Autonomous Robotic Vehicles

Hellenic Mediterranean University

Lecture 6

Dr. Alina Eqtami

Lecture Goals - Στόχοι σημερινού μαθήματος!

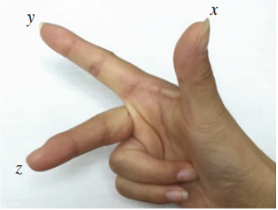
Μετά το σημερινό μάθημα θα μπορείτε:

- Να περιγράφετε τη γεωμετρία και τα συστήματα αναφοράς των UAV.
- Να εξηγείτε τους βασικούς τρόπους αναπαράστασης προσανατολισμού (Euler angles, Rotation Matrices, Quaternions).
- Να κατανοείτε τα κινηματικά μοντέλα άκαμπτων σωμάτων και πώς εφαρμόζονται σε multicopters.

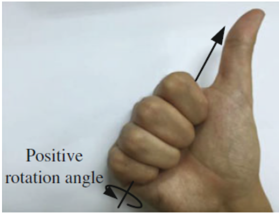
Right-Hand Rule

Κανόνας του δεξιού χεριού:

- Χρησιμοποιείται για να ορίσουμε τη **θετική φορά των αξόνων** και των περιστροφών.



- Ο αντίχειρας δείχνει τη θετική διεύθυνση του άξονα. Τα υπόλοιπα δάχτυλα δείχνουν τη **θετική φορά περιστροφής**.



Unit Vectors in Earth and Body Frames

In 3D space, we use three orthonormal **unit vectors**: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, to define directions along the **x**, **y**, and **z** axes.

In the body frame:

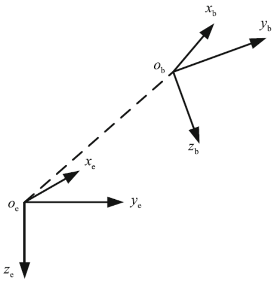
$$^{b}\mathbf{b}_1, {}^{b}\mathbf{b}_2, {}^{b}\mathbf{b}_3 \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

represent the UAV-fixed axes (Usually: forward, right, down).

In the earth/inertial frame:

$$^{e}\mathbf{b}_1, {}^{e}\mathbf{b}_2, {}^{e}\mathbf{b}_3 \neq {}^{b}\mathbf{b}_1, {}^{b}\mathbf{b}_2, {}^{b}\mathbf{b}_3$$

are fixed to the world (Usually: North–East–Down).



- The **Earth frame** is inertial (fixed to the ground).
- The **Body frame** moves and rotates with the UAV.

Attitude Representation – Euler Angles

Θεώρημα του Euler (Euler's theorem): Η περιστροφή ενός στερεού γύρω από ένα σταθερό σημείο μπορεί να εκφραστεί ως **σύνθεση τριών πεπερασμένων περιστροφών** γύρω από διαδοχικούς άξονες.

- Κάθε άξονας είναι ένας από το **περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς**.
- Κάθε γωνία είναι μία από τις **Euler angles**:

$$\psi \text{ (yaw, around z)}, \quad \theta \text{ (pitch, around y)}, \quad \phi \text{ (roll, around x)}.$$

- Typical ranges:

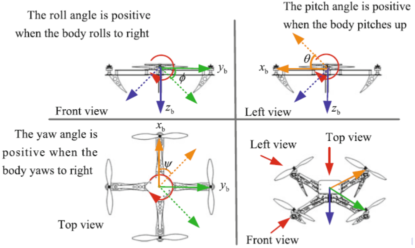
$$\psi \in [-\pi, \pi], \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \phi \in [-\pi, \pi].$$

- Τα εύρη αυτά εξασφαλίζουν **μοναδική αναπαράσταση**.

Attitude Representation – UAV

Για ένα UAV:

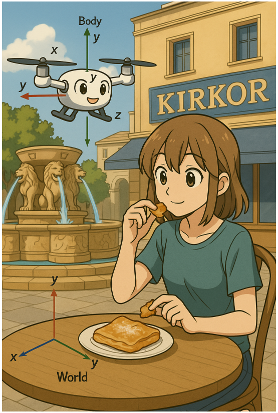
- Η μετάβαση από **Earth frame (EFCF)** σε **Body frame (ABCF)** γίνεται με 3 **στοιχειώδεις περιστροφές**.
- Συνήθης σειρά: **yaw** → **pitch** → **roll**.
- Η **attitude matrix** προκύπτει ως **γινόμενο των 3 rotation matrices.**
- **Η σειρά των περιστροφών είναι κρίσιμη**: αν αλλάξει (π.χ. yaw–roll–pitch), προκύπτει **διαφορετικός τελικός προσανατολισμός**.



Attitude Rates vs Body Angular Velocity

- Οι $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ (Euler rates) εκφράζουν αλλαγές στάσης ως προς το **inertial (earth) frame**.
- Τα p, q, r είναι οι **γωνιακές ταχύτητες του σώματος** (body rates) γύρω από τους άξονες του UAV.
- **Διαφορετικά πλαίσια** απαιτείται **μετασχηματισμός**.

$$\dot{\mathbf{\Theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \qquad {}^{b}\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$



Relationship Between the Attitude Rate and the Aircraft Body's Angular Velocity

Σχέση μεταξύ **Euler rates** $\dot\phi, \dot\theta, \dot\psi$ και **body rates** p, q, r:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = W(\phi,\theta) \begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix}, \qquad W(\phi,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ Ακολουθία περιστροφών: $R = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$

Αντίστροφα:

$$\begin{bmatrix} \dot\phi \\ \dot\theta \\ \dot\psi \end{bmatrix} = W^{-1}(\phi,\theta) \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

- Αν $\phi = \theta = 0^\circ$: $p = \dot\phi,\ q = \dot\theta,\ r = \dot\psi$.
- Για μικρές γωνίες σχεδόν ταυτοσημία.
- Όταν $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$: $\cos\theta \to 0$ singularity.

Rotation Matrices

Μια **Rotation Matrix,** $\mathbf{R}_{be} \in \mathrm{SO}(3)$,

$$\mathrm{SO}(3) \triangleq \left\{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \;\middle|\; \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_3,\ \det(\mathbf{R}) = 1 \right\}$$

- $\mathbf{R}_{\mathrm{be}}$: μετασχηματίζει διανύσματα από το **Body frame (b)** $\rightarrow$ **Earth frame (e)**.
- Το $\mathrm{SO}(3)$ είναι το **σύνολο όλων των δυνατών περιστροφών** στο 3D.

Για τη σειρά ZYX (Yaw–Pitch–Roll):

Rotation Matrix (ZYX):

$$\mathbf{R}_{be} = \mathbf{R}_z(\psi)\,\mathbf{R}_y(\theta)\,\mathbf{R}_x(\phi)$$

Rotation Matrix for ZYX (Yaw–Pitch–Roll)

Η Rotation matrix* αναλυτικά δίνεται ως:

Explicit form of $\mathbf{R}_{be}$ (ZYX)

$$\mathbf{R}_{be} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin - \sin\cos & \cos\cos \end{bmatrix}$$

- ψ: περιστροφή γύρω από **world z** (yaw).
- θ: περιστροφή γύρω από **νέο y** (pitch).
- ϕ: περιστροφή γύρω από **τελικό x** (roll).
- $\mathbf{R}_{be}$: μετασχηματίζει διανύσματα από **Body** → **Earth**. Το αντίστροφο είναι $\mathbf{R}_{eb} = \mathbf{R}_{be}^{\top}$.

*Κάθε στήλη της $\mathbf{R}_{be}$ είναι ένας μοναδιαίος άξονας του body frame, εκφρασμένος στο earth frame.

Euler Angles vs Rotation Matrices vs Quaternions

Euler Angles (Yaw–Pitch–Roll):

- **Singularity** όταν $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$.
- Εξαρτώνται από τη σειρά περιστροφών.
- Οι εξισώσεις για ρυθμούς είναι πιο πολύπλοκες.

Rotation Matrices:

- Δεν έχουν singularities.
- Χρειάζονται 9 στοιχεία, ενώ έχουν μόνο 3 βαθμούς ελευθερίας.
- Πρέπει να ικανοποιούν $\mathbf{R}^\top\mathbf{R} = \mathbf{I}$ και $\det \mathbf{R} = 1$. $\Rightarrow$ Δύσκολο να διατηρηθούν ακριβείς αριθμητικά (π.χ. σε integration).

Quaternions:

- Χωρίς singularities.
- Μόνο 4 παράμετροι.
- **Αριθμητικά σταθεροί** και εύκολοι.

Definition of Quaternions –1

Quaternions are normally written as:

$$q = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

where $q_0 \in \mathbb{R}$ is the **scalar part** of $q \in \mathbb{R}^4$ and $\mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^3$ is the **vector part**.

For a real number $s \in \mathbb{R}$, the corresponding quaternion is:

$$q = \begin{bmatrix} s \\ \mathbf{0}_{1\times 3} \end{bmatrix}.$$

For a vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, the corresponding quaternion is:

$$q = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}.$$

Ουσιαστικά, ένας quaternion είναι ένας τετραδιάστατος αριθμός που αποτελείται από ένα **πραγματικό** και ένα **διανυσματικό** μέρος.

Definition of Quaternions –2

Κάθε 3D περιστροφή μπορεί να αναπαρασταθεί ως μία **μοναδική** περιστροφή με **γωνία** θ γύρω από έναν μοναδιαίο άξονα $\mathbf{u}$. Ο αντίστοιχος **unit quaternion** είναι:

$$q = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \mathbf{u}\sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}.$$

Το scalar μέρος $q_0 = \cos(\theta/2)$ κωδικοποιεί τη **γωνία περιστροφής**, ενώ το διανυσματικό μέρος $\mathbf{q}_v = \mathbf{u}\sin(\theta/2)$ κωδικοποιεί τον **άξονα περιστροφής**.

Παράδειγμα: Περιστροφή $\theta = 90^\circ$ γύρω από τον άξονα y:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad q_0 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \mathbf{q}_v = \mathbf{u}\sin\frac{\pi}{4} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Σύνθεση Quaternions

Για ένα UAV με Yaw–Pitch–Roll ακολουθία περιστροφών (ψ, θ, ϕ), ο συνολικός quaternion q_{eb} προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των επιμέρους:

$$\boxed{q_{eb} = q_z(\psi) \otimes q_y(\theta) \otimes q_x(\phi)}$$

- $q_z(\psi)$: περιστροφή γύρω από τον **άξονα** z της Γης (yaw),
- $q_y(\theta)$: περιστροφή γύρω από τον **ενδιάμεσο** y (pitch),
- $q_x(\phi)$: περιστροφή γύρω από τον x (roll).

Ο τελεστής $\otimes$ δηλώνει **quaternion multiplication**, η οποία είναι **προσεταιριστική** και αντιστοιχεί στη σύνθεση περιστροφών.

Ο συνολικός q_{eb} είναι ισοδύναμος με τη $\mathbf{R}_{eb}$ που είδαμε προηγουμένως.

$$\text{Αν } q_a = \begin{bmatrix} a_0 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad q_b = \begin{bmatrix} b_0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad \text{τότε } q_a \otimes q_b = \begin{bmatrix} a_0 b_0 - \mathbf{a}^\top \mathbf{b} \\ a_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Χρήση Quaternions στην πράξη

Τα quaternions χρησιμοποιούνται εκτεταμένα σε συστήματα UAV για να **περιγράφουν και να ενημερώνουν τον προσανατολισμό** χωρίς singularities.

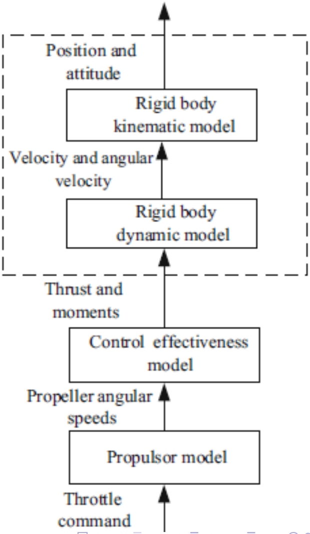
Τυπικές χρήσεις:

- **Αναπαράσταση στάσης** του UAV στον υπολογιστή ή στον ελεγκτή πτήσης.
- **Ενημέρωση στάσης** με ολοκλήρωση των body rates (p, q, r) μέσω διαφορικής εξίσωσης του quaternion.
- **Μετατροπή διανυσμάτων** (π.χ. βαρυτικής επιτάχυνσης, μετρήσεων IMU) από Body $\leftrightarrow$ Earth frame.

Σχόλιο: Οι quaternions είναι ένας **συμπαγής, αριθμητικά σταθερός και μοναδικός τρόπος** να περιγράψουμε το attitude. Δεν αντικαθιστούν πλήρως τις rotation matrices ή τις Euler angles — **τις συμπληρώνουν**, ανάλογα με την εφαρμογή.

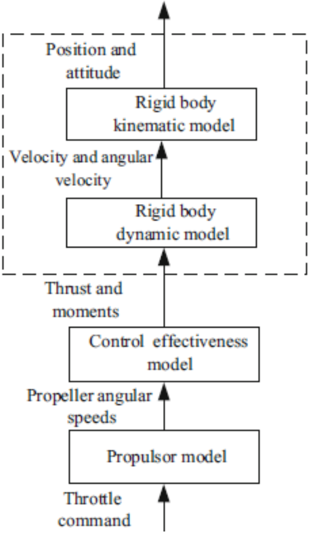
Η μοντελοποίηση ενός multicopter περιλαμβάνει 4 μέρη:

1. **Rigid-body kinematic model**
   - Δεν εξαρτάται από μάζα ή δυνάμεις.
   - Μελετά θέση, ταχύτητα, στάση (attitude) και γωνιακή ταχύτητα.
   - **Είσοδοι**: γραμμική & γωνιακή ταχύτητα.
   - **Έξοδοι**: θέση & στάση.



2. Rigid-body dynamic model

- Περιλαμβάνει μάζα, ροπές αδράνειας και δυνάμεις.
- Βασίζεται στους νόμους του Newton, ενέργειας και ορμής.
- **Είσοδοι**: ώση & ροπές.
- **Έξοδοι**: γραμμική & γωνιακή ταχύτητα.



Τα δύο αυτά μοντέλα (1+2) συγκροτούν το **γενικό μοντέλο πτήσης ενός multicopter.

Multicopter Modeling – Overview –3

3. **Control effectiveness model**
   - **Είσοδοι**: ταχύτητες περιστροφής προπελών.
   - **Έξοδοι**: ώση και ροπές.
   - Περιγράφει πώς οι προπέλες δημιουργούν δυνάμεις και ροπές.
   - Το **control allocation model** είναι η **αντίστροφη** διαδικασία: από επιθυμητές δυνάμεις & ροπές → υπολογισμός απαιτούμενων ταχυτήτων προπελών.
4. **Propulsor model**
   - Περιλαμβάνει κινητήρα (DC), ESC και προπέλα.
   - **Είσοδοι**: εντολές throttle (0–1).
   - **Έξοδοι**: ταχύτητες περιστροφής προπελών (ή ώση απευθείας).

Modeling Assumptions for Multicopters

Για λόγους απλοποίησης, όταν μοντελοποιούμε ένα multicopter, υιοθετούμε τις εξής βασικές υποθέσεις:

- **Assumption 1:** Το multicopter θεωρείται άκαμπτο σώμα.
- **Assumption 2:** Η μάζα και οι ροπές αδράνειας παραμένουν σταθερές.
- **Assumption 3:** Το γεωμετρικό κέντρο συμπίπτει με το Center of Gravity (CoG)*.
- **Assumption 4:** Οι μόνες δυνάμεις είναι:
  - η βαρύτητα (κατά τον $+z$ άξονα),
  - ηώση των προπελών (κατά τον $-z$ άξονα).
- **Υπόθεση 5:** Οι προπέλες με μονό αριθμό περιστρέφονται αντίθετα από τη φορά του ρολογιού, ενώ οι ζυγές με τη φορά του ρολογιού.

*Αν δεν ίσχυε αυτή η υπόθεση, τότε οι δυνάμεις δεν θα περνούσαν από το ϑΓ και θα έπρεπε να εισάγουμε πρόσθετες ροπές στα δυναμικά μοντέλα.

Rigid-body Kinematics – Intro

Θεωρούμε ότι το **multicopter** είναι άκαμπτο σώμα και ορίζουμε το διάνυσμα θέσης του **κέντρου βάρους** στο Earth frame ως:

$$ {}^{e}\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3. $$

Η κινηματική εξίσωση μεταφοράς δίνεται από:

$$ {}^{e}\dot{\mathbf{p}} = {}^{e}\mathbf{v}, $$

όπου ${}^{e}\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι η **ταχύτητα του κέντρου βάρους** εκφρασμένη στο Εαρτη φραμε.

Για το **περιστροφικό μέρος**, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε:

- **Euler angles model**,
- **Rotation matrix model**,
- **Quaternions model**.

Στις επόμενες διαφάνειες δίνεται η μορφή των **κινηματικών εξισώσεων attitude** και για τα τρία μοντέλα.

Rigid-body Kinematics – Euler Angles Model

Με βάση την Υπόθεση 6.1 και το Euler angles kinematic model, έχουμε:

$$^{e}\dot{\mathbf{p}} = {}^{e}\mathbf{v}.$$

Για την στάση, ο ρυθμός μεταβολής των Euler angles δίνεται από:

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{W}(\phi, \theta)\, {}^{b}\boldsymbol{\omega},$$

όπου $\boldsymbol{\Theta} = [\phi\ \theta\ \psi]^\top$ και ${}^{b}\boldsymbol{\omega} = [p\ q\ r]^\top$.
$\mathbf{W}(\phi, \theta)$ είναι ο πίνακας μετασχηματισμού από **body rates** σε **Euler rates**, που είδαμε νωρίτερα.

$$\mathbf{W}(\phi, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi \tan\theta & \cos\phi \tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix}.$$

Rigid-body Kinematics – Rotation Matrix Model

Και εδώ έχουμε:

$$ {}^e\dot{\mathbf{p}} = {}^e\mathbf{v} = \mathbf{R}_{eb}\,{}^b\mathbf{v}. $$

Η κινηματική εξίσωση της **rotation matrix** $\mathbf{R}_{eb} \in SO(3)$ (Body $\rightarrow$ Earth) είναι:

$$ \dot{\mathbf{R}}_{eb} = \mathbf{R}_{eb} \left[{}^b\boldsymbol{\omega} \right]_\times , $$

όπου $[\cdot]_\times$ είναι ο τελεστής διανυσματικού γινομένου:

$$ [\mathbf{x}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}. $$

Αυτή η μορφή προκύπτει από τον ορισμό της περιστροφής ως ορθογώνιας μήτρας στο SO(3).

Rigid-body Kinematics – Quaternions Model

Η εξίσωση μεταφοράς παραμένει ίδια:

$$ {}^{e}\dot{\mathbf{p}} = {}^{e}\mathbf{v}. $$

Για τη στάση, αν

$$ q_{eb} = \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 $$

είναι ο **unit quaternion** (Body → Earth), τότε:

$$ \dot{q}_0 = -\frac{1}{2}\,\mathbf{q}_v^\top\,{}^{b}\boldsymbol{\omega}, $$

$$ \dot{\mathbf{q}}_v = \frac{1}{2}\left[q_0\mathbf{I}_3 + [\mathbf{q}_v]_\times\right]\,{}^{b}\boldsymbol{\omega}. $$

Αυτές οι εξισώσεις χρησιμοποιούνται για να ενημερώσουμε το quaternion όταν γνωρίζουμε τα body rates (p, q, r).

Σύγκριση Unicycle vs UAV Kinematics

Unicycle (2D)

$$\dot{x} = v\cos\theta$$

$$\dot{y} = v\sin\theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$

- θ: προσανατολισμός (1 γωνία).
- v, ω: **inputs** κινηματικού μοντέλου.
- Η θέση και η στάση προκύπτουν **απευθείας από τις ταχύτητες**.

UAV (3D)

$$^{e}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_{eb}\, {}^{b}\mathbf{v}$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{eb} = \mathbf{R}_{eb}\, [{}^{b}\omega]_{\times}$$

- Η στάση περιγράφεται από $\mathbf{R}_{eb} \in SO(3)$.
- Οι ${}^{b}\omega$: **inputs** (body angular rates) και οι ${}^{b}\mathbf{v}$ (γραμμικές ταχύτητες): προκύπτουν από το **δυναμικό μοντέλο** (όχι απευθείας από τον έλεγχο).

Σύνοψη Διαφορών

Unicycle

- Κινηματικό μοντέλο (2D)
- Είσοδοι: v, ω
- Οι ταχύτητες δίνονται από τον ελεγκτή
- Συνήθως ένας ελεγκτής θέσης
- Αργή χρονική κλίμακα
- Underactuated (non-holonomic)

UAV (Quadrotor)

- Δυναμικό μοντέλο (3D, 6 DOF)
- Είσοδοι: Thrust + Ροπές
- Οι ταχύτητες είναι καταστάσεις (states)
- Ιεραρχικός έλεγχος (Θέση $\rightarrow$ Στάση $\rightarrow$ Κινητήρες)
- Πολύ γρήγορος inner loop
- Underactuated (6 DOF, 4 inputs)

Στο επόμενο μάθημα: Dynamics and Control of Multicopters.

System States & Inputs of a UAV (Quadrotor)

System States:

- **Θέση** ${}^{e}\mathbf{p} = [x\ y\ z]^\top$
- **Ταχύτητα** ${}^{e}\mathbf{v} = [\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}]^\top$
- **Στάση (Orientation)**
  - Euler angles (ϕ, θ, ψ) ή
  - Rotation matrix $\mathbf{R}_{eb}$ ή
  - Quaternion q_{eb}
- **Γωνιακές ταχύτητες** ${}^{b}\boldsymbol{\omega} = [p\ q\ r]^\top$

Inputs (Control Inputs):

- **Συνολική ώση** T (κατά $-z_b$)
- **Ροπές κύλισης** τ_ϕ (roll)
- **Ροπές κλίσης** τ_θ (pitch)
- **Ροπές διεύθυνσης** τ_ψ (yaw)

Συνολικά: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{12}$ $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{4}$ (τυπικά για μοντέλα quadrotor).

Σημείωση: Το σύστημα είναι **underactuated** — έχει 6 DOF αλλά μόνο 4 ελέγξιμες εισόδους.