



Autonomous Robotic Vehicles

Hellenic Mediterranean University

Lecture 7

Dr. Alina Eqtami

Μετά το σημερινό μάθημα θα μπορείτε:

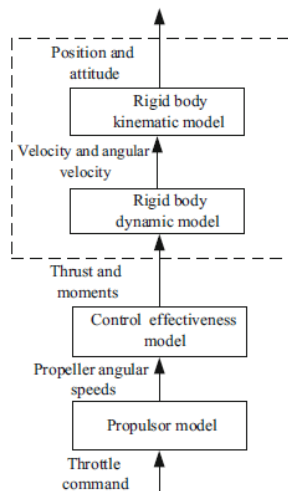
- Να εξηγείτε τη διαφορά μεταξύ **κινηματικής** και **δυναμικής** ανάλυσης στα πολυκόπτερα.
- Να περιγράφετε το **μοντέλο μεταφορικής και στροφικής δυναμικής** ενός multicopter.
- Να κατανοείτε την **επίδραση των δυνάμεων και ροπών** στην κίνηση και τον προσανατολισμό.
- Να ερμηνεύετε τη **φυσική σημασία των γυροσκοπικών ροπών** και της **ευστάθειας**.
- Να αναγνωρίζετε πώς προκύπτει το **γραμμικοποιημένο μοντέλο πτήσης** και σε ποιά υποσυστήματα διαχωρίζεται.

Ανακεφαλαίωση:

- Στο προηγούμενο μάθημα μελετήσαμε την **κινηματική** των multicopters: δηλαδή τη σχέση μεταξύ **θέσης**, **ταχύτητας** και **στάσης** χωρίς να λάβουμε υπόψη δυνάμεις ή ροπές.

Σήμερα:

- Προχωράμε στη **δυναμική μοντελοποίηση**, δηλαδή πώς οι **δυνάμεις** και οι **ροπές** επηρεάζουν την κίνηση.
- Θα αναπτύξουμε το **δυναμικό μοντέλο** του multicopter και θα συνδέσουμε τα κινηματικά μεγέθη με τα δυναμικά.



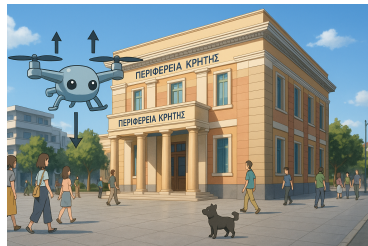
Ανάλυση Δυνάμεων:

- Η συνολική ώση $f \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ έχει κατεύθυνση μόνο προς τα πάνω, στον άξονα z_- .
- Η βαρύτητα $g \in \mathbb{R}^+$ δρα προς την κατεύθυνση z_+ .

Στο αδρανειακό πλαίσιο, η επιτάχυνση του κέντρου μάζας, δίνεται:

$$\dot{\mathbf{v}}_e = g \mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{R}_{be} \mathbf{e}_3$$

όπου \mathbf{R}_{be} η transformation matrix from body frame to earth frame και $\mathbf{e}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα z ,



Rotation Matrix Derivative:

Ξεκινάμε απο το $\mathbf{v}_e = \mathbf{R}_{be}\mathbf{v}_b$, άρα

$$\mathbf{v}_b = \mathbf{R}_{be}^T \mathbf{v}_e \Rightarrow \dot{\mathbf{v}}_b = \dot{\mathbf{R}}_{be}^T \mathbf{v}_e + \mathbf{R}_{be}^T \dot{\mathbf{v}}_e$$

Ορισμός: Αν \mathbf{R}_{be} είναι ο πίνακας περιστροφής από το body frame στο inertial frame, τότε η χρονική του παράγωγος δίνεται από:

$$\dot{\mathbf{R}}_{be} = \mathbf{R}_{be} [\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \quad \text{ή} \quad \dot{\mathbf{R}}_{be}^T = -[\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \mathbf{R}_{be}^T$$

Όπου:

- $\boldsymbol{\omega}_b$: γωνιακή ταχύτητα του σώματος στο body frame,
- $[\boldsymbol{\omega}_b]_{\times}$: skew-symmetric matrix της $\boldsymbol{\omega}_b$,
- $\dot{\mathbf{R}}_{be}$: ρυθμός αλλαγής του προσανατολισμού στο χώρο.

Και τέλος έχουμε ότι:

$$\dot{\mathbf{R}}_{be}^T \mathbf{v}_e = -[\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \mathbf{v}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b$$

Translational (Position) Dynamics Model

$$\dot{\mathbf{v}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b + g \mathbf{R}_{be}^\top \mathbf{e}_3 - \frac{f}{m} \mathbf{e}_3$$

Φυσική Ερμηνεία:

- $\dot{\mathbf{v}}_b$: επιτάχυνση του κέντρου μάζας στο body frame,
- $-\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_b$: όρος λόγω περιστροφής του σώματος (Coriolis-like),
- $g \mathbf{R}_{be}^\top \mathbf{e}_3$: διεύθυνση και μέτρο της βαρύτητας εκφρασμένα στο body frame,
- $-\frac{f}{m} \mathbf{e}_3$: επιτάχυνση από την ολική ώση.

Η εξίσωση αυτή περιγράφει το **δυναμικό μοντέλο μεταφορικής κίνησης** και συνδέει την **ώση** και τον **προσανατολισμό** με την **επιτάχυνση του κέντρου μάζας**.

Ο όρος $-\omega_b \times \mathbf{v}_b$ εμφανίζεται επειδή το πλαίσιο αναφοράς του σώματος (body frame) περιστρέφεται.

Φυσική Ερμηνεία:

- Το body frame δεν είναι ακίνητο — **περιστρέφεται** με γωνιακή ταχύτητα ω_b .
- Αν παρατηρούμε την ταχύτητα \mathbf{v}_b από μέσα στο περιστρεφόμενο σύστημα, φαίνεται να αλλάζει διεύθυνση ακόμα κι αν στο αδρανειακό πλαίσιο μένει σταθερή.
- Ο όρος $-\omega_b \times \mathbf{v}_b$ **διορθώνει** αυτή την αλλαγή, ώστε η εξίσωση να ισχύει στο περιστρεφόμενο πλαίσιο.

Σύγκριση:

- Στη γη (περιστρεφόμενο πλαίσιο), ένα κινούμενο σώμα φαίνεται να παρεκκλίνει από την πορεία του \rightarrow Coriolis φαινόμενο.
- Αν το drone στρίψει δεξιά, ένα βέλος που έδειχνε 'μπροστά' στο body frame φαίνεται να γυρίζει αριστερά.

Attitude Dynamic Model — 1

Με βάση τα assumptions που είχαμε κάνει προηγουμένως, η εξίσωση των attitude dynamics στο body frame δίνεται από:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau}$$

- $\boldsymbol{\omega}_b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^\top$: γωνιακή ταχύτητα στο body frame.
- $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$: πίνακας ροπής αδράνειας του multicopter.
- $\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \ \tau_y \ \tau_z]^\top$: ροπές που παράγονται από τους έλικες.
- $\mathbf{G}_a = [G_{a,\phi} \ G_{a,\theta} \ G_{a,\psi}]^\top$: γυροσκοπικές ροπές λόγω περιστροφής των ελίκων.

Φυσική Ερμηνεία:

- Ο όρος $-\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b)$ εκφράζει γυροσκοπική σύζευξη μεταξύ των αξόνων.
- Η μεταβολή της γωνιακής ορμής ($\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b$) οφείλεται στις ροπές ώσης και στις γυροσκοπικές επιδράσεις.

Attitude Dynamic Model — 2: Gyroscopic Torques

Γυροσκοπικές ροπές: Για έναν έλικα με ταχύτητα περιστροφής Ω_k (rad/s), η ροπή λόγω της περιστροφής του είναι:

$$\mathbf{G}_{a,k} = J_{RP}(-1)^k \Omega_k \mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\omega}_b$$

όπου:

- J_{RP} : ροπή αδράνειας του ρότορα ως προς τον άξονα περιστροφής,
- $(-1)^k$: δείχνει τη φορά περιστροφής του k -οστού έλικα,
- \mathbf{e}_3 : μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον άξονα z .

Για σύνολο n_r ελίκων:

$$\mathbf{G}_a = \sum_{k=1}^{n_r} J_{RP} (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{e}_3) (-1)^{k+1} \Omega_k$$

Οι γυροσκοπικές ροπές εξαρτώνται από: (i) τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος $\boldsymbol{\omega}_b$, (ii) την ταχύτητα περιστροφής κάθε έλικα και τέλος, (iii) τη φορά περιστροφής τους.

Attitude Dynamic Model — 3: Components of Gyroscopic Torque

Ανάλυση ανά άξονα:

Ισχύει ότι $\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{e}_3 = [\omega_y, -\omega_x, 0]^T$, άρα οι γυροσκοπικές ροπές, δίνονται ως:

$$\mathbf{G}_a = \begin{cases} G_{a,\phi} = \sum_{k=1}^{n_r} J_{RP} \omega_y (-1)^{k+1} \Omega_k \\ G_{a,\theta} = \sum_{k=1}^{n_r} J_{RP} \omega_x (-1)^k \Omega_k \\ G_{a,\psi} = 0 \end{cases}$$

Παρατηρήσεις:

- Οι γυροσκοπικές ροπές εμφανίζονται **μόνο** στους άξονες **roll** και **pitch**.
- Δεν υπάρχει γυροσκοπική ροπή στον άξονα **yaw**.
- Το πρόσημο εξαρτάται από τη φορά περιστροφής των ελίκων.

Ερώτηση: *Αφού οι έλικες περιστρέφονται γύρω από τον άξονα z, γιατί δεν υπάρχει γυροσκοπική ροπή κατά μήκος αυτού του άξονα;*

Απάντηση:

- Οι έλικες έχουν **γωνιακή ορμή** $\mathbf{H}_k = J_{RP}\Omega_k \mathbf{e}_3$ κατά μήκος του z.
- Η **γυροσκοπική ροπή** προκύπτει μόνο όταν αλλάζει η **διεύθυνση** αυτής της ορμής.
- Αν το drone εκτελεί yaw (περιστροφή γύρω από τον ίδιο άξονα z), η **διεύθυνση του z** δεν αλλάζει **η γωνιακή ορμή δεν στρέφεται** **δεν εμφανίζεται γυροσκοπική ροπή.**

Αντίθετα, κατά το roll ή το pitch, ο άξονας z αλλάζει κατεύθυνση. Έτσι, η γωνιακή ορμή των ελίκων “αναγκάζεται” να στραφεί, δημιουργώντας γυροσκοπική ροπή στους άξονες x και y, αντίστοιχα.

Φυσική Ερμηνεία:

- Οι γυροσκοπικές ροπές \mathbf{G}_a οφείλονται στο ότι κάθε έλικας έχει δική του ροπή αδράνειας.
- Όταν το σώμα στρίβει, η αλληλεπίδραση μεταξύ των περιστρεφόμενων ροτόρων και της γωνιακής ταχύτητας του σώματος παράγει επιπλέον ροπές.
- Αυτές οι ροπές μπορούν να επηρεάσουν την ευστάθεια, κυρίως κατά τις απότομες αλλαγές προσανατολισμού.

Συμπέρασμα:

Το πλήρες δυναμικό μοντέλο στάσης του multicopter είναι:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau}$$

και περιγράφει πώς οι ροπές ώσης και οι γυροσκοπικές επιδράσεις καθορίζουν τη **στροφική συμπεριφορά** του οχήματος.

Understanding Torques on a Multicopter

Δύο κατηγορίες ροπών:

- (1) **Ροπές Ελέγχου** – Παράγονται *επίτηδες* από τις διαφορές ώσης των ελίκων.
- (2) **Γυροσκοπικές Ροπές** – Προκύπτουν φυσικά λόγω της περιστροφής των ροτόρων.

Ροπή	Προέλευση	Φυσική Ερμηνεία	Άξονας
τ_x	Διαφορά ώσης δεξιά–αριστερά	Προκαλεί roll	x
τ_y	Διαφορά ώσης εμπρός–πίσω	Προκαλεί pitch	y
τ_z	Διαφορά ροπής περιστροφής ελίκων	Προκαλεί yaw	z
$G_{a,\phi}$	Γυροσκοπική αντίδραση	Αντίσταση σε roll	x
$G_{a,\theta}$	Γυροσκοπική αντίδραση	Αντίσταση σε pitch	y
$G_{a,\psi}$	—	Δεν υπάρχει	z

Συνοψίζοντας: Οι ροπές ελέγχου χρησιμοποιούνται για χειρισμό και σταθεροποίηση, ενώ οι γυροσκοπικές είναι *παρενέργεια* της φυσικής που ο ελεγκτής πρέπει να αντισταθμίσει (δλδ να κάνει compensation!).

Multicopter Flight Control Rigid Model

Basic Form:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{v}_e$$

$$\dot{\mathbf{v}}_e = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\Theta} = \mathbf{W}\boldsymbol{\omega}_b$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau}$$

Using Rotation Matrix:

$$\dot{\mathbf{p}}_e = \mathbf{v}_e$$

$$\dot{\mathbf{v}}_e = g\mathbf{e}_3 - \frac{f}{m}\mathbf{R}\mathbf{e}_3$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}[\boldsymbol{\omega}_b]_{\times}$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b) + \mathbf{G}_a + \boldsymbol{\tau}$$

Euler Angles vs Rotation Matrix

Euler Angles Representation

$$\dot{\Theta} = \mathbf{W}(\Theta) \omega_b$$

- $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$
- Περιγράφει roll–pitch–yaw.
- Η \mathbf{W} συνδέει τη γωνιακή ταχύτητα του σώματος με τους ρυθμούς μεταβολής των Euler γωνιών.
- Εύκολη φυσική ερμηνεία, αλλά παρουσιάζει singularities.

Rotation Matrix Representation

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} [\omega_b]_{\times}$$

- $\mathbf{R} \in SO(3)$: πίνακας προσανατολισμού.
- Συνδέει τα διανύσματα μεταξύ body και earth frame.
- Περιγράφει πώς “στρίβουν” οι άξονες του σώματος στο χώρο.
- Δεν έχει singularities, αλλά δεν είναι τόσο διαισθητικός.

Same rotation – Two mathematical representations

(Both describe how the body rotates with angular velocity ω_b)

Motor Mixing Algorithm – General Form

Control Allocation for n_r Propellers:

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_T & c_T & \cdots & c_T \\ -d_1 c_T \sin \phi_1 & -d_2 c_T \sin \phi_2 & \cdots & -d_{n_r} c_T \sin \phi_{n_r} \\ d_1 c_T \cos \phi_1 & d_2 c_T \cos \phi_2 & \cdots & d_{n_r} c_T \cos \phi_{n_r} \\ c_M \delta_1 & c_M \delta_2 & \cdots & c_M \delta_{n_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \vdots \\ \Omega_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$

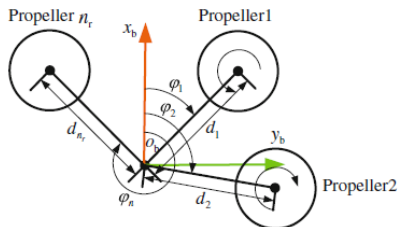
Όπου:

- f : συνολική ώση, τ_x, τ_y, τ_z : ροπές ελέγχου,
- c_T, c_M : συντελεστές ώσης και ροπής,
- n_r : αριθμός ελίκων (π.χ. 4, 6, 8...),
- $\delta_i = (-1)^{i+1}$, $i = 1, \dots, n_r$

Η εξίσωση συνδέει τις στροφές των ελίκων με τη συνολική ώση και τις ροπές ελέγχου.

Γενική Μορφή:

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{n_r} \begin{bmatrix} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \\ \vdots \\ \Omega_{n_r}^2 \end{bmatrix}$$



Motor positions and angles ϕ_i in the body frame.

Όπου:

- $\mathbf{M}_{n_r} \in \mathbb{R}^{4 \times n_r}$: Control Effectiveness Matrix,
- d_i : απόσταση του i -οστού μοτέρ από το κέντρο μάζας,
- ϕ_i : γωνία του i -οστού βραχίονα ως προς τον άξονα x ,
- δ_i : φορά περιστροφής (CW ή CCW).

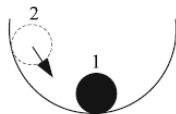
Η \mathbf{M}_{n_r} εξαρτάται μόνο από τη **γεωμετρία** και τη **διάταξη** των ελίκων.

What is Stability?

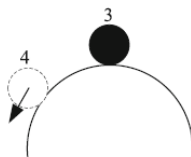
- Η **ευστάθεια** σχετίζεται με το πώς ένα σύστημα αντιδρά σε διαταραχές.
- Ένα σύστημα είναι **ευσταθές** αν, όταν διαταραχθεί ελαφρά, επιστρέφει στο σημείο ισορροπίας του.
- Αντίθετα, είναι **ασταθές** αν η διαταραχή το απομακρύνει συνεχώς από την ισορροπία.

Παράδειγμα:

- Η μπάλα σε ένα κοίλο μπολ (*concave bowl*) είναι ευσταθής (επιστρέφει στο κάτω μέρος).
- Η μπάλα πάνω σε λοφίσκο (*convex hill*) είναι ασταθής (κυλάει μακριά μετά από μικρή διαταραχή).



Stable equilibrium: concave bowl.



Unstable equilibrium: convex hill.

Η ευστάθεια ορίζεται πάντα γύρω από ένα equilibrium point.

Formal Definitions of Stability (Lyapunov)

Μη γραμμικό δυναμικό σύστημα: $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, με $x = 0$ να είναι το σημείο ισορροπίας.

Definition 1 – Stability (Lyapunov)

$$\forall R > 0, \exists r > 0 : \|x(0)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| < R, \forall t > 0$$

Το σύστημα **παραμένει κοντά** στο σημείο ισορροπίας αν ξεκινήσει κοντά σε αυτό.

Definition 2 – Asymptotic Stability

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

Το σύστημα όχι μόνο **παραμένει κοντά**, αλλά **επιστρέφει** στην ισορροπία.

Definition 3 – Exponential Stability

$$\|x(t)\| \leq \alpha \|x(0)\| e^{-\lambda t}, \quad \alpha, \lambda > 0$$

Η σύγκλιση είναι **εκθετικά γρήγορη**.

Example – Stability of a Second-Order System – 1

System:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{u}, \quad \text{όπου } \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

PD Controller:

$$\mathbf{u} = -k_1(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d) - k_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)$$

Ορίζουμε τα σφάλματα:

$$\tilde{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{x} - \mathbf{x}_d, \quad \tilde{\mathbf{v}} \triangleq \mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_d$$

Άρα το κλειστό σύστημα γράφεται:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{v}}, \quad \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -k_1\tilde{\mathbf{v}} - k_2\tilde{\mathbf{x}}$$

Φυσική ερμηνεία:

- Ο όρος με k_2 λειτουργεί ως **“ελατήριο”** (επαναφέρει τη θέση).
- Ο όρος με k_1 λειτουργεί ως **“απόσβεση”** (φρενάρι την ταχύτητα).

Example – Stability of a Second-Order System – 2

Ορίζουμε:

$$z \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \dot{z} = \mathbf{A}z, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_n \\ -k_2 \mathbf{I}_n & -k_1 \mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

Αν $k_1, k_2 > 0$, τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = 0$ και το $z = \mathbf{0}_{2n \times 1}$ είναι **παγκοσμίως εκθετικά ευσταθές**.

Proof Sketch:

- Η λύση είναι $z(t) = e^{At}z(0)$.
- Οι ιδιοτιμές του A έχουν **αρνητικά πραγματικά μέρη** όταν $k_1, k_2 > 0$.
- Άρα οι αποκρίσεις **σβήνουν εκθετικά** με το χρόνο.

Φυσική σημασία: Το PD κάνει το σύστημα να συμπεριφέρεται σαν **αποσβεσμένος ταλαντωτής** — σταθερός, χωρίς ταλαντώσεις, και με ομαλή σύγκλιση στη θέση αναφοράς.

Example – Attitude Stability of Multicopters – 1

Simplified Attitude Model:

$$\dot{\Theta} = \omega_b, \quad \dot{\omega}_b = \mathbf{J}^{-1}\tau$$

με την υπόθεση πως οι roll, pitch γωνίες είναι μικρές, καθώς και η επίδραση του όρου $-\omega_b \times (\mathbf{J}\omega_b) + \mathbf{G}_a$ είναι αδύναμη.

Αν δεν εφαρμόζεται έλεγχος ($\tau = \mathbf{0}$), τότε:

$$\dot{\Theta} = \omega_b, \quad \dot{\omega}_b = \mathbf{0}_{3 \times 1}$$

Ορίζουμε:

$$\mathbf{z} \triangleq \begin{bmatrix} \Theta \\ \omega_b \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι **ασταθές στο σημείο ισοροπίας \mathbf{z}^***

Οι **ιδιοτιμές του \mathbf{A}** είναι $\lambda_i = 0 \Rightarrow \text{Re}(\lambda_i) = 0$. Άρα το σημείο ισοροπίας:

$$\mathbf{z}^* = [\Theta \quad \omega_b]^T = [\mathbf{0}_{3 \times 1} \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}]^T \text{ είναι } \mathbf{ασταθές}.$$

Φυσική εξήγηση:

- Αν δεν υπάρχει ενεργός έλεγχος, οι **ροπές ελέγχου** παραμένουν μηδενικές.
- Οι μόνες δυνάμεις είναι η **ώση** και η **βαρύτητα**, που δεν αλλάζουν με τη στάση.
- Άρα, το multicopter **δεν μπορεί να αποκαταστήσει μόνο του** την ισορροπία του.

Σύγκριση:

- Σε **fixed-wing αεροσκάφος**, η άντωση (lift) εξαρτάται από τη στάση.
- Αν αλλάξει η στάση, αλλάζουν οι δυνάμεις → δημιουργείται φυσική ανάδραση (φυσική ροπή αποκατάστασης), άρα έχουν παθητική ευστάθεια.
- Έτσι, τα fixed-wing μπορούν να πετούν σταθερά *χωρίς autopilot*.

*Τα multicopters είναι εγγενώς ασταθή –
απαιτούν ενεργό έλεγχο (autopilot) για πτήση ή αιώρηση.*

Γιατί χρειαζόμαστε έλεγχο:

- Τα multicopters είναι **εγγενώς ασταθή** — δεν μπορούν να διατηρήσουν ισορροπία χωρίς ανάδραση.
- Η **ανάδραση (feedback)** είναι η ουσία του ελέγχου: μετράμε → συγκρίνουμε → διορθώνουμε.
- Μέσω του ελέγχου, ένα ασταθές σύστημα μπορεί να γίνει **ευσταθές και αποδοτικό**.

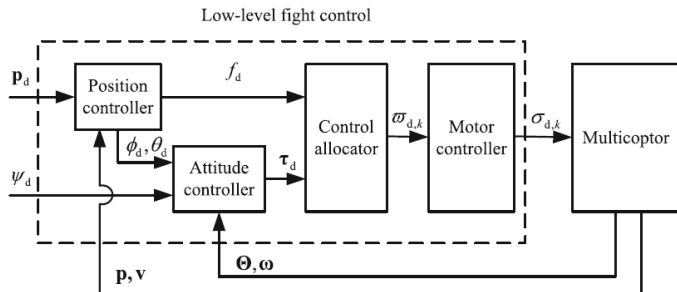
Στόχος ελέγχου:

- Ευστάθεια και αντίδραση χωρίς overshoot.
- **Γρήγορη απόκριση** και **ευρωστία** σε αβεβαιότητες.
- Ακριβής παρακολούθηση θέσης και στάσης μέσω των κινητήρων.

Control is an enabling technology.

Με το κατάλληλο feedback, ένα ασταθές drone μπορεί να πετάξει ευσταθώς.

Low-Level Flight Control Framework



- 1 **Έλεγχος Θέσης (Position Control):** Υπολογίζει ϕ_d, θ_d, f_d από την επιθυμητή θέση p_d .
- 2 **Έλεγχος Προσανατολισμού (Attitude Control):** Παράγει τ_d από τις επιθυμητές γωνίες $(\phi_d, \theta_d, \psi_d)$.
- 3 **Κατανομή Ελέγχου (Control Allocation):** Καθορίζει τις ταχύτητες ελίκων $\Omega_{d,k}$ με $k = 1, 2, \dots, n_r$ ώστε να επιτευχθούν f_d και τ_d .
- 4 **Έλεγχος Κινητήρων (Motor Control):** Υπολογίζει εντολές γκαζιού $\sigma_{d,k}$ από τις $\Omega_{d,k}$.

Linear Model Simplification –1

Για τη γραμμικοποίηση του μη-γραμμικού μοντέλου πτήσης, θεωρούνται οι εξής παραδοχές:

- 1 Ο όρος $-\omega \times (J \cdot \omega) + \mathbf{G}_a$ θεωρείται πολύ μικρός.
- 2 Μικρές γωνίες roll και pitch:

$$\sin \phi \approx \phi, \quad \cos \phi \approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1$$

- 3 Η ολική ώση προσεγγίζει το βάρος:

$$f \approx mg$$

- 4 Απλοποιημένες σχέσεις στροφής και προσανατολισμού:

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{I}_3, \quad \mathbf{R}_e \approx \begin{bmatrix} \theta \cos \psi + \phi \sin \psi \\ \theta \sin \psi - \phi \cos \psi \\ 1 \end{bmatrix}$$

Με βάση τις παραπάνω παραδοχές, το αρχικό μη-γραμμικό μοντέλο αποσυνδέεται (decouples) σε τρία **γραμμικά** υπομοντέλα:

- 1 **Οριζόντιο κανάλι θέσης (Horizontal Position Channel):**
Περιγράφει τη δυναμική στον άξονα $x-y$.
- 2 **Κανάλι ύψους (Altitude Channel):**
Αντιστοιχεί στη δυναμική του κατακόρυφου άξονα z .
- 3 **Κανάλι προσανατολισμού (Attitude Channel):**
Περιλαμβάνει τις γωνίες roll, pitch και yaw (ϕ, θ, ψ).

Έτσι, το σύστημα γίνεται κατάλληλο για σχεδίαση **ανεξάρτητων γραμμικών ελεγκτών**.

Linearized Flight Channel Models –1

a. Horizontal Position Channel Model

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{v}_h, \quad \dot{\mathbf{v}}_h = -g\mathbf{A}_\psi\Theta_h$$

όπου:

$$\mathbf{p}_h = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_\psi = \mathbf{R}_\psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta_h = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix}$$

Το $-g\mathbf{A}_\psi\Theta_h$ θεωρείται είσοδος και το p_h έξοδος, οπότε το μοντέλο είναι γραμμικό.

b. Altitude Channel Model

$$\dot{p}_z = v_z, \quad \dot{v}_z = g - \frac{f}{m}$$

Το f/m αποτελεί είσοδο και p_z έξοδος. Επομένως, και αυτό το μοντέλο είναι επίσης γραμμικό.

c. Attitude Model

$$\dot{\Theta} = \omega, \quad J\dot{\omega} = \tau$$

όπου

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}$$

Το παραπάνω αποτελεί το **γραμμικό μοντέλο προσανατολισμού**, που περιγράφει τη στροφική δυναμική του πολυκόπτερου.

Παρατήρηση: Τα τρία γραμμικά υπομοντέλα (horizontal, altitude, attitude) είναι **αποσυνδεδεμένα (decoupled)** και μπορούν να ελεγχθούν ξεχωριστά. Ωστόσο στην πραγματική πτήση υπάρχει **αλληλεπίδραση** μεταξύ τους μέσω των κοινών μεταβλητών Θ , f , τ . Έτσι, το συνολικό σύστημα διατηρεί συντονισμένη συμπεριφορά υπό τον ολοκληρωμένο ελεγκτή πτήσης.

**Σήμερα περάσαμε από την
κινηματική στη δυναμική**

Επόμενο βήμα: Έλεγχος πτήσης.