface.

- **Workspace:** The set of all reachable positions  $(x, y)$  of the end-effector. Typically a ring-shaped region determined by link lengths.



Χώρος εργασίας και χώρος διαμορφώσεων.

\*Image source: ResearchGate.

- A single point in **C-space** corresponds to a unique robot shape, and maps to a point in **workspace**.

- **Non-holonomic constraints** είναι **μη ολοκληρώσιμοι κινηματικοί περιορισμοί**, που περιορίζουν τις **επιτρεπτές ταχύτητες**, όχι άμεσα τις θέσεις.
- Συνήθως έχουν τη μορφή:

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{q}, t) \dot{q}_i + a_0(\mathbf{q}, t) = 0$$

δηλαδή **διαφορικές σχέσεις** μεταξύ ταχυτήτων.

- Δεν μπορούν να γραφτούν σαν αλγεβρικές εξισώσεις θέσης της μορφής  $f(\mathbf{q}, t) = 0$ .
- Περιγράφουν κινηματικούς περιορισμούς που **δεν ενσωματώνονται** σε γεωμετρικές εξισώσεις θέσης.

- Παράδειγμα: **τροχός που κυλά χωρίς ολίσθηση.**
- Θεωρούμε ένα τροχοφόρο με θέση  $(x, y)$  και προσανατολισμό  $\theta$  ως προς τον άξονα  $x$ .
- Το **διανυσμα κατεύθυνσης** του τροχού:  $\mathbf{t} = [\cos \theta, \sin \theta]^T$
- Η **πλάγια διεύθυνση** (κάθετη στον τροχό):  $\mathbf{n} = [-\sin \theta, \cos \theta]^T$
- Η ταχύτητα του τροχού στο επίπεδο είναι:  $\mathbf{v} = [\dot{x}, \dot{y}]^T$ .

## Κύρια Ιδέα

**Χωρίς πλευρική ολίσθηση**, σημαίνει οτι η ταχύτητα δεν έχει συνιστώσα στην πλάγια διεύθυνση:

$$\mathbf{n}^T \mathbf{v} = 0$$

- Απο το  $\mathbf{n}^\top \mathbf{v} = 0$  προκύπτει:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0$$

- Ο τροχός δεν μπορεί να κινηθεί πλευρικά — η ταχύτητα πρέπει να είναι ευθυγραμμισμένη με τον άξονα του.
- Η παραπάνω εξίσωση είναι **μη ολοκληρώσιμη**  $\rightarrow$  δεν υπάρχει αντίστοιχη αλγεβρική  $f(x, y, \theta) = 0$  που να περιγράφει όλες τις επιτρεπτές θέσεις.

## Ουσιαστική Διαφορά

Ολονομικός: Περιορισμός σε **γεωμετρία θέσης**. Μη ολονομικός: Περιορισμός σε **ταχύτητες**  $\rightarrow$  διαφορικός, όχι ολοκληρώσιμος.

- Ένα **μη ολονομικό σύστημα** δεν περιορίζεται σε μια σταθερή πολλαπλότητα  $f(\mathbf{q}) = 0$ .
- Οι μη ολονομικοί περιορισμοί **περιορίζουν τις κατευθύνσεις κίνησης** στο χώρο διαμορφώσεων.
- Τυπικά οδηγούν σε **underactuated** με μη-αντιστρέψιμες κινηματικές σχέσεις.

## Διατύπωση σε Πίνακες

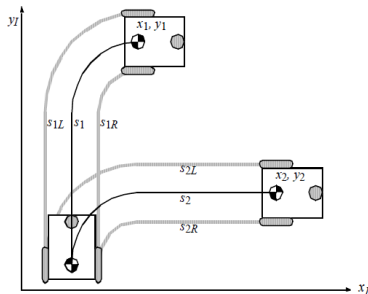
Αν έχουμε  $n$  γενικευμένες συντεταγμένες και  $m$  μη ολονομικούς περιορισμούς:

$$A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{D}(\mathbf{q}) \subset \mathbb{R}^n$$

όπου  $\mathcal{D}(\mathbf{q})$  η **κατανομή επιτρεπτών ταχυτήτων**.

# Non-Holonomic Systems – Μη Ολονομικά Συστήματα

- Οι διαφορικές εξισώσεις δεν ολοκληρώνονται άμεσα για να προκύψει η τελική θέση.
- Η μέτρηση της απόστασης που διήνυσε κάθε τροχός δεν αρκεί για τον υπολογισμό της τελικής θέσης του ρομπότ· πρέπει επίσης να είναι γνωστός **ο τρόπος με τον οποίο εκτελέστηκε η κίνηση ως συνάρτηση του χρόνου**.
- $s_1 = s_2$ ,  $s_{1R} = s_{2R}$ ,  $s_{1L} = s_{2L}$  αλλά  $x_1 \neq x_2$ , και  $y_1 \neq y_2$ .



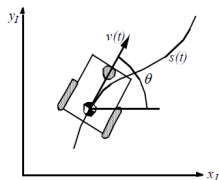
Autonomous Mobile Robots, our textbook.

## • Forward kinematics

- Μετασχηματισμός από τον χώρο αρθρώσεων στον φυσικό χώρο (θέσεις/προσανατολισμοί):

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f_{frw}(\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n, \beta_1, \dots, \beta_m, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_m)$$

όπου  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$  είναι η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχα.  $\phi, \beta$  είναι οι ταχύτητες των κινητήριων τροχών και οι γωνίες των κατευθυντήριων τροχών, αντίστοιχα.



Autonomous Mobile Robots,  
our textbook.

## • Inverse kinematics

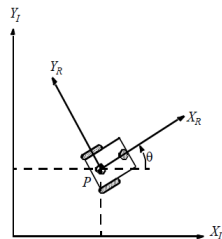
- Μετασχηματισμός από τον φυσικό χώρο στον χώρο αρθρώσεων:

$$[\dot{\phi}_1, \dots, \dot{\phi}_n, \beta_1, \dots, \beta_m, \dot{\beta}_1, \dots, \dot{\beta}_m]^T = f_{in}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$$

# Kinematics – Κινηματική: Εισαγωγή 2

- Έστω δύο συστήματα αξόνων στο επίπεδο:
  - **Αρχικό σύστημα:**  $\{X_I, Y_I\}$  (παγκόσμιο)
  - **Σύστημα ρομπότ:**  $\{X_R, Y_R\}$  (προσαρμοσμένο στο σώμα)
- **Robot pose** στο αρχικό σύστημα:  
 $\xi_I = [x \quad y \quad \theta]^\top$
- Η σχέση μεταξύ ταχυτήτων στα δύο συστήματα δίνεται από:

$$\dot{\xi}_R = R(\theta) \dot{\xi}_I \quad \text{or} \quad \dot{\xi}_I = R^\top(\theta) \dot{\xi}_R$$



Autonomous Mobile Robots,  
our textbook.

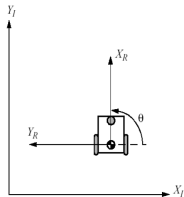
## Rotation Matrix

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Παράδειγμα:** Ρομπότ προσανατολισμένο στον  $Y_I$ -άξονα

- Όταν το ρομπότ είναι στραμμένο προς τον  $Y_I$  άξονα  
 $\rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
- Ο πίνακας μετασχηματισμού θέσης/ταχύτητας γίνεται:

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sin \frac{\pi}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Autonomous Mobile

Robots, our textbook.

- Άρα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_I \\ -\dot{x}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή:  $\dot{x}_R = \dot{y}_I$ ,  $\dot{y}_R = -\dot{x}_I \rightarrow$  το τοπικό πλαίσιο είναι στραμμένο κατά  $90^\circ$ .

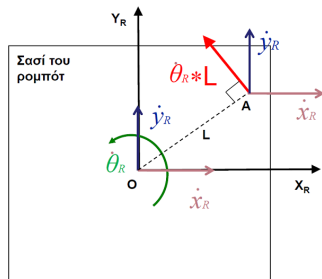
## Κίνηση επί επιπέδου → Planar motion assumptions

- **Επαφή τροχού με επίπεδο** (Point contact): Το σημείο επαφής θεωρείται σημειακό δηλαδή όχι επιφάνεια.
- **Μη παραμορφώσιμοι τροχοί** (Rigid wheels): Οι τροχοί δεν παραμορφώνονται κατά την κύλιση.
- **«Καθαρή» κύλιση** (Pure rolling): Η σχετική ταχύτητα στο σημείο επαφής είναι μηδενική:  $\mathbf{v}_C = 0$ .  
όπου  $C$  το σημείο επαφής τροχού–εδάφους.
- **Χωρίς πλαγιο-ολίσθηση** (No lateral slip): Η ταχύτητα κάθετα στο επίπεδο κύλισης είναι μηδενική.
- **Άξονας περιστροφής κάθετος στο επίπεδο κίνησης** (Wheel axis vertical to motion plane)
- **Στερεό σώμα** (Rigid chassis): Το σώμα (σασί) του ρομπότ θεωρείται στερεό.

# Velocity of a Rigid Body – Ταχύτητα στερεού σώματος -1

- Έστω ένα στερεό σώμα που κινείται επί επιπέδου.
- Οι **γραμμικές ταχύτητες** του σημείου αναφοράς  $O$  είναι:  $\dot{x}_R$ ,  $\dot{y}_R$ .
- Η **γωνιακή ταχύτητα** γύρω από τον κάθετο άξονα είναι:  $\dot{\theta}_R$ .
- Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο  $A(x_A, y_A)$  του σώματος, με διανυσματική θέση:

$$\mathbf{r}_{A/O} = \begin{bmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{bmatrix}$$



Σημείο  $A$  σε στερεό σώμα με αναφορά το  $O$ .

# Velocity of a Rigid Body – Ταχύτητα στερεού σώματος -2

**Στόχος:** Να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός **τυχαίου σημείου A** πάνω στο σώμα.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O}$$

- Για επίπεδη κίνηση:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

- Άρα:

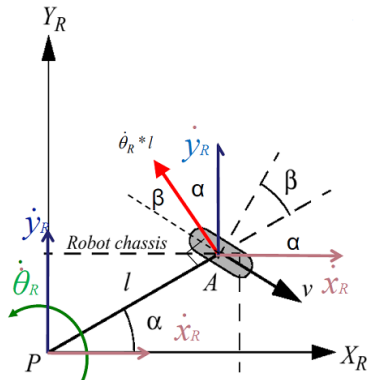
$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \end{bmatrix} + \dot{\theta}_R \begin{bmatrix} -(y_A - y_O) \\ x_A - x_O \end{bmatrix}$$

- Linear velocity = Translational + Rotational component

# Kinematic Constraints Imposed by Wheels – Κινηματικοί περιορισμοί από τροχούς -1

Τυπικός κινητήριος τροχός στο σώμα του ρομπότ.

- Θεωρούμε το **σημείο A** όπου ο τροχός είναι στερεωμένος στο σασί.
- Το **διάνυσμα ταχύτητας του σημείου A** πρέπει να έχει **την ίδια διεύθυνση με τον τροχό**, γιατί: No lateral slip  
δηλ. **δεν υπάρχει πλαγιοολίσθηση**.
- Αν  $\alpha$  είναι ο προσανατολισμός του σώματος και  $\beta$  η διεύθυνση του τροχού ως προς το σώμα, τότε οι προβολές της ταχύτητας: - Κατά τη διεύθυνση του τροχού  $\rightarrow$  επιτρέπεται - Κάθετα στη διεύθυνση του τροχού  $\rightarrow$  **πρέπει να είναι 0**



Ταχύτητα σημείου A και διεύθυνση  
τροχού.

# Kinematic Constraints Imposed by Wheels –

## Κινηματικοί περιορισμοί από τροχούς -2

- Οι **προβολές της ταχύτητας** του σημείου A κατά μήκος και κάθετα στη διεύθυνση του τροχού δίνουν:

$$\dot{x}_R \cos(\alpha + \beta) + \dot{y}_R \sin(\alpha + \beta) + \dot{\theta}_R l \sin(\beta) = 0$$

$$\dot{x}_R \sin(\alpha + \beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha + \beta) - \dot{\theta}_R l \cos(\beta) = r \dot{\phi}$$

- $\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R$ : ταχύτητες του σώματος (στο πλαίσιο P)
  - $l$ : απόσταση σημείου A από το κέντρο αναφοράς
  - $\beta$ : γωνία τροχού ως προς τον διαμήκη άξονα του σώματος
  - $r$ : ακτίνα τροχού,  $\dot{\phi}$ : γωνιακή ταχύτητα τροχού
- Οι παραπάνω σχέσεις είναι οι **κινηματικοί περιορισμοί που επιβάλλει ο τροχός** στην κίνηση του ρομπότ.
  - Αν ο τροχός είναι **κατευθυντήριος (steered)**, η  $\beta$  γίνεται μεταβλητή  $\beta(t)$ , αλλά οι εξισώσεις διατηρούνται ίδιες.

# Example: Differential Drive Robot –

## Παράδειγμα: Διαφορικά οδηγούμενο ρομπότ -1

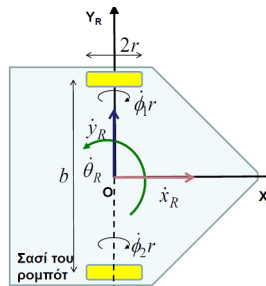
### • Δεδομένα:

- Απόσταση τροχών:  $b$
- Ακτίνα τροχών:  $r$
- Γωνιακές ταχύτητες τροχών:  $\dot{\phi}_1$  (δεξί),  $\dot{\phi}_2$  (αριστερό)

### • Αριστερός τροχός: $\alpha = 90^\circ$ , $\beta = 0^\circ$ , $l = \frac{b}{2}$

$$\dot{x}_R \cos(90^\circ) + \dot{y}_R \sin(90^\circ) + \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \sin 0^\circ = 0$$

$$\dot{x}_R \sin(90^\circ) - \dot{y}_R \cos(90^\circ) - \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \cos 0^\circ = r \dot{\phi}_2$$



Διαφορικά οδηγούμενο ρομπότ.

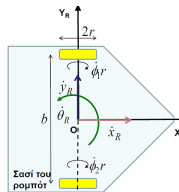
# Example: Differential Drive Robot –

## Παράδειγμα: Διαφορικά οδηγούμενο ρομπότ -2

- **Δεξιός τροχός:**  $\alpha = -90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$ ,  $l = \frac{b}{2}$

$$\dot{x}_R \cos(-90^\circ) + \dot{y}_R \sin(-90^\circ) + \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \sin 0^\circ = 0$$

$$\dot{x}_R \sin(-90^\circ) - \dot{y}_R \cos(-90^\circ) - \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \cos 0^\circ = r \dot{\phi}_1$$



### Κινηματικό Μοντέλο

$$\dot{x}_R = \frac{r}{2}(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)$$

$$\dot{y}_R = 0$$

$$\dot{\theta}_R = \frac{r}{b}(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

# Kinematic Constraints: Caster Wheel

Θεωρούμε ένα **caster** τροχό, ο οποίος:

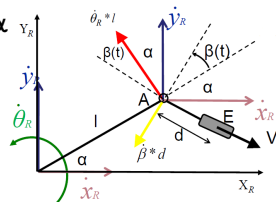
- Συνδέεται στο σώμα σε σημείο  $A$
- Έχει άξονα διεύθυνσης που σχηματίζει γωνία  $\beta(t)$  με τον διαμήκη άξονα
- Μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το  $A$  (π.χ. ελεύθερος τροχός στήριξης)
- Το διάνυσμα ταχύτητας του σημείου **περιστροφής  $A$ :**

- Έχει **μία συνιστώσα κατά τη διεύθυνση του τροχού** (όπως στον τυπικό τροχό)
- Και **μία συνιστώσα λόγω περιστροφής του τροχού περί το  $A$**

Οι προβολές της ταχύτητας δίνουν τους περιορισμούς:

$$\dot{x}_R \sin(\alpha + \beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha + \beta) - \dot{\theta}_R l \cos \beta = r \dot{\phi}$$

$$\dot{x}_R \cos(\alpha + \beta) + \dot{y}_R \sin(\alpha + \beta) + \dot{\theta}_R l \sin \beta = -d \dot{\beta}$$

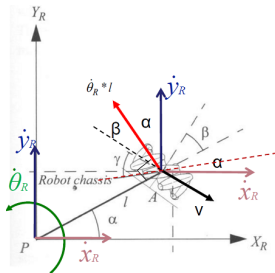


Κάστερ τροχός.

# Kinematic Constraints: Πανκατευθυντικός τροχός

Ο πανκατευθυντικός τροχός διαθέτει ρόλες τοποθετημένους υπό γωνία  $\gamma$  ως προς το βασικό επίπεδο του τροχού.

- Τα ρόλες επιτρέπουν κύλιση σε **οποιαδήποτε κατεύθυνση**, χωρίς πλαγιοολίσθηση, άρα:
  - Κατά τη διεύθυνση της γραμμής των ρόλες → **καμία συνιστώσα ταχύτητας δεν περιορίζεται**.
  - Κατά τη διεύθυνση του επιπέδου του τροχού → **υπάρχει περιορισμός**.
- Η ταχύτητα του σημείου A κατά τη διεύθυνση του επιπέδου του τροχού:



Πανκατευθυντικός τροχός με ρόλες υπό γωνία  $\gamma$ .

$$v_{\text{τροχού}} = r \dot{\phi} \cos \gamma$$

Από τις προβολές προκύπτει ο **μοναδικός κινηματικός περιορισμός**:

$$\dot{x}_R \sin(\alpha + \beta + \gamma) - \dot{y}_R \cos(\alpha + \beta + \gamma) - \dot{\theta}_R l \cos(\beta + \gamma) = r \dot{\phi} \cos \gamma$$

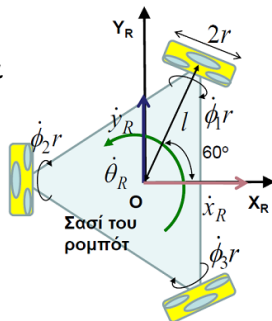
# Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τριών τροχών -1

Το ρομπότ διαθέτει 3 πανκατευθυντικούς τροχούς τοποθετημένους στις κορυφές **ισοπλεύρου τριγώνου**.

- Για όλους τους τροχούς:  $\gamma = 0^\circ$  (ρολλερς χωρίς κλίση).
- Απόσταση τροχών από το κέντρο:  $l$  — Ακτίνα τροχών:  $r$
- Οι τροχοί αριθμούνται 1-3 κυκλικά.

**Τροχός 1:**  $\alpha = 60^\circ, \beta = 0^\circ$

$$\dot{x}_R \sin(60^\circ) - \dot{y}_R \cos(60^\circ) - \dot{\theta}_R l \cos 0^\circ = r \dot{\phi}_1 \cos 0^\circ$$



Τρίτροχο πανκατευθυντικό  
ρομπότ σε ισόπλευρο τρίγωνο.

## Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τριών τροχών -2

**Τροχοί 2 και 3:** Παρόμοια με τον τροχό 1, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\dot{x}_R \sin(\alpha_i) - \dot{y}_R \cos(\alpha_i) - \dot{\theta}_R l \cos 0^\circ = r \dot{\phi}_i \quad (i = 2, 3)$$

(2), (3)

### Σχόλιο

Οι εξισώσεις (1)–(3) δείχνουν ότι το ρομπότ μπορεί να επιτύχει **οποιαδήποτε τριάδα ταχυτήτων**

$$(\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R)$$

στο επίπεδο, αρκεί να ρυθμιστούν κατάλληλα οι γωνιακές ταχύτητες  $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$ .

**Note:** This is what makes the 3-wheel omni platform **fully holonomic**.

# Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τεσσάρων τροχών -1

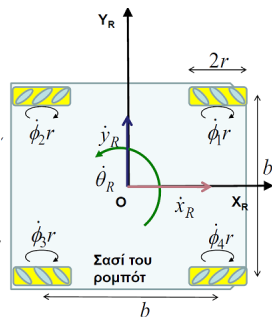
Το ρομπότ διαθέτει 4 πανκατευθυντικούς τροχούς, τοποθετημένους στις κορυφές τετραγώνου.

- Απόσταση μεταξύ τροχών:  $b$
- Απόσταση από το κέντρο:  $l = \frac{b}{\sqrt{2}}$
- Ακτίνα τροχών:  $r$

**Τροχός 1:**  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = -45^\circ$

$$\dot{x}_R \sin(\alpha + \beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha + \beta) - \dot{\theta}_R l \cos \beta = r \dot{\phi}_1 \cos \gamma$$

**Υπενθύμιση:** Για ομνι τροχούς η γωνία  $\gamma$  αφορά τη διεύθυνση των ρόλερς ως προς το επίπεδο του τροχού.



Τετράτροχο πανκατευθυντικό ρομπότ.

## Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τεσσάρων τροχών -2

**Τροχοί 2, 3 και 4:** Παρόμοια με τον τροχό 1, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{1}{r}(\dot{x}_R - \dot{y}_R - \dot{\theta}_R b) = \dot{\phi}_1$$

$$\frac{1}{r}(\dot{x}_R + \dot{y}_R - \dot{\theta}_R b) = \dot{\phi}_2$$

$$\frac{1}{r}(-\dot{x}_R + \dot{y}_R + \dot{\theta}_R b) = \dot{\phi}_3$$

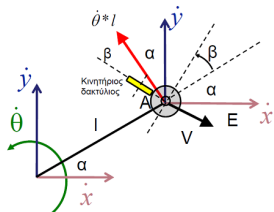
$$\frac{1}{r}(-\dot{x}_R - \dot{y}_R + \dot{\theta}_R b) = \dot{\phi}_4$$

### Σχόλιο

Για μια επιθυμητή ταχύτητα  $(\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R)$ , μπορούν να λυθούν **τρεις από τις εξισώσεις** για να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες  $\dot{\phi}_i$ . Η **τέταρτη** πρέπει να ικανοποιεί την τελευταία σχέση — παρέχοντας **πλεονασμό κινητήρων**.

# Kinematic Constraints: Σφαιρικός τροχός

- Ο **σφαιρικός τροχός** (spherical wheel) αποτελείται από μία σφαίρα που μπορεί να κυλίεται **προς οποιαδήποτε κατεύθυνση**, καθώς και έναν **κινητήριο δακτύλιο** που της επιβάλλει κίνηση προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση  $V$ .
- Ο **μοναδικός κινηματικός περιορισμός** είναι αυτός **κατά τη διεύθυνση του κινητήριου δακτυλίου**.
- Προς όλες τις άλλες κατευθύνσεις, η σφαίρα κινείται **χωρίς περιορισμούς**.



Σφαιρικός τροχός: Περιορισμός  
κατά τη διεύθυνση  $V$ .

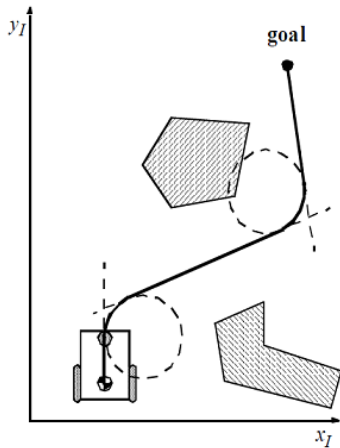
**Κινηματική σχέση κατά τη διεύθυνση  $V$ :**

$$\dot{x}_R \sin(\alpha + \beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha + \beta) - \dot{\theta}_R l \cos \beta = r \dot{\phi}$$

# Motion Control: Έλεγχος Ανοιχτού Βρόχου

## Το πρόβλημα

- Το **μονοπάτι** αναλύεται σε τμήματα απλής γεωμετρίας:
  - **Ευθύγραμμα τμήματα**
  - **Κυκλικά τόξα**
- Ο έλεγχος συνίσταται:
  - Στον **προσδιορισμό του μονοπατιού** λαμβάνοντας υπόψη εμπόδια — **γεωμετρικό πρόβλημα**.
  - Στον **έλεγχο καθενός τροχού ξεχωριστά**.
- **Μειονεκτήματα:**
  - Όλα τα εγγενή μειονεκτήματα των ανοικτών βρόχων.
  - Δεν προσαρμόζεται σε **μεταβαλλόμενα εμπόδια**.

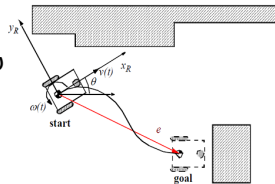


Έλεγχος ανοικτού βρόχου:

# Motion Control: Έλεγχος Κλειστού Βρόχου

## Το πρόβλημα

- Θεωρούμε ένα ρομπότ που ξεκινά από αρχική θέση **start** και επιδιώκει να φτάσει σε **goal**.
- Ορίζουμε το **διάνυσμα σφάλματος**  $e(t)$  που περιλαμβάνει αποκλίσεις σε θέση και προσανατολισμό.



Έλεγχος κίνησης: από start σε goal με σφάλμα  $e(t)$ .

Νόμος ελέγχου: 
$$\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = K(t, e) \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \end{bmatrix}$$

### Ζητούμενο

Βρες αν υπάρχει πίνακας  $K(t, e)$  που καθιστά το σφάλμα **ασυμπτωτικά μηδενικό**, i.e.,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .