



# Autonomous Robotic Vehicles

Hellenic Mediterranean University

Lecture 10

Dr. Alina Eqtami

## Μετά το σημερινό μάθημα θα μπορείτε:

- Να κατανοείτε την έννοια της **πιθανοτικής εκτίμησης κατάστασης** και της **αβεβαιότητας**.
- Να εξηγείτε πώς **συνδυάζονται πολλαπλές θορυβώδεις εκτιμήσεις** (Sensor Fusion).
- Να εφαρμόζετε τη λογική του **Kalman Filter** σε γραμμικά συστήματα.
- Να αναγνωρίζετε τη σημασία των μεγεθών  $Q, R, K, P$  και τη φυσική τους ερμηνεία.
- Να υλοποιείτε και να ελέγχετε ένα απλό **1D Kalman Filter** παράδειγμα.
- Να κατανοείτε τη διαφορά μεταξύ **Kalman Filter** και **Extended Kalman Filter (EKF)**.

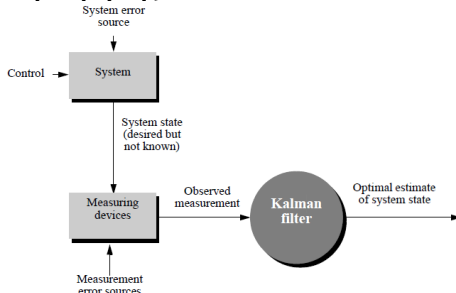
- Τα σύγχρονα ρομπότ διαθέτουν **μεγάλο αριθμό αισθητήρων**, όπως IMU, LIDAR, GPS, κάμερες, οι οποίοι παρέχουν διαφορετικού τύπου δεδομένα.
- Κάθε αισθητήρας έχει τις δικές του **αβεβαιότητες και failure modes**.
- Η συνδυασμένη χρήση τους μέσω **Sensor Fusion** αυξάνει την ακρίβεια και την αξιοπιστία της εκτίμησης της κατάστασης.

## Goal

Να συνενώσουμε πολλαπλές θορυβώδεις μετρήσεις ώστε να εκτιμήσουμε όσο το δυνατόν **ακριβέστερα και βέλτιστα** την πραγματική κατάσταση του συστήματος.

## Βασική ιδέα:

- Ένα ρομπότ δέχεται δύο είδη εισόδων:
  - **Control inputs** – εντολές κίνησης που επηρεάζουν την κατάσταση.
  - **Disturbances / Errors** – τυχαίες διαταραχές του συστήματος.
- Το σύστημα έχει μια **πραγματική κατάσταση** (true system state), η οποία όμως είναι **άγνωστη**.
- Οι αισθητήρες παρέχουν μετρήσεις αυτής της κατάστασης, αλλά **με σφάλματα μέτρησης**.



Typical Kalman Filter block diagram

Το Kalman Filter είναι ένας **μαθηματικός αλγόριθμος** που:

- Συνδυάζει τη γνώση μας για το **μοντέλο του συστήματος** και τα **δεδομένα των αισθητήρων**.
- Παρέχει μια **βελτιστοποιημένη εκτίμηση της κατάστασης** (optimal state estimate).
- Είναι ένας **recursive data processing algorithm** — ενημερώνει διαρκώς την εκτίμηση με κάθε νέα μέτρηση.

**Υποθέσεις:**

- Το σύστημα είναι **γραμμικό**.
- Ο θόρυβος στα μοντέλα και στις μετρήσεις είναι: **White Gaussian Noise**.

**Σημείωση:** Τα περισσότερα **κινητά ρομπότ** είναι **μη γραμμικά**, οπότε χρησιμοποιούμε το Kalman Filter σε **γραμμικοποιημένο μοντέλο** (Extended Kalman Filter).

# Υπενθύμιση: Κατανομή Πυκνότητας Πιθανότητας (PDF)

**Τυχαία μεταβλητή:**  $x$  με πυκνότητα πιθανότητας  $p(x)$ .

- Το ολοκλήρωμα της  $p(x)$  είναι ίσο με 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

- Η μέση τιμή (mean) δίνεται από:

$$\mu = E[x] = \int x p(x) dx$$

- Η διασπορά (variance) εκφράζει το πόσο διασκορπισμένες είναι οι τιμές του  $x$  γύρω από τη μέση τιμή:

$$\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$$

## Gaussian Distribution

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Για μια **κανονική κατανομή**  $x \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , το μεγαλύτερο μέρος των τιμών συγκεντρώνεται κοντά στη μέση τιμή  $\mu$ .

## 68–95–99.7 Rule

- $\mu \pm 1\sigma \Rightarrow$  περίπου **68%** των τιμών.
- $\mu \pm 2\sigma \Rightarrow$  περίπου **95%** των τιμών.
- $\mu \pm 3\sigma \Rightarrow$  περίπου **99.7%** των τιμών.

**Παράδειγμα:** Αν η θερμοκρασία σε μια πόλη ακολουθεί  $\mathcal{N}(20, 2^2)$ , τότε:

- 68% των ημερών έχουν  $T \in [18, 22]^\circ\text{C}$ ,
- 95% των ημερών έχουν  $T \in [16, 24]^\circ\text{C}$ ,
- 99.7% των ημερών έχουν  $T \in [14, 26]^\circ\text{C}$ .

# Από Μία σε Δύο Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές:

$$x_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1), \quad x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2)$$

και μια συνάρτηση που τις συνδέει:

$$y = f(x_1, x_2)$$

**Ερώτημα:** Ποια είναι η κατανομή της  $y$ ;

**Τρεις περιπτώσεις:**

- Ⓐ Αν το  $f(\cdot)$  είναι **γραμμικό**  $\rightarrow$  η  $y$  είναι επίσης **κανονικά κατανομημένη**.
- Ⓑ Αν τα  $x_1, x_2$  είναι **διανύσματα**, τότε χρησιμοποιούμε **μέση τιμή** και **πίνακες συνδιασποράς** (covariance).
- Ⓒ Αν το  $f(\cdot)$  είναι **μη γραμμικό**, τότε η  $y$  **δεν είναι κανονική** και χρειάζεται προσέγγιση.

(α) Βαθμωτή περίπτωση (scalar variables):

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές

$$x_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \quad x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

και μια γραμμική συνάρτηση:

$$y = ax_1 + bx_2$$

Τότε η  $y$  είναι επίσης κανονικά κατανοημένη:

$$y \sim \mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$$

με

$$\mu_y = a\mu_1 + b\mu_2, \quad \sigma_y^2 = a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$$

(β) Διανυσματική γενίκευση:

$$y = Ax_1 + Bx_2, \quad x_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \Sigma_i), \quad i = 1, 2$$

$$\mu_y = A\mu_1 + B\mu_2, \quad \Sigma_y = A\Sigma_1A^\top + B\Sigma_2B^\top$$

**Συμπέρασμα:** η γραμμική σχέση διατηρεί την κανονικότητα της κατανομής. 

# Μη Γραμμική Περίπτωση – Προσέγγιση Πρώτης Τάξης

Αν η σχέση είναι μη γραμμική:

$$y = f(x_1, x_2)$$

τότε η  $y$  δεν ακολουθεί κανονική κατανομή.

Για μικρές αποκλίσεις γύρω από τις μέσες τιμές, χρησιμοποιούμε **προσέγγιση πρώτης τάξης** (first-order approximation):

## Linearization (Taylor expansion)

$$y \approx f(\mu_1, \mu_2) + F_{x_1}(x_1 - \mu_1) + F_{x_2}(x_2 - \mu_2)$$

όπου  $F_{x_1}$  και  $F_{x_2}$  είναι οι **Jacobian matrices** της  $f$  ως προς  $x_1$  και  $x_2$  αντίστοιχα.

Αυτή η γραμμικοποίηση επιτρέπει να προσεγγίσουμε

$$\mu_y \approx f(\mu_1, \mu_2), \quad \Sigma_y \approx F_{x_1} \Sigma_1 F_{x_1}^T + F_{x_2} \Sigma_2 F_{x_2}^T$$

και αποτελεί τη βάση του **Extended Kalman Filter (EKF)**.

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη θέση ενός ρομπότ:

$$q = \text{θέση του ρομπότ (state variable)}$$

Υπάρχουν δύο εκτιμήσεις για το ίδιο μέγεθος:

- $p_1(q)$  : **belief από το μοντέλο πρόβλεψης** (prediction from motion model),
- $p_2(q)$  : **belief από τη μέτρηση αισθητήρα** (measurement from sensor).

Και οι δύο είναι αβέβαιες — εκφράζονται ως **πιθανότητες** ή **κανονικές κατανομές**.

**Στόχος:** Να συνδυάσουμε  $p_1(q)$  και  $p_2(q)$  ώστε να προκύψει μια **βελτιωμένη εκτίμηση** της θέσης:

$$p(q) = \text{fusion of prediction and measurement.}$$

## Παράδειγμα Συνένωσης Δύο Εκτιμήσεων

Έστω δύο εκτιμήσεις της θέσης του ρομπότ  $q$ .

$$p_1(q) = \mathcal{N}(\hat{q}_1, \sigma_1^2), \quad p_2(q) = \mathcal{N}(\hat{q}_2, \sigma_2^2)$$

Η **συνένωση** των δύο κατανομών δίνει μια νέα εκτίμηση:

$$\hat{q} = \hat{q}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(\hat{q}_2 - \hat{q}_1)$$

ή ισοδύναμα:

$$\hat{q} = w_1 \hat{q}_1 + w_2 \hat{q}_2, \quad w_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \quad w_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Η νέα **διασπορά** της συνδυασμένης εκτίμησης είναι:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

**Παρατήρηση:** Είναι η  $\sigma^2$  είναι **μικρότερη** από κάθε μία από τις αρχικές διασπορές  $\sigma_1^2$  και  $\sigma_2^2$ ; Δηλαδή βελτιώθηκε η πληροφορία (state estimation);

# Ιδιότητα της Συνδυασμένης Διασποράς

Από τη συνένωση δύο κανονικών εκτιμήσεων έχουμε:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

**Ισχύει:**

$$\sigma^2 < \min(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$$

**Διαισθητικά:**

- Η συνδυασμένη εκτίμηση έχει πάντα **μικρότερη αβεβαιότητα** από καθεμιά μεμονωμένη πηγή.
- Άρα η συνολική εκτίμηση είναι **πιο ακριβής**.

**Παράδειγμα:** Αν  $\sigma_1 = 2$  και  $\sigma_2 = 1$ , τότε

$$\sigma^2 = \frac{4 \cdot 1}{4 + 1} = 0.8 < 1^2$$

Η τελική αβεβαιότητα είναι μικρότερη ακόμη κι από την πιο “σίγουρη” πηγή.

# Σχέση με τον Αρμονικό Μέσο (Harmonic Mean)

Ο τύπος της συνδυασμένης διασποράς:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

είναι **ισοδύναμος** με:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} HM(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$$

Ο **αρμονικός μέσος** δύο τιμών:

$$HM(a, b) = \frac{2ab}{a + b}$$

και ο **αριθμητικός μέσος**:

$$AM(a, b) = \frac{a + b}{2}$$

Ισχύει πάντα:  $HM(a, b) \leq AM(a, b)$ .

Άρα ο αρμονικός μέσος **δίνει έμφαση στη μικρότερη τιμή**. Στην περίπτωση μας, η μικρότερη διασπορά (πιο “σίγουρος” αισθητήρας) έχει μεγαλύτερη επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα.

# Η Πληροφορία Προστίθεται Αντιστρόφως της Διασποράς

Η Gaussian πυκνότητα έχει τη μορφή:

$$p(q) \propto \exp\left(-\frac{(q - \hat{q})^2}{2\sigma^2}\right)$$

Κατά τη συνένωση δύο τέτοιων εκτιμήσεων:

$$p(q) \propto p_1(q) p_2(q)$$

Οι εκθέτες προστίθενται, δίνοντας:

$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$

**Συμπέρασμα:**

- Η “πληροφορία” είναι αντιστρόφως ανάλογη της αβεβαιότητας:

$$\text{Information} \propto \frac{1}{\sigma^2}$$

- Οι πληροφορίες προστίθενται  $\rightarrow$  η συνολική αβεβαιότητα μειώνεται.
- Αυτό εξηγεί γιατί η σύνθεση των διασπορών δίνει αρμονικό συνδυασμό.

# Από το Βαθμωτό στο Διάνυσμα

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε εκτιμήσεις για μία μόνο μεταβλητή:

$$\hat{q} \in \mathbb{R}, \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

Στην πράξη όμως, η κατάσταση ενός ρομπότ (ή ενός συστήματος) είναι **διάνυσμα**:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \hat{q}_i \in \mathbb{R}^n, \quad \Sigma_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

όπου  $\Sigma_i$  είναι ο **πίνακας συνδιασποράς (covariance matrix)** που περιγράφει:

- Την αβεβαιότητα κάθε συνιστώσας, και
- Τη συσχέτισή τους.

Ο στόχος είναι ο ίδιος:

Να συνδυάσουμε  $(\hat{q}_1, \Sigma_1)$  και  $(\hat{q}_2, \Sigma_2)$  σε μια βελτιωμένη εκτίμηση.

# Συνένωση Πολυδιάστατων Εκτιμήσεων

Για δύο εκτιμήσεις:

$$\hat{q}_1, \Sigma_1 \quad \text{και} \quad \hat{q}_2, \Sigma_2$$

η **βελτιστοποιημένη συνδυασμένη εκτίμηση** δίνεται από:

$$\Sigma = (\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})^{-1}$$

$$\hat{q} = \Sigma (\Sigma_1^{-1} \hat{q}_1 + \Sigma_2^{-1} \hat{q}_2)$$

**Ερμηνεία:**

- Οι πίνακες  $\Sigma_i^{-1}$  εκφράζουν την “**πληροφορία**” κάθε εκτίμησης.
- Η πληροφορία προστίθεται γραμμικά.
- Το τελικό  $\Sigma$  είναι πάντα **μικρότερο** (σε θετικά ορισμένη έννοια) από τα αρχικά  $\Sigma_i$ .

Αυτή είναι η **πολυδιάστατη μορφή** της Gaussian συνένωσης που είδαμε για τα scalar.

# Συνένωση Πολυδιάστατων Εκτιμήσεων και Kalman Gain

Για δύο εκτιμήσεις: (α)  $\hat{q}_1$ ,  $\Sigma_1$  να είναι η πρόβλεψη απο μοντέλο (prediction) και (β)  $\hat{q}_2$ ,  $\Sigma_2$  να είναι μέτρηση αισθητήρα (observation). Προκύπτει η **βελτιστοποιημένη συνδυασμένη εκτίμηση**:

$$\Sigma = (\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})^{-1}, \quad \hat{q} = \Sigma(\Sigma_1^{-1}\hat{q}_1 + \Sigma_2^{-1}\hat{q}_2)$$

Αναδιατάσσοντας προκύπτει:

$$\hat{q} = \hat{q}_1 + K(\hat{q}_2 - \hat{q}_1)$$

όπου:

$$K = \Sigma_1(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1} \quad \text{είναι το Kalman Gain.}$$

**Διαισθητικά:** Το  $K$  είναι ο “συντελεστής εμπιστοσύνης” που καθορίζει πόσο η μέτρηση επηρεάζει την τελική εκτίμηση σε σχέση με το μοντέλο.

Το διάνυσμα:

$$v = (\hat{q}_2 - \hat{q}_1)$$

ονομάζεται **innovation** — εκφράζει τη “διαφορά μέτρησης-πρόβλεψης”, δηλαδή τη νέα πληροφορία που φτάνει στο σύστημα.

Η **innovation covariance** είναι:

$$S = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

και δείχνει πόσο “σίγουροι” είμαστε για αυτή τη διαφορά.

Το φίλτρο ενημερώνει την αβεβαιότητα ως:

$$\Sigma = (I - K)\Sigma_1$$

**Ερμηνεία:**

- Μετά τη συνένωση, η συνολική αβεβαιότητα  $\Sigma$  **μειώνεται**.
- Αν η μέτρηση είναι πολύ ακριβής ( $\Sigma_2$  μικρό) μεγάλο  $K$  δίνουμε έμφαση στη μέτρηση.
- Αν η πρόβλεψη είναι πιο αξιόπιστη μικρό  $K$  εμπιστευόμαστε το μοντέλο.

Θέλουμε να εκτιμήσουμε την πραγματική κατάσταση (state) ενός συστήματος, όπως η θέση και η ταχύτητα ενός ρομπότ, με βάση θορυβώδεις μετρήσεις.

Το σύστημα περιγράφεται από ένα **γραμμικό δυναμικό μοντέλο με στοχαστικούς θορύβους**:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

$$z_k = Hx_k + v_k$$

όπου:

- $x_k$ : διάνυσμα κατάστασης στο βήμα  $k$  (π.χ. θέση, ταχύτητα),
- $u_k$ : είσοδος ελέγχου (π.χ. εντολή κινητήρων),
- $z_k$ : μέτρηση από αισθητήρες,
- $A, B, H$ : γνωστοί πίνακες που περιγράφουν τη δυναμική και το μοντέλο μέτρησης,
- $w_k$ : θόρυβος διεργασίας,  $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ ,
- $v_k$ : θόρυβος μέτρησης,  $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ .

Οι θόρυβοι του συστήματος είναι στοχαστικές μεταβλητές με **μηδενική μέση τιμή** και **κανονική κατανομή**:

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$$

όπου:

- $Q$ : **Process noise covariance** — περιγράφει την αβεβαιότητα του μοντέλου.
- $R$ : **Measurement noise covariance** — περιγράφει την αβεβαιότητα των αισθητήρων.

Αν:

- $n$ : διάσταση του διανύσματος κατάστασης  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,
- $m$ : διάσταση του διανύσματος μετρήσεων  $z_k \in \mathbb{R}^m$ ,

τότε:

$$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad R \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{με} \quad Q, R \succeq 0$$

Το **Kalman Filter** είναι ένας **recursive** αλγόριθμος εκτίμησης.

Σκοπός του είναι να υπολογίζει, βήμα προς βήμα, την καλύτερη δυνατή εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης ενός συστήματος (π.χ. θέση, ταχύτητα, στάση ρομπότ), χρησιμοποιώντας:

- ένα **μοντέλο πρόβλεψης** – πώς αναμένεται να εξελιχθεί η κατάσταση στο χρόνο,
- και **μετρήσεις από αισθητήρες** – που περιέχουν θόρυβο και αβεβαιότητα.

Η εκτίμηση ενημερώνεται συνεχώς καθώς φτάνουν νέες μετρήσεις, χωρίς να χρειάζεται να αποθηκεύονται όλα τα προηγούμενα δεδομένα.

**Άρα:** είναι ένας “ζωντανός” εκτιμητής που συνδυάζει μοντέλο + μετρήσεις για βέλτιστη πληροφόρηση σε πραγματικό χρόνο.

# Τα δύο στάδια του Kalman Filter

Η λειτουργία του φίλτρου επαναλαμβάνεται διαρκώς σε δύο στάδια:

- 1 **Prediction Step** Προβλέπει την επόμενη κατάσταση και την αβεβαιότητά της, βασισμένο στο δυναμικό μοντέλο και την προηγούμενη εκτίμηση.

$$(\hat{x}_{k|k-1}, P_{k|k-1})$$

- 2 **Update (Correction) Step** Συγκρίνει την πρόβλεψη με τη νέα μέτρηση, υπολογίζει το **innovation** και διορθώνει την εκτίμηση με βάρος που καθορίζεται από το **Kalman Gain**.

$$(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται:

Predict → Measure → Correct → Repeat

Κάθε νέο βήμα χρησιμοποιεί μόνο τις πληροφορίες του προηγούμενου: γι' αυτό το φίλτρο είναι **αναδρομικό** και **υπολογιστικά αποδοτικό**.

Στο βήμα πρόβλεψης, το φίλτρο χρησιμοποιεί το **μοντέλο του συστήματος** για να υπολογίσει την επόμενη κατάσταση **πριν** λάβει κάποια νέα μέτρηση.

## Στόχος:

- Να προβλέψει πού “πιστεύουμε” ότι θα βρίσκεται το σύστημα στο επόμενο χρονικό βήμα.
- Να ενημερώσει την αβεβαιότητά μας λαμβάνοντας υπόψη τον θόρυβο του μοντέλου.

## Βασική ιδέα:

$$\text{New prediction} = \text{Model evolution} + \text{Process noise}$$

Αυτή η πρόβλεψη θα συγκριθεί στο επόμενο βήμα με τη μέτρηση, ώστε να διορθωθεί μέσω του Kalman Gain.

# Μαθηματική Μορφή του Βήματος Πρόβλεψης

Οι εξισώσεις πρόβλεψης βασίζονται στο γραμμικό δυναμικό μοντέλο:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

**Πρόβλεψη της κατάστασης:**

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}$$

**Πρόβλεψη της συνδιασποράς σφάλματος:**

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q$$

**Ερμηνεία:**

- $A$ : εξελίσσει την εκτίμηση στο χρόνο (μοντέλο συστήματος),
- $Bu_{k-1}$ : συνεισφορά της εισόδου ελέγχου,
- $Q$ : προσθήκη αβεβαιότητας από τον θόρυβο διεργασίας.

Η διαδικασία αυτή “προωθεί” το φίλτρο στο επόμενο χρονικό βήμα, πριν φτάσει οποιαδήποτε νέα μέτρηση.

Για να κατανοήσουμε τις εξισώσεις πρόβλεψης, ας δούμε τι σημαίνει κάθε μέγεθος:

- $\hat{x}_{k-1|k-1}$ : Η **βελτιστοποιημένη εκτίμηση της κατάστασης** στο χρονικό βήμα  $k - 1$ , λαμβάνοντας υπόψη όλες τις μετρήσεις έως εκείνη τη στιγμή.
- $P_{k-1|k-1}$ : Η **συνδιασπορά (covariance)** της εκτίμησης στο  $k - 1$ , δηλαδή πόσο “σίγουροι” ήμασταν για την κατάσταση μετά τη διόρθωση με τη μέτρηση  $z_{k-1}$ .
- $\hat{x}_{k|k-1}$ : Η **προβλεπόμενη κατάσταση** στο επόμενο βήμα  $k$ , βασισμένη αποκλειστικά στο μοντέλο του συστήματος και στην είσοδο  $u_{k-1}$ .
- $P_{k|k-1}$ : Η **προβλεπόμενη αβεβαιότητα (covariance)** της κατάστασης στο βήμα  $k$ , πριν ληφθεί η μέτρηση  $z_k$ .

**Διαισθητικά:** Το φίλτρο “εξελίσσει” την εκτίμηση στο χρόνο σύμφωνα με το μοντέλο, ενώ η αβεβαιότητα αυξάνεται εξαιτίας του θορύβου διεργασίας  $Q$ .

## Βήμα Διόρθωσης – Measurement (Correction) Step

Αφού το φίλτρο προβλέψει την επόμενη κατάσταση  $\hat{x}_{k|k-1}$  και υπολογίσει την πρόβλεψη διακύμανσης  $P_{k|k-1}$ , λαμβάνει μια νέα μέτρηση  $z_k$  από τους αισθητήρες.

**Στόχος:** Να **συνδυάσουμε** την πρόβλεψη με τη νέα μέτρηση ώστε να παραχθεί μια πιο αξιόπιστη εκτίμηση της πραγματικής κατάστασης.

**Ιδέα:**

- Η πρόβλεψη  $\hat{x}_{k|k-1}$  βασίζεται στο **μοντέλο**.
- Η μέτρηση  $z_k$  περιέχει **νέα πληροφορία**, αλλά και **θόρυβο**.
- Ο συνδυασμός τους γίνεται με βάρος που καθορίζεται από το **Kalman Gain**.

Η νέα (διορθωμένη) εκτίμηση της κατάστασης θα είναι:

Νέα εκτίμηση = Πρόβλεψη + Διόρθωση μέσω του Kalman Gain.

Έτσι, κάθε νέο βήμα μειώνει την αβεβαιότητα, βελτιώνοντας τη γνώση

μας για την πραγματική κατάσταση του συστήματος.

Όταν φτάσει η νέα μέτρηση  $z_k$ , το φίλτρο τη συγκρίνει με αυτό που “περίμενε” να μετρήσει.

1. **Καινοτομία (Innovation):**  $y_k = z_k - H\hat{x}_{k|k-1}$

Η διαφορά πρόβλεψης–μέτρησης: δείχνει τη νέα πληροφορία που φτάνει στο σύστημα.

2. **Συνδιασπορά της Καινοτομίας:**  $S_k = HP_{k|k-1}H^T + R$

Ποσοτικοποιεί την αβεβαιότητα της καινοτομίας — συνδυάζει την αβεβαιότητα της πρόβλεψης και της μέτρησης.

3. **Κέρδος Kalman (Kalman Gain):**  $K_k = P_{k|k-1}H^T S_k^{-1}$

Το  $K_k$  καθορίζει πόσο βάρος θα δώσουμε στη μέτρηση σε σχέση με την πρόβλεψη. Αν η μέτρηση είναι ακριβής (μικρό  $R$ ) μεγάλο  $K_k$  εμπιστευόμαστε τη μέτρηση.

# Βήμα Διόρθωσης – Ενημέρωση Κατάστασης και Αβεβαιότητας

Αφού υπολογιστεί το  $K_k$ , η εκτίμηση της κατάστασης και η αβεβαιότητα ενημερώνονται:

## 4. Ενημέρωση Κατάστασης:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k y_k$$

Η πρόβλεψη διορθώνεται σύμφωνα με τη νέα μέτρηση και το βάρος  $K_k$ .

## 5. Ενημέρωση Συνδιασποράς:

$$P_{k|k} = (I - K_k H) P_{k|k-1}$$

Η αβεβαιότητα μειώνεται, αφού έχουμε ενσωματώσει την πληροφορία της μέτρησης.

Μετά από αυτή τη διόρθωση, οι ποσότητες  $\hat{x}_{k|k}$  και  $P_{k|k}$  χρησιμοποιούνται ως αρχικές τιμές για το επόμενο βήμα πρόβλεψης.

# Αρχικοποίηση του Kalman Filter

Για να ξεκινήσει η διαδικασία πρόβλεψης–διόρθωσης, πρέπει να ορίσουμε τις αρχικές τιμές:

- $\hat{x}_{0|0}$ : η **αρχική εκτίμηση** της κατάστασης. Π.χ. θεωρούμε ότι το ρομπότ ξεκινά από τη θέση και τον προσανατολισμό:

$$\hat{x}_{0|0} = [x, y, \theta]^T = [0, 0, 0]^T$$

- $P_{0|0}$ : η **αρχική συνδιασπορά** που εκφράζει πόσο σίγουροι είμαστε για την αρχική εκτίμηση.

$$P_{0|0} = \begin{cases} 0.01I, & \text{αν είμαστε πολύ σίγουροι} \\ 1000I, & \text{αν δεν είμαστε καθόλου σίγουροι για την αρχική θέση.} \end{cases}$$

**Σχόλιο:** Το  $P_{0|0}$  καθορίζει το “μέγεθος” του αρχικού νέφους αβεβαιότητας: όσο μεγαλύτερο είναι, τόσο περισσότερο θα εμπιστευθεί το φίλτρο τις πρώτες μετρήσεις.

# Extended Kalman Filter (EKF)

Το κλασικό Kalman Filter προϋποθέτει ότι το σύστημα είναι **γραμμικό**. Ωστόσο, τα περισσότερα ρομπότ και πραγματικά συστήματα έχουν **μη γραμμική δυναμική και μη γραμμικά μοντέλα μέτρησης**.

Το Extended Kalman Filter (EKF) επεκτείνει το Kalman filter σε τέτοια συστήματα, **γραμμικοποιώντας** τα γύρω από την τρέχουσα εκτίμηση.

**Μοντέλα:**  $x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}, \quad z_k = h(x_k) + v_k$

**Γραμμικοποίηση:** Υπολογίζονται τα **ιακωβιανά (Jacobians)**:

$$F_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1|k-1}}, \quad H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k|k-1}}$$

Οι εξισώσεις πρόβλεψης και διόρθωσης παραμένουν ίδιες με του Kalman filter, αλλά χρησιμοποιούν τους πίνακες  $F_k$  και  $H_k$  αντί για  $A$  και  $H$ .

**Ιδέα:**

Το EKF εφαρμόζεται πάνω σε ένα **τοπικά γραμμικοποιημένο** σύστημα, παρέχοντας προσεγγιστικά βέλτιστες εκτιμήσεις για μη γραμμικές διεργασίες.

Στο Kalman Filter, η εκτίμηση:

$$\hat{x}_{k|k}$$

αντιστοιχεί στο **belief** του συστήματος — δηλαδή στην καλύτερη δυνατή “πίστη” για την τρέχουσα κατάσταση, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα δεδομένα και τις μετρήσεις μέχρι το χρονικό βήμα  $k$ .

Το προηγούμενο βήμα  $\hat{x}_{k|k-1}$  είναι η **προβλεπόμενη πίστη** (prior belief), ενώ η ενσωμάτωση της μέτρησης οδηγεί στο **ενημερωμένο belief** (posterior).

**Στο επόμενο μάθημα:** Θα γενικεύσουμε αυτή τη λογική και θα δούμε το **Bayes Filter**, το οποίο περιγράφει την ίδια διαδικασία belief–update για οποιοδήποτε (πιθανώς μη γραμμικό) ρομπότ και οποιαδήποτε μορφή αβεβαιότητας.

# Παράδειγμα: 1D Kalman Filter (Random Walk)

**Περιγραφή προβλήματος:** Ένα ρομπότ κινείται σε ευθεία. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τη θέση του  $x_k$  με βάση θορυβώδεις μετρήσεις θέσης  $z_k$ . Το μοντέλο είναι γραμμικό, με Gaussian θόρυβο.

$$\begin{aligned}x_k &= x_{k-1} + w_{k-1}, & w_{k-1} &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\z_k &= x_k + v_k, & v_k &\sim \mathcal{N}(0, R)\end{aligned}$$

**Παράμετροι:**  $Q = 0.2$ ,  $R = 0.5$ ,  $A = 1$ ,  $H = 1$

**Αρχικοποίηση:**

$$\hat{x}_{0|0} = 0.0, \quad P_{0|0} = 1.0$$

**Μετρήσεις:**  $z_1 = 0.7$ ,  $z_2 = 1.4$

**Στόχος:** Υπολογισμός  $\hat{x}_{1|1}$ ,  $P_{1|1}$  και  $\hat{x}_{2|2}$ ,  $P_{2|2}$  στο χέρι.

## Βήμα $k = 1$ : Πρόβλεψη & Διόρθωση

**Prediction:**

$$\hat{x}_{1|0} = \hat{x}_{0|0} = 0.0, \quad P_{1|0} = P_{0|0} + Q = 1.0 + 0.2 = 1.2$$

**Innovation:**

$$y_1 = z_1 - \hat{x}_{1|0} = 0.7 - 0.0 = 0.7, \quad S_1 = P_{1|0} + R = 1.2 + 0.5 = 1.7$$

**Kalman gain:**

$$K_1 = \frac{P_{1|0}}{S_1} = \frac{1.2}{1.7} \approx 0.7059$$

**Update:**

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1|1} &= \hat{x}_{1|0} + K_1 y_1 = 0 + 0.7059 \cdot 0.7 \approx 0.4941 \\ P_{1|1} &= (1 - K_1) P_{1|0} = (1 - 0.7059) \cdot 1.2 \approx 0.3529\end{aligned}$$

## Βήμα $k = 2$ : Πρόβλεψη & Διόρθωση

**Prediction:**

$$\hat{x}_{2|1} = \hat{x}_{1|1} \approx 0.4941, \quad P_{2|1} = P_{1|1} + Q \approx 0.3529 + 0.2 = 0.5529$$

**Innovation:**

$$y_2 = z_2 - \hat{x}_{2|1} = 1.4 - 0.4941 \approx 0.9059, \quad S_2 = P_{2|1} + R = 0.5529 + 0.5 = 1.0529$$

**Kalman gain:**

$$K_2 = \frac{P_{2|1}}{S_2} = \frac{0.5529}{1.0529} \approx 0.5251$$

**Update:**

$$\hat{x}_{2|2} = \hat{x}_{2|1} + K_2 y_2 \approx 0.4941 + 0.5251 \cdot 0.9059 \approx 0.9698$$

$$P_{2|2} = (1 - K_2)P_{2|1} \approx (1 - 0.5251) \cdot 0.5529 \approx 0.2626$$

## Τι βλέπουμε από το παράδειγμα

- Με κάθε διόρθωση, η αβεβαιότητα  $P$  **μειώνεται**:  
 $1.0 \rightarrow 0.3529 \rightarrow 0.2626$ .
- Το gain προσαρμόζεται με βάση  $P$  και  $R$ : μεγάλο  $K$  όταν εμπιστευόμαστε περισσότερο τη μέτρηση.
- Η εκτίμηση  $\hat{x}$  κινείται προς τις μετρήσεις αλλά με “φίλτρο” θορύβου.

**Next:** Το ίδιο σενάριο σε Python (ίδιες τιμές) για plot & επαλήθευση θα το βρείτε στο eclass.