



Autonomous Robotic Vehicles

Hellenic Mediterranean University

Lecture 8

Dr. Alina Eqtami

Μετά το σημερινό μάθημα θα μπορείτε:

- Να εξηγείτε τη δομή των τριών βασικών καναλιών ελέγχου ενός multicopter: *οριζόντιο, ύψους, στάσης*.
- Να διατυπώνετε γραμμικά μοντέλα για κάθε κανάλι γύρω από το σημείο αιώρησης.
- Να σχεδιάζετε PD/PID ελεγκτές θέσης και ύψους με βάση επιθυμητή μεταβατική συμπεριφορά.
- Να συνθέτετε διαδοχικούς βρόχους ελέγχου στάσης (angle και rate loops).

Linearized Flight Channel Models – Summary

Στο προηγούμενο μάθημα, το μοντέλο του multicopter γραμμικοποιήθηκε γύρω από τη στάση αιώρησης, δίνοντας 3 **ανεξάρτητα μοντέλα**:

1. Οριζόντιο κανάλι θέσης (Horizontal position channel):

$$\dot{\mathbf{p}}_h = \mathbf{v}_h, \quad \dot{\mathbf{v}}_h = -g \mathbf{A}_\psi \Theta_h$$

Συνδέει τις γωνίες (ϕ, θ) με τις μεταφορές στο επίπεδο $x-y$.

2. Κανάλι ύψους (Altitude channel):

$$\dot{p}_z = v_z, \quad \dot{v}_z = g - \frac{f}{m}$$

Περιγράφει τη κατακόρυφη δυναμική του οχήματος.

3. Κανάλι προσανατολισμού (Attitude channel):

$$\dot{\Theta} = \omega, \quad \mathbf{J}\dot{\omega} = \tau$$

Εκφράζει τη **στροφική δυναμική** γύρω από τους άξονες roll-pitch-yaw.

Next Step: Flight Control Design

Επόμενο βήμα: Ανάπτυξη ελεγκτών πτήσης για κάθε υποσύστημα.

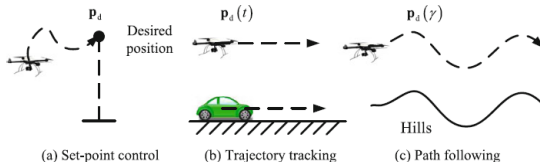
- Έλεγχος Θέσης (Position Control):
Εξωτερικός βρόχος για p_x, p_y, p_z .
- Έλεγχος Στάσης (Attitude Control):
Εσωτερικός βρόχος για ϕ, θ, ψ .
- Κατανομή Ελέγχου (Control Allocation):
Από τις ροπές τ και την ώση f στις ταχύτητες ελίκων Ω_i .



Position Control Types

Ο έλεγχος θέσης χωρίζεται σε τρεις βασικούς τύπους:

- 1 **Έλεγχος σημείου ισορροπίας (Set-point control):** Η επιθυμητή θέση $\mathbf{p}_d \in \mathbb{R}^3$ είναι σταθερό σημείο. Στόχος: $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_d\| \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. (Π.χ. *hovering, take-off, landing*).
- 2 **Παρακολούθηση τροχιάς (Trajectory tracking):** Η $\mathbf{p}_d(t)$ είναι χρονικά εξαρτώμενη τροχιά. Στόχος: $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_d(t)\| \rightarrow 0$. (Π.χ. *παρακολούθηση κινούμενου στόχου ή οχήματος*).
- 3 **Ακολουθήση διαδρομής (Path following):** Η επιθυμητή διαδρομή $\mathbf{p}_d(\gamma(t))$ εξαρτάται από παράμετρο γ και όχι από το χρόνο. Στόχος: $\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_d(\gamma(t))\| \rightarrow 0$. (Π.χ. *πτήση κατά μήκος εδάφους ή λόφου*).



*Image source: Introduction to Multicopter Design and Control

Horizontal Position Channel –1

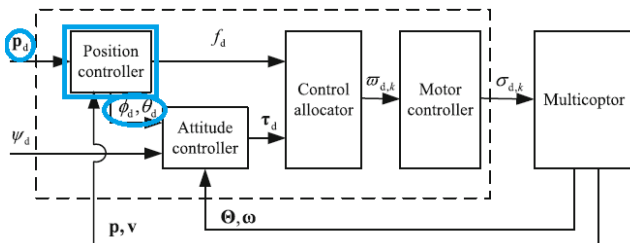
Traditional PID Controller:

Control Objective

Σκοπός: να σχεδιαστεί η επιθυμητή στάση $\Theta_h^d = [\phi_d \ \theta_d]^T$ ώστε να επιτυγχάνεται $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{p_h}(t)\| = 0$, όπου:

$$\mathbf{e}_{p_h} \triangleq \mathbf{p}_h - \mathbf{p}_{h_d} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_x^d \\ p_y^d \end{bmatrix}$$

Διαισθητικά: Για να κινηθώ σε $x - y$, «γέρνω» (roll/pitch). Γι' αυτό ο έλεγχος θα παράξει ϕ_d και θ_d .



*Image source: Introduction to Multicopter Design and Control

Desired Transient Behavior

Το μεταβατικό δυναμικό του σφάλματος ορίζεται ως:

$$\ddot{\mathbf{e}}_{p_h} = -\mathbf{K}_{p_h d} \dot{\mathbf{e}}_{p_h} - \mathbf{K}_{p_h p} \mathbf{e}_{p_h}$$

όπου οι πίνακες $\mathbf{K}_{p_h d}, \mathbf{K}_{p_h p} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ είναι τα \mathbf{D} και \mathbf{P} κέρδη του PID ελεγκτή. Τα κέρδη είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες.

Διαισθητικά: Θέλω το σφάλμα να συμπεριφέρεται σαν αποσβεσμένος ταλαντωτής.

Stability Property

Σύμφωνα με τη θεωρία ευστάθειας $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{p_h}(t)\| = 0$, δηλαδή η θέση \mathbf{p}_h συγκλίνει ασυμπτωτικά στην επιθυμητή \mathbf{p}_{hd} .

Το σύστημα αυτό έχει ρίζες στο αριστερό ημιπίεδο \rightarrow εκθετική σύγκλιση.

Έτσι «σχεδιάζω» την επιθυμητή μεταβατική απόκριση (ταχύτητα/υπερακόντιση) μέσω των κερδών.

Χρησιμοποιούμε μόνο PD- controller γιατί το μοντέλο είναι δεύτερης τάξης και δεν εμφανίζει μόνιμο σφάλμα.

Ο I όρος προστίθεται μόνο όταν υπάρχουν διαταραχές ή σφάλματα μοντέλου, για να εξαλείφει steady-state error.

Σύστημα σφάλματος:

$$\ddot{\mathbf{e}}_{\rho_h} = -\mathbf{K}_{\rho_h d} \dot{\mathbf{e}}_{\rho_h} - \mathbf{K}_{\rho_h p} \mathbf{e}_{\rho_h}, \quad \mathbf{K}_{\rho_h d}, \mathbf{K}_{\rho_h p} = \mathbf{K}_{\rho_h d}^\top, \mathbf{K}_{\rho_h p}^\top \succ 0.$$

Συνάρτηση Lyapunov:

$$V(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}^\top \dot{\mathbf{e}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^\top \mathbf{K}_{\rho_h p} \mathbf{e} \Rightarrow V > 0 \quad \forall (\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}) \neq 0.$$

Παράγωγος:

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{e}}^\top \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{e}^\top \mathbf{K}_{\rho_h p} \dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}}^\top (-\mathbf{K}_{\rho_h d} \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{K}_{\rho_h p} \mathbf{e}) + \dot{\mathbf{e}}^\top \mathbf{K}_{\rho_h p} \mathbf{e} = -\dot{\mathbf{e}}^\top \mathbf{K}_{\rho_h d} \dot{\mathbf{e}} \leq 0.$$

Συμπέρασμα: V θετικά ορισμένη, $\dot{V} \leq 0$ με $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{e}} = 0$. Από LaSalle, η μέγιστη αμετάβλητη στο $\{\dot{\mathbf{e}} = 0\}$ δίνει $\mathbf{e} = 0$ (εφόσον $\mathbf{K}_{\rho_h p} \succ 0$).

$$\Rightarrow \mathbf{e}_{\rho_h}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{\rho_h}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad (\text{ασυμπτωτική ευστάθεια}).$$

Θυμηθείτε: $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^\top \mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^\top \dot{\mathbf{x}}$ και $\frac{d}{dt}(\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top (\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top) \dot{\mathbf{x}}$.

Controller Derivation

Από την επιθυμητή δυναμική:

$$\ddot{\mathbf{p}}_h = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{phd}\dot{\mathbf{e}}_{ph} - \mathbf{K}_{php}\mathbf{e}_{ph},$$

και το γραμμικό μοντέλο:

$$\ddot{\mathbf{p}}_h = -g\mathbf{A}_\psi\boldsymbol{\Theta}_h,$$

προκύπτει η σχέση:

$$-g\mathbf{A}_\psi\boldsymbol{\Theta}_h^d = \ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{phd}\dot{\mathbf{e}}_{ph} - \mathbf{K}_{php}\mathbf{e}_{ph}.$$

Επομένως:

$$\boldsymbol{\Theta}_h^d = -\frac{1}{g}\mathbf{A}_\psi^{-1}(\ddot{\mathbf{p}}_{hd} - \mathbf{K}_{phd}\dot{\mathbf{e}}_{ph} - \mathbf{K}_{php}\mathbf{e}_{ph}).$$

If the attitude follows $\boldsymbol{\Theta}_h = \boldsymbol{\Theta}_h^d$, then position tracking is ensured.

Altitude Channel –1

Έχουμε το γραμμικό μοντέλο του Altitude Channel:

$$\dot{p}_z = v_z, \quad \dot{v}_z = g - \frac{f}{m}.$$

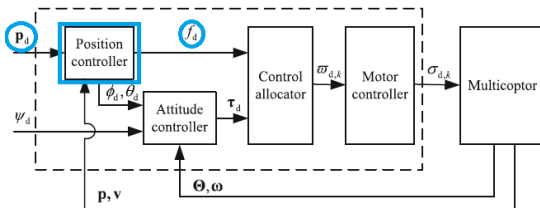
Traditional PID Controller:

Control Objective

Σκοπός: να σχεδιαστεί η επιθυμητή ώση f_d ώστε να επιτυγχάνεται

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e_z(t)| = 0, \quad \text{όπου} \quad e_z \triangleq p_z - p_z^d.$$

Διαισθητικά: Το ύψος ρυθμίζεται μέσω της **συνολικής ώσης** f . Η αύξηση του f προκαλεί άνοδο ($p_z \uparrow$), ενώ η μείωση κάθοδο ($p_z \downarrow$).



Traditional PID Controller: Desired Error Dynamics

Η επιθυμητή μεταβατική συμπεριφορά για το σφάλμα ύψους $e_z = p_z - p_z^d$ ορίζεται ως:

$$\ddot{e}_z = -K_{z_d}\dot{e}_z - K_{z_p}e_z, \quad \text{με} \quad K_{z_d}, K_{z_p} > 0.$$

Altitude Control Law

Από το γραμμικό μοντέλο: $\ddot{p}_z = g - (f/m)$ και την επιθυμητή συμπεριφορά $\ddot{p}_z = \ddot{p}_z^d - K_{z_d}\dot{e}_z - K_{z_p}e_z$, προκύπτει ο νόμος ελέγχου:

$$f_d = m[g - (\ddot{p}_z^d - K_{z_d}\dot{e}_z - K_{z_p}e_z)]$$

Διαισθητικά: Ο ελεγκτής ύψους ρυθμίζει την ώση f_d ώστε η επιτάχυνση κατά z να ακολουθεί την επιθυμητή δυναμική. Να σημειωθεί ότι αν έχουμε πρόβλημα set-point, ισχύει ότι $\dot{p}_z^d = \ddot{p}_z^d = 0$.

If the thrust command is perfectly tracked, i.e. $f = f_d$,
then $\lim_{t \rightarrow \infty} |e_z(t)| = 0$, ensuring altitude tracking.

Successive Loop Closure

- Η αρχιτεκτονική ελέγχου βασίζεται στο **successive loop closure**.
- Ο **εξωτερικός βρόχος** (outer loop) αφορά τον **έλεγχο θέσης** (position control).
- Ο **εσωτερικός βρόχος** (inner loop) αφορά τον **έλεγχο στάσης** (attitude control).
- Ο εξωτερικός βρόχος παράγει εντολές αναφοράς για τον εσωτερικό, δηλαδή Θ_h^d .
- Το attitude channel πρέπει να είναι **4–10 φορές ταχύτερο** από το position channel, δηλαδή να έχει $4–10\times$ μεγαλύτερο bandwidth¹.
- Αν επιτευχθεί ο έλεγχος στάσης, τότε και ο έλεγχος θέσης ικανοποιείται.

¹Το bandwidth ενός βρόχου ελέγχου είναι η μέγιστη συχνότητα στην οποία το σύστημα μπορεί να ανταποκριθεί αποτελεσματικά σε αλλαγές της εισόδου ή σε διαταραχές.

Attitude Channel –1

Έχουμε το γραμμικό μοντέλο του Attitude Channel:

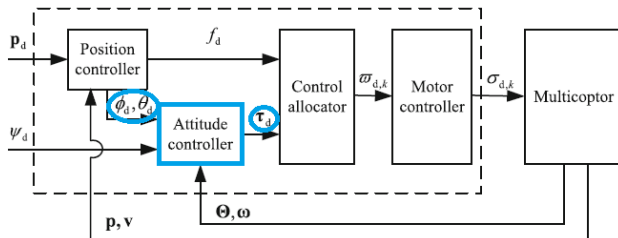
$$\dot{\Theta} = \omega, \quad \mathbf{J}\dot{\omega} = \tau.$$

Traditional PID Controller: Control Objective

Σκοπός: να σχεδιαστούν οι επιθυμητές ροπές $\tau_d = [\tau_\phi \quad \tau_\theta \quad \tau_\psi]^T$ ώστε να επιτυγχάνεται

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_\Theta(t)\| = 0, \quad \text{όπου } e_\Theta \triangleq \Theta - \Theta_d$$

Διαισθητικά: Οι γωνίες roll, pitch, yaw ελέγχονται μέσω των ροπών $\tau = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$. Η αύξηση ή μείωση κάθε ροπής προκαλεί αντίστοιχη στροφή γύρω από τον άξονα του σώματος.



- **Angle Error Definition:**

$$\mathbf{e}_\Theta = \Theta - \Theta_d \quad \text{με} \quad \Theta_d = [\Theta_{hd}^\top \quad \psi_d]^\top$$

Η Θ_{hd} δίνεται από τον position controller, ενώ η ψ_d από τον mission planner.

- Ο **εξωτερικός βρόχος στάσης** (angle control loop) μετατρέπει τα σφάλματα γωνίας σε επιθυμητούς ρυθμούς σώματος ω_d .

Angle Control Law

Με βάση τη σχέση $\dot{\Theta} = \omega$, ορίζεται η επιθυμητή γωνιακή ταχύτητα ως:

$$\omega_d = -\mathbf{K}_\Theta \mathbf{e}_\Theta$$

όπου $\mathbf{K}_\Theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ είναι πίνακας συμμετρικός και θετικά ορισμένος (P gain).

Ο ελεγκτής αυτός κλείνει τον angle loop, ο οποίος ορίζει πόσο γρήγορα πρέπει να περιστραφεί το όχημα για να φτάσει στη στάση Θ_d .

Ο εσωτερικός βρόχος στάσης (rate control loop) λαμβάνει τους επιθυμητούς ρυθμούς $\omega_d = [p_d \ q_d \ r_d]^\top$ και παράγει τις απαιτούμενες ροπές $\tau_d = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^\top$.

Rate Error Definition

$$\mathbf{e}_\omega = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d$$

όπου $\boldsymbol{\omega} = [p \ q \ r]^\top$ είναι οι μετρούμενοι ρυθμοί του σώματος.

Rate Control Law (PID form)

Η επιθυμητή ροπή υπολογίζεται ως:

$$\boldsymbol{\tau}_d = -\mathbf{K}_{\omega_p} \mathbf{e}_\omega - \mathbf{K}_{\omega_i} \int \mathbf{e}_\omega dt - \mathbf{K}_{\omega_d} \dot{\mathbf{e}}_\omega$$

με $\mathbf{K}_{\omega_p}, \mathbf{K}_{\omega_i}, \mathbf{K}_{\omega_d} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ θετικά ορισμένους πίνακες.

Αρχιτεκτονική Cascaded Attitude Control:

- Ο **εξωτερικός βρόχος στάσης** (Angle loop) συγκρίνει τις επιθυμητές γωνίες $\Theta_d = [\phi_d, \theta_d, \psi_d]^T$ με τις μετρούμενες και παράγει τους επιθυμητούς ρυθμούς $\omega_d = [p_d, q_d, r_d]^T$.
- Ο **εσωτερικός βρόχος ρυθμού** (Rate loop) συγκρίνει τους ω_d με τους πραγματικούς ρυθμούς ω και υπολογίζει τις απαιτούμενες ροπές $\tau = [\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$.
- Οι ροπές εφαρμόζονται στους έλικες μέσω του control allocation module, που μετατρέπει τις τ και την ώση f σε εντολές ταχύτητας Ω_i .
- Η απόδοση του συνολικού ελέγχου εξαρτάται από τη σωστή ιεραρχία: **ο εσωτερικός βρόχος πρέπει να είναι 4–10 φορές ταχύτερος** από τον εξωτερικό.

- **Tuning sequence:** Πάντα ρυθμίζουμε πρώτα τον rate loop, μετά τον angle loop. Ο εσωτερικός βρόχος πρέπει να είναι 4–10× ταχύτερος.
- **Sensor filtering:** Οι μετρήσεις από το IMU (gyro, accelerometer, magnetometer), φιλτράρονται μέσω π.χ. Kalman filter για αξιόπιστες γωνίες και ρυθμούς.
- **Actuator saturation:** Οι ροπές τ περιορίζονται από τη μέγιστη ικανότητα των κινητήρων. Εφαρμόζεται anti-windup για να αποφεύγεται υπερφόρτωση του ολοκληρωτικού όρου.
- **Cross-coupling effects:** Σε μεγάλες γωνίες (πάνω από 30° σε roll/pitch) η υπόθεση ανεξαρτησίας καναλιών παύει να ισχύει.
- **Noise vs responsiveness trade-off:** Μεγαλύτερα gains \rightarrow ταχύτερη απόκριση αλλά αυξημένος θόρυβος και πιθανό buzzing στους κινητήρες.

UAV Physical and Control Parameters

```
g = 9.81;
m = @(t) 5.89;
% Inertia
Ix = 0.19788093606;
Iy = 0.36886847425;
Iz = 0.17265001195;
% Drag coefficient
b_drag = 0.962;
% gains
Kp_alt = 12;    Kd_alt = 5;
Kp_x = 2.0;    Kd_x = 1.2;
Kp_y = 2.0;    Kd_y = 1.2;
Kp_a = diag([6.0 6.0 2.5]);
Kd_a = diag([2.0 2.0 1.0]);
Ki_a = diag([0.3 0.3 0.0]); % No integral on yaw
```

Overview

Το τμήμα αυτό του προγράμματος καθορίζει τις βασικές φυσικές παραμέτρους του UAV (μάζα, ροπές αδράνειας, συντελεστή αεροδυναμικής αντίστασης) καθώς και τους συντελεστές ελέγχου PID για ύψος, θέση και στάση.

Reference Trajectory Definition

```
flag_reg = 1;

t_A = 2; % t_A: takeoff init.
t_B = 35; % t_B transition init
t_C = 70; % t_C: landing init
t_D = 85; % t_D: payload acquisition and new takeoff init
t_E = 110; % t_E: transition init
t_F = 150; % t_F: final landing init
% t_C - t_B hoverto(50,50)duration.

if flag_reg == 1
    % Regulation trajectory (takeoff-hover-land)
    x_des = @(t) 10*heaviside(t-t_B) - 10*heaviside(t-t_E);
    y_des = @(t) 10*heaviside(t-t_B) - 10*heaviside(t-t_E);
    z_des = @(t) 15*heaviside(t-t_A) - 15*heaviside(t-t_C) + ...
            15*heaviside(t-t_D) - 15*heaviside(t-t_F);
    % reference vector same length as expected by the ODE
    x_ref = @(t) [x_des(t); y_des(t); z_des(t); 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
else
    % Example sinusoidal trajectory for tracking
    x_des = @(t) 5*cos(0.2*t);
end
```

Overview

Η ενότητα αυτή ορίζει το προφίλ πτήσης του UAV για το σενάριο ρύθμισης (regulation mode), το οποίο περιλαμβάνει απογείωση, αιώρηση, προσγείωση, ανάκτηση φορτίου και νέα απογείωση. Οι χρονικές στιγμές t_A – t_F καθορίζουν τα βασικά γεγονότα της πτήσης, ενώ οι επιθυμητές τροχιές x_{des} , y_{des} , z_{des} υπολογίζονται με τη βοήθεια βηματικών συναρτήσεων Heaviside.

Reference Trajectory Definition

- $\text{flag_reg} = 1$: ενεργοποιεί τη λειτουργία ρύθμισης τροχιάς (takeoff–hover–land).
- $t_A - t_F$: χρονικές στιγμές καθορισμού φάσεων πτήσης:
 - t_A : απογείωση
 - t_B : έναρξη μετάβασης
 - t_C : προσγείωση
 - t_D : ανάκτηση φορτίου και νέα απογείωση
 - t_E : νέα μετάβαση
 - t_F : τελική προσγείωση
- $x_des(t), y_des(t)$: επιθυμητές οριζόντιες θέσεις που ενεργοποιούνται μεταξύ t_B και t_E .
- $z_des(t)$: επιθυμητό ύψος με φάσεις απογείωσης, αιώρησης, προσγείωσης και επαναπογείωσης.
- $x_ref(t)$: διάνυσμα αναφοράς κατάλληλου μήκους για τον ODE solver, που περιλαμβάνει θέση, ταχύτητες και στάση.

Simulation Settings and Initial Conditions

```
% ----- SIMULATION SETTINGS -----  
x0 = zeros(15,1);  
tspan = [0 200];  
  
%-----PARAMETERS-----  
  
% Define initial state of quadcopter:  
x0 = [0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
```

Overview

Το τμήμα αυτό καθορίζει τις παραμέτρους προσομοίωσης και το αρχικό διάλυμα κατάστασης του UAV. Η προσομοίωση εκτελείται για χρονικό διάστημα 200 δευτερολέπτων με μηδενικές αρχικές συνθήκες, ώστε να παρατηρηθεί η δυναμική του συστήματος και η απόκριση του ελεγκτή από κατάσταση ηρεμίας.

- $x_0 = \text{zeros}(15,1)$: αρχικό διάλυμα κατάστασης με 15 στοιχεία, όλα μηδενικά.
- Περιλαμβάνει θέση, ταχύτητα, γωνίες και γωνιακές ταχύτητες του UAV.
- $tspan = [0 200]$: χρονικό διάστημα προσομοίωσης από 0 έως 200. Καθορίζει τη διάρκεια της ολοκλήρωσης του συστήματος ODE.

Defining and Solving the UAV Dynamics

```
f = @(t,x) UAV_PID_ode_Final(t, x, m, g, Ix, Iy, Iz, b_drag, x_ref, Kp_alt,...  
    Kd_alt, Kp_x, Kd_x, Kp_y, Kd_y, Kp_a, Kd_a, Ki_a);  
opts = odeset('RelTol', 10^-10, 'AbsTol', 10^-9);  
  
[t_PID, x_PID] = ode15s(f, tspan, x0, opts);
```

Overview

Το τμήμα αυτό δημιουργεί την ανώνυμη συνάρτηση $f(t, x)$ που περιγράφει τη δυναμική του UAV υπό έλεγχο PID, καθορίζει τις ανοχές ολοκλήρωσης μέσω της `odeset`, και καλεί τον επιλυτή `ode15s` για την προσομοίωση της χρονικής εξέλιξης του συστήματος.

- Ορισμός ανώνυμης συνάρτησης που καλεί το δυναμικό μοντέλο του UAV.
- Εισροές: χρόνος t και κατάσταση x .
- Κλήση του επιλυτή stiff ODE.
- Υπολογίζει την εξέλιξη της κατάστασης $x(t)$ στο χρονικό διάστημα $tspan$.

MATLAB Function Definition

```
function xdot = UAV_PID_ode_Final(t, x, m, g, Ix, Iy, Iz, b_drag, x_ref, Kp_alt,...  
    Kd_alt, Kp_x, Kd_x, Kp_y, Kd_y, Kp_a, Kd_a, Ki_a)
```

Function Overview

Η συνάρτηση αυτή περιγράφει τη δυναμική του UAV υπό έλεγχο PID. Υπολογίζει το διαφορικό της κατάστασης — τις παραγώγους όλων των μεγεθών, \dot{x} , βάσει φυσικών παραμέτρων και συντελεστών ελέγχου.

- t : χρόνος.
- x : διάνυσμα κατάστασης (15 στοιχεία).
- $m(t)$: μάζα του UAV (ενδέχεται να μεταβάλλεται με τον χρόνο).
- g : επιτάχυνση της βαρύτητας.
- I_x, I_y, I_z : ροπές αδράνειας γύρω από κάθε άξονα.
- b_{drag} : συντελεστής αεροδυναμικής αντίστασης.
- x_{ref} : συνάρτηση επιθυμητών τιμών (θέση, ταχύτητα, γωνίες κ.λπ.).
- K_p, K_d, K_i : συντελεστές PID για ύψος, θέση και στάση.

Rotation Matrix: Body to Inertial Frame

```
% Rotation matrix from body to inertial framy
mass_t = m(t);
R_w = [cos(x(9))*cos(x(8)), -sin(x(9))*cos(x(7))+...
       cos(x(9))*sin(x(8))*sin(x(7)), sin(x(9))*sin(x(7))+...
       cos(x(9))*sin(x(8))*cos(x(7));
       sin(x(9))*cos(x(8)), cos(x(9))*cos(x(7))+...
       sin(x(9))*sin(x(8))*sin(x(7)), ...
       -cos(x(9))*sin(x(7))+sin(x(9))*sin(x(8))*cos(x(9));
       -sin(x(8)), cos(x(8))*sin(x(7)), cos(x(8))*cos(x(7))];
```

Rotation Matrix R_w

Ο πίνακας R_w μετατρέπει διανύσματα από το body frame στο inertial/world frame $\mathbf{v}_{world} = R_w \mathbf{v}_{body}$. Εξαρτάται από τις γωνίες Euler (ϕ, θ, ψ) , οι οποίες περιέχονται στο διάνυσμα κατάστασης \mathbf{x} .

Αντιστοίχιση γωνιών:

$$\phi = x(7) \quad (\text{roll})$$

$$\theta = x(8) \quad (\text{pitch})$$

$$\psi = x(9) \quad (\text{yaw})$$

Μορφή πίνακα περιστροφής:

$$R_w = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\phi + c_\psi s_\theta s_\phi & s_\psi s_\phi + c_\psi s_\theta c_\phi \\ s_\psi c_\theta & c_\psi c_\phi + s_\psi s_\theta s_\phi & -c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}$$

όπου $c(\cdot) = \cos(\cdot)$ και $s(\cdot) = \sin(\cdot)$.

```
%PID controller  
temp = x_ref(t);  
e_pos = temp(1:6) - x(1:6);  
  
f_tot = Kp_alt * e_pos(3) + Kd_alt * e_pos(6);
```

From Code to Equations

Το τμήμα αυτό του κώδικα αντιστοιχεί στις εξισώσεις ελέγχου του position και altitude channels που παρουσιάστηκαν θεωρητικά.

- Σφάλματα θέσης και ταχύτητας:

$$e_{pos} = x_{ref}(1:6) - x(1:6) \Rightarrow \mathbf{e}_{p_h} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{e}}_{p_h} = \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_z \end{bmatrix}$$

- Έλεγχος ύψους (Altitude Control Law):

$$f_{tot} = K_{p_alt} e_z + K_{d_alt} \dot{e}_z$$

Έτσι, η εξίσωση που διδάχθηκε θεωρητικά (π.χ. $f_d = m[g - (\rho_z^d - K_{z_d}\dot{e}_z - K_{z_p}e_z)]$) υλοποιείται εδώ με απλοποιημένη μορφή για προσομοίωση PD control σε κάθε κανάλι.

```
phi_d = Kp_y * e_pos(2) + Kd_y * e_pos(5);  
theta_d = Kp_x * e_pos(1) + Kd_x * e_pos(4);  
e_a = [phi_d; theta_d; 0] - x(7:9);  
u_a = Kp_a * e_a - Kd_a * x(10:12) + Ki_a * x(13:15);
```

From Code to Equations

Το τμήμα αυτό του κώδικα υλοποιεί τον **εσωτερικό βρόχο ελέγχου στάσης** (attitude control loop), που μετατρέπει τα σφάλματα θέσης σε επιθυμητές γωνίες και τελικά σε ροπές ελέγχου.

- **Επιθυμητές γωνίες στάσης:**

$$\phi_d = K_{p_y} e_y + K_{d_y} \dot{e}_y, \quad \theta_d = K_{p_x} e_x + K_{d_x} \dot{e}_x$$

- **Σφάλμα στάσης (angle error):**

$$\mathbf{e}_a = \begin{bmatrix} \phi_d \\ \theta_d \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = [\phi_d - x(7), \theta_d - x(8), -x(9)]^T$$

- **PID έλεγχος στάσης:** $\mathbf{u}_a = K_{p_a} \mathbf{e}_a - K_{d_a} \boldsymbol{\omega} + K_{i_a} \int \mathbf{e}_a dt$ όπου $\boldsymbol{\omega} = x(10:12)$ είναι οι ρυθμοί του σώματος (p, q, r).

```
% Gravity (in the inertial frame):
Gravity = [0, 0, -mass_t*g]';
% Drag
F_d = -b_drag * x(4:6);
% Total force
F_translational = R_w * [0; 0; f_tot + mass_t*g] + Gravity + F_d;
% Acceleration in the inertial frame:
acc = (1/mass_t) * F_translational;
```

Physical Meaning

Το τμήμα αυτό του κώδικα υπολογίζει τις δυνάμεις και επιταχύνσεις στο **inertial frame**.

Επιμέρους δυνάμεις:

$$F_{drag} = -b_{drag} \mathbf{v}_b$$
$$\text{Gravity} = [0, 0, -mg]^\top$$

Συνολική δύναμη:

$$\mathbf{F}_{all} = R_w \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{tot} + mg \end{bmatrix} + \text{Gravity} + F_{drag}$$

- Η **βαρύτητα** δρα κατακόρυφα προς τα κάτω (στο inertial frame).
- Η **αντίσταση (drag)** είναι ανάλογη και αντίθετη της ταχύτητας.

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{all}$$

% Transformation matrix Q and total moments:

```

Q_BW = [1, sin(x(9)) * tan(x(8)), cos(x(7)) * tan(x(8)); 0, ...
         cos(x(9)), -sin(x(7)); 0, sin(x(9))/cos(x(8)), cos(x(9))/cos(x(8))];
Q_WB = Q_BW';
OMEGA1 = Q_WB * [x(10); x(11); x(12)];
a1 = [Ix, 0, 0; 0, Iy, 0; 0, 0, Iz] * OMEGA1;
OMEGA2 = cross(OMEGA1,a1);
tau = [Ix^-1, 0, 0; 0, Iy^-1, 0; 0, 0, Iz^-1] * ...
      (u a - OMEGA2);
    
```

Theoretical Background

Η εξίσωση στροφικής δυναμικής του UAV: $\mathbf{J}\dot{\omega} + \omega \times (\mathbf{J}\omega) = \tau$, όπου:
 $\mathbf{J} = \text{diag}(I_x, I_y, I_z)$, $\omega = [p \ q \ r]^T$, $\tau = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$.

Κινηματική μετατροπή:

$$\dot{\Theta} = Q_{BW} \omega$$

$$Q_{BW} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \psi \tan \theta & \cos \psi \tan \theta \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi / \cos \theta & \cos \psi / \cos \theta \end{bmatrix}$$

συνδέει τα p, q, r με τους ρυθμούς Euler $(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$. Το $Q_{WB} = Q_{BW}^T$ εκτελεί την αντίστροφη μετατροπή.

Εφαρμογή στο κώδικα:

$$\mathbf{J}\dot{\omega} = \underbrace{\tau - (\omega \times (\mathbf{J}\omega))}_{u_a - \Omega_2} \Rightarrow \dot{\omega} = \mathbf{J}^{-1}(u_a - \Omega_2)$$

όπου:

$$\Omega_1 = Q_{WB} [p \ q \ r]^T, \quad \Omega_2 = \Omega_1 \times (\mathbf{J}\Omega_1).$$

Ο όρος Ω_2 αναπαριστά τα γυροσκοπικά φαινόμενα (συζεύξεις roll-pitch-yaw) και εξηγεί γιατί τα κανάλια στάσης είναι αλληλεξαρτώμενα.

State Derivative Assembly

```
% Compute time derivatives of state variables
xdot = [x(4:6); acc; x(10:12); tau; e_a];
t
end
```

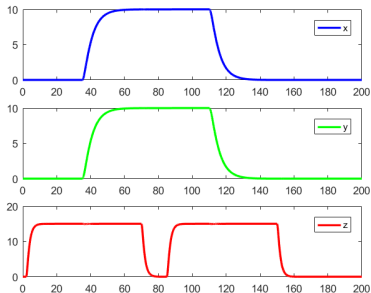
- **Position kinematics:** $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{x}(4:6)$.
- **Translational dynamics:** $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} = \frac{1}{m} \mathbf{F}_{\text{τρανσλ}} \Rightarrow \text{acc}$.
- **Attitude kinematics:** $\dot{\Theta} = \omega$ (μικρογωνιακή προσέγγιση γενικά $\dot{\Theta} = Q_{BW}\omega$) $\Rightarrow \mathbf{x}(10:12)$.
- **Rotational dynamics:** $\dot{\omega} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{u}_a - \omega \times (\mathbf{J}\omega)) \Rightarrow \text{tau}$ (στον κώδικα το tau παριστάνει $\dot{\omega}$).
- **Integral states (for K_i):** $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{e}_a \Rightarrow \mathbf{e}_a$.

Σημ.: Αν δεν χρησιμοποιείται η μικρογωνιακή υπόθεση, αντικαθιστούμε $\dot{\Theta} = \omega$ με $\dot{\Theta} = Q_{BW}\omega$.

Position Trajectories in 3D Space

Τα γραφήματα απεικονίζουν τις **τροχιές αναφοράς** $(x(t), y(t), z(t))$ όπως ορίζονται από τις Heaviside συναρτήσεις όταν $\text{flag_reg} = 1$.

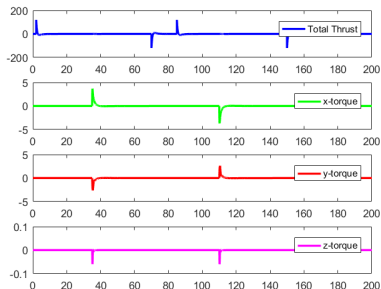
- **X, Y axes (blue, green):** Το UAV μετακινείται οριζόντια από τη θέση $(0, 0)$ προς $(10, 10)$ στο διάστημα $t_B \leq t \leq t_E$, και επιστρέφει στο σημείο εκκίνησης μετά το t_E .
- **Z axis (red):** Το ύψος μεταβάλλεται στα επίπεδα $z = 15\mu$ σύμφωνα με τις φάσεις απογείωσης (t_A), προσγείωσης (t_C), επαναπογείωσης (t_D) και τελικής προσγείωσης (t_F).



Control Effort Evolution (PID Controller Outputs)

Τα γραφήματα παρουσιάζουν τις **εντολές ελέγχου** του PID ελεγκτή: την ολική ώση και τις ροπές γύρω από τους τρεις άξονες.

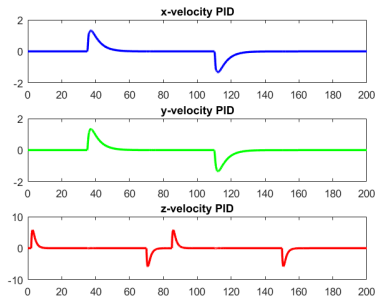
- **Total Thrust (blue):** Αυξάνεται απότομα κατά την απογείωση (t_A), μειώνεται στην προσγείωση (t_C), και ξαναπαρουσιάζει αιχμές κατά τη δεύτερη απογείωση (t_D).
- **Torques x, y, z :** Οι ροπές είναι μικρές σε πλάτος, καθώς το ΥΑ΄ διατηρεί σχεδόν μηδενικές γωνίες στάσης. Οι σύντομες αιχμές εμφανίζονται στις μεταβάσεις (λόγω των βηματικών αλλαγών αναφοράς).
- Το σύστημα είναι **καλά αποσβεσμένο**: οι ροπές επανέρχονται γρήγορα στο μηδέν.



Velocity Control (PID Outputs)

Τα γραφήματα παρουσιάζουν τις **ταχύτητες και τις αποκρίσεις** του PID ελεγκτή στους τρεις άξονες: x , y και z .

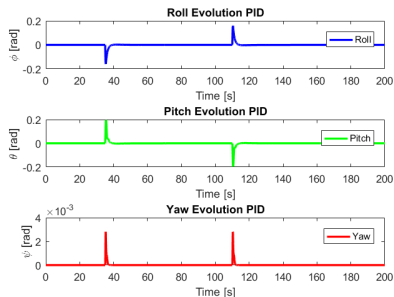
- **x-velocity (blue)**: Εμφανίζει θετική αιχμή κατά την κίνηση προς τα εμπρός και αρνητική αιχμή όταν το όχημα **κινείται προς τα πίσω**, επανερχόμενο τελικά στο μηδέν.
- **y-velocity (green)**: Παρόμοια συμπεριφορά με τον άξονα x , με καλή απόσβεση και μικρή υπερύψωση.
- **z-velocity (red)**: Οι αιχμές είναι πιο έντονες λόγω μεταβολών ύψους, ωστόσο η ταχύτητα σταθεροποιείται γρήγορα μετά από κάθε ελιγμό.



Attitude Evolution (PID Controller Outputs)

Τα γραφήματα παρουσιάζουν την **εξέλιξη των γωνιών στάσης του UAV** υπό τον έλεγχο PID:

- **Roll (blue):** Μικρές αποκλίσεις κατά τη διάρκεια των ελιγμών, με σύντομες αιχμές όταν το UAV αλλάζει κατεύθυνση (δεξιά-αριστερά).
- **Pitch (green):** Παρόμοια συμπεριφορά με το Roll, με θετικές και αρνητικές αιχμές όταν το όχημα επιταχύνει ή κινείται προς τα πίσω.
- **Yaw (red):** Πολύ μικρές μεταβολές γύρω από τον κατακόρυφο άξονα, δείχνοντας ότι το UAV διατηρεί σχεδόν σταθερή πορεία.



Angular Rate Evolution (PID Controller Outputs)

Τα γραφήματα παρουσιάζουν την **εξέλιξη των γωνιακών ταχυτήτων** του UAV, όπως ρυθμίζονται από τον PID ελεγκτή στους τρεις άξονες: Roll, Pitch και Yaw.

- **Roll rate (blue):** Παρουσιάζει σύντομες αιχμές κατά τις αλλαγές κατεύθυνσης, διατηρώντας σχεδόν μηδενικές τιμές στο υπόλοιπο της πτήσης.
- **Pitch rate (green):** Εμφανίζει παρόμοια συμπεριφορά με το Roll rate, με συμμετρικές αιχμές στις στιγμές αντιστροφής πορείας.
- **Yaw rate (red):** Οι μεταβολές είναι πολύ μικρές, δείχνοντας ότι η γωνία πορείας παραμένει σχεδόν σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της πτήσης.

