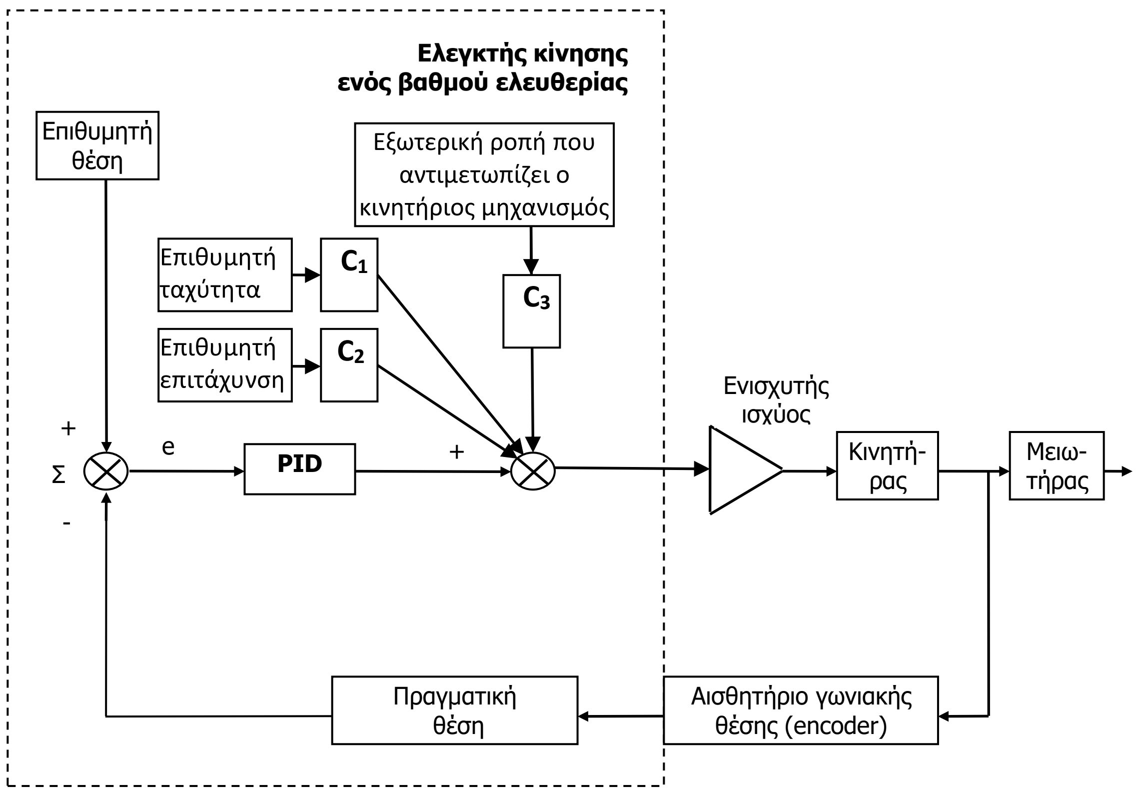
Έλεγχος ενός βαθμού ελευθερίας ρομποτικού συστήματος

Το βασικό σχήμα ελέγχου ενός βαθμού ελευθερίας (μιάς άρθρωσης, ενός τροχού, κλπ) ρομποτικού συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 1.

`



Σχήμα 1

Πρόκειται στην ουσία για ένα τυπικό σύστημα κλειστού βρόχου ελέγχου ταχύτητας ή θέσης. Εφαρμόζεται για την περίπτωση χρήσης κινητήρα συνεχούς ρεύματος – αν χρησιμοποιηθεί βηματικός κινητήρας δεν απαιτείται σύστημα κλειστού βρόχου.

Ο ελεγκτής κίνησης μπορεί να είναι ένας οποιοσδήποτε Η/Υ :

- Αν χρησιμοποιηθεί PC, τότε απαιτείται να χρησιμοποιηθεί επίσης «κάρτα διασύνδεσης» η οποία αναλαμβάνει την διεπαφή (interface) τόσο με τον αισθητήρα γωνιακής θέσης όσο και με τον ενισχυτή ισχύος. Οι διαθέσιμοι στην αγορά ελεγκτές κίνησης σε μορφή κάρτας για PC, είναι σε θέση να ελέγξουν συνήθως αρκετούς βαθμούς ελευθερίας. Αρκεί δηλαδή μια τέτοια για να ελεγχθεί ένα ρομπότ[1].

- Οι σύγχρονοι ισχυροί μικροελεγκτές είναι επίσης κατάλληλοι. Πλεονεκτούν ως προς το χαμηλό κόστος και ως προς το γεγονός ότι είναι άμεσα διασυνδέσιμοι τόσο με τον αισθητήρα όσο και με τον ενισχυτή ισχύος.

1. Μέθοδος ελέγχου

Μια δοκιμασμένη μέθοδος ελέγχου είναι ο συνδυασμός ενός τυπικού ελεγκτή τριών όρων (PID) με δράσεις πρόσω τροφοδότησης ταχύτητας, επιτάχυνσης και ροπής.

1.a. Τυπικός ελεγκτής τριών όρων (PID)

Η επιθυμητή γωνιακή θέση, αφαιρείται από την πραγματική και προκύπτει το σφάλμα e.
Το σφάλμα «υπόκειται» σε τριών ειδών «επεξεργασίες» προκειμένου να παραχθούν τρεις διαφορετικές «δράσεις ελέγχου» που αφού αθροισθούν αποτελούν την εντολή ελέγχου.

<u>Αναλογική δράση ελέγχου – Proportional control</u>

Πρόκειται για ένα απλό πολλαπλασιασμό του σφάλματος επί μια σταθερά K_p – την σταθερά ή κέρδος του αναλογικού ελέγχου. Είναι η απλούστερη, σχεδόν ενστικτώδης δράση ελέγχου : Όσο υπάρχει σφάλμα, υπάρχει και εντολή προς τον κινητήρα προκειμένου να εξουδετερωθεί το σφάλμα και η άρθρωση να ισορροπήσει στην επιθυμητή θέση.
Αν ο κινητήρας αντιμετωπίζει βαρυτικές δυνάμεις – άρθρωση ανυψώνει φορτίο ή τροχήλατο ρομπότ κινείται σε ανηφόρα- ή στατική τριβή, στις πλείστες δηλαδή των περιπτώσεων, τότε μετά από μια εντολή κίνησης σε συγκεκριμένη γωνία, η πραγματική τιμή δεν μπορεί να φτάσει ακριβώς την επιθυμητή. Στην κατάσταση ισορροπίας θα υπάρχει ένα κάποιο σφάλμα (σφάλμα μόνιμης κατάστασης, $\mathbf{e_{ss}}$), το οποίο πολλαπλασιαζόμενο επί την σταθερά K_p, θα παρέχει την απαραίτητη εντολή στον ενισχυτή ισχύος για να εξουδετερώσει ακριβώς αυτά τα «βαρυτικά φορτία».

Επίδραση του κέρδους K_p στην «συμπεριφορά» του συστήματος

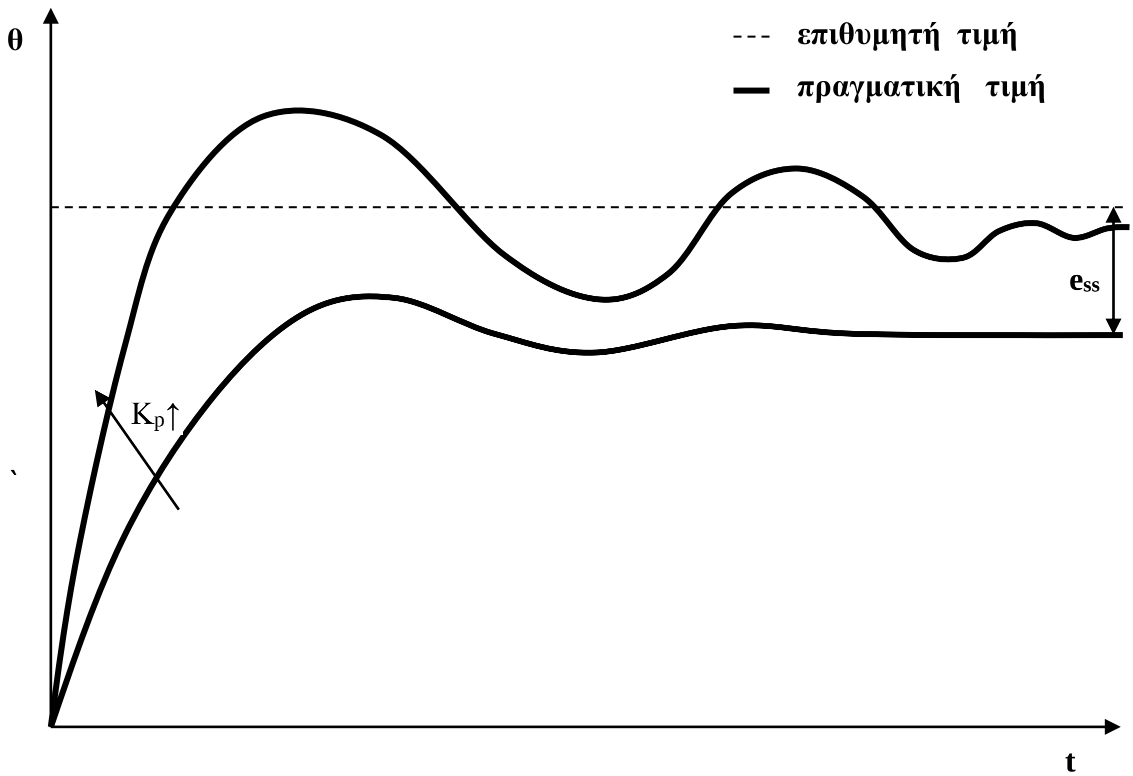
Όσο μικρότερο είναι το κέρδος K_p, τόσο μικρότερες εντολές παράγονται για συγκεκριμένες τιμές του σφάλματος. Συνεπώς το σύστημα :

- αφ’ ενός θα αργεί να «αποκριθεί» σε ζήτηση συγκεκριμένης γωνίας στροφής, θα είναι δηλαδή «νωθρό»
- αφ’ ετέρου, αν αντιμετωπίζει βαρυτικά φορτία, θα ισορροπεί με μεγάλο σφάλμα μόνιμης κατάστασης

[1] Ένας σχετικός δικτυακός τόπος : http://www.bbdsoft.com/iocard_motion.html

Τα εντελώς αντίθετα θα συμβούν για μεγάλες τιμές του κέρδους. Εδώ το σύστημα κινδυνεύει να αντιδράσει βίαια, άρα να οδηγηθεί σε «αστάθεια» για μεγάλες τιμές του κέρδους. Το σφάλμα μόνιμης κατάστασης θα είναι βεβαίως μικρότερο, αλλά ποτέ μηδέν αν το σύστημα αντιμετωπίζει βαρυτικά φορτία.

Τα παραπάνω φαίνονται παραστατικά στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

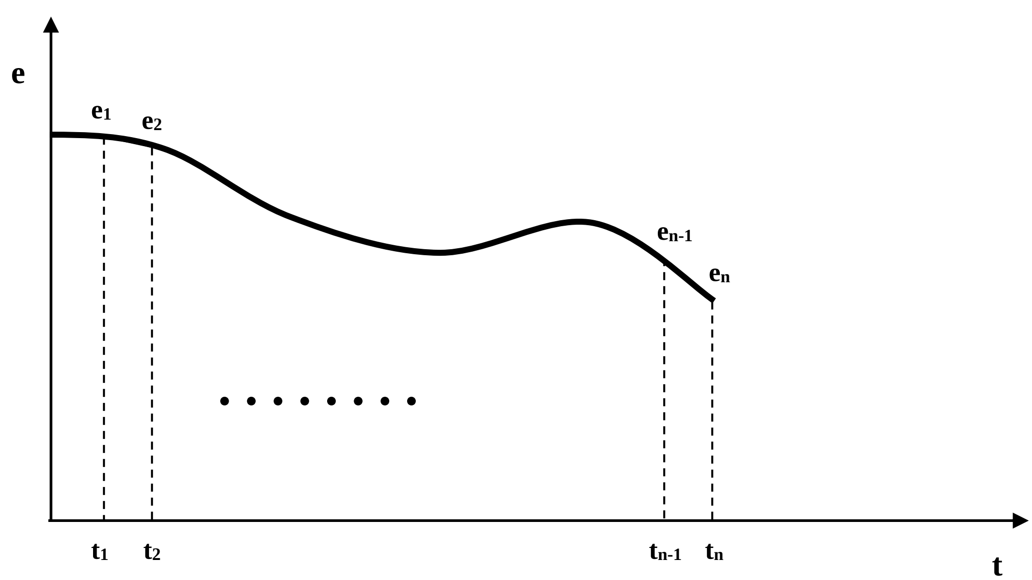
Ολοκληρωτική δράση ελέγχου – Integral Control

Αν το σφάλμα μόνιμης κατάστασης πρέπει να είναι μηδέν και κάτι τέτοιο δεν είναι επιτεύξιμο με αναλογική δράση ελέγχου, τότε πρέπει να προστεθεί και «ολοκληρωτική δράση ελέγχου». Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1, το σφάλμα, σαν συνάρτηση του χρόνου, ολοκληρώνεται στο χρόνο και το παραγόμενο ολοκλήρωμα πολλαπλασιάζεται επί μια σταθερά K_i. Η τιμή που προκύπτει προστίθεται στον «αναλογικό όρο» του ελέγχου και συνδιαμορφώνει την εντολή ελέγχου.

Ο ρόλος του «ολοκληρωτικού όρου» στον έλεγχο του συστήματος

Στο Σχήμα 3, φαίνεται πως εξελίσσεται τυπικά το σφάλμα ελέγχου μετά από μια εντολή κίνησης. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει, ότι όσο το σφάλμα δεν είναι μηδέν, που ας μην ξεχνούμε είναι η ζητούμενη κατάσταση, το ολοκλήρωμα δεν αποκτά σταθερή τιμή. Ο μόνος τρόπος για να σταθεροποιηθεί - να αποκτήσει σταθερή τιμή - το ολοκλήρωμα, είναι να γίνει το σφάλμα μηδέν.

Επανερχόμαστε στην δράση του ολοκληρωτικού όρου στον έλεγχο του συστήματος: Ας υποθέσομε ότι λειτουργεί τόσο ο αναλογικός όσο και ο ολοκληρωτικός όρος, το σύστημα ελέγχου παίρνει εντολή να κινήσει τον κινητήρα κατά συγκεκριμένη γωνία και πράγματι ο τελευταίος εκτελεί την κίνηση και σταματά, βρίσκει δηλαδή μια νέα θέση ισορροπίας. Αφού το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, η εντολή ελέγχου προς τον ενισχυτή ισχύος έχει σταθεροποιηθεί, συνεπώς και το ολοκλήρωμα που συμμετέχει στην διαμόρφωση της εντολής έχει βρει μια σταθερή τιμή. Οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, το σφάλμα (μόνιμης κατάστασης) είναι μηδέν! Η δράση δηλαδή του ολοκληρωτικού όρου εξαφάνισε το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, ανάγκασε δηλαδή τον κινητήρα να κινηθεί και να ισορροπήσει ακριβώς στην ζητούμενη θέση.



Σχήμα 3

Επίδραση του κέρδους K_i στην «συμπεριφορά» του συστήματος

Ο ολοκληρωτικός όρος γενικά έχει την τάση να δημιουργεί ταλαντώσεις, να χειροτερεύει δηλαδή την ευστάθεια του συστήματος. Η σταθερά συνεπώς K_i ρυθμίζει κατά κάποιο τρόπο την τάση αυτή : Μεγάλες τιμές της έχουν σαν αποτέλεσμα ο ολοκληρωτικός όρος να επιδρά και να καταστέλλει γρήγορα το σφάλμα, εις βάρος όμως της ευστάθειας. Το αντίθετο συμβαίνει για μικρές τιμές.

Αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος

Για την υλοποίηση του ελέγχου όπως έχει αναφερθεί χρησιμοποιείται κάποιου είδους Η/Υ. Η εντολή προς το σύστημα υπολογίζεται, ανανεώνεται κάθε Δt mseconds. Ο χρόνος αυτός ονομάζεται χρόνος δειγματοληψίας και ελέγχου[2]. Το (ορισμένο) ολοκλήρωμα του σφάλματος από χρόνο $\mathbf{t_{n-1}}$ μέχρι χρόνο $\mathbf{t_n}$ είναι περίπου ίσο με το εμβαδόν του σχετικού τραπεζίου (Σχήμα 3) :

$$(e_{n-1} + e_n)\, \Delta t / 2$$

Το ολοκλήρωμα από την έναρξη του ελέγχου μέχρι τον χρόνο υ_n (ν-οστή περίοδος ελέγχου), δίδεται από τον αναδρομικό τύπο :

$$I_n = I_{n-1} + (e_{n-1} + e_n)\, \Delta t / 2$$

<u>Διαφορική δράση ελέγχου</u>

Όπως θα μπορούσε κανείς να φαντασθεί και από το όνομα, πρόκειται για ένα όρο της εντολής ελέγχου που σχετίζεται με τις (τοπικές) διαφορές του σφάλματος, με την παράγωγό του δηλαδή την συγκεκριμένη χρονική στιγμή του ελέγχου. Ο εν λόγω όρος δημιουργεί εντολή ανάλογη της «τάσης του σφάλματος να μεταβληθεί», προσπαθεί δηλαδή να προλάβει απότομες μεταβολές στο σφάλμα. Τελικά δηλαδή προσπαθεί να προλάβει αστάθειες. *Ο όρος συμβάλλει θετικά στην ευστάθεια του συστήματος.*

Αριθμητικός υπολογισμός της παραγώγου

Μια 1ης τάξης προσέγγιση της παραγώγου της συνάρτησης σφάλματος την χρονική στιγμή $\mathbf{t_n}$ (Σχήμα 3) δίδεται από τον τύπο :

$$D_n = (e_n - e_{n-1}) / \Delta t$$

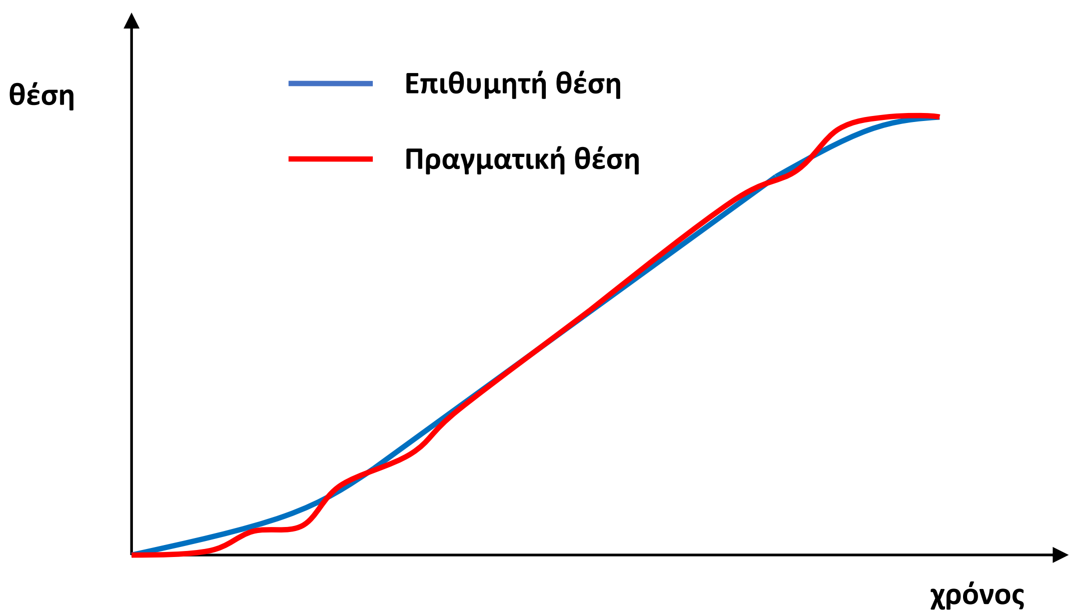
[2] Για τα συνήθη ρομποτικά συστήματα 1 ms είναι αρκετό.

1.b. Δράσεις πρόσω τροφοδότησης – feed forward.

1.b.1. Πρόσω τροφοδότηση ταχύτητας και επιτάχυνσης.

Όπως θα γίνει κατανοητό στην συνέχεια, η *κίνηση από μια θέση σε μια άλλη* ενός κινητηρίου συστήματος (μιας άρθρωσης), *<u>δεν πρέπει να αφεθεί στο έλεος της δυναμικής του συστήματος</u>*. Αντιθέτως, πρέπει να προδιαγραφεί η ταχύτητα καθώς και η επιτάχυνση της κίνησης και στην συνέχεια βεβαίως να γίνει κάθε προσπάθεια ώστε ο μηχανισμός να ακολουθήσει όσο γίνεται πιο πιστά τόσο τις εντολές θέσης όσο και αυτές της ταχύτητας και επιτάχυνσης.

Στο Σχήμα που ακολουθεί, φαίνεται ένα τυπικό προφίλ επιθυμητής θέσης καθώς και η πραγματική απόκριση του συστήματος με ένα καλά ρυθμισμένο PID ελεγκτή. Αυτή η συμπεριφορά του μηχανισμού είναι ικανοποιητική για συστήματα στα οποία μας ενδιαφέρει η <u>ομαλή</u> *κίνηση από σημείου εις σημείο (point to point motion)*.



Υπάρχουν όμως συστήματα περισσοτέρων βαθμών ελευθερίας, όπου μας ενδιαφέρει επίσης για το *μονοπάτι (path)* που θα ακολουθήσει το άκρο του μηχανισμού : ρομπότ που πρέπει να ακολουθήσουν με ακρίβεια συγκεκριμένη καμπύλη στο χώρο, αλλά κυρίως αυτόματες εργαλειομηχανές. Στην περίπτωση αυτή η παραπάνω απόκριση μιας άρθρωσης δεν είναι αποδεκτή.

Αποδεικνύεται στην θεωρία ελέγχου, ότι με πρόσω τροφοδότηση και με κατάλληλη επιλογή των σταθερών C_1 και C_2 (Σχήμα 1), *ο μηχανισμός μπορεί να παρακολουθήσει «ακριβώς» ένα επιθυμητό προφίλ θέσης*, υπό την προϋπόθεση βέβαια ότι το κινητήριο σύστημα διαθέτει την απαιτούμενη ισχύ. Οι σταθερές C_1 και C_2 προσδιορίζονται αν είναι γνωστό το δυναμικό μοντέλο του συστήματος και στην συνέχεια μπορούν να «μικρο-ρυθμισθούν (fine tuning)» στην πραγματική εγκατάσταση, αφού το δυναμικό μοντέλο δεν αναπαριστά ποτέ την πραγματικότητα με απόλυτη ακρίβεια.

1.b.2. Πρόσω τροφοδότηση ροπής

Στην πλειονότητα των συστημάτων, ο μηχανισμός, εκτός από το να κινηθεί, πρέπει να επιβάλλει ροπή στο φορτίο που κινεί. Η ροπή αυτή μπορεί να χρειάζεται για να ανυψωθούν μάζες (βαρυτικές δυνάμεις), για να επιταχυνθούν μάζες (αδρανειακές δυνάμεις) ή για να εξασκηθούν δυνάμεις (δυνάμεις κοπής σε μια αυτόματη εργαλειομηχανή ή δυνάμεις που πρέπει να ασκήσει το εργαλείο ενός ρομποτικού βραχίονα). Αν η ροπή που πρέπει να επιβάλλει ο μηχανισμός μιάς άρθρωσης μπορεί να υπολογισθεί, τότε ο βρόχος πρόσω τροφοδότησης ροπής (Σχήμα 1) «διευκολύνει» αφάνταστα τον έλεγχο του συστήματος. Στην ουσία δρα προβλεπτικά και τροφοδοτεί το κινητήριο σύστημα με την απαιτούμενη ισχύ, ώστε η ροπή που καλείται να αντιμετωπίσει να μην είναι πλέον «διαταραχή». Η σταθερά C_3 μπορεί και πάλι να προσδιορισθεί αν είναι γνωστό το δυναμικό μοντέλο του συστήματος.

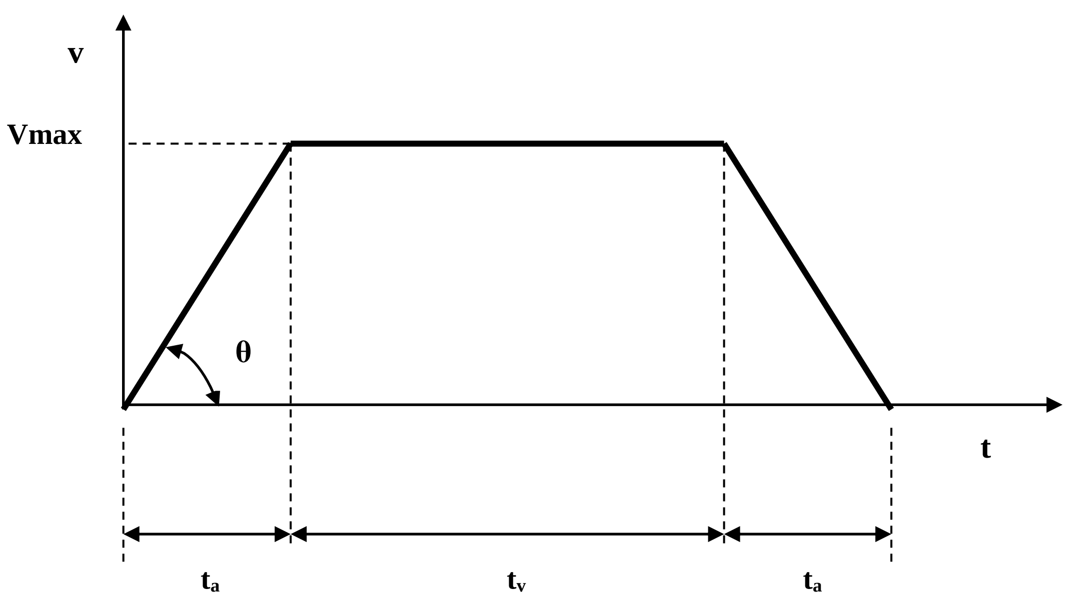
Έλεγχος μιας άρθρωσης

Χρονική συνάρτηση (προφίλ) επιθυμητής ταχύτητας – θέσης για «ομαλή» κίνηση άρθρωσης από σημείου εις σημείο.

Το πρόβλημα

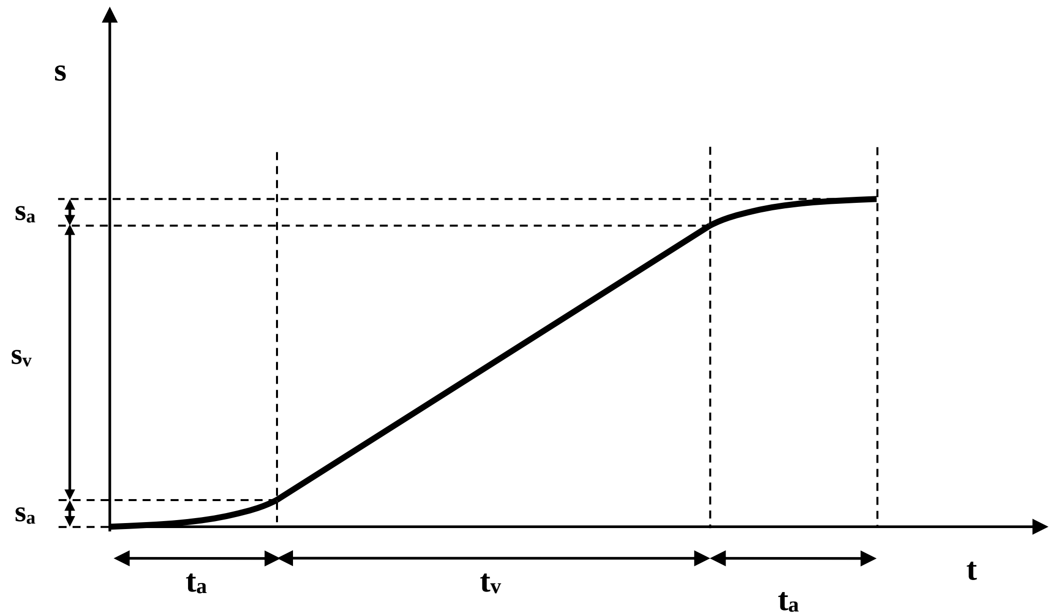
Να ‛σχεδιασθεί’ προφίλ ταχύτητας και θέσης για όσο γίνεται ομαλότερη κίνηση άρθρωσης από σημείου εις σημείο.

Ένας απλός τρόπος προκειμένου να επιτύχει κανείς ‛ομαλή’ κίνηση, είναι να ‛σχεδιάσει’ ένα τραπεζοειδές προφίλ ταχύτητας. Να ζητήσει δηλαδή από την άρθρωση να ξεκινήσει με σταθερή επιτάχυνση, να επιταχύνει μέχρι να επιτευχθεί η μέγιστη ταχύτητα, να συνεχίσει ομαλή κίνηση με ταχύτητα Vmax και την κατάλληλη στιγμή να αρχίσει επιβραδυνόμενη κίνηση μέχρι ακινητοποιήσεως (Σχήμα 4). Το εν λόγω προφίλ κίνησης είναι συνήθως (χωρίς να είναι απαραίτητο) συμμετρικό, δηλαδή ο χρόνος της επιταχυνόμενης κίνησης ισούται με τον χρόνο της επιβραδυνόμενης.



Σχήμα 4. Τραπεζοειδές προφίλ ταχύτητας για ομαλή κίνηση άρθρωσης από σημείου εις σημείο.

Από το τραπεζοειδές προφίλ επιθυμητής ταχύτητας, προκύπτει το προφίλ της επιθυμητής θέσης (Σχήμα 5).



Σχήμα 5

Αν είναι :

a	:	η επιτάχυνση
Vmax	:	Η ταχύτητα της ομαλής κίνησης
T	:	Ο συνολικός χρόνος κίνησης
t_a	:	Ο χρόνος της επιταχυνόμενης και επιβραδυνόμενης κίνησης – συμμετρικό προφίλ κίνησης
t_v	:	Ο χρόνος της ομαλής κίνησης
S	:	Το συνολικό διάστημα
s_a	:	Το διάστημα που διανύθηκε κατά την επιταχυνόμενη ή επιβραδυνόμενη κίνηση
s_v	:	Το Το διάστημα που διανύθηκε κατά την ομαλή κίνηση

Ισχύουν οι σχέσεις :

$V_{max} = a\,t_a$	(1)	Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
$s_a = ½\ a\ t_a^2 = ½\ V_{max}^2 / a$	(2)	Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση
$S = 2s_a + s_v$	(3)	Συνολικό διάστημα κίνησης
$T = 2\ t_a + t_v$	(4)	Συνολικός χρόνος κίνησης
$s_v = V_{max}\ t_v = (a\,t_a)\ t_v$	(5)	Ομαλή ευθύγραμμη κίνηση

<u>Συνήθως δίδονται τα παρακάτω :</u>

- Συνολικό διάστημα κίνησης : S

- Μέγιστη επιθυμητή ταχύτητα : Vmax
- Επιτάχυνση : a

Οπότε, η διαδικασία για να υπολογίσομε τα υπόλοιπα μεγέθη της κίνησης είναι :

➔ Από την (1) υπολογίζεται το t_a
➔ Από την (2) υπολογίζεται το s_a
➔ Από την (3) υπολογίζεται το s_v
➔ Από την (5) υπολογίζεται το t_v

Κάποιες φορές δίδονται τα παρακάτω :

- Συνολικό διάστημα κίνησης : S
- Χρόνοι επιταχυνόμενης και ομαλής κίνησης : t_a και t_v

τότε, η διαδικασία για να υπολογίσομε τα υπόλοιπα μεγέθη της κίνησης είναι :

➔ Από την (1) και (5) προκύπτει :

$$S = 2s_a + s_v = 2(½\, a\, t_a^2) + (a\, t_a)\, t_v \;\; \Rightarrow a = S/(t_a^2 + t_a\, t_v)$$

➔ Από την (1) υπολογίζεται το V_{max}
➔ Τα υπόλοιπα μεγέθη όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Αν δίδονται τα :

- Συνολικό διάστημα κίνησης : S
- Συνολικός χρόνος κίνησης : T
- Επιτάχυνση a

Ισχύει :

$$S = 2s_a + s_v = 2(½\, a\, t_a^2) + (a\, t_a)\, t_v$$
$$T = 2t_a + t_v$$

που αποτελεί σύστημα εξισώσεων με αγνώστους t_a και t_v , που μετά τον υπολογισμό τους η διαδικασία ανάγεται στην προηγούμενη.

Το ζητούμενο προφίλ θέσης δίδεται από τις σχέσεις :

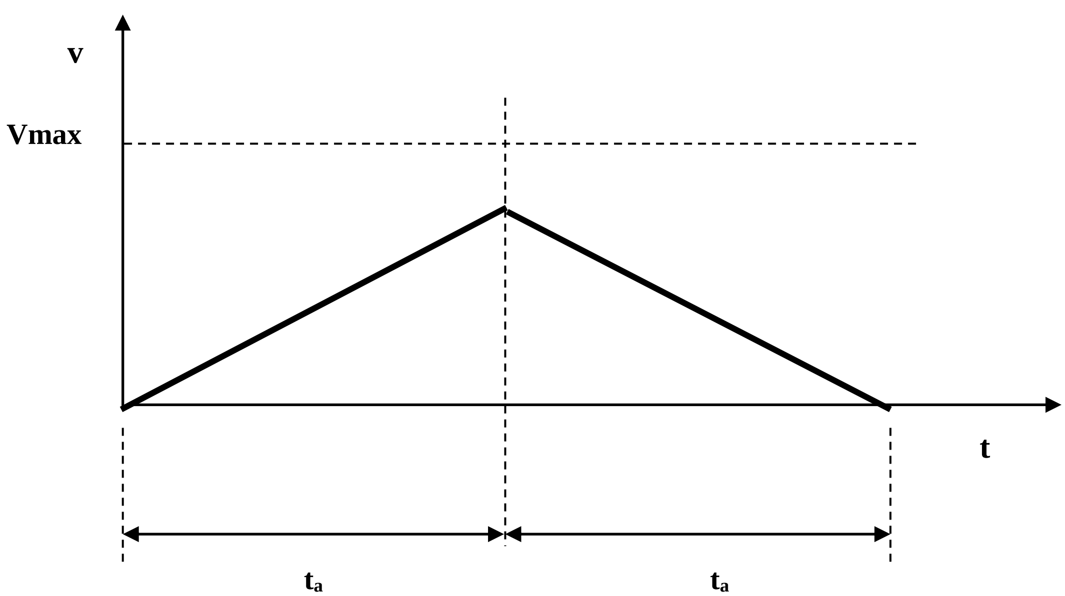
$$
s(t) = \begin{cases}
\tfrac{1}{2}\, a\, t^2 & \text{για } t < t_a \quad (1.\alpha) \\
\text{(ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση)} & \\
s_a + V_{max}\,(t - t_a) & \text{για } t_a <= t < (t_a + t_v) \quad (1.\beta) \\
\text{(ομαλή κίνηση με αρχικό διάστημα } s_a\text{)} & \\
(s_a + s_v) + V_{max}(t - t_a - t_v) - \tfrac{1}{2}\, a\, (t - t_a - t_v)^2 & \text{για } (t_a + t_v) <= t <= T \quad (1.\gamma) \\
\text{(ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχικό διάστημα και αρχική ταχύτητα)} &
\end{cases}
$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι γραμμένες για ευθύγραμμη κίνηση, ισχύουν όμως και για περιστροφική, αρκεί το διάστημα s να αντικατασταθεί με γωνία φ, η γραμμική ταχύτητα με γωνιακή ταχύτητα και η γραμμική επιτάχυνση με γωνιακή επιτάχυνση.

Πολλές φορές, την φάση της επιταχυνόμενης κίνησης ακολουθεί αμέσως η φάση της επιβραδυνόμενης : Είτε επειδή έτσι το ζητούμε για να ελαχιστοποιήσομε τους χρόνους μετάβασης είτε γιατί με δεδομένα τα S, Vmax και a, η άρθρωση ενδέχεται να μην ‘προλάβει’ να αναπτύξει την επιθυμητή ταχύτητα (είτε επειδή το διάστημα κίνησης είναι πολύ μικρό είτε επειδή η επιτάχυνση είναι πολύ μικρή). Για την τελευταία περίπτωση, αυτό θα συμβεί, σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, αν ισχύει :

$$2\, s_a >= S \;=>\; 2(\tfrac{1}{2}\, V_{max}^2 / a) >= S \;=>\; \mathbf{S <= V_{max}^2 / a}$$

Τότε όμως, για λόγους συμμετρίας, το διάστημα της επιταχυνόμενης κίνησης θα είναι ίσο με αυτό της επιβραδυνόμενης – τριγωνικό προφίλ ταχύτητας (Σχήμα 6).



Σχήμα 6

Οπότε :

$s_a = S/2 = ½\ a\,(t_a)^2$

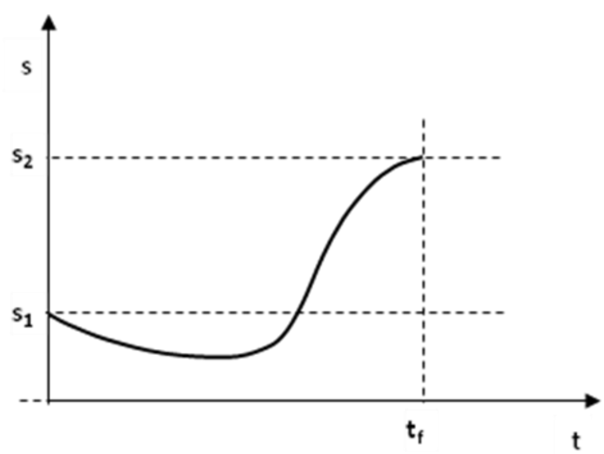
από την οποία μπορεί να προκύψει ο χρόνος t_a

Το ζητούμενο προφίλ θέσης δίδεται τότε από τις σχέσεις :

$$s(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} a t^2 & \text{για } t < t_a \quad (2.α) \\ \text{(ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση)} & \\ (S/2) + (a\,t_a)(t-t_a) - \tfrac{1}{2} a (t-t_a)^2 & \text{για } t_a <= t <= 2t_a \quad (2.β) \\ \text{(ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση με αρχικό διάστημα και αρχική ταχύτητα)} & \end{cases}$$

Το γενικότερο πρόβλημα του σχεδιασμού της μετάβασης από μια θέση σε μια άλλη (trajectory planning).

Στην γενικότερη των περιπτώσεων, το πρόβλημα του σχεδιασμού του προφίλ θέσης στο χρόνο, τίθεται ως εξής :



Να σχεδιασθεί το κατάλληλο προφίλ s(t) (trajectory) για την μετάβαση από την θέση s_1 όπου ο σερβομηχανισμός έχει ταχύτητα v_1, στην θέση s_2 όπου ο σερβομηχανισμός πρέπει να έχει ταχύτητα v_2, εντός χρόνου t_f.

Αν για το s(t) επιλεγεί πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού, ένα <u>κυβικό πολυώνυμο</u> δηλαδή, οι συντελεστές της μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια των παραπάνω οριακών συνθηκών.

Έστω : $s(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t^1 + a_0 t^0$

Τότε, η ταχύτητα προκύπτει από την πρώτη παράγωγο της παραπάνω συνάρτησης ως προς τον χρόνο :

V(t) = $\dot{s}(t) = v(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες θέσης και ταχύτητας, έχομε :

$$s_0 = a_3 0^3 + a_2 0^2 + a_1 0^1 + a_0$$
$$s_{tf} = a_3 t_f^{\,3} + a_2 t_f^{\,2} + a_1 t_f + a_0$$

$$\dot{s}_0 = v_0 = 3a_3 0^2 + 2a_2 0 + a_1$$
$$\dot{s}_{tf} = v_{tf} = 3a_3 t_f^{\,2} + 2a_2 t_f + a_1$$

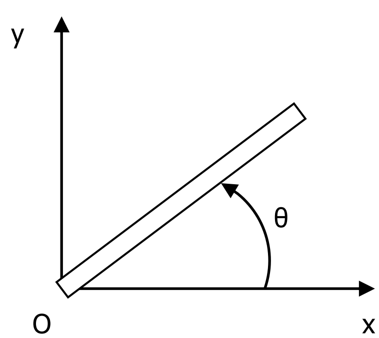
Αν επιλύσομε το παραπάνω σύστημα των 4 εξισώσεων, θεωρώντας αγνώστους τους συντελεστές a_3, a_2, a_1 και a_0, βρίσκομε :

$$a_o = s_0 \qquad a_2 = \frac{3(s_{tf} - s_0) - (2v_0 + v_{tf})t_f}{t_f^{\,2}}$$

$$a_1 = v_0 \qquad a_3 = \frac{2(s_0 - s_{tf}) + (v_0 + v_{tf})t_f}{t_f^{\,3}}$$

Αν χρησιμοποιήσει κανείς πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού, τότε μπορεί να προσθέσει δύο ακόμη οριακές συνθήκες, να θέσει ας πούμε και απαιτήσεις επιτάχυνσης στην αρχή και το τέλος της κίνησης.

Παράδειγμα



Είναι επιθυμητό, η άρθρωση με κέντρο περιστροφής το O (σχήμα) να περιστραφεί από την θέση 0 μέχρι την θέση π ακτίνια (rad) σε 1 δευτερόλεπτο, ξεκινώντας από μηδενική και καταλήγοντας σε μηδενική ταχύτητα. Υπολογίσετε το προφίλ θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης για δύο περιπτώσεις :

- Με χρήση τραπεζοειδούς προφίλ και χρόνο επιτάχυνσης 0.2 sec
- Με χρήση κυβικού προφίλ

Απαντήσεις

1. <u>Χρήση τραπεζοειδούς προφίλ</u>

Ο χρόνος κίνησης με σταθερή γωνιακή ταχύτητα είναι :

$$t_v = T - 2t_a = 1 - 2*0.2 = 0.6\sec$$

Η συνολική γωνία περιστροφής είναι ίση με το άθροισμα των γωνιών στροφής κατά τις τρεις φάσεις της κίνησης. Από την παρατήρηση αυτή μπορούμε να υπολογίσομε την απαιτούμενη επιτάχυνση, ως εξής :

$$\Theta = \theta_\alpha + \theta_v + \theta_\alpha = \frac{1}{2}at_a^2 + \omega t_v + \frac{1}{2}at_a^2 = \frac{1}{2}at_a^2 + (at_a)t_v + \frac{1}{2}at_a^2$$

$$= a(t_a^2 + t_a t_v) => a = \frac{\Theta}{t_a^2 + t_a t_v}$$

Οπότε, για την περίπτωσή μας είναι :

$$a = \frac{\Theta}{t_a^2 + t_a t_v} = \frac{\pi}{0.2^2 + 0.2*0.6} = (6.25\pi)rad/\sec^2$$

Ισχύουν ακόμη :

$$\theta_\alpha = \frac{1}{2}\alpha t_a^2 = (0.125\pi)rad \qquad \text{και} \qquad \theta_v = \pi - 2*0.125 = (0.75\pi)rad$$

$$\omega_{\max} = \alpha t_a = (6.25\pi)(0.2) = (1.25\pi)rad/\sec$$

Το ζητούμενο προφίλ θέσης, είναι συνεπώς :

$$\theta(t) = \begin{cases} (3.125\pi)\, t^2 \quad (\text{rad}) & \text{για} \quad t < 0.2 \text{ sec} \\ (0.125\pi) + (1.25\pi)(t - 0.2) \quad (\text{rad}) & \text{για} \quad 0.2 <= t < 0.8 \text{ sec} \\ (0.875\pi) + (1.25\pi)(t - 0.8) - (3.125\pi)\,(t - 0.8)^2 & \text{για} \quad 0.8 <= t <= 1 \text{ sec} \end{cases}$$

Το προφίλ ταχύτητας :

$$\omega(t) = \begin{cases} (6.25\pi)\, t \quad (\text{rad/sec}) & \text{για} \quad t < 0.2 \text{ sec} \\ 1.25\pi \quad (\text{rad/sec}) & \text{για} \quad 0.2 <= t < 0.8 \text{ sec} \\ 1.25\pi - (6.25\pi)\,(t - 0.8) \quad (\text{rad/sec}) & \text{για} \quad 0.8 <= t <= 1 \text{ sec} \end{cases}$$

Και το προφίλ επιτάχυνσης :

$$\alpha(t) = \begin{cases} 6.25 \quad (rad/sec^2) & \text{για} \quad t < 0.2 \text{ sec} \\ 0 \quad (rad/sec^2) & \text{για} \quad 0.2 <= t < 0.8 \text{ sec} \\ -6.25 \quad (rad/sec^2) & \text{για} \quad 0.8 <= t <= 1 \text{ sec} \end{cases}$$

2. <u>Χρήση κυβικού προφίλ θέσης</u>

Η συνολική περιστροφή είναι Θ = π rad και πρέπει να πραγματοποιηθεί σε χρόνο t_f = 1 sec.
Για τις οριακές συνθήκες της κίνησης ισχύουν :

θ_0=0 rad, θ_{tf}=π rad , ω_0=0 rad/sec, ω_{tf}=0 rad/sec

οπότε εφαρμόζοντας τις σχέσεις για το κυβικό προφίλ, βρίσκομε :

a_0=0 , a_1=0, a_2=3π, a_3=-2π

Συνεπώς, το προφίλ για την θέση (γωνία) είναι :

$$\theta(t) = (-2\pi)t^3 + (3\pi)t^2$$

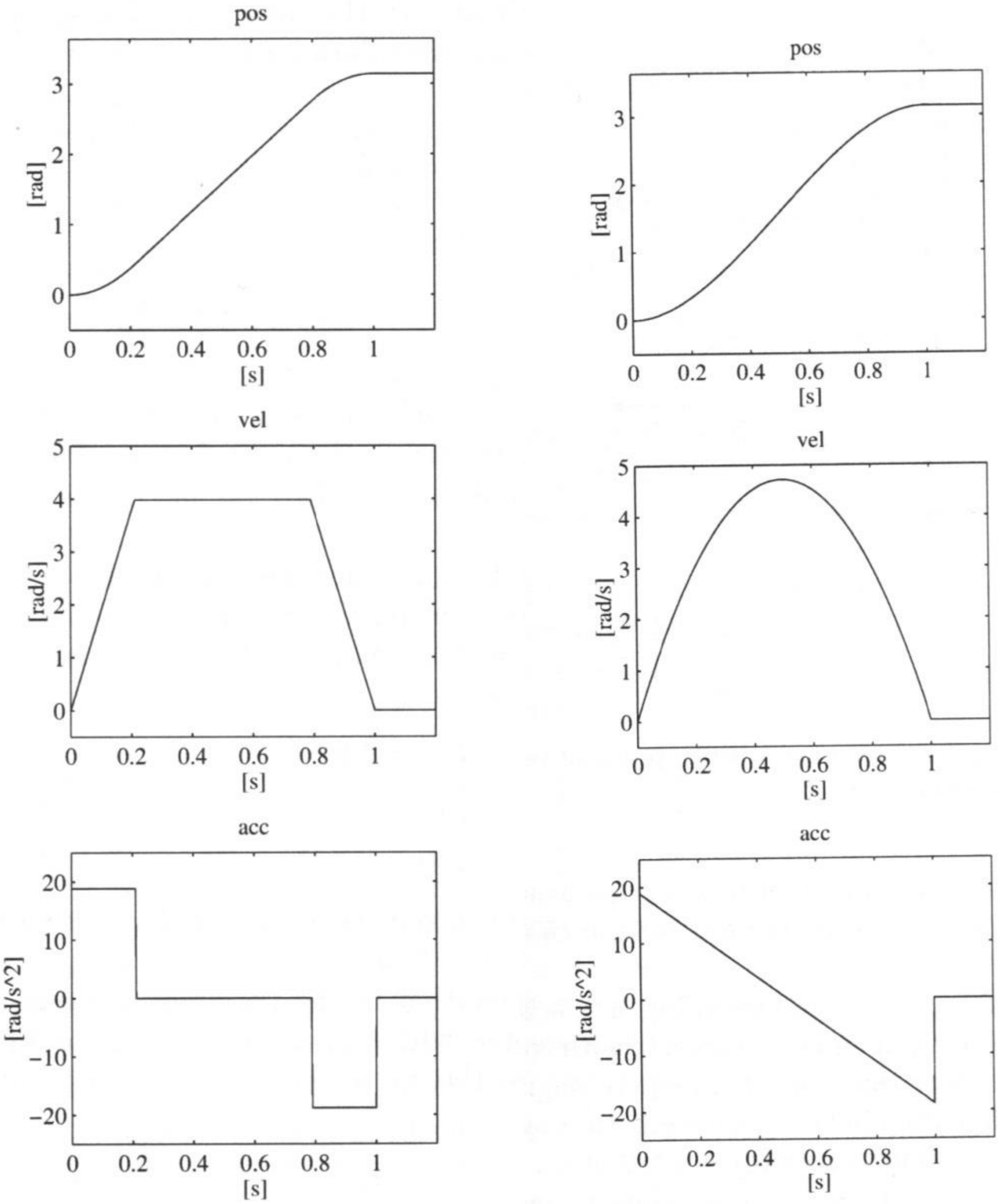
Η γωνιακή ταχύτητα, προκύπτει με παραγώγιση της παραπάνω σχέσης :

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = (-6\pi)t^2 + (6\pi)t$$

Με δεύτερη παραγώγιση παίρνομε και την επιτάχυνση :

$$a(t) = \dot{\omega}(t) = (-12\pi)t \quad + (6\pi)$$

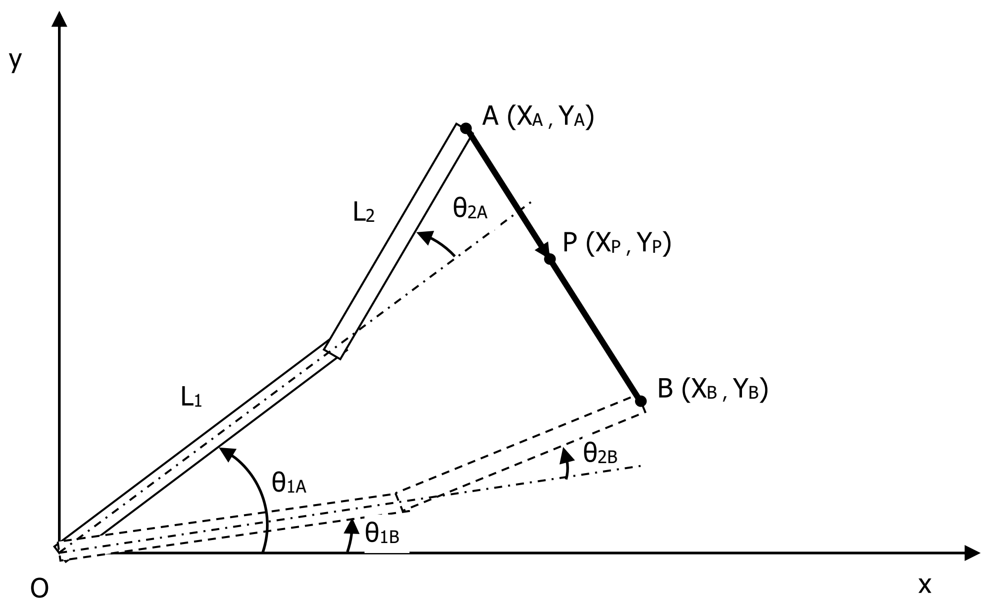
Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης για τις δύο περιπτώσεις.



Σύγκριση προφίλ θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης για κίνηση από 0 έως π rad, σε χρόνο 1 sec, με χρήση τραπεζοειδούς προφίλ ταχύτητας (αριστερά) ή κυβικού προφίλ θέσης (δεξιά).

Έλεγχος βραχίονα

Η απλή περίπτωση του βραχίονα δύο βαθμών ελευθερίας



Έστω αρθρωτός βραχίονας δύο βαθμών ελευθερίας όπως στο σχήμα, με μήκη συνδέσμων L_1 και L_2. Αν φαντασθούμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων προσαρμοσμένο στον άξονα περιστροφής της πρώτης άρθρωσης, τότε οι γωνίες στροφής θ_1 και θ_2 των αρθρώσεων, προσδιορίζουν μονοσήμαντα την θέση του άκρου του βραχίονα (στο οποίο υποτίθεται έχει προσαρμοσθεί το τελικό εργαλείο) στο επίπεδο. Οι τιμές των εν λόγω γωνιών είναι γνωστές στον ελεγκτή του βραχίονα : οι σχετικοί αισθητήρες παρέχουν ‛συνεχώς’ τις τιμές τους.

Ένα σημείο συνεπώς στο επίπεδο, έστω το A, μπορεί να χαρακτηρισθεί είτε από το ζεύγος (θ_1, θ_2) – προσδιορισμός στον ‛χώρο’ των αρθρώσεων, είτε βεβαίως από το ζεύγος των καρτεσιανών του συντεταγμένων (X_A, Y_A).

Ευθύς κινηματικός μετασχηματισμός (Direct kinematics)

Δεδομένων των γωνιών στροφής, να προσδιορισθούν οι συντεταγμένες του άκρου του βραχίονα στον καρτεσιανό χώρο ή πιο κομψά :

$$(\theta_1, \theta_2) \;\text{->}\; (X_A, Y_A)$$

Με απλή γεωμετρία (Σχήμα) προκύπτουν οι σχέσεις :

$$X_A = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos (\theta_1 + \theta_2) \qquad \textbf{(3.α)}$$

$$Y_A = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2) \qquad \textbf{(3.β)}$$

Αντίστροφος κινηματικός μετασχηματισμός (Inverse kinematics)

Δεδομένων των συντεταγμένων του άκρου του βραχίονα στον καρτεσιανό χώρο να προσδιορισθούν οι απαραίτητες γωνίες στροφής των επί μέρους αξόνων ή πιο κομψά :

$$(X_A, Y_A) \;\; -> \;\; (\theta_1, \theta_2)$$

Για την υπό διαπραγμάτευση περίπτωση, αρκεί να επιλύσει κανείς το σύστημα των εξισώσεων του ευθύ κινηματικού μετασχηματισμού, με αγνώστους τις γωνίες θ_1 και θ_2, οπότε προκύπτει :

$$\cos \theta_2 = (X_A^2 + Y_A^2 - L_1^2 - L_2^2) / (2 L_1 L_2) \qquad \textbf{(4.α,β)}$$

$$\tan \theta_1 = [Y_A (L_1+L_2 \cos \theta_2) - X_A L_2 \sin \theta_2] / [X_A (L_1+L_2 \cos \theta_2) + Y_A L_2 \sin \theta_2]$$

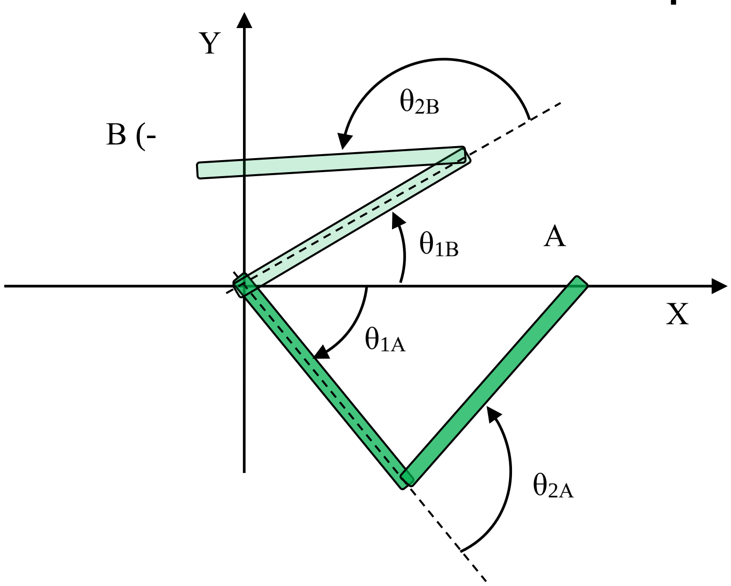
Μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι γενικά το παραπάνω σύστημα έχει δύο λύσεις, οι οποίες προκύπτουν από το γεγονός ότι η γωνία θ_2 και η $(-\theta_2)$ έχουν ίδιο συνημίτονο. Υπάρχει φυσικά η περίπτωση το σύστημα να μην έχει λύση.

Κίνηση από «σημείου εις σημείο» (Point to point motion) .

Αν είναι επιθυμητή κίνηση του βραχίονα από το σημείο Α στο σημείο Β χωρίς περιορισμούς «μονοπατιού», τότε αρκεί οι σερβομηχανισμοί των δύο αρθρώσεων να πάρουν εντολή να κινηθούν από τις αρχικές στις τελικές τους θέσεις με ένα από τους τρόπους που αναλύσαμε για την κίνηση μιας άρθρωσης – να ακολουθήσουν δηλαδή τραπεζοειδές προφίλ ταχύτητας ή κυβικό προφίλ θέσης. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζομε ότι η κίνηση του βραχίονα θα είναι «ομαλή», χωρίς απότομες κινήσεις δηλαδή.

Όμως, η καμπύλη που θα διαγράψει το άκρο του βραχίονα, το μονοπάτι κίνησης δηλαδή, αν και μονοσήμαντα ορισμένο και υπολογίσιμο, δεν είναι «φανερό».

Παράδειγμα



Επίπεδος αρθρωτός βραχίονας δύο βαθμών ελευθερίας είναι επιθυμητό να κινηθεί από την θέση Α (50 cm, 0 cm) στην θέση Β (-10 cm, 20 cm) χωρίς απαίτηση κίνησης επί συγκεκριμένου μονοπατιού. Προσδιορίσετε τα απαραίτητα προφίλ κίνησης των αρθρώσεων για χρόνο κίνησης 1 sec. Τις συναρτήσεις δηλαδή θ1(t) και θ2(t).
Μήκη συνδέσμων : L1 = L2 = 40cm.

Λύση

Προσδιορίζομε με την βοήθεια του ΑΚΜ τις γωνίες των αρθρώσεων για τις θέσεις Α και Β του άκρου. (Από τις δύο λύσεις, κρατούμε εκείνη για την οποία η γωνία θ2 είναι θετική, δηλαδή αντίθετη με την φορά των δεικτών του ωρολογίου) :

$\theta_{1A} = -51.3^o$ $\qquad$ $\theta_{2A} = 102.6^o$

$\theta_{1B} = +42.8^o$ $\qquad$ $\theta_{2B} = 147.5^o$

Για ομαλή κίνηση των αρθρώσεων, μπορούμε να χρησιμοποιήσομε κυβικό προφίλ για τις συναρτήσεις θ1(t) και θ2(t).

$$\theta_1(t) = a_{13}t^3 + a_{12}t^2 + a_{11}t^1 + a_{10}t^0 \quad \text{και} \quad \theta_2(t) = a_{23}t^3 + a_{22}t^2 + a_{21}t^1 + a_{20}t^0$$

Για το κυβικό προφίλ, ισχύουν οι σχέσεις :

$$a_o = \theta_0 \qquad a_2 = \frac{3(\theta_{tf} - \theta_0) - (2\omega_0 + \omega_{tf})t_f}{t_f^{\,2}}$$

$$a_1 = \omega_0 \qquad a_3 = \frac{2(\theta_0 - \theta_{tf}) + (\omega_0 + \omega_{tf})t_f}{t_f^{\,3}}$$

Για την άρθρωση θ1 :

$$a_o = \theta_{1A} = -51.3 \qquad a_2 = \frac{3(\theta_{tf} - \theta_0) - (2\omega_0 + \omega_{tf})t_f}{t_f^{\ 2}} = \frac{3(42.8 - (-51.3) - (2*0+0)*1}{1^2} = 282.3$$

$$a_1 = \omega_{1A} = 0 \qquad a_3 = \frac{2(\theta_0 - \theta_{tf}) + (\omega_0 + \omega_{tf})t_f}{t_f^{\ 3}} = \frac{2((-51.3 - 42.8) + (0+0)*1}{1^3} = -188.2$$

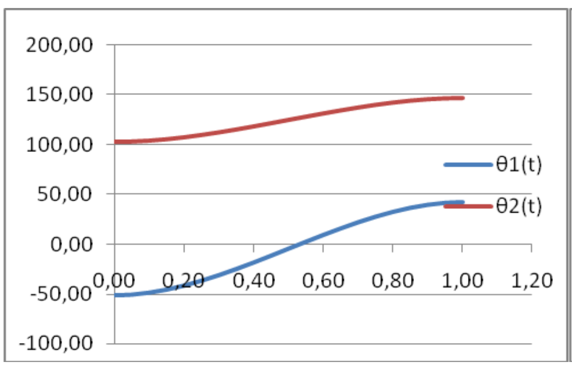
Οπότε :

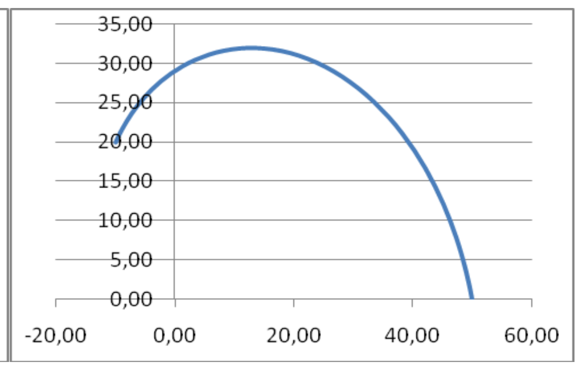
$$\theta_1(t) = -188.2t^3 + 282.3t^2 - 51.3$$

Με αντίστοιχο τόπο προσδιορίζεται και η συνάρτηση θ2(t).

$$\theta_2(t) = -89.8t^3 + 134.7t^2 + 102.6$$

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων για τον χρόνο του 1 sec που διαρκεί η κίνηση, καθώς και τροχιά του άκρου του βραχίονα.





Κίνηση με έλεγχο μονοπατιού (Continuous Path control).

Αν είναι επιθυμητή κίνηση επί συγκεκριμένης καμπύλης (του επιπέδου εν προκειμένω), τότε βεβαίως απαιτείται πιο «στενός» συντονισμός της κίνησης των αρθρώσεων.
Αναφερόμενοι στο σχήμα, έστω ότι είναι επιθυμητή η κίνηση επί της ευθείας που ενώνει το Α με το Β. Τότε μπορεί κανείς να σκεφθεί ως εξής :

Ας επιλέξω πολλά ενδιάμεσα σημεία, αφού μπορώ να βρώ την εξίσωση της ευθείας, στην συνέχεια με χρήση του αντίστροφου κινηματικού μετασχηματισμού θα προσδιορίζω για κάθε τέτοιο σημείο το ζεύγος των αντιστοίχων γωνιών και τέλος θα διατάζω τον βραχίονα να κάνει κίνηση «από σημείου εις σημείο» από όλα αυτά τα ζεύγη.

Η βασική σκέψη είναι σωστή, αλλά η κίνηση ενδεχομένως να μην είναι «ομαλή».

Στην συνέχεια, δίδεται μια μέθοδο ελέγχου που δίδει «ομαλή» κίνηση.

Αναφερόμενοι στο σχήμα, έστω σημείο P επί του ευθυγράμμου τμήματος AB, που απέχει από το A απόσταση s.

Ισχύουν οι σχέσεις :

$$s/AB = (X_P - X_A) / (X_B - X_A) \Rightarrow \mathbf{X_P = s (X_B - X_A)/AB + X_A} \quad \mathbf{(5.\alpha)}$$

$$s/AB = (Y_P - Y_A) / (Y_B - Y_A) \Rightarrow \mathbf{Y_P = s (Y_B - Y_A)/AB + Y_A} \quad \mathbf{(5.\beta)}$$

που δίδουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P, σαν συνάρτηση της απόστασης **s** από το σημείο εκκίνησης A. *Οι εξισώσεις 5.α και 5.β ονομάζονται παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα A και B –με παράμετρο το s.* Αντίστοιχες εξισώσεις μπορούν να γραφούν για οποιαδήποτε «αναλυτική» καμπύλη στο επίπεδο ή στο χώρο.

Για ομαλή κίνηση του βραχίονα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος, αρκεί να επιλέξομε μια συνάρτηση s(t) που δίδει ομαλή κίνηση. Μπορούμε π.χ. να χρησιμοποιήσομε μια συνάρτηση τέτοια που να δίδει τραπεζοειδές προφίλ ταχύτητας ή ένα κυβικό πολυώνυμο για την s(t).

Ο αλγόριθμος ελέγχου είναι :

Κάθε περίοδο ελέγχου – τυπικά κάθε 1 ms :

- Προσδιορίσεις το s(t).
- Χρησιμοποίησε τις παραμετρικές εξισώσεις του μονοπατιού (εξισώσεις 5 στην περίπτωσή μας) για να προσδιορίσεις τα $\mathbf{X_P}$ (t), $\mathbf{Y_P}$(t)
- Χρησιμοποίησε τις εξισώσεις του Αντίστροφου Κινηματικού Μετασχηματισμού (ΑΚΜ) για να προσδιορίσεις τα $\boldsymbol{\theta_1}$ (t), $\boldsymbol{\theta_2}$(t)
- Δώσε τις τιμές στους σερβομηχανισμούς των αρθρώσεων για εκτέλεση.

Παράδειγμα

Ο βραχίονας του προηγουμένου παραδείγματος είναι επιθυμητό να κινηθεί από το A στο B επί του ευθυγράμμου τμήματος AB σε χρόνο 1 sec. Προσδιορίσετε τα προφίλ κίνησης των αρθρώσεων για ομαλή κίνηση του βραχίονα.

Λύση

Η συνολική διαδρομή ΑΒ είναι :

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} = 63.25cm$$

Και ο συνολικός χρόνος κίνησης t_f = 1s.

Οι παραμετρικές εξισώσεις του ευθυγράμμου τμήματος με παράμετρο τη διανυθείσα απόσταση s από το σημείο εκκίνησης δηλαδή το Α, είναι :

$$X = s(X_B - X_A)/AB + X_A \Rightarrow X = -0.949s + 50$$
$$Y = s(Y_B - Y_A)/AB + Y_A \Rightarrow Y = 0.316s$$

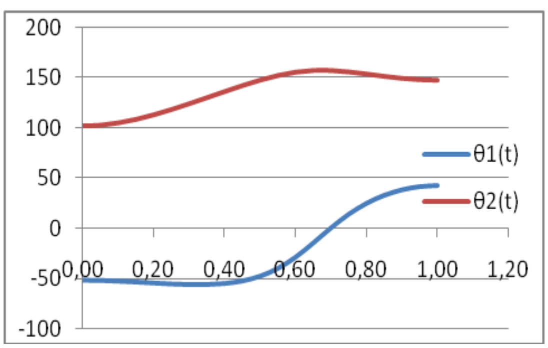
Για ομαλή κίνηση από το Α στο Β επιλέγομε κυβικό προφίλ θέσης s(t).
Οριακές συνθήκες :

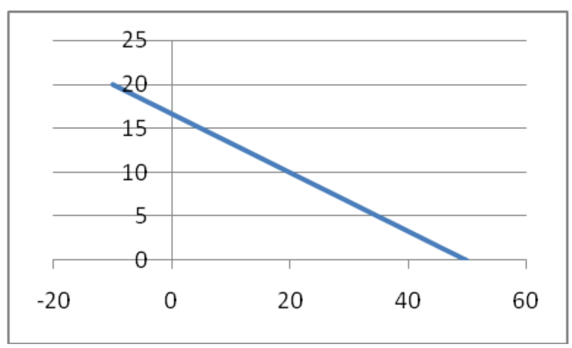
Αρχική θέση	s_0 = 0 cm	Τελική θέση	s_{tf} = 63.25 cm
Αρχική ταχύτητα	v_0 = 0 cm/s	Τελική ταχύτητα	v_{tf} = 0 cm/s

Οπότε το κυβικό προφίλ θέσης του άκρου που προκύπτει είναι :

$$s(t) = -126.5t^3 + 189.8t^2$$

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται τα προφίλ κίνησης των αρθρώσεων(όπως προκύπτουν από τον αλγόριθμο που παρουσιάσθηκε στα προηγούμενα), καθώς και τροχιά του άκρου του βραχίονα.





Κίνηση επί κυκλικού τόξου που διέρχεται από τρία σημεία.

Έστω το κυκλικό τόξο που διέρχεται από τα σημεία Α (50,0) , Β(-10,20) και από το ενδιάμεσο σημείο Γ (20,15).

Η εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο Xo, Yo και ακτίνα R είναι :

$$(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 = R^2 \Rightarrow (2X_0)X + (2Y_0)Y + (-X_0^{\ 2} - Y_0^{\ 2} + R^2) = X^2 + Y^2$$

Αν ονομάσω :

$$2X_0 = a \qquad 2Y_0 = b \qquad -X_0^{\ 2} - Y_0^{\ 2} + R^2 = c$$

Τότε η εξίσωση του κύκλου γράφεται :

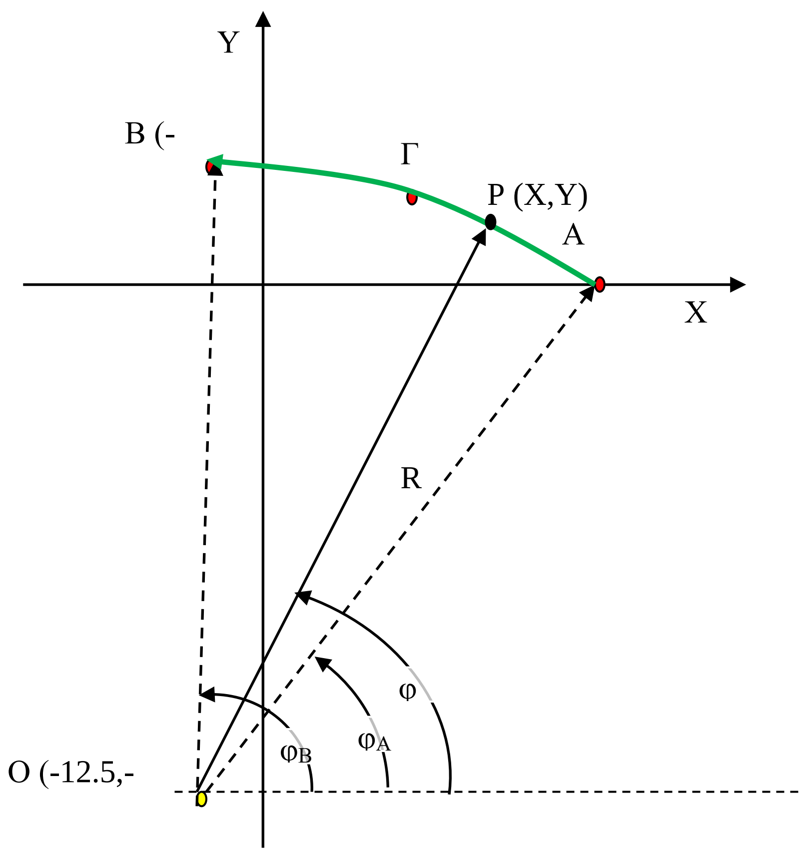
$$aX + bY + c = X^2 + Y^2$$

Αφού ο κύκλος πρέπει να περνά από τα σημεία A, B, Γ, ισχύει :

$$aX_A + bY_A + c = X_A^{\ 2} + Y_A^{\ 2}$$
$$aX_B + bY_B + c = X_B^{\ 2} + Y_B^{\ 2}$$
$$aX_\Gamma + bY_\Gamma + c = X_\Gamma^{\ 2} + Y_\Gamma^{\ 2}$$

Που είναι ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με αγνώστους τα a, b και c και μπορεί εύκολα να λυθεί. Στην συνέχεια, υπολογίζονται επίσης εύκολα τα Xo, Yo και R. Στην περίπτωσή μας η λύση του συστήματος δίδει :

Xo = -12.5 cm   Yo = -87.5 cm   και R = 107.53 cm



Η γωνία του τόξου είναι $\varphi_B - \varphi_A$, όπου :

φ_B : Η γωνία του διανύσματος OB με τον άξονα X .

$$\phi_B = a\tan 2[(Y_B - Y_0),(X_B - X_0)] = 88.67^0$$

φ_A : Η γωνία του διανύσματος OA με τον άξονα X .

$$\phi_A = a\tan 2[(Y_A - Y_0),(X_A - X_0)] = 54.46^0$$

Παραμετρική εξίσωση του τόξου με παράμετρο την γωνία φ :

X = Xo + R cos(φ)
Y = Yo + R sin(φ)

Για ομαλή κίνηση του άκρου του βραχίονα επί του τόξου, χρησιμοποιούμε για την γωνία φ κυβικό προφίλ με συνολικό χρόνο κίνησης 1 sec.

Οριακές συνθήκες :

$\varphi_0 = \varphi_A = 54.46^o = 0.9505$ rad , $\omega_0 = 0$ rad/s
$\varphi_{tf} = \varphi_B = 88.67^o = 1.5475$ rad , $\omega_{tf} = 0$ rad/s
Προφίλ για την γωνία φ (σε ακτίνια):

$$\phi(t) = -1.1942t^3 + 1.7912t^2 + 0.9505$$

Για να προκύψουν τα προφίλ κίνησης των αρθρώσεων, εργαζόμαστε ως εξής :
Κάθε 1 ms :

Υπολογίζεται με την βοήθεια του κυβικού προφίλ, η θέση φ(t) του βραχίονα
Υπολογίζονται από τις παραμετρικές εξισώσεις του τόξου οι συντεταγμένες X και Y του άκρου του βραχίονα
Με την βοήθεια του ΑΚΜ υπολογίζονται οι θέσεις των αρθρώσεων

Στα σχήματα που ακολουθούν φαίνονται τα προφίλ κίνησης των αρθρώσεων, καθώς και τροχιά του άκρου του βραχίονα.