# Autonomous Robotic Vehicles

Hellenic Mediterranean University

Lecture 3

Dr. Alina Eqtami

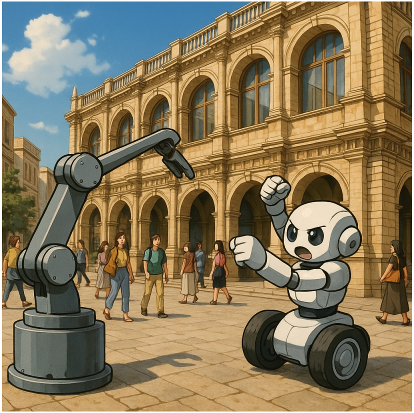
# Lecture Goals - Στόχοι σημερινού μαθήματος!

## Μετά το σημερινό μάθημα θα μπορείτε:

- Να διακρίνετε τη διαφορά μεταξύ manipulator arms και κινητών ρομπότ.
- Να εξηγείτε τους **μη-ολονομικούς περιορισμούς** και πώς αυτοί επηρεάζουν την κίνηση.
- Να εφαρμόζετε forward and inverse kinematics σε κινητά ρομπότ.
- Να αναγνωρίζετε διαφορετικές διατάξεις τροχών και τους κινηματικούς τους περιορισμούς.

# Manipulator vs Mobile Robot

- **Manipulator Arms**: Σταθερά στη βάση, αρθρωτή κινηματική αλυσίδα.
- **Mobile Robots**: Κινούνται ελεύθερα στο περιβάλλον.
- No direct (instantaneous) position measurement → η θέση υπολογίζεται με ολοκλήρωση στο χρόνο.
- Εξαρτάται από την τροχιά που ακολουθήθηκε → σφάλματα εκτίμησης θέσης.



# Holonomic Constraints - Ολονομικοί Περιορισμοί -1

- **Holonomic constraints** είναι **γεωμετρικοί περιορισμοί** που περιγράφουν **πού μπορεί να βρίσκεται** το ρομπότ λόγω της μηχανικής του κατασκευής.
- Εκφράζονται ως **αλγεβρικές εξισώσεις θέσης** της μορφής:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$$

  όπου $q_i$ οι generalized coordinates.
- Ο χρόνος $t$, παίζει ρόλο αν οι περιορισμοί είναι δυναμικοί.
- Με λίγα λόγια οι ολονομικοί περιορισμοί εκφράζονται ως αλγεβρικές εξισώσεις θέσης και δεν εξαρτώνται απο ταχύτητες.

# Holonomic Constraints - Ολονομικοί Περιορισμοί -2

- Παράδειγμα: Αν ένα σημείο είναι δεμένο σε σχοινί μήκους $L$, η θέση του $(x, y)$ ικανοποιεί:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - L^2 = 0$$

δηλ. κινείται πάνω σε κύκλο ακτίνας $L$.

- Οι ολονομικοί περιορισμοί δεν περιορίζουν πάντα το σύστημα σε μια καμπύλη (1 διάσταση), αλλά σε γενικότερες γεωμετρικές πολλαπλότητες, όπως επιφάνειες ή και υψηλότερες διαστάσεις.

**Ανεξάρτητες Συντεταγμένες και Πολλαπλότητες**

Αν έχουμε $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, με $n$ τις γενικευμένες συντεταγμένες και $k$ τους ανεξάρτητους ολονομικούς περιορισμούς, δηλ. $f_i(\mathbf{q}) = 0$, με $i = 1, \ldots, k$, τότε το σύστημα κινείται πάνω σε μια πολλαπλότητα διάστασης $n - k$, με $n - k$ τις ανεξάρτητες συντεταγμένες.

- Παράδειγμα: Αν $n = 3$, $k = 1$, τότε κινείσαι σε επιφάνεια μέσα σε 3-διάστατο χώρο.

# Holonomic Constraints - Ολονομικοί Περιορισμοί -3

- Έστω επίπεδος ρομποτικός βραχίονας με 2 συνδέσμους (μήκη $l_1$, $l_2$) και γωνίες αρθρώσεων $\theta_1$, $\theta_2$.
- Η θέση του άκρου $(x, y)$ δίνεται από:

$$x = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

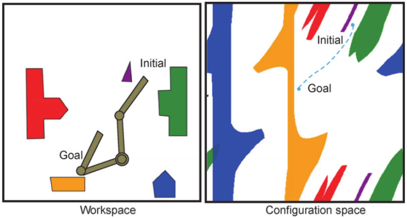
- Οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν τη σχέση μεταξύ $(x, y)$ και των $(\theta_1, \theta_2)$. Αντίστροφα, μπορούμε να τις δούμε σαν **ολονομικούς περιορισμούς** στη θέση του άκρου:

$$f(x, y, \theta_1, \theta_2) = 0$$

- Η εξίσωση αυτή περιγράφει μια **επιφάνεια** στο χώρο διαμορφώσεων (configuration space) όπου επιτρέπεται να κινηθεί το ρομπότ.

# Configuration Space vs Workspace

- **Configuration space (C-space):** The set of all possible joint configurations $(\theta_1, \theta_2)$. For a 2-link planar manipulator $\rightarrow$ 2D surface.
- **Workspace:** The set of all reachable positions $(x, y)$ of the end-effector. Typically a ring-shaped region determined by link lengths.
- A single point in **C-space** corresponds to a unique robot shape, and maps to a point in **workspace**.




Χώρος εργασίας και χώρος διαμορφώσεων.

*Image source: ResearchGate.

# Non-Holonomic Constr – Μη Ολονομικοί Περιορισμοί -1

- **Non-holonomic constraints** είναι **μη ολοκληρώσιμοι κινηματικοί περιορισμοί**, που περιορίζουν τις **επιτρεπτές ταχύτητες**, όχι άμεσα τις θέσεις.
- Συνήθως έχουν τη μορφή:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{q}, t)\,\dot{q}_i + a_0(\mathbf{q}, t) = 0$$

  δηλαδή **διαφορικές σχέσεις** μεταξύ ταχυτήτων.
- Δεν μπορούν να γραφτούν σαν αλγεβρικές εξισώσεις θέσης της μορφής $f(\mathbf{q}, t) = 0$.
- Περιγράφουν κινηματικούς περιορισμούς που **δεν ενσωματώνονται** σε γεωμετρικές εξισώσεις θέσης.

# Non-Holonomic Constr – Μη Ολονομικοί Περιορισμοί -2

- Παράδειγμα: **τροχός που κυλά χωρίς ολίσθηση**.
- Θεωρούμε ένα τροχοφόρο με θέση $(x, y)$ και προσανατολισμό $\theta$ ως προς τον άξονα $x$.
- Το **διανυσμα κατεύθυνσης** του τροχού: $\mathbf{t} = \left[\cos\theta, \sin\theta\right]^\top$
- Η **πλάγια διεύθυνση** (κάθετη στον τροχό):$\mathbf{n} = \left[-\sin\theta, \cos\theta\right]^\top$
- Η ταχύτητα του τροχού στο επίπεδο είναι:$\mathbf{v} = \left[\dot{x}, \dot{y}\right]^\top$.

## Κύρια Ιδέα

**Χωρίς πλευρική ολίσθηση**, σημαίνει οτι η ταχύτητα δεν έχει συνιστώσα στην πλάγια διεύθυνση:

$$\mathbf{n}^\top \mathbf{v} = 0$$

# Non-Holonomic Constrs - Μη Ολονομικοί Περιορισμοί -3

- Απο το $\mathbf{n}^\top \mathbf{v} = 0$ προκύπτει:

$$\dot{x} \sin\theta - \dot{y} \cos\theta = 0$$

- Ο τροχός δεν μπορεί να κινηθεί πλευρικά — η ταχύτητα πρέπει να είναι ευθυγραμμισμένη με τον άξονα του.
- Η παραπάνω εξίσωση είναι **μη ολοκληρώσιμη** $\rightarrow$ δεν υπάρχει αντίστοιχη αλγεβρική $f(x, y, \theta) = 0$ που να περιγράφει όλες τις επιτρεπτές θέσεις.

### Ουσιαστική Διαφορά

Ολονομικός: Περιορισμός σε **γεωμετρία θέσης**. Μη ολονομικός: Περιορισμός σε **ταχύτητες** $\rightarrow$ διαφορικός, όχι ολοκληρώσιμος.

# Non-Holonomic Constr – Μη Ολονομικοί Περιορισμοί -4

- Ένα **μη ολονομικό σύστημα** δεν περιορίζεται σε μια σταθερή πολλαπλότητα $f(\mathbf{q}) = 0$.
- Οι μη ολονομικοί περιορισμοί **περιορίζουν τις κατευθύνσεις κίνησης** στο χώρο διαμορφώσεων.
- Τυπικά οδηγούν σε **underactuated** με μη-αντιστρέψιμες κινηματικές σχέσεις.

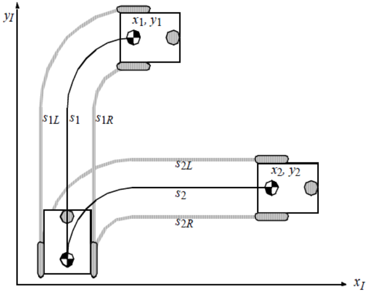
## Διατύπωση σε Πίνακες

Αν έχουμε $n$ γενικευμένες συντεταγμένες και $m$ μη ολονομικούς περιορισμούς:

$$A(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{D}(\mathbf{q}) \subset \mathbb{R}^n$$

όπου $\mathcal{D}(\mathbf{q})$ η **κατανομή επιτρεπτών ταχυτήτων**.

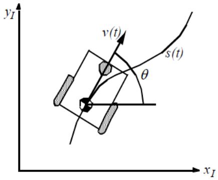
- Οι διαφορικές εξισώσεις δεν ολοκληρώνονται άμεσα για να προκύψει η τελική θέση.
- Η μέτρηση της απόστασης που διήνυσε κάθε τροχός δεν αρκεί για τον υπολογισμό της τελικής θέσης του ρομπότ· πρέπει επίσης να είναι γνωστός **ο τρόπος με τον οποίο εκτελέστηκε η κίνηση ως συνάρτηση του χρόνου**.
- $s_1 = s_2$, $s_{1R} = s_{2R}$, $s_{1L} = s_{2L}$ αλλά $x_1 \neq x_2$, και $y_1 \neq y_2$.




Autonomous Mobile Robots, our textbook.

- **Forward kinematics**
  - Μετασχηματισμός από τον χώρο αρθρώσεων στον φυσικό χώρο (θέσεις/προσανατολισμοί):

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = f_{frw}(\dot{\phi}_1, \ldots, \dot{\phi}_n, \beta_1, \ldots, \beta_m, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_m)$$




Autonomous Mobile Robots,

our textbook.

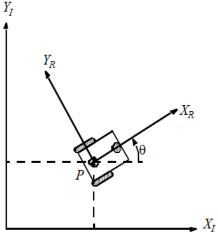
όπου $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ είναι η γραμμική και γωνιακή ταχύτητα, αντίστοιχα. $\dot{\phi}$, $\beta$ είναι οι ταχύτητες των κινητήριων τροχών και οι γωνίες των κατευθυντήριων τροχών, αντίστοιχα.

- **Inverse kinematics**
  - Μετασχηματισμός από τον φυσικό χώρο στον χώρο αρθρώσεων:

$$\left[\dot{\phi}_1, \ldots, \dot{\phi}_n, \beta_1, \ldots, \beta_m, \dot{\beta}_1, \ldots, \dot{\beta}_m)\right]^\top = f_{in}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})$$

# Kinematics – Κινηματική: Εισαγωγή 2

- Έστω δύο συστήματα αξόνων στο επίπεδο:
  - **Αρχικό σύστημα:** $\{X_I, Y_I\}$ (παγκόσμιο)
  - **Σύστημα ρομπότ:** $\{X_R, Y_R\}$ (προσαρμοσμένο στο σώμα)
- **Robot pose** στο αρχικό σύστημα: $\xi_I = \begin{bmatrix} x & y & \theta \end{bmatrix}^\top$
- Η σχέση μεταξύ ταχυτήτων στα δύο συστήματα δίνεται από:




Autonomous Mobile Robots, our textbook.

$$\dot{\xi}_R = R(\theta)\,\dot{\xi}_I \quad \text{or} \quad \dot{\xi}_I = R^\top(\theta)\,\dot{\xi}_R$$

## Rotation Matrix

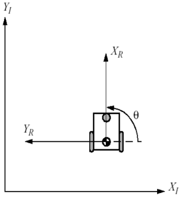
$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Kinematics – Κινηματική: Εισαγωγή 3

**Παράδειγμα**: Ρομπότ προσανατολισμένο στον **$\mathbf{Y_I}$**-άξονα

- Όταν το ρομπότ είναι στραμμένο προς τον $Y_I$ άξονα $\rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
- Ο πίνακας μετασχηματισμού θέσης/ταχύτητας γίνεται:

$$R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




Autonomous Mobile Robots, our textbook.

- Άρα:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} = R\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{y}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_I \\ -\dot{x}_I \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή: $\dot{x}_R = \dot{y}_I$, $\dot{y}_R = -\dot{x}_I \rightarrow$ το τοπικό πλαίσιο είναι στραμμένο κατά 90°.

# Assumptions – Παραδοχές

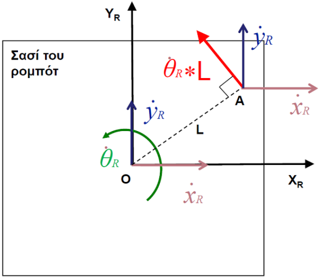
**Κίνηση επί επιπέδου → Planar motion assumptions**

- **Επαφή τροχού με επίπεδο** (Point contact): Το σημείο επαφής θεωρείται σημειακό δηλαδή όχι επιφάνεια.
- **Μη παραμορφώσιμοι τροχοί** (Rigid wheels): Οι τροχοί δεν παραμορφώνονται κατά την κύλιση.
- **«Καθαρή» κύλιση** (Pure rolling): Η σχετική ταχύτητα στο σημείο επαφής είναι μηδενική: $\mathbf{v}_C = 0$.
  όπου $C$ το σημείο επαφής τροχού–εδάφους.
- **Χωρίς πλαγιο-ολίσθηση** (No lateral slip): Η ταχύτητα κάθετα στο επίπεδο κύλισης είναι μηδενική.
- **Άξονας περιστροφής κάθετος στο επίπεδο κίνησης** (Wheel axis vertical to motion plane)
- **Στερεό σώμα** (Rigid chassis): Το σώμα (σασί) του ρομπότ θεωρείται στερεό.

# Velocity of a Rigid Body – Ταχύτητα στερεού σώματος -1

- Έστω ένα στερεό σώμα που κινείται επί επιπέδου.
- Οι **γραμμικές ταχύτητες** του σημείου αναφοράς $O$ είναι: $\dot{x}_R, \quad \dot{y}_R$.
- Η **γωνιακή ταχύτητα** γύρω από τον κάθετο άξονα είναι: $\dot{\theta}_R$.
- Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $A(x_A, y_A)$ του σώματος, με διανυσματική θέση:

$$\mathbf{r}_{A/O} = \begin{bmatrix} x_A - x_O \\ y_A - y_O \end{bmatrix}$$




Σημείο $A$ σε στερεό σώμα με αναφορά το $O$.

# Velocity of a Rigid Body – Ταχύτητα στερεού σώματος -2

**Στόχος**: Να υπολογίσουμε την ταχύτητα ενός **τυχόντος σημείου** $A$ πάνω στο σώμα.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/O}$$

- Για επίπεδη κίνηση:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix}$$

- Άρα:

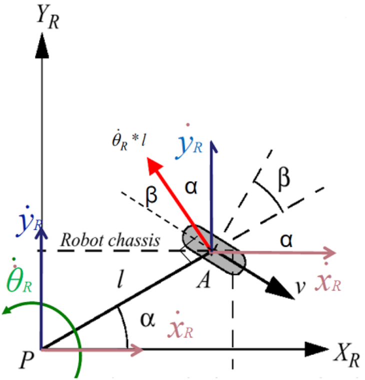
$$\mathbf{v}_A = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \end{bmatrix} + \dot{\theta}_R \begin{bmatrix} -(y_A - y_O) \\ x_A - x_O \end{bmatrix}$$

- Linear velocity = Translational + Rotational component

# Kinematic Constraints Imposed by Wheels – Κινηματικοί περιορισμοί από τροχούς -1

**Τυπικός κινητήριος τροχός** στο σώμα του ρομπότ.

- Θεωρούμε το **σημείο A** όπου ο τροχός είναι στερεωμένος στο σασί.
- Το **διάνυσμα ταχύτητας του σημείου A** πρέπει να έχει **την ίδια διεύθυνση με τον τροχό**, γιατί: No lateral slip
  δηλ. **δεν υπάρχει πλαγιοολίσθηση**.
- Αν $\alpha$ είναι ο προσανατολισμός του σώματος και $\beta$ η διεύθυνση του τροχού ως προς το σώμα, τότε οι προβολές της ταχύτητας: - Κατά τη διεύθυνση του τροχού → επιτρέπεται - Κάθετα στη διεύθυνση του τροχού → πρέπει να είναι **0**




Ταχύτητα σημείου A και διεύθυνση τροχού.

# Kinematic Constraints Imposed by Wheels – Κινηματικοί περιορισμοί από τροχούς -2

- Οι **προβολές της ταχύτητας** του σημείου A κατά μήκος και κάθετα στη διεύθυνση του τροχού δίνουν:

$$\dot{x}_R \cos(\alpha+\beta) + \dot{y}_R \sin(\alpha+\beta) + \dot{\theta}_R\, l \sin(\beta) = 0$$

$$\dot{x}_R \sin(\alpha+\beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha+\beta) - \dot{\theta}_R\, l \cos(\beta) = r\,\dot{\phi}$$

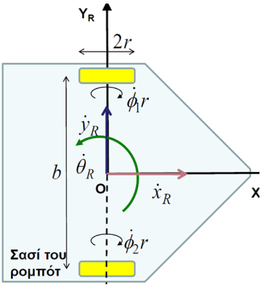
  - $\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R$: ταχύτητες του σώματος (στο πλαίσιο P)
  - $l$: απόσταση σημείου A από το κέντρο αναφοράς
  - $\beta$: γωνία τροχού ως προς τον διαμήκη άξονα του σώματος
  - $r$: ακτίνα τροχού, $\dot{\phi}$: γωνιακή ταχύτητα τροχού
- Οι παραπάνω σχέσεις είναι οι **κινηματικοί περιορισμοί που επιβάλλει ο τροχός** στην κίνηση του ρομπότ.
- Αν ο τροχός είναι **κατευθυντήριος (steered)**, η $\beta$ γίνεται μεταβλητή $\beta(t)$, αλλά οι εξισώσεις διατηρούνται ίδιες.

# Example: Differential Drive Robot – Παράδειγμα: Διαφορικά οδηγούμενο ρομπότ -1

- **Δεδομένα**:
  - Απόσταση τροχών: $b$
  - Ακτίνα τροχών: $r$
  - Γωνιακές ταχύτητες τροχών: $\dot{\phi}_1$ (δεξί), $\dot{\phi}_2$ (αριστερό)
- **Αριστερός τροχός**: $\alpha = 90°$, $\beta = 0°$, $l = \frac{b}{2}$

$$\dot{x}_R \cos(90°) + \dot{y}_R \sin(90°) + \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \sin 0° = 0$$

$$\dot{x}_R \sin(90°) - \dot{y}_R \cos(90°) - \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \cos 0° = r\,\dot{\phi}_2$$



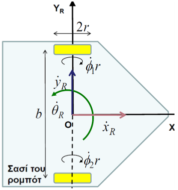

Διαφορικά οδηγούμενο ρομπότ.

# Example: Differential Drive Robot – Παράδειγμα: Διαφορικά οδηγούμενο ρομπότ -2

- **Δεξιός τροχός:** $\alpha = -90^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $l = \frac{b}{2}$

$$\dot{x}_R \cos(-90^\circ) + \dot{y}_R \sin(-90^\circ) + \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \sin 0^\circ = 0$$

$$\dot{x}_R \sin(-90^\circ) - \dot{y}_R \cos(-90^\circ) - \dot{\theta}_R \frac{b}{2} \cos 0^\circ = r\,\dot{\phi}_1$$




## Κινηματικό Μοντέλο

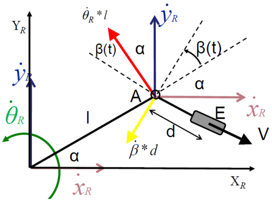
$$\dot{x}_R = \frac{r}{2}(\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2)$$

$$\dot{y}_R = 0$$

$$\dot{\theta}_R = \frac{r}{b}(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$$

Θεωρούμε ένα **caster** τροχό, ο οποίος:

- Συνδέεται στο σώμα σε σημείο $A$
- Έχει άξονα διεύθυνσης που σχηματίζει γωνία $\beta(t)$ με τον διαμήκη άξονα
- Μπορεί να περιστρέφεται γύρω από το $A$ (π.χ. ελεύθερος τροχός στήριξης)
- Το **διάνυσμα ταχύτητας του σημείου περιστροφής** $A$:
  - Έχει **μία συνιστώσα κατά τη διεύθυνση του τροχού** (όπως στον τυπικό τροχό)
  - Και **μία συνιστώσα λόγω περιστροφής του τροχού περί το** $A$




Κάστερ τροχός.

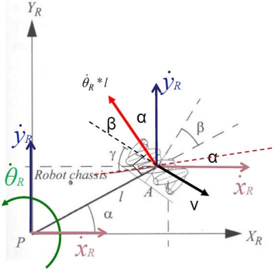
Οι προβολές της ταχύτητας δίνουν τους περιορισμούς:

$$\dot{x}_R \sin(\alpha + \beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha + \beta) - \dot{\theta}_R \, l \cos\beta = r\,\dot{\phi}$$

$$\dot{x}_R \cos(\alpha + \beta) + \dot{y}_R \sin(\alpha + \beta) + \dot{\theta}_R \, l \sin\beta = -d\,\dot{\beta}$$

Ο **πανκατευθυντικός τροχός** διαθέτει **ρόλερς** τοποθετημένους υπό γωνία $\gamma$ ως προς το βασικό επίπεδο του τροχού.

- Τα ρόλερς επιτρέπουν κύλιση σε **οποιαδήποτε κατεύθυνση**, χωρίς πλαγιοολίσθηση, άρα:
  - Κατά τη διεύθυνση της γραμμής των ρόλερς $\rightarrow$ **καμία συνιστώσα ταχύτητας δεν περιορίζεται**.
  - Κατά τη διεύθυνση του επιπέδου του τροχού $\rightarrow$ **υπάρχει περιορισμός**.
- Η **ταχύτητα του σημείου A** κατά τη διεύθυνση του επιπέδου του τροχού:




Πανκατευθυντικός τροχός με ρολλερς υπό γωνία $\gamma$.

$$v_{\text{τροχού}} = r\,\dot{\phi}\cos\gamma$$

Από τις προβολές προκύπτει ο **μοναδικός κινηματικός περιορισμός**:

$$\dot{x}_R \sin(\alpha+\beta+\gamma) - \dot{y}_R \cos(\alpha+\beta+\gamma) - \dot{\theta}_R\, l \cos(\beta+\gamma) = r\,\dot{\phi}\cos\gamma$$

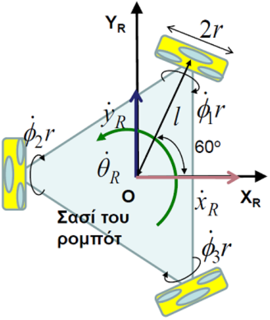
# Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τριών τροχών -1

Το ρομπότ διαθέτει 3 **πανκατευθυντικούς τροχούς** τοποθετημένους στις κορυφές **ισοπλεύρου τριγώνου**.

- Για όλους τους τροχούς: $\gamma = 0^\circ$ (ρολλερς χωρίς κλίση).
- Απόσταση τροχών από το κέντρο: $l$ — Ακτίνα τροχών: $r$
- Οι τροχοί αριθμούνται 1–3 κυκλικά.

**Τροχός 1:** $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 0^\circ$

$$\dot{x}_R \sin(60^\circ) - \dot{y}_R \cos(60^\circ) - \dot{\theta}_R\, l \cos 0^\circ = r\, \dot{\phi}_1 \cos 0^\circ$$




Τρίτροχο πανκατευθυντικό ρομπότ σε ισόπλευρο τρίγωνο.

# Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τριών τροχών -2

**Τροχοί 2 και 3:** Παρόμοια με τον τροχό 1, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\dot{x}_R \sin(\alpha_i) - \dot{y}_R \cos(\alpha_i) - \dot{\theta}_R \, l \cos 0^\circ = r \, \dot{\phi}_i \quad (i = 2, 3)$$

(2), (3)

## Σχόλιο

Οι εξισώσεις (1)–(3) δείχνουν ότι το ρομπότ μπορεί να επιτύχει **οποιαδήποτε τριάδα ταχυτήτων**

$$(\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R)$$

στο επίπεδο, αρκεί να ρυθμιστούν κατάλληλα οι γωνιακές ταχύτητες $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, \dot{\phi}_3$.

**Note:** This is what makes the 3-wheel omni platform **fully holonomic**.

# Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τεσσάρων τροχών -1

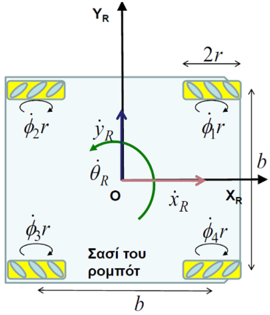
Το ρομπότ διαθέτει 4 **πανκατευθυντικούς τροχούς**, τοποθετημένους στις **κορυφές τετραγώνου**.

- Απόσταση μεταξύ τροχών: $b$
- Απόσταση από το κέντρο: $l = \frac{b}{\sqrt{2}}$
- Ακτίνα τροχών: $r$

**Τροχός 1**: $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$, $\gamma = -45°$

$$\dot{x}_R \sin(\alpha+\beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha+\beta) - \dot{\theta}_R \, l \cos\beta = r\,\dot{\phi}_1 \cos\gamma$$

**Υπενθύμιση**: Για ομνι τροχούς η γωνία $\gamma$ αφορά τη **διεύθυνση των ρόλερς** ως προς το επίπεδο του τροχού.




Τετράτροχο πανκατευθυντικό ρομπότ.

# Παράδειγμα: Πανκατευθυντικό ρομπότ τεσσάρων τροχών -2

**Τροχοί 2, 3 και 4**: Παρόμοια με τον τροχό 1, προκύπτουν οι εξισώσεις:

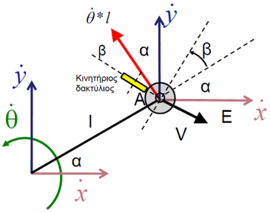
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}(\dot{x}_R - \dot{y}_R - \dot{\theta}_R b) &= \dot{\phi}_1 \\
\frac{1}{r}(\dot{x}_R + \dot{y}_R - \dot{\theta}_R b) &= \dot{\phi}_2 \\
\frac{1}{r}(-\dot{x}_R + \dot{y}_R + \dot{\theta}_R b) &= \dot{\phi}_3 \\
\frac{1}{r}(-\dot{x}_R - \dot{y}_R + \dot{\theta}_R b) &= \dot{\phi}_4
\end{aligned}
$$

## Σχόλιο

Για μια επιθυμητή ταχύτητα $(\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R)$, μπορούν να λυθούν **τρεις από τις εξισώσεις** για να προσδιοριστούν οι αντίστοιχες $\dot{\phi}_i$. Η **τέταρτη** πρέπει να ικανοποιεί την τελευταία σχέση — παρέχοντας **πλεονασμό κινητήρων**.

## Kinematic Constraints: Σφαιρικός τροχός

- Ο **σφαιρικός τροχός** (spherical wheel) αποτελείται από μία σφαίρα που μπορεί να κυλίεται **προς οποιαδήποτε κατεύθυνση**, καθώς και έναν **κινητήριο δακτύλιο** που της επιβάλλει κίνηση προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση $V$.
- Ο **μοναδικός κινηματικός περιορισμός** είναι αυτός **κατά τη διεύθυνση του κινητήριου δακτυλίου**.
- Προς όλες τις άλλες κατευθύνσεις, η σφαίρα κινείται **χωρίς περιορισμούς**.



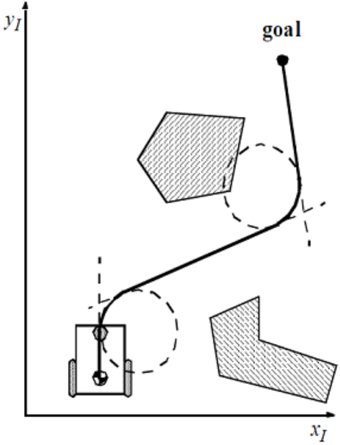

Σφαιρικός τροχός: Περιορισμός κατά τη διεύθυνση $V$.

**Κινηματική σχέση κατά τη διεύθυνση $V$:**

$$\dot{x}_R \sin(\alpha+\beta) - \dot{y}_R \cos(\alpha+\beta) - \dot{\theta}_R\, l \cos\beta = r\,\dot{\phi}$$

# Motion Control: Έλεγχος Ανοιχτού Βρόχου
## Το πρόβλημα

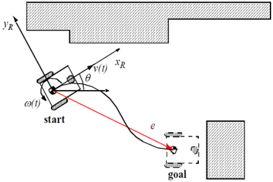
- Το **μονοπάτι** αναλύεται σε τμήματα απλής γεωμετρίας:
  - **Ευθύγραμμα τμήματα**
  - **Κυκλικά τόξα**
- Ο έλεγχος συνίσταται:
  - Στον **προσδιορισμό του μονοπατιού** λαμβάνοντας υπόψη εμπόδια — **γεωμετρικό πρόβλημα**.
  - Στον **έλεγχο καθενός τροχού ξεχωριστά**.
- **Μειονεκτήματα:**
  - Όλα τα εγγενή μειονεκτήματα των ανοικτών βρόχων.
  - Δεν προσαρμόζεται σε **μεταβαλλόμενα εμπόδια**.




Έλεγχος ανοικτού βρόχου:

# Το πρόβλημα

- Θεωρούμε ένα ρομπότ που ξεκινά από αρχική θέση **start** και επιδιώκει να φτάσει σε **goal**.
- Ορίζουμε το **διάνυσμα σφάλματος** $e(t)$ που περιλαμβάνει αποκλίσεις σε θέση και προσανατολισμό.




Έλεγχος κίνησης: από start σε goal με σφάλμα $e(t)$.

**Νόμος ελέγχου:** $\begin{bmatrix} v(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = K(t,e) \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \end{bmatrix}$

**Ζητούμενο**

Βρες αν υπάρχει πίνακας $K(t,e)$ που καθιστά το σφάλμα **ασυμπτωτικά μηδενικό**, i.e., $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.