



Autonomous Robotic Vehicles

Hellenic Mediterranean University

Lecture 11

Dr. Alina Eqtami

Μετά το σημερινό μάθημα θα μπορείτε:

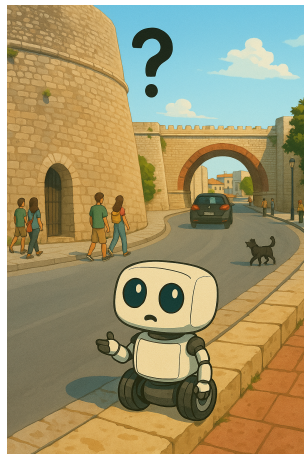
- να εξηγείτε τα βασικά δομικά στοιχεία της πλοήγησης ενός κινητού ρομπότ,
- να κατανοείτε την έννοια της πεποίθησης (belief) και της πιθανοτικής αναπαράστασης θέσης,
- να διακρίνετε μεταξύ **single-hypothesis** και **multiple-hypothesis** συστημάτων εντοπισμού,
- να αναγνωρίζετε τους βασικούς τύπους χαρτογράφησης (metric, grid, topological, landmarks),
- να περιγράφετε το πρόβλημα εντοπισμού θέσης και τη σχέση μεταξύ πρόβλεψης και μέτρησης,
- να εξηγείτε τις βασικές έννοιες πιθανοτήτων που χρησιμοποιούνται στον εντοπισμό.

Εισαγωγή στην Πλοήγηση (Navigation)

Η **πλοήγηση (navigation)** είναι μία από τις πιο απαιτητικές δεξιότητες ενός κινητού ρομπότ. Η επιτυχής πλοήγηση προϋποθέτει την επιτυχία σε τέσσερα βασικά δομικά στοιχεία:

- Perception,
- Localization,
- Cognition,
- Motion Control.

Στα επόμενα μαθήματα θα επικεντρωθούμε στο **Localization** — δηλαδή στο πώς ένα ρομπότ εκτιμά με ακρίβεια τη θέση και τον προσανατολισμό του στο χώρο.

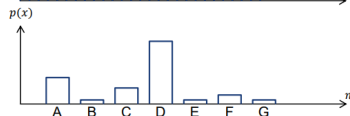
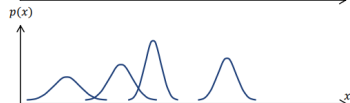


Πιθανοτική Εντοπισμός Θέσης (Probabilistic Localization)

Η **πιθανοτική προσέγγιση** στον εντοπισμό θέσης βασίζεται στην έννοια της **πεποίθησης (belief)**, δηλαδή της κατανομής πιθανότητας που περιγράφει πόσο “σίγουρο” είναι το ρομπότ για τη θέση του στο χώρο.

Υπάρχουν διάφορες μορφές αναπαράστασης αυτής της πληροφορίας:

- α' **Συνεχής χάρτης με μοναδική υπόθεση** ($p(x)$) \rightarrow Kalman Filter Localization
- β' **Συνεχής χάρτης με πολλαπλές υποθέσεις** ($p(x)$) \rightarrow Multi-hypothesis localization
- γ' **Διακριτοποιημένος μετρικός χάρτης** (grid k) με $p(k)$ \rightarrow Markov Localization
- δ' **Διακριτοποιημένος τοπολογικός χάρτης** (κόμβοι n) με $p(n)$



Αναπαράσταση Πεποίθησης (Belief Representation)

Η **αναπαράσταση πεποίθησης** περιγράφει πώς ένα ρομπότ εκφράζει τη βεβαιότητά του για τη θέση του.

Δύο βασικά στοιχεία απαιτούν αναπαράσταση:

- Ο **χάρτης περιβάλλοντος** (map representation) — τι περιλαμβάνει και με ποια ακρίβεια.
- Η **πεποίθηση θέσης** (belief representation) — πώς περιγράφεται η πιθανή θέση του ρομπότ.

Οι επιλογές σε αυτά τα επίπεδα καθορίζουν:

- την **πολυπλοκότητα του συστήματος**,
- την **υπολογιστική απαίτηση**,
- και την **ακρίβεια εντοπισμού**.

Τύποι Συστημάτων Πεποίθησης (Belief Systems)

Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες:

- **Single–Hypothesis:** Το ρομπότ θεωρεί μία μοναδική θέση ως εκτίμησή του. Αντιστοιχεί σε συνεχή κατανομή με ένα μέγιστο. (Kalman Filter Localization)
- **Multiple–Hypothesis:** Το ρομπότ διατηρεί πολλαπλές πιθανές θέσεις με διαφορετικές πιθανότητες. Εκφράζει καλύτερα την αβεβαιότητα. (Markov / Particle Localization)

Όσο πιο σύνθετη η αναπαράσταση, τόσο αυξάνεται η ακρίβεια αλλά και η υπολογιστική πολυπλοκότητα.

Η **single-hypothesis** είναι η πιο άμεση μορφή έκφρασης της θέσης ενός ρομπότ.

Δεδομένου ενός χάρτη του περιβάλλοντος, το ρομπότ εκφράζει την πεποίθησή του ως **ένα μοναδικό σημείο** στον χάρτη.

Μπορεί να εφαρμοστεί σε διάφορους τύπους χαρτών:

- **Συνεχής γεωμετρικός χάρτης (2D)** — η θέση δηλώνεται με συντεταγμένες.
- **Διακριτοποιημένος χάρτης κελιών (grid)** — η θέση αντιστοιχεί σε ένα κελί.
- **Τοπολογικός χάρτης** — η θέση αντιστοιχεί σε έναν κόμβο του γράφου.

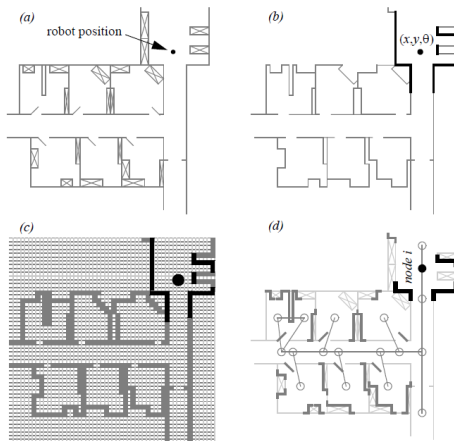
Πλεονεκτήματα:

- Δεν υπάρχει **ασάφεια θέσης** — το ρομπότ θεωρεί μία συγκεκριμένη θέση ως σωστή.
- Διευκολύνει τη **λήψη αποφάσεων** (π.χ. σχεδιασμός διαδρομής).
- Η ενημέρωση της θέσης είναι απλή: από μία θέση σε μία νέα θέση.

Μειονεκτήματα:

- Η κίνηση και ο θόρυβος αισθητήρων προκαλούν **αβεβαιότητα**.
- Ο εξαναγκασμός σε **μία μοναδική υπόθεση** συχνά οδηγεί σε σφάλματα.
- Σε πολλές περιπτώσεις, **είναι αδύνατο** να εκφραστεί η πραγματική αβεβαιότητα με ένα μόνο σημείο.

Single-Hypothesis Belief: Παραδείγματα



Εικόνα: Τρία παραδείγματα single-hypothesis belief χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις χάρτη: (a) πραγματικός χάρτης με τοίχους, πόρτες και έπιπλα. (b) χάρτης βασισμένος σε ευθείες — περίπου 100 γραμμές με δύο παραμέτρους. (c) χάρτης (occupancy grid) — περίπου 3000 κελιά μεγέθους $50 \times 50\text{cm}$. (d) τοπολογικός χάρτης με χρήση χαρακτηριστικών γραμμών

Ορισμός: Στο **Multiple-Hypothesis Belief**, το ρομπότ διατηρεί ένα σύνολο από πιθανές θέσεις, καθεμία με ένα βαθμό εμπιστοσύνης ή πιθανότητας.

Αυτή η αναπαράσταση επιτρέπει στο ρομπότ:

- να εκφράζει ρητά την **αβεβαιότητά του** σχετικά με τη θέση του,
- να 'προβλέπει' πώς οι **μελλοντικές τροχιές** επηρεάζουν την ποιότητα εντοπισμού,
- και να επιλέγει ενέργειες που **μειώνουν την ασάφεια** στη θέση του.

Μέσω αυτής της προσέγγισης μπορεί το ρομπότ να λάβει υπόψη του ολόκληρη την κατανομή πιθανών καταστάσεων και όχι μία μόνο εκτίμηση.

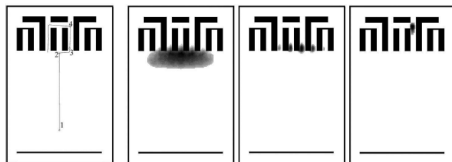
Multiple-Hypothesis Belief: Πώς γίνεται η λήψη απόφασης

Ένα βασικό πρόβλημα είναι η **λήψη απόφασης**:

Όταν η πεποίθηση του ρομπότ κατανέμεται σε διαφορετικές περιοχές, κάθε υπόθεση μπορεί να υποδεικνύει **διαφορετική και ενίοτε ασύμβατη τροχιά**.

Μια πρακτική προσέγγιση είναι να θεωρηθεί ότι το ρομπότ βρίσκεται στην **πιο πιθανή θέση** και να σχεδιάσει τη διαδρομή του βάσει αυτής. Ωστόσο, αυτό μπορεί να οδηγήσει σε σφάλματα αν η πραγματική θέση ανήκει σε λιγότερο πιθανή υπόθεση.

Μια πιο ολοκληρωμένη στρατηγική είναι η επιλογή **τροχιών που μειώνουν την αβεβαιότητα**, ώστε η πεποίθηση να συγκλίνει σταδιακά σε μία συνεπή θέση.



Path of the robot

Belief states at positions 2, 3, and 4

Εικόνα: Παράδειγμα ρομπότ με πολλαπλές υποθέσεις θέσης σε διαδρόμους. Πιο σκούρο χρώμα υποδεικνύει μεγαλύτερη πιθανότητα. **Πηγή:** Autonomous Robotic Vehicles, R. Siegwart et al.

Multiple-Hypothesis Belief: Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Η διαχείριση όλων των υποθέσεων είναι **υπολογιστικά πολύ απαιτητική**. Για N πιθανές θέσεις, ο αριθμός πιθανών καταστάσεων αυξάνεται ως 2^N .

Για να περιοριστεί αυτή η πολυπλοκότητα, χρησιμοποιούνται απλουστευμένες μορφές:

- **Single Gaussian** προσέγγιση \rightarrow Kalman Filter.
- **Πεπερασμένος αριθμός υποθέσεων** (π.χ. 10 πιο πιθανές) \rightarrow γρήγορη ενημέρωση.
- **Hybrid metric-topological** ή **multi-Gaussian** εκτίμηση θέσης.

Συμπέρασμα: Το Multiple-Hypothesis Belief επιτρέπει στο ρομπότ να διατηρεί επίγνωση της αβεβαιότητάς του, παρέχοντας ανθεκτικό εντοπισμό ακόμη και σε ασαφή περιβάλλοντα.

¹Ο αριθμός όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου N στοιχείων είναι το λεγόμενο *power set*, που έχει πληθάρημο: $|\mathcal{P}(N)| = 2^N$.

Η αναπαράσταση του περιβάλλοντος είναι **στενά συνδεδεμένη** με την αναπαράσταση της θέσης του ρομπότ. Η **πιστότητα του χάρτη** καθορίζει το όριο ακρίβειας με το οποίο μπορεί να εκτιμηθεί η θέση.

Αρχή 1: Η ακρίβεια του χάρτη πρέπει να **ταιριάζει με την απαιτούμενη ακρίβεια** του ρομπότ για την επίτευξη στόχων.

Παραδείγματα:

- Αν ο χάρτης είναι πολύ **αδρός** (π.χ. πλέγμα 1 m) και το ρομπότ χρειάζεται ακρίβεια εκατοστού → εντοπισμός ανακριβής.
- Αν ο χάρτης είναι υπερβολικά **λεπτομερής** σε σχέση με την ακρίβεια των αισθητήρων → αυξάνεται η υπολογιστική πολυπλοκότητα χωρίς ουσιαστικό όφελος.
- Ιδανικά: ο χάρτης έχει ανάλυση ανάλογη με τις ικανότητες εντοπισμού του ρομπότ (π.χ. 10 cm για κινήσεις διαδρόμου).

Αρχή 2: Τα χαρακτηριστικά του χάρτη πρέπει να **αντιστοιχούν στα δεδομένα των αισθητήρων**, ώστε ο ρομπότ να μπορεί να αναγνωρίζει το περιβάλλον του μέσα από τις μετρήσεις του.

Παραδείγματα:

- LIDAR → τοίχοι, γραμμές, occupancy grids.
- Camera (vision) → οπτικά σημεία αναφοράς, υφές, χρώματα.
- Sonar → ελεύθερος/κατειλημμένος χώρος.
- GPS → τοπολογικοί χάρτες ή σημεία αναφοράς (waypoints).

Αν τα δεδομένα του χάρτη και οι αισθητήρες δεν **“μιλούν την ίδια γλώσσα”**, ο εντοπισμός γίνεται αναξιόπιστος.

Map Representation: Υπολογιστική Πολυπλοκότητα και Επιπτώσεις

Αρχή 3: Η πολυπλοκότητα της αναπαράστασης του χάρτη επηρεάζει **άμεσα την υπολογιστική πολυπλοκότητα** σε mapping, localization, navigation.

Όσο πιο λεπτομερής και υψηλής ανάλυσης είναι ένας χάρτης:

- τόσο περισσότερα δεδομένα πρέπει να αποθηκευτούν και να ενημερωθούν,
- τόσο αυξάνονται οι υπολογιστικές απαιτήσεις για αντιστοίχιση αισθητήρων (sensor matching),
- και μειώνεται η ταχύτητα λήψης απόφασης σε πραγματικό χρόνο.

Στόχος είναι μια **ισορροπία** ανάμεσα σε λεπτομέρεια και αποδοτικότητα: ένας χάρτης αρκετά πλούσιος για αξιόπιστο εντοπισμό, αλλά όχι τόσο περίπλοκος ώστε να καθυστερεί την πλοήγηση.

Continuous-Valued Map Representation –1

Η **συνεχούς τιμές αναπαράσταση χάρτη** (continuous-valued map) είναι μία ακριβής γεωμετρική μέθοδος περιγραφής του περιβάλλοντος, όπου οι θέσεις των αντικειμένων αποδίδονται με **συνεχείς συντεταγμένες**.

Χαρακτηριστικά:

- Χρησιμοποιείται κυρίως σε 2D περιβάλλοντα — υψηλότερες διαστάσεις οδηγούν σε **υπολογιστική έκρηξη**.
- Συνδυάζει **ακρίβεια** με **συμπαγή αποθήκευση** μέσω της Closed-World Assumption: ό,τι δεν υπάρχει στον χάρτη θεωρείται ανύπαρκτο στο περιβάλλον.
- Η απαίτηση μνήμης είναι **ανάλογη με την πυκνότητα των αντικειμένων**.

Αναπαράσταση:

- Τα εμπόδια περιγράφονται από **πολύγωνα** ή **γραμμές** σε συνεχή χώρο.
- Συχνά χρησιμοποιούνται απλοποιήσεις (π.χ. ευθύγραμμα τοιχώματα) για μείωση πολυπλοκότητας χωρίς σημαντική απώλεια ακρίβειας.

Αντιστοίχιση με αισθητήρες:

- Ιδανική για LIDAR ή laser rangefinders.
- Οι χάρτες αποτελούνται από **γραμμές** (τοίχοι, γωνίες, διασταυρώσεις), προσαρμοσμένες στη μορφή των δεδομένων των αισθητήρων.

Πλεονεκτήματα:

- Υψηλή ακρίβεια.
- Κατάλληλη τόσο για **single** όσο και για **multi-hypothesis** εντοπισμό.

Μειονεκτήματα:

- Υπολογιστικά απαιτητική,
- Χρειάζεται προσεκτική επιλογή χαρακτηριστικών για πραγματικά περιβάλλοντα.



Example of continuous line-based map representation.

Η **αποσύνθεση (decomposition)** είναι μια διαδικασία **αφαίρεσης και απλοποίησης** του περιβάλλοντος, ώστε ο χάρτης να είναι πιο **αποδοτικός υπολογιστικά** και να περιέχει μόνο τις **ουσιώδεις πληροφορίες**.

Σκοπός:

- Να μειωθεί η πολυπλοκότητα του χάρτη χωρίς να χαθεί η πληροφορία που χρειάζεται το ρομπότ για πλοήγηση.
- Να κρατηθούν μόνο τα **σημαντικά χαρακτηριστικά** που επηρεάζουν την κίνηση και τον εντοπισμό.

Αυτές οι μέθοδοι προσφέρουν διαφορετική ισορροπία μεταξύ **ακρίβειας, υπολογιστικού κόστους και απλότητας**.

Exact Cell Decomposition

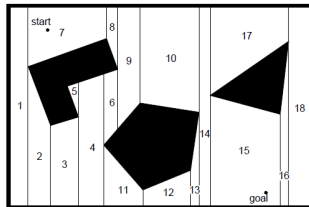
Η **Exact Cell Decomposition** χωρίζει τον ελεύθερο χώρο του περιβάλλοντος σε περιοχές (κελιά) με **ακριβή γεωμετρικά όρια** βασισμένα στα εμπόδια. Κάθε περιοχή αντιπροσωπεύει έναν **κόμβο** και οι γειτονικές περιοχές συνδέονται μέσω ακμών, σχηματίζοντας έναν **γράφο συνδεσιμότητας**.

Βασικές αρχές:

- Το ρομπότ θεωρείται ότι δεν χρειάζεται ακριβή θέση μέσα σε κάθε κελί.
- Το σημαντικό είναι η **σχέση γειτνίασης** — ποια κελιά συνδέονται μεταξύ τους.
- Πολύ **συμπαγής αναπαράσταση**: κάθε κελί αποθηκεύεται ως ένας κόμβος.

Πλεονεκτήματα: Μικρή μνήμη και καθαρή απεικόνιση της συνδεσιμότητας.

Μειονεκτήματα: Απαιτεί πλήρη γνώση του περιβάλλοντος και ακριβή γεωμετρία των εμποδίων.



Example of exact cell decomposition.

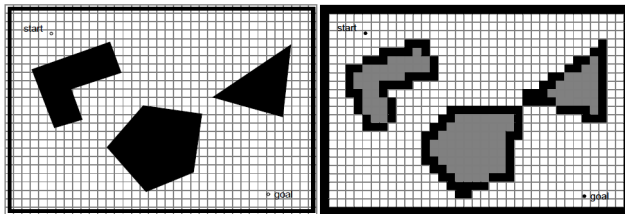
Πηγή: Autonomous Robotic Vehicles,
R. Siegwart et al.

Fixed Cell Decomposition

Η **Fixed Cell Decomposition** χωρίζει τον συνεχή χώρο σε **σταθερά ίσα κελιά** δημιουργώντας έναν απλό, διακριτό χάρτη. Αν και εύκολη στην υλοποίηση, μπορεί να χάσει λεπτές γεωμετρικές λεπτομέρειες (π.χ. στενά περάσματα), οδηγώντας σε μη ρεαλιστική αναπαράσταση του χώρου.

Πλεονεκτήματα: απλότητα, εύκολη χρήση σε path planning.

Μειονεκτήματα: μειωμένη ακρίβεια, μεγάλη μνήμη, **απώλεια συνδεσιμότητας** (αυτό συμβαίνει όταν, λόγω αδρούς διακριτοποίησης, μικρά περάσματα δεν αναγνωρίζονται και περιοχές που στην πραγματικότητα συνδέονται φαίνονται απομονωμένες).



Fixed decomposition of the same space (narrow passage disappears).

Πηγή: Autonomous Robotic Vehicles, R. Siegwart et al.

Adaptive Cell Decomposition

Η **Adaptive Cell Decomposition** προσαρμόζει το μέγεθος των κελιών ανάλογα με την πολυπλοκότητα του περιβάλλοντος. **Βασική ιδέα:**

- Περιοχές με λίγα εμπόδια → **μεγάλα κελιά.**
- Περιοχές με πολλά εμπόδια → **μικρότερα κελιά.**

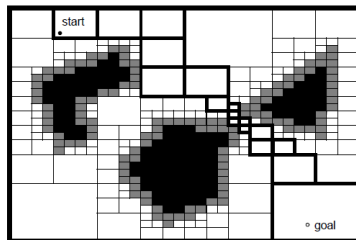
Έτσι επιτυγχάνεται ισορροπία ανάμεσα σε **ακρίβεια** και **αποδοτικότητα**.

Πλεονεκτήματα:

- Υψηλή ανάλυση όπου χρειάζεται.
- Μειωμένη υπολογιστική απαίτηση σε απλές περιοχές.

Μειονεκτήματα:

- Αυξημένη πολυπλοκότητα στην υλοποίηση.
- Δυσκολότερη ενημέρωση των κελιών σε πραγματικό χρόνο.



Adaptive cell decomposition.

Πηγή: Autonomous Robotic Vehicles, R.

Siegwart et al.

Occupancy Grid Representation

Η **Occupancy Grid** αναπαριστά το περιβάλλον ως πλέγμα από **κελιά** που φέρουν μια **πιθανότητα κατοχής**. Κάθε κελί μπορεί να είναι:

- **Ελεύθερο** (πιθανότητα κοντά στο 0),
- **Κατειλημμένο** (πιθανότητα κοντά στο 1),
- ή **Άγνωστο**.

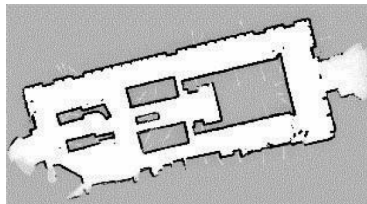
Οι τιμές ενημερώνονται με βάση τα δεδομένα από αισθητήρες LIDAR ή sonar μέσω μετρήσεων “χτυπημάτων” και “διελεύσεων”.

Πλεονεκτήματα:

- Απλή και ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδος.
- Υποστηρίζει ενημέρωση με αισθητήρια δεδομένα σε πραγματικό χρόνο.

Μειονεκτήματα:

- Το μέγεθος του χάρτη αυξάνεται με το μέγεθος του περιβάλλοντος.



Occupancy grid representation.

Πηγή: Autonomous Robotic Vehicles, R.

Topological Representation

Η **Topological Representation** περιγράφει το περιβάλλον ως έναν **γράφο** με **κόμβους (νοδες)** και **ακμές (αρς)**.

Κόμβοι: Αντιστοιχούν σε διακριτές περιοχές ή θέσεις (π.χ. διασταυρώσεις, δωμάτια).

Ακμές: Δηλώνουν τη δυνατότητα μετάβασης μεταξύ κόμβων.

Βασική ιδέα:

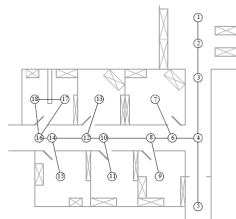
- Εστιάζει στη **συνδεσιμότητα** και όχι στη γεωμετρική ακρίβεια.
- Κάθε κόμβος αναγνωρίζεται μέσω χαρακτηριστικών που ανιχνεύουν οι αισθητήρες.

Πλεονεκτήματα:

- Ελάχιστη μνήμη και υψηλή αποδοτικότητα.
- Ανθεκτική σε δυναμικά περιβάλλοντα.

Μειονεκτήματα:

- Χαμηλή γεωμετρική ακρίβεια.



Topological representation of indoor

Τα **Artificial Landmarks** είναι **τεχνητά χαρακτηριστικά** που τοποθετούνται στο περιβάλλον για να διευκολύνουν τον εντοπισμό του ρομπότ.

Βασική ιδέα:

- Δημιουργούν ένα **οπτικό ή αισθητηριακό “αποτύπωμα”** εύκολα αναγνωρίσιμο.
- Επιτρέπουν **ακριβή τοπικό εντοπισμό**, ακόμη και χωρίς πλήρη γεωμετρική χαρτογράφηση.

Παραδείγματα:

- Χαρτιά ή σχήματα με έντονα χρώματα.
- Ειδικοί ανακλαστήρες ή φωτεινά σήματα.

Πλεονέκτημα: Απλότητα, αξιοπιστία σε εσωτερικούς χώρους.

Μειονέκτημα: Απαιτεί **ανθρώπινη εγκατάσταση** και συντήρηση των landmarks.



Example of artificial landmark used for localization..

Παρά την πρόοδο, η **χαρτογράφηση και εντοπισμός** παραμένουν ανοιχτά ερευνητικά θέματα.

Κύριες προκλήσεις:

- **Δυναμικά περιβάλλοντα** – ανάγκη διάκρισης μόνιμων και προσωρινών εμποδίων.
- **Ανοιχτοί χώροι** – έλλειψη κοντινών χαρακτηριστικών για εντοπισμό.
- **Sensor Fusion** – συνδυασμός πολλών τύπων δεδομένων για πιο αξιόπιστη αναπαράσταση.

Τάση: Χρήση vision και machine learning για πλούσιες, προσαρμοστικές αναπαραστάσεις χάρτη.

The Robot Localization Problem

Καθώς ένα κινητό ρομπότ κινείται μέσα σε ένα γνωστό περιβάλλον, η **αβεβαιότητα στη θέση του αυξάνεται** λόγω σφαλμάτων στην οδομετρία. Για να περιοριστεί η αβεβαιότητα, το ρομπότ πρέπει να **συσχετίσει τις αισθητηριακές του μετρήσεις με τον χάρτη**.

Κύριες πηγές πληροφορίας:

- **Proprioceptive sensors (eg. encoders):** εκτιμούν την κίνηση.
- **Exteroceptive sensors (eg. laser, vision):** παρατηρούν το περιβάλλον.

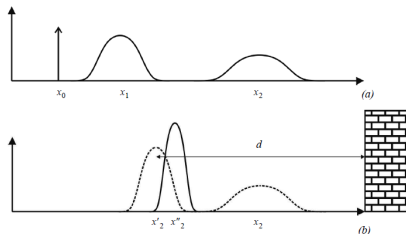
Ο συνδυασμός τους οδηγεί σε μια **διαδικασία δύο βημάτων**:

- **Prediction (Action) update:** αύξηση αβεβαιότητας.
- **Perception (Measurement) update:** διόρθωση και μείωση αβεβαιότητας.

Πιθανοτική Αναπαράσταση Θέσης

Η **πιθανοτική προσέγγιση** εκφράζει την αβεβαιότητα της θέσης ως **κατανομή πιθανοτήτων** πάνω σε όλες τις δυνατές θέσεις του ρομπότ. Η κατανομή αυτή (*belief state*) εξελίσσεται με βάση τις προβλέψεις και τις μετρήσεις.

- Κατά το **prediction**, η κατανομή απλώνεται — η αβεβαιότητα αυξάνεται.
- Κατά το **perception**, οι αισθητήρες διορθώνουν την εκτίμηση και η κατανομή στενεύει.



In probabilistic robotics, beliefs about the robot configuration are represented as probability density functions. The prediction phase increases uncertainty; the perception phase reduces it. Only the Kalman filter assumes Gaussian distributions.

Δύο κύριες προσεγγίσεις βασίζονται στην πιθανοτική αναπαράσταση της θέσης:

1. Markov Localization

- Αναπαριστά τη **πιθανότητα κάθε δυνατής θέσης** του ρομπότ.
- Μπορεί να ξεκινήσει από **άγνωστη θέση** και να χειριστεί **πολλαπλές υποθέσεις**.
- Απαιτεί **διακριτό χώρο κατάστασης** (πλέγμα ή γράφο) και σημαντική υπολογιστική ισχύ.

2. Kalman Filter Localization

- Υποθέτει **Γκαουσιανή κατανομή** για την αβεβαιότητα.
- Είναι **ακριβές και αποδοτικό** σε συνεχή περιβάλλοντα.
- Δεν μπορεί να χειριστεί πολλαπλές ή μη Γκαουσιανές πιθανότητες.

Σχέση: Το Kalman filter αποτελεί ειδική περίπτωση του Markov localization, όταν η κατανομή της θέσης είναι Γκαουσιανή.

Markov vs Kalman Filter Localization

Η επιλογή μεθόδου εξαρτάται από το είδος της αβεβαιότητας και τους υπολογιστικούς περιορισμούς. Κάθε προσέγγιση έχει διακριτά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα:

Χαρακτηριστικό	Markov Localization	Kalman Filter Localization
Μορφή κατανομής	Οποιαδήποτε	Μόνο Γκαουσιανή
Εκκίνηση από άγνωστη θέση	✓	✗
Πολλαπλές υποθέσεις θέσης	✓	✗
Ακρίβεια	Καλή, εξαρτάται από ανάλυση	Πολύ υψηλή τοπικά
Υπολογιστικό κόστος	Υψηλό	Χαμηλό
Ανθεκτικότητα σε “χαμένο” ρομπότ	Υψηλή	Χαμηλή
Αναπαράσταση χώρου	Διακριτή (grid/graph)	Συνεχής

Τυχαίες Μεταβλητές και Πιθανότητες

Μια **τυχαία μεταβλητή** X εκφράζει το αποτέλεσμα ενός τυχαίου φαινομένου, π.χ. ρίψη ζαριού. Η πιθανότητα $p(X = x)$ δείχνει πόσο πιθανό είναι να συμβεί η τιμή x .

Παράδειγμα: Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι. Κάθε αποτέλεσμα έχει πιθανότητα:

$$p(X = 1) = p(X = 2) = \dots = p(X = 6) = \frac{1}{6}$$

Οι πιθανότητες πάντα:

- είναι μη αρνητικές $p(x) \geq 0$
- αθροίζονται σε 1: $\sum_x p(x) = 1$

Ερμηνεία: Το ίδιο ισχύει και για ένα ρομπότ που “ρίχνει το ζάρι” της θέσης του — δεν ξέρει πού ακριβώς είναι, μόνο την πιθανότητα κάθε θέσης.

Συνεχείς Μεταβλητές και Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (PDF)

Σε συνεχή μεγέθη (π.χ. θέση, ταχύτητα, προσανατολισμό), η πιθανότητα δεν μπορεί να εκφραστεί ως απλό ποσοστό εμφάνισης, αλλά μέσω της **συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (PDF)** $p(x)$.

Ιδιότητες:

- $p(x) \geq 0$ για κάθε x
- $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$

Διαισθητικά: Η τιμή $p(x)$ δεν είναι η “πιθανότητα” του σημείου x , αλλά πόσο πυκνά συγκεντρώνεται η πιθανότητα γύρω του. Η πραγματική πιθανότητα να βρεθεί το ρομπότ σε ένα διάστημα $[a, b]$ δίνεται από:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx$$

Παράδειγμα: Αν η θέση ενός ρομπότ x ακολουθεί PDF με μέγιστο στο $x = 2.0$, τότε το ρομπότ είναι πιο πιθανό να βρίσκεται κοντά στα 2 μέτρα, ενώ όσο απομακρυνόμαστε, η πιθανότητα μειώνεται.

Η Κανονική (Γκαουσιανή) Κατανομή

Η πιο κοινή PDF είναι η **Γκαουσιανή (ή κανονική) κατανομή**:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

όπου:

- μ : μέση τιμή (αναμενόμενη θέση)
- σ^2 : διακύμανση (μέτρο αβεβαιότητας)

Παράδειγμα: Το ρομπότ πιστεύει ότι βρίσκεται στη θέση $\mu = 2.0\text{m}$, με αβεβαιότητα $\sigma = 0.3\text{m}$.

Joint Distribution & Conditional Distribution:

Η **κοινή πιθανότητα** $p(x, y)$ περιγράφει την πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα δύο γεγονότα. Η **υπό συνθήκη πιθανότητα** $p(x|y)$ δείχνει την πιθανότητα του x , γνωρίζοντας ότι συνέβη το y .

Παράδειγμα:

- x : η πραγματική θέση του ρομπότ
- z : η μέτρηση από το laser

Τότε η υπό συνθήκη πιθανότητα γράφεται ως:

$$p(x|z) = \frac{p(x, z)}{p(z)}$$

και εκφράζει την πιθανότητα το ρομπότ να βρίσκεται στη θέση x , δεδομένου ότι παρατηρήθηκε η μέτρηση z .

Αν η θέση x και η μέτρηση z είναι **ανεξάρτητες** (π.χ. ο αισθητήρας είναι ελαττωματικός και δίνει τυχαίες τιμές), τότε η μέτρηση δεν επηρεάζει την πίστη για τη θέση του ρομπότ: $p(x|z) = p(x)$.

Conditional Probability — Example:

Έστω ότι ρίχνουμε ένα κανονικό ζάρι. Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα να εμφανιστεί **το 2**, *γνωρίζοντας* ότι το αποτέλεσμα είναι **σίγουρα ζυγός αριθμός**.

Το σύνολο των ζυγών αποτελεσμάτων είναι:

$$\{2, 4, 6\}$$

Υπάρχει μόνο **ένα** αποτέλεσμα μέσα σε αυτό το σύνολο που είναι ίσο με 2.

$$P(\text{Roll} = 2 \mid \text{Even}) = \frac{\text{number of favorable outcomes}}{\text{total even outcomes}} = \frac{1}{3}$$

Άρα, *αν γνωρίζουμε* ότι το ζάρι έφερε ζυγό αριθμό, η πιθανότητα να έχει φέρει το 2 είναι:

$\frac{1}{3}$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Το θεώρημα ολικής πιθανότητας επιτρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος λαμβάνοντας υπόψη όλες τις δυνατές υποθέσεις:

$$p(y) = \sum_x p(y|x)p(x)$$

ή, για συνεχή μεγέθη,

$$p(y) = \int p(y|x)p(x) dx$$

Παράδειγμα: Το ρομπότ δεν ξέρει πού είναι ($p(x)$), αλλά υπολογίζει πόσο πιθανό είναι να δει μέτρηση z :

$$p(z) = \int p(z|x)p(x) dx$$

Αυτή η σχέση χρησιμοποιείται στο στάδιο **prediction update** των αλγορίθμων εντοπισμού.

Το **Θεώρημα του Bayes** συνδέει την πιθανότητα ενός γεγονότος πριν και μετά τη μέτρηση:

$$p(x|z) = \frac{p(z|x)p(x)}{p(z)}$$

Ερμηνεία:

- $p(x)$ → **Prior**: τι πιστεύαμε πριν τη μέτρηση
- $p(z|x)$ → **Likelihood**: πόσο πιθανό είναι να δούμε τη μέτρηση αν είμαστε στο x
- $p(x|z)$ → **Posterior**: ενημερωμένη πεποίθηση

Παράδειγμα: Αν το ρομπότ πίστευε ότι βρισκόταν κάπου με $p(x)$ και ο αισθητήρας μέτρησε z , τότε η νέα εκτίμηση $p(x|z)$ προκύπτει ως **προϊόν** του prior με το likelihood.