Χρήση βασικών συναρτήσεων για τον υπολογισμό και την κατανόηση των Ομογενών Μετασχηματισμών (Ο.Μ).

Οι παρακάτω συναρτήσει rotx, roty, rotz, transl περιγράφουν ομογενείς μετασχηματισμούς που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση ασκήσεων. Αναλυτικότερα η:

- **rotx(**t**)**: Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από τον άξονα x κατά γωνία t (σε rad).
- **roty(**t**)**: Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από τον άξονα y κατά γωνία t (σε rad).
- **rotz(**t**)**: Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από τον άξονα z κατά γωνία t (σε rad).
- **transl(**x,y,z**)**:Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μια καθαρή μετατόπιση κατά x,y,z.
- Η συνάρτηση **unit(**k**)** δέχεται ως είσοδο ένα άνυσμα k και επιστρέφει ένα μοναδιαίο άνυσμα το οποίο είναι ευθυγραμμισμένο με αυτό πού δίνεται ως όρισμα στην παραπάνω συνάρτηση.
- Η συνάρτηση **rotvec(**k,theta**)** δέχεται ως είσοδο δύο ορίσματα, ένα άνυσμα και μια γωνία. Η συνάρτηση επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό που αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από το άνυσμα k κατά την γωνία theta.

Τέλος, η παρακάτω συνάρτηση απεικονίζει, σε ένα figure, ένα πλαίσιο που αντιστοιχεί σε ένα ομογενή μετασχηματισμό G:

- **add_frame(**G,n**)** λαμβάνει ως ορίσματα
    i. έναν πίνακα (π.χ. τον G) που αντιστοιχεί σε ένα ομογενή μετασχηματισμό
    ii. τον αριθμό (π.χ. τον n) του πλαισίου που θα αντιστοιχεί σε αυτόν τον ομογενή μετασχηματισμό.

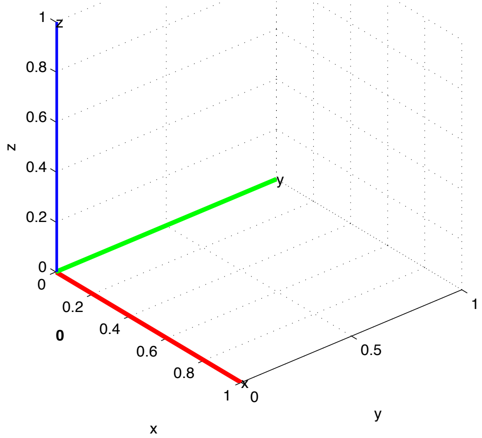
Ο κώδικας του MATLAB για την υλοποίηση των παραπάνω συναρτήσεων δίνεται στο Παράρτημα Α.

Π.χ. αν στο MATLAB γράψω :

G=rotx(0) ;

add_frame(G,0);

θα πάρω το παρακάτω figure που μου δείχνει το πλαίσιο συντεταγμένων {0}

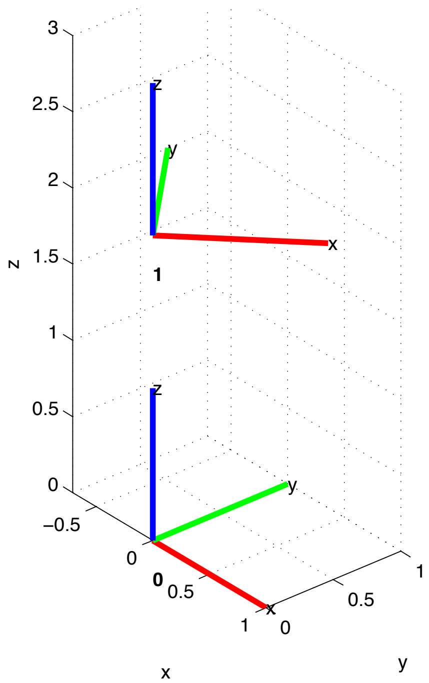


ενώ με την προσθήκη των παρακάτω γραμμών στο command window

G1=rotx(0)*transl(0,0,2)*rotz(pi/4);

add_frame(G1,1);

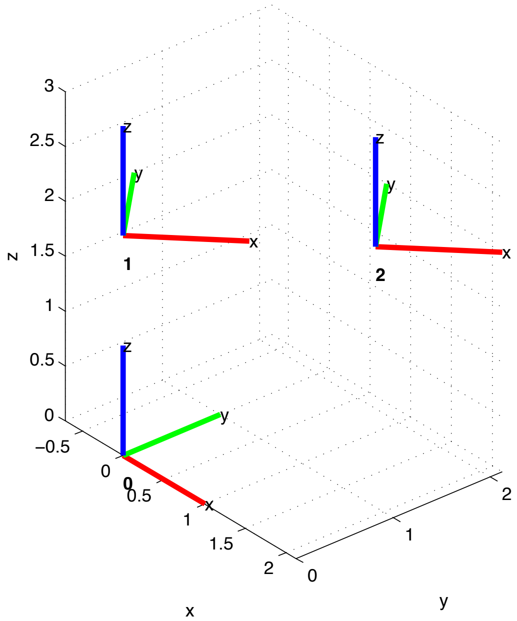
Θα έχω το πλαίσιο {1} το οποίο έχει προκύψει από τη μετατόπιση του {0} κατά 2 μονάδες στον z-{0} άξονα και στην συνέχεια στροφή από τον τρέχον z άξονα κατά γωνία π/4.



τέλος αν γράψω:

G2=rotx(0)*transl(0,0,2)*rotz(pi/4)*transl(2,0,0);

add_frame(G2,2);



θα έχω το πλαίσιο {2} το οποίο προκύπτει από τη μετατόπιση του {0} κατά 2 μονάδες στον z-{0} άξονα και στην συνέχεια στροφή από τον τρέχον z άξονα κατά γωνία π/4 με τελευταία μια μετατόπιση στον τρέχον άξονα x κατά 2 μονάδες.

Παρακάτω παρουσιάζονται Δραστηριότητες και προβλήματα στο MATLAB μαζί με κάποιες λύσεις που θα βοηθήσουν στην κατανόηση των ομογενών μετασχηματισμών και πώς αυτοί χρησιμοποιούνται σε προβλήματα ρομποτικής.

Δραστηριότητα 1: Πολλαπλασιασμός πινάκων στροφής

Έστω τα πλαίσια συντεταγμένων {A}, {B}, {C} τα οποία συνδέονται με τους πίνακες στροφής $R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $R_{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας στροφής R_{BC} με την βοήθεια του MATLAB.

Λύση

Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής:

$$R_{BC} = R_{BA}R_{AC} = \left(R_{AB}\right)^T R_{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Δραστηριότητα 2: Ομογενής Μετασχηματισμός

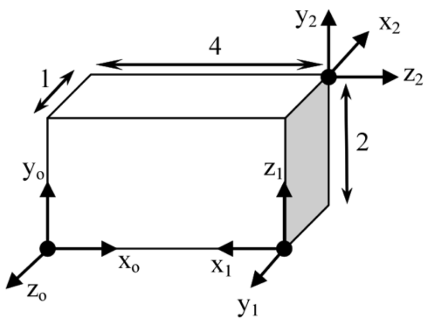
α) Ποιος από τους παρακάτω πίνακες είναι ένας ομογενής μετασχηματισμος;

$$A)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 12.5 \\ 0 & 1.1 & 0 & 2.54 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B)\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 12.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.54 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Βρείτε τα στοιχεία που λείπουν από τον παρακάτω ομογενή μετασχηματισμό του πλαισίου {B} ως προς το πλαίσιο {A} και σχεδιάστε τα δύο πλαίσια.

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} ; & 0 & -1 & 0 \\ ; & 0 & 0 & 1 \\ ; & -1 & 0 & 2 \\ ; & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

γ) Να βρεθούν οι ομογενείς μετασχηματισμοί, g_{01}, g_{02}, g_{12} ανάμεσα στα πλαίσια συντεταγμένων που δίνονται.



Δραστηριότητα 3: Ομογενής Μετασχηματισμός, γωνίες Euler

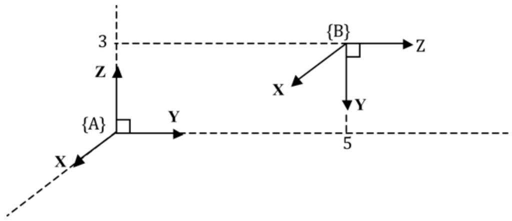
Για το παρακάτω σχήμα περιγράψτε τη θέση και τον προσανατολισμό του πλαισίου {B} ως προς το πλαίσιο {A} ως εξής:

(α) Με το διάνυσμα P_{AB} για την θέση και τον πίνακα στροφής R_{AB} για τον προσανατολισμό.

(β) Με τον ομογενή μετασχηματισμό g_{AB}.

(γ) Με το διάνυσμα P_{AB} και τις (X,Y,Z) γωνίες γύρω από τους σταθερούς άξονες του {A}.

(δ) Με το διάνυσμα P_{AB} και τις ZYZ γωνίες Euler.



Λύση

Ερώτημα (α)

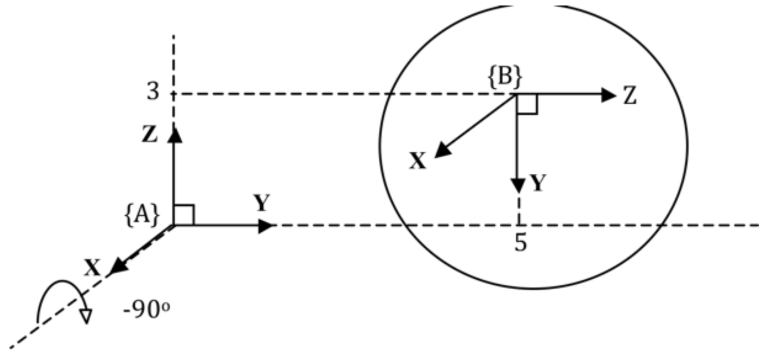
Από το παραπάνω σχήμα είναι προφανές ότι $P_{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}^T$. Για τον υπολογισμό του πίνακα στροφής R_{AB} πρέπει να βρω τις τρις στήλες που απαρτίζουν τον πίνακα. Η πρώτη στήλη εκφράζει την προβολή του μοναδιαίου διανύσματος x του πλαισίου {B} στα μοναδιαία διανύσματα x, y, z του πλαισίου {A}. Η δεύτερη στήλη εκφράζει την προβολή του μοναδιαίου διανύσματος y του πλαισίου {B} στα μοναδιαία διανύσματα x, y, z του πλαισίου {A} και τέλος η τρίτη στήλη του R_{AB} εκφράζει την προβολή του μοναδιαίου διανύσματος z του πλαισίου {B} στα μοναδιαία διανύσματα x, y, z του πλαισίου {A}. Επομένως ο ζητούμενος πίνακας στροφής είναι ο $R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ερώτημα (β)

Ο ομογενής μετασχηματισμός είναι $g_{AB} = \begin{bmatrix} R_{AB} & P_{AB} \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$.

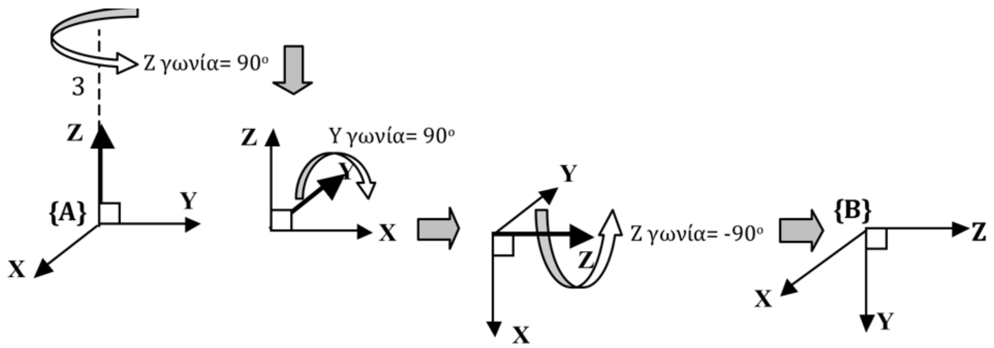
Ερώτημα (γ)

Οι (X,Y,Z) γωνίες γύρω από τους σταθερούς άξονες x, y, z του {A} είναι (-90°, 0°, 0°) και παρουσιάζονται παρακάτω.



Ερώτημα (δ)

Οι ZYZ γωνίες Euler είναι (90°, 90°, -90°) και προκύπτουν όπως στο παρακάτω σχήμα:



Δραστηριότητα 4: Αντιμεταθετική ιδιότητα Ο.Μ. καθαρής στροφής και απεικόνιση

Κατασκευάσετε τους ομογενείς μετασχηματισμούς καθαρής στροφής που αντιστοιχούν στις ακόλουθες βασικές στροφές:

(i) RzRx=rotz(π) rotx(-π/2)

(ii) RxRz=rotx(-π/2)*rotz(π)

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τους πίνακες στροφής;

Χρησιμοποιήστε την συνάρτηση add_frame, την εντολή subplot, και απεικονίστε το πλαίσιο βάσης καθώς και τα πλαίσια που αντιστοιχούν στους παραπάνω ομογενείς μετασχηματισμούς (RzRx, RxRz) σε 3 ξεχωριστές συνιστώσες του figure. Εφαρμόστε grid on και ονομάστε τους άξονες x,y,z.

Λύση:

```
%Rotation matrices general not commute Example
R=rotz(0);
RzRx=rotz(pi)*rotx(-pi/2);
RxRz=rotx(-pi/2)*rotz(pi);
subplot(131);
add_frame(R,0);
subplot(132);
add_frame(RzRx,1);
subplot(133);
add_frame(RxRz,2);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```

Δραστηριότητα 5: Κίνηση βίδας

Όπως στους πίνακες στροφής έτσι και στους ομογενείς μετασχηματισμούς δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα. Στην περίπτωση όμως που έχουμε ένα Ο.Μ. καθαρής μετατόπισης και ένα Ο.Μ. καθαρής στροφής που σχετίζονται με τον ίδιο άξονα π.χ. τον y τότε ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα μεταξύ τους δηλαδή:

$$\mathrm{roty}(\pi/6)\,\mathrm{transl}(0,4,0) = \mathrm{transl}(0,4,0)\,\mathrm{roty}(\pi/6)$$

Η κίνηση αυτή ονομάζεται κίνηση βίδας. Επαληθεύστε με την βοήθεια του MATLAB την ισχύ της αντιμεταθετικής ιδιότητας για την περίπτωση. Αντί για τον άξονα-y θα μπορούσαμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε αυθαίρετο άξονα-k.

Δραστηριότητα 6: Ο.Μ. καθαρής μετατόπισης και απεικόνιση σε figure

Να κατασκευάσετε ένα m-file το οποίο να απεικονίζει τους παρακάτω τρεις ομογενείς μετασχηματισμούς καθαρής μετατόπισης:

Px4=transl(4,0,0) (ομογενής μετασχηματισμός για το πλαίσιο {1})

Py4=transl(0,4,0) (ομογενής μετασχηματισμός για το πλαίσιο {2})

Pz4=transl(0,0,4) (ομογενής μετασχηματισμός για το πλαίσιο {3})

χρησιμοποιήστε την εντολή subplot και απεικονίστε το πλαίσιο βάσης {0} και τα πλαίσια που αντιστοιχούν στους παραπάνω ομογενείς μετασχηματισμούς σε ξεχωριστές 4 συνιστώσες του figure. Δημιουργήστε ένα νέο figure στο οποίο να απεικονίζονται όλα μαζί τα πλαίσια των ομογενών μετασχηματισμών. Εφαρμόστε grid on και ονομάστε τους άξονες x,y,z.

```
R=rotz(0);
Px4=transl(4,0,0);
Py4=transl(0,4,0);
Pz4=transl(0,0,4);
subplot(221);
add_frame(R,0);
subplot(222);
add_frame(Px4,1);
subplot(223);
add_frame(Py4,2);
subplot(224);
add_frame(Pz4,3);
figure;
hold on;
add_frame(R,0);
add_frame(Px4,1);
add_frame(Py4,2);
add_frame(Pz4,3);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
```

Δραστηριότητα 7: Ο.Μ. καθαρής μετατόπισης και καθαρής στροφής

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού *H,* αναπαριστά μια περιστροφή γύρω από τον x-άξονα κατά α μοίρες, μια μετατόπιση *b* μονάδες κατά μήκος του τρέχοντος x-άξονα, μια μετατόπιση *d* μονάδες κατά μήκος του τρέχοντος z-άξονα και μια περιστροφή γύρω από τον τρέχων z-άξονα κατά θ μοίρες:

$$H = grot_{x,\alpha} gtrans_{x,b} gtrans_{z,d} grot_{z,\theta}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & b \\ c_\alpha s_\theta & c_\alpha c_\theta & -s_\alpha & -s_\alpha d \\ s_\alpha s_\theta & s_\alpha c_\theta & c_\alpha & c_\alpha d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Φτιάξτε μια συνάρτηση που να υλοποιεί τον παραπάνω μετασχηματισμό. Στη συνέχεια εισάγεται στην συνάρτηση τις τιμές $\alpha = 45^o, b = 2, d = 4, \theta = 180^o$ και απεικονίστε τα πλαίσια συντεταγμένων που αντιστοιχούν στα βήματα κατασκευής του παραπάνω ομογενούς μετασχηματισμού:

Απάντηση:

$H = grot_{x,\alpha} gtrans_{x,b} gtrans_{z,d} grot_{z,\theta} =$ ....

$grot_{x,\alpha} =$ ....

$grot_{x,\alpha} gtrans_{x,b} =$ ....

$grot_{x,\alpha} gtrans_{x,b} gtrans_{z,d} =$ ....

$grot_{x,\alpha} gtrans_{x,b} gtrans_{z,d} grot_{z,\theta} =$ ....

```
clc; clear all; close all;
Ro=rotx(0);
a=pi/4;
b=2;
d=4;
theta=pi;
H=rotx(a)*transl(b,0,0)*transl(0,0,d)*rotz(theta);
add_frame(Ro,0)
add_frame(rotx(a),1)
add_frame(rotx(a)*transl(b,0,0),2)
add_frame(rotx(a)*transl(b,0,0)*transl(0,0,d),3)
add_frame(H,4)
```

Δραστηριότητα 8: Στροφή γύρω από μοναδιαίο διάνυσμα (γ)

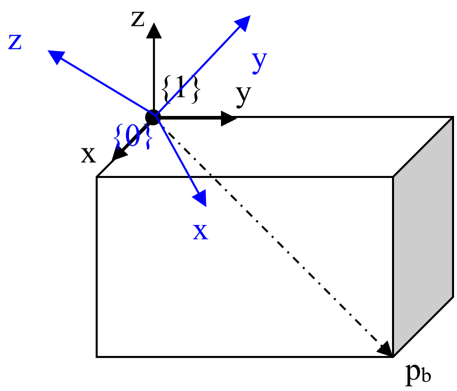
Έστω άνυσμα p του χώρου. Ο ομογενής μετασχηματισμός καθαρής στροφής κατά μια γωνία ϕ γύρω από άξονα k μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας τελεστής ο οποίος όταν πολλαπλασιάσει το παραπάνω άνυσμα p προκαλεί την στροφή του κατά γωνία ϕ γύρω από τον άξονα k . Παρατηρήστε αυτή την ιδιότητα προκαλώντας πολλαπλασιασμό του ανύσματος p=[4 0 4] με τον Ο.Μ που αντιστοιχεί σε μια στροφή γύρω από τον άξονα z κατά 90 μοίρες. Ποιες είναι οι νέες συντεταγμένες του ανύσματος p μετά την περιστροφή; Σε ένα figure απεικονίστε το άνυσμα p πριν και μετά από τον πολλαπλασιασμό με τον πίνακα ΟΜ.

Απάντηση: p_{new}=……………………..

```
clc
clear all;
close all;
Ro=rotx(0);
add_frame(Ro,0)
px=[4 0 4 1]';
px_new=rotz(pi/2)*px;
line([0 4],[0 0],[0 4],'linewidth',2);
line([0 px_new(1)],[0 px_new(2)],[0 px_new(3)],'linewidth',2);
hold on;
plot3(4,0,4,'ro','linewidth',2);
plot3(px_new(1),px_new(2),px_new(3),'ko','linewidth',2);
```

Πρόβλημα 1: Μετασχηματισμός Συντεταγμένων

Έστω {1} το πλαίσιο συντεταγμένων ενός αντικειμένου, το οποίο έχει προέλθει από στροφή του αδρανειακού πλαισίου αναφοράς {0} πρώτα γύρω από τον άξονα των y κατά 45 μοίρες, έπειτα γύρω από τον άξονα των x κατά 30 μοίρες και τέλος γύρω από τον άξονα των z κατά -180 μοίρες (όλες οι στροφές είναι γύρω από το σταθερό πλαίσιο βάσης) Έστω επίσης p_b=[1.5 3.5 -2.5] ^{T} ένα σημείο του αντικειμένου εκφρασμένο στο πλαίσιο συντεταγμένων του αντικειμένου {1}.



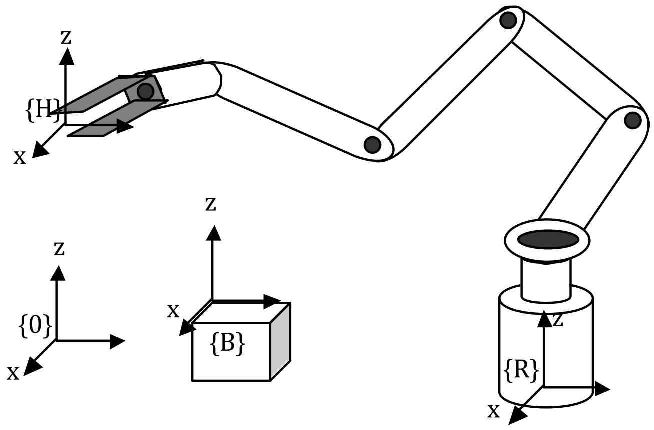
(i) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου ως προς το αδρανειακό πλαίσιο {0}.
Απάντηση: Συντεταγμένη x= ....,y=...............,z=......................

(ii) Απεικονίστε το σημείο p_b, το αδρανειακό πλαίσιο {0} και το πλαίσιο {1} του αντικειμένου.

Πρόβλημα 2: Ταύτιση πλαισίου αρπάγης με αντικείμενο

Ένα αντικείμενο {B} τοποθετείται σε μια θέση που περιγράφεται από τον ομογενή μετασχηματισμό $g_{0B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ όπου {0} το πλαίσιο βάσης. Ο ομογενής μετασχηματισμός $g_{0R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ περιγράφει το πλαίσιο της βάσης ενός ρομπότ {R} ως προς το {0}.

(i) Να βρεθεί ο ομογενής μετασχηματισμός g_{RH} που επιτρέπει την ταύτιση του πλαισίου {H} της αρπάγης του ρομπότ με αυτό του αντικειμένου {B}.



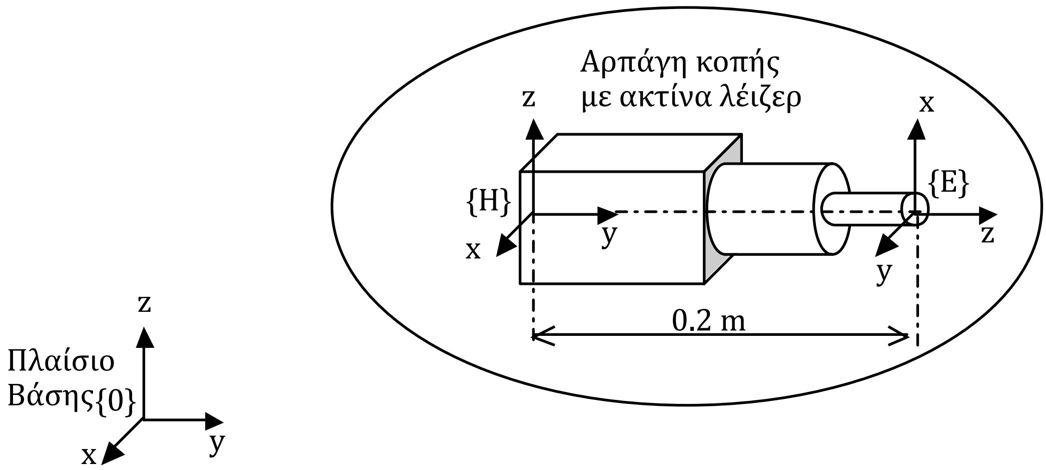
Απάντηση (συμβολικό αποτέλεσμα): g_{RH} =...........

Απάντηση (αριθμητικό το αποτέλεσμα): g_{RH} =...........

(ii) Αναπαραστήστε τα πλαίσια {B},{U},{R}σε ένα figure του Matlab.

Πρόβλημα 3: Αρπάγη κοπής Λέιζερ

Έστω αρπάγη κοπής λέιζερ η οποία προσαρμόζεται στο άκρο του ρομπότ PUMA 561. Για να περιγράψουμε την θέση και τον προσανατολισμό της αρπάγης επισυνάπτουμε στη βάση της το πλαίσιο {H} όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα. Επίσης, στο άκρο της αρπάγης επισυνάπτουμε το πλαίσιο {E}.



(i) Ποιος είναι ο ομογενής μετασχηματισμός (Ο.Μ.) g_{HE} =..............

(ii) Αν είναι γνωστός ο Ο.Μ. $g_{0H} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ που περιγράφει την αρπάγη {H} ως προς το πλαίσιο βάσης {0} ποια είναι η θέση και ο προσανατολισμός του άκρου της αρπάγης του ρομπότ;

Απάντηση: Συντεταγμένη x του άκρου =.......................................

Συντεταγμένη y του άκρου =………………………………..
Συντεταγμένη z του άκρου =………………………………..
Πίνακας στροφής που περιγράφει τον προσανατολισμό του άκρου= …………………………..

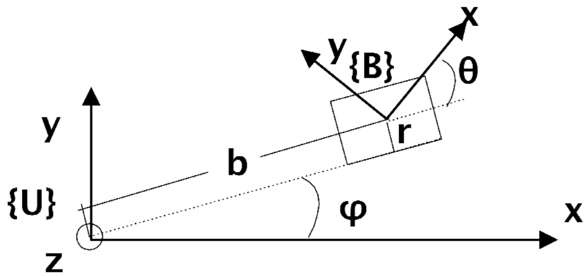
(iii) Αν το σημείο κοπής έχει συντεταγμένες ${}^{E}\mathrm{p}=\begin{bmatrix}-0.5 & 0 & 0.5\end{bmatrix}^{T}$ ως προς το πλαίσιο του άκρου της αρπάγης {E}, ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου κοπής ως προς το πλαίσιο βάσης {0} δηλ. ${}^{0}\mathrm{p}=$;

Απάντηση (συμβολικό αποτέλεσμα): ${}^{0}\mathrm{p}=$…………………..

Απάντηση (αριθμητικό αποτέλεσμα): ${}^{0}\mathrm{p}=$…………………..

Πρόβλημα 4: Περιστροφή και ολίσθηση στο επίπεδο

Έστω {U} το πλαίσιο βάσης. Το πλαίσιο {B} αντιστοιχεί στο αντικείμενο που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Βρείτε την θέση και τον προσανατολισμό του αντικειμένου στο χώρο δηλαδή, τον ομογενή μετασχηματισμό g_{ub} σαν συνάρτηση των παραμέτρων b, r, φ, θ που δίνονται στο σχήμα.

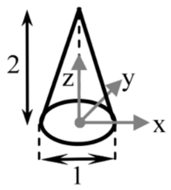


Πρόβλημα 5: Κίνηση βίδας

Αρχικά αποδείξτε αριθμητικά, με την βοήθεια του Matlab, ότι στην περίπτωση του μετασχηματισμού βίδας ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα μεταξύ μεταφοράς και στροφής, δηλαδή ότι $\mathrm{g_p(k,a)g_r(k,\theta)=g_r(k,\theta)g_p(k,a)}$ όπου $\mathrm{g_p(k,a)}$, $\mathrm{g_r(k,\theta)}$ ομογενείς μετασχηματισμοί μεταφοράς και στροφής κατά μήκος και γύρω από μοναδιαίο άξονα k σε απόσταση a και γωνία θ . Στη συνέχεια αποδείξτε μαθηματικά τον παραπάνω ισχυρισμό.

Πρόβλημα 6: Τοποθέτηση αντικειμένου στο χώρο

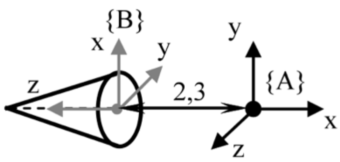
α) Έστω {A} το πλαίσιο συντεταγμένων βάσης. Έστω επίσης πλαίσιο {B}, το οποίο είναι επισυναπτόμενο στη βάση ενός κώνου όπως παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Ο ομογενής μετασχηματισμός που συνδέει τα δύο πλαίσια είναι ο $g_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Φτιάξτε ένα σχέδιο το οποίο να αντιπροσωπεύει την θέση και τον προσανατολισμό του κώνου όπως επιβάλει ο παραπάνω ομογενής μετασχηματισμός. Ποιες είναι οι συντεταγμένες της κορυφής του κώνου;

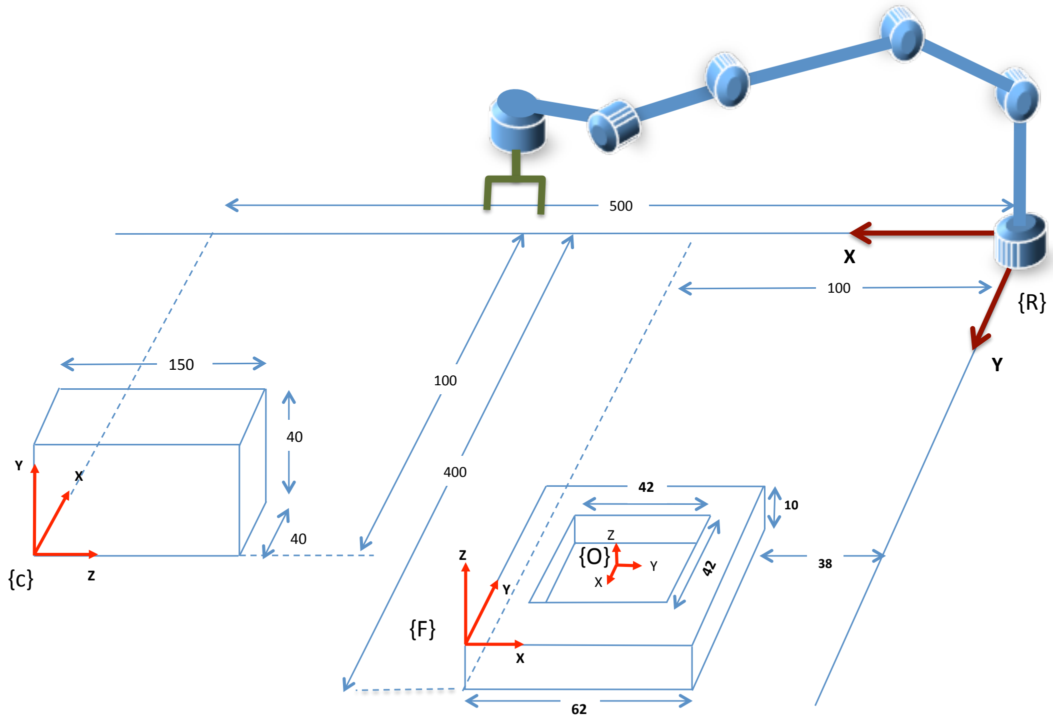
β) Βρείτε τον ομογενή μετασχηματισμό g_{BA} που περιγράφει την σχετική θέση του πλαισίου βάσης{A} ως προς το πλαίσιο του κώνου {B}.



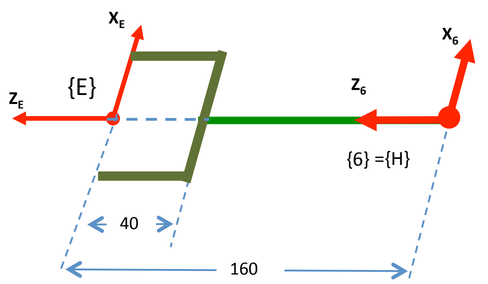
Ποιες είναι οι συντεταγμένες της μύτης του κώνου ως προς το πλαίσιο {A} και ως προς το πλαίσιο {B};

Πρόβλημα 7: Εργασία συναρμολόγησης

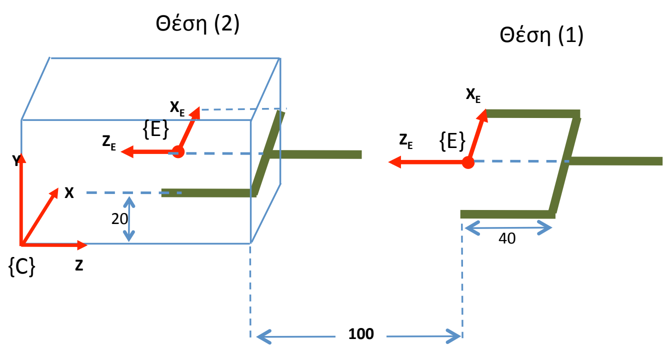
Ένα ρομπότ 6 βαθμών ελευθερίας πρέπει να σηκώσει ένα αντικείμενο με τετραγωνική διατομή από μια συγκεκριμένη θέση και να το τοποθετήσει μέσα στο άνοιγμα μίας τετραγωνικής υποδοχής που βρίσκεται στην ίδια επιφάνεια σε σταθερή θέση. Οι διαστάσεις του αντικειμένου και της υποδοχής και τα πλαίσιά τους {C} και {F} καθώς και η αρχική κατάσταση του χώρου εργασίας φαίνονται **στο σχήμα 1**. Σαν αδρανειακό σύστημα αναφοράς θεωρείται το πλαίσιο της βάσης του βραχίονα {R}. Επίσης το πλαίσιο {O} βρίσκεται στο κέντρο του τετραγωνικού ανοίγματος της υποδοχής στην επάνω επιφάνεια της. Στο **σχήμα 2** φαίνεται λεπτομέρεια από το σύστημα συντεταγμένων {E} του άκρου της αρπάγης σε σχέση με το πλαίσιο $\{H\} \equiv \{6\}$ του καρπού του ρομπότ.

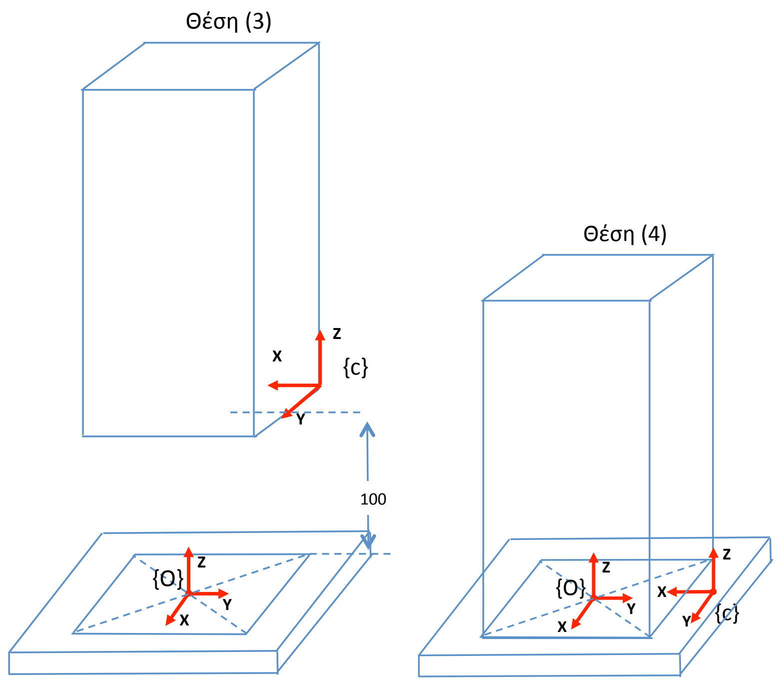


σχήμα 1



σχήμα 2





σχήμα 3

α) Βρείτε τους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού, g_{6E}, g_{RC} , g_{FO} , g_{RF}.

β) Για να εκτελεστεί η παραπάνω εργασία πρέπει ο βραχίονας να περάσει από 4 βασικές θέσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 3:

Η θέση (1) όταν η αρπάγη είναι πλησίον του αντικειμένου.

Η θέση (2) όταν η αρπάγη έχει πιάσει το αντικείμενο.

Η θέση (3) όταν το αντικείμενο είναι πλησίον του πλαισίου υποδοχής.

Η τελική θέση (4) με το αντικείμενο τοποθετημένο στο άνοιγμα της υποδοχής.

Για να εκτελεστεί η επιθυμητή εργασία συναρμολόγησης θα δοθούν εντολές κίνησης στον βραχίονα με την μορφή των μετασχηματισμών $g_{RH}(i)$, για τις θέσεις i=1,2,3,4. Για κάθε μια από τις θέσεις αυτές διατυπώστε μία εξίσωση ομογενών μετασχηματισμών που να περιέχει σαν μοναδικό άγνωστο τον ομογενή μετασχηματισμό $g_{RH}(i)$ και υπολογίστε τον.

α)

Απάντηση: g_{HE} =……………………………..

Απάντηση: g_{RC} =……………………………..

Απάντηση: g_{FO} =……………………………..

Απάντηση: g_{RF} =……………………………..

β)

Απάντηση (συμβολικό αποτέλεσμα): $g_{RH}(1) =$ ....

Απάντηση (αριθμητικό το αποτέλεσμα): $g_{RH}(1) =$ ....

Απάντηση (συμβολικό αποτέλεσμα): $g_{RH}(2) =$ ....

Απάντηση (αριθμητικό το αποτέλεσμα): $g_{RH}(2) =$ ....

Απάντηση (συμβολικό αποτέλεσμα): $g_{RH}(3) =$ ....

Απάντηση (αριθμητικό το αποτέλεσμα): $g_{RH}(3) =$ ....

Απάντηση (συμβολικό αποτέλεσμα): $g_{RH}(4) =$ ....

Απάντηση (αριθμητικό το αποτέλεσμα): $g_{RH}(4) =$ ....

Παράρτημα Α

Δημιουργία στο MATLAB συναρτήσεων ομογενών μετασχηματισμών (Ο.Μ)που περιγράφουν καθαρή στροφή και καθαρή μετατόπιση

grotx(t): Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από τον άξονα x κατά γωνία t (σε rad).

```
function r = rotx(t)
        ct = cos(t);
        st = sin(t);
        r = [ 1  0      0       0
                 0      ct      -st     0
                 0      st      ct      0
                 0      0       0       1];
```

groty(t): Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από τον άξονα y κατά γωνία t (σε rad).

```
function r = roty(t)
        ct = cos(t);
        st = sin(t);
        r = [ct   0      st      0
                 0      1       0       0
          -st    0      ct      0
                 0      0       0       1];
```

grotz(t): Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από τον άξονα z κατά γωνία t (σε rad).

```
function r = rotz(t)
        ct = cos(t);
        st = sin(t);
        r =  [ ct        -st 0 0
                  st        ct 0 0
                  0         0 1 0
                  0         0 0 1];
```

gtransl(x,y,z):Επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό ο οποίος αντιστοιχεί σε μια καθαρή μετατόπιση κατά x,y,z.

```
function r = transl(x, y, z)
    t = [x; y; z];
        r =   [eye(3) t;
                 0 0 0  1];
```

Δημιουργία συνάρτησης για την απεικόνιση ομογενούς μετασχηματισμού (Ο.Μ.) σε Figure του MATLAB

Κατασκευάστε μια συνάρτηση με το όνομα add_frame(G,n). Η συνάρτηση να λαμβάνει ως ορίσματα

iii. έναν πίνακα ο οποίος να αντιστοιχεί σε ένα ομογενή μετασχηματισμό
iv. τον αριθμό του πλαισίου που θα αντιστοιχεί σε αυτόν τον ομογενή μετασχηματισμό.

Η συνάρτηση θα απεικονίζει σε ένα figure το πλαίσιο που αντιστοιχεί στον ομογενή μετασχηματισμό. Η απεικόνιση θα γίνει χρησιμοποιώντας την συνάρτηση line του Matlab.

```
% G: Homogenous transformation matrix
% n: Number of frame
function add_frame(G,n)
        line([G(1,4) G(1,4)+G(1,1)],[G(2,4) G(2,4)+G(2,1)],[G(3,4)...  G(3,4)+G(3,1)],'color',[1 0 0],'linewidth',3) %x axis
        line([G(1,4) G(1,4)+G(1,2)],[G(2,4) G(2,4)+G(2,2)],[G(3,4)... G(3,4)+G(3,2)],'color',[0 1 0],'linewidth',3) %y axis
        line([G(1,4) G(1,4)+G(1,3)],[G(2,4) G(2,4)+G(2,3)],[G(3,4)... G(3,4)+G(3,3)],'color',[0 0 1],'linewidth',3) %z axis

        text(G(1,4)+G(1,1),G(2,4)+G(2,1),G(3,4)+G(3,1),'x')
        text(G(1,4)+G(1,2),G(2,4)+G(2,2),G(3,4)+G(3,2),'y')
        text(G(1,4)+G(1,3),G(2,4)+G(2,3),G(3,4)+G(3,3),'z')
        text(G(1,4),G(2,4),G(3,4)-0.25,num2str(n),'fontweight','bold')
        axis equal
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z'); grid on
```

Συνάρτηση για την κατασκευή μοναδιαίου διανύσματος

Παρακάτω δίνεται η συνάρτηση **unit(k)** η οποία δέχεται ως όρισμα ένα άνυσμα v και επιστρέφει το αντίστοιχο μοναδιαίο που είναι ευθυγραμμισμένο με αυτό.

```
function r = unit(v)
metro_v=sqrt( v(1)^2+v(2)^2+v(3)^2);
r=v/metro_v;
```

Συνάρτηση για την κατασκευή Ο.Μ. που αντιστοιχεί σε τροφή γύρω από μοναδιαίο διάνυσμα k κατά γωνία theta.

Παρακάτω δίνεται h συνάρτηση **rotvec(**k,theta**)** η οποία δέχεται ως είσοδο δύο ορίσματα. Το πρώτο όρισμα αποτελεί ένα άνυσμα και το δεύτερο μια γωνία. Η συνάρτηση επιστρέφει τον ομογενή μετασχηματισμό που αντιστοιχεί σε μία στροφή γύρω από το άνυσμα k κατά την γωνία theta.

```
function r = rotvec(v, t)
        v = unit(v);
        ct = cos(t);
        st = sin(t);
        vt = 1-ct;
        v = v(:);
        r = [   ct -v(3)*st   v(2)*st
                v(3)*st     ct      -v(1)*st
               -v(2)*st   v(1)*st     ct  ];
    r = [v*v'*vt+r zeros(3,1); 0 0 0 1];
```