Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Δρ. Φασουλάς Ιωάννης

jfasoulas@hmu.gr

Ρομποτική Ι

«Ευθύ και αντίστροφο Κινηματικό πρόβλημα επίπεδου βραχίονα 3 β.ε. »

Εργαστήριο Συστημάτων Ελέγχου & Ρομποτικής

Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών

Σχολή Μηχανικών

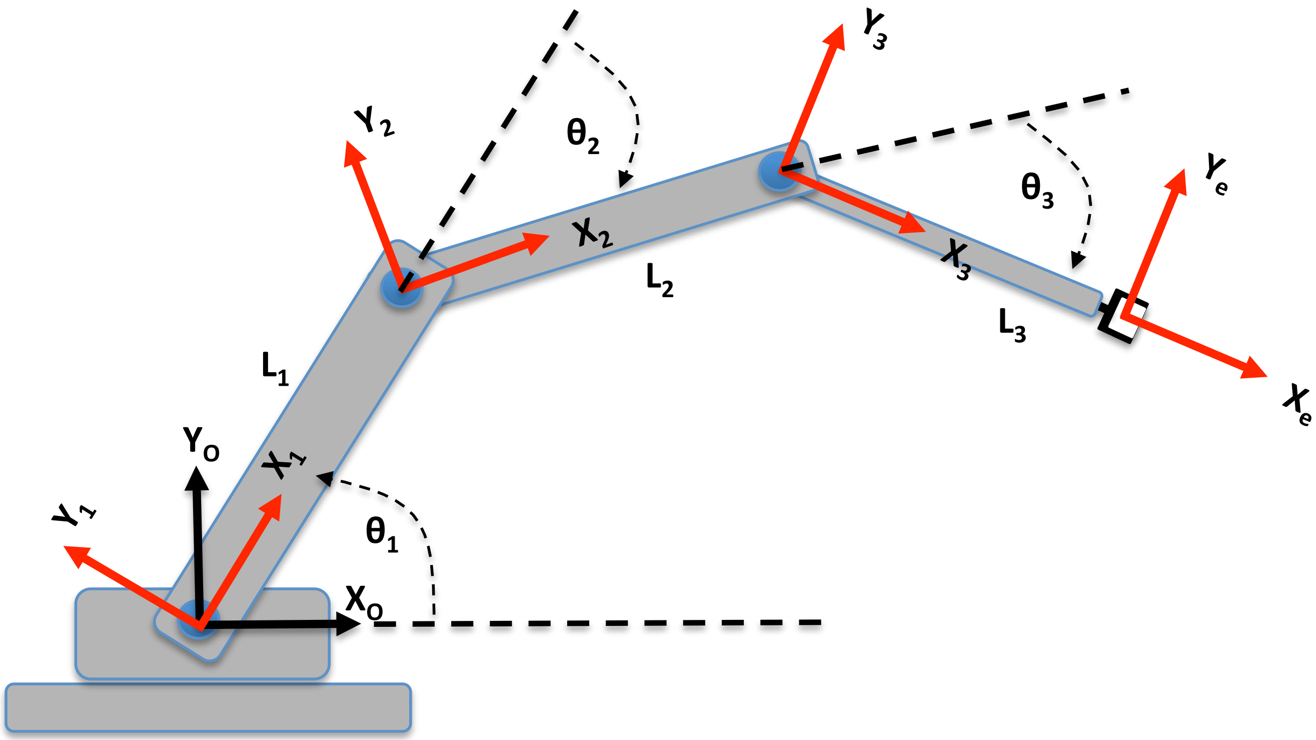
Ηράκλειο Κρήτης, Ελλάς

Κινηματική ανάλυση

- Περιγραφή της διάταξης του ρομπότ στον χώρο
- Ευθεία κινηματική ανάλυση
  - Ποια είναι η θέση και ο προσανατολισμός του άκρου (εργαλείου, αρπάγης) όταν ξέρω τις μεταβλητές των αρθρώσεων;
- Αντίστροφη κινηματική ανάλυση.

  - Ποιες μεταβλητές των αρθρώσεων επιτυγχάνουν μία επιθυμητή θέση και προσανατολισμό του άκρου;

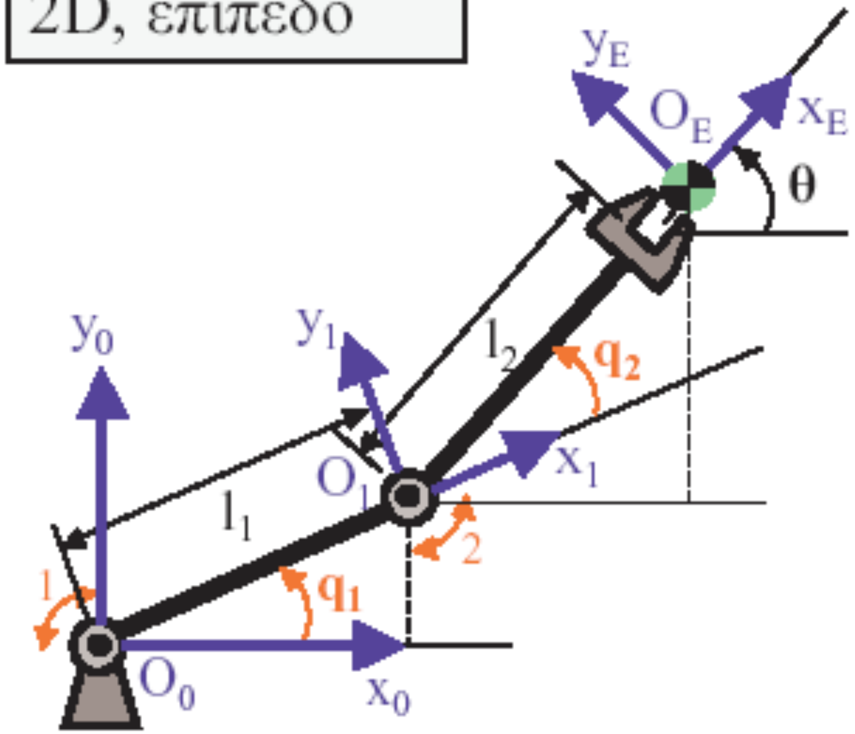
Ευθύ κινηματικό πρόβλημα επίπεδου βραχίονα 3 β.ε.



- Περιγραφή του επίπεδου βραχίονα 3 β.ε.
- Ορισμός πλαισίων (βάσης, συνδέσμων, άκρου)
- Ορισμός των και μεταβλητών των αρθρώσεων
- Γενικά οι μεταβλητές των αρθρώσεων συμβολίζονται με q_i

Ορθή κινηματική ανάλυση:
Παράδειγμα (1)

2 βαθμοί ελευθ.
2D, επίπεδο

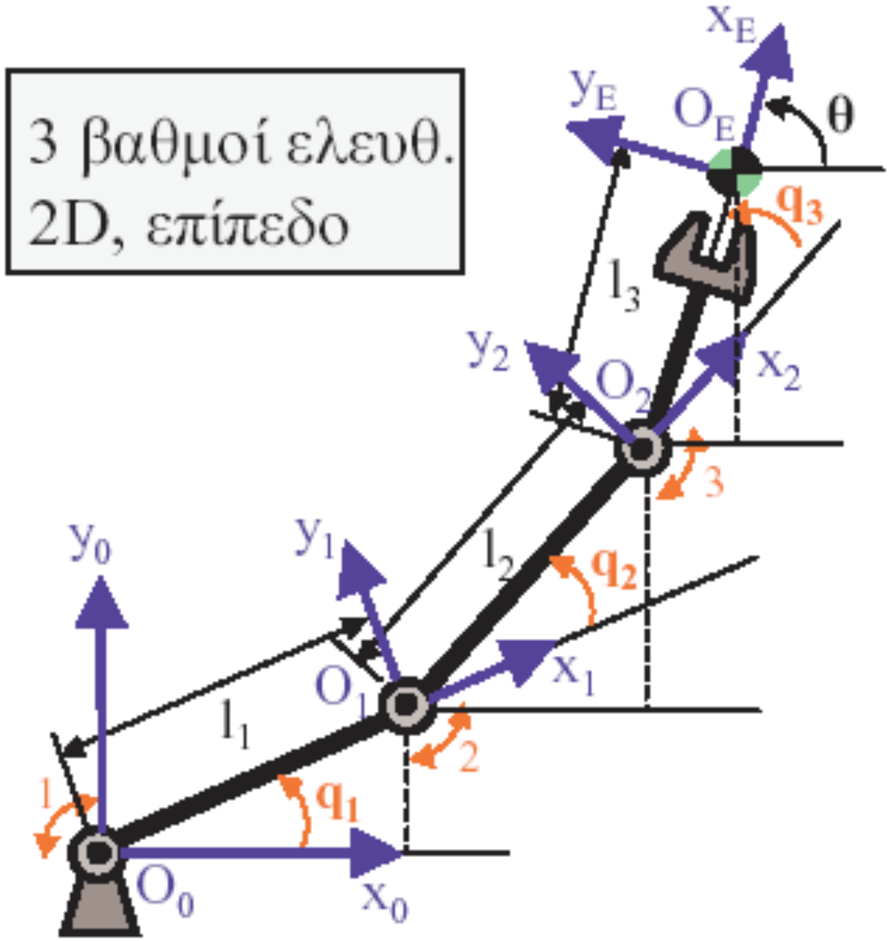


<u>Κινηματική μοντέλο:</u>
(2 ανεξ. μεταβλητές: q_1 και q_2)

Θέση : $\underline{\mathbf{p}}_E = [(p_E)_x\, , (p_E)_y]^T$
Προσανατολισμός : θ
(ως προς q_1 και q_2)

$$(p_E)_x = l_1\cdot\cos(q_1) + l_2\cdot\cos(q_1 + q_2)$$
$$(p_E)_y = l_1\cdot\sin(q_1) + l_2\cdot\sin(q_1 + q_2)$$
$$\theta = q_1 + q_2$$

Ορθή κινηματική ανάλυση:
Παράδειγμα (2)



Κινηματική μοντέλο:

$$(p_E)_x = l_1 \cdot c_1 + l_2 \cdot c_{12} + l_3 \cdot c_{123}$$
$$(p_E)_y = l_1 \cdot s_1 + l_2 \cdot s_{12} + l_3 \cdot s_{123}$$
$$\theta \;=\; q_1 + q_2 + q_3$$

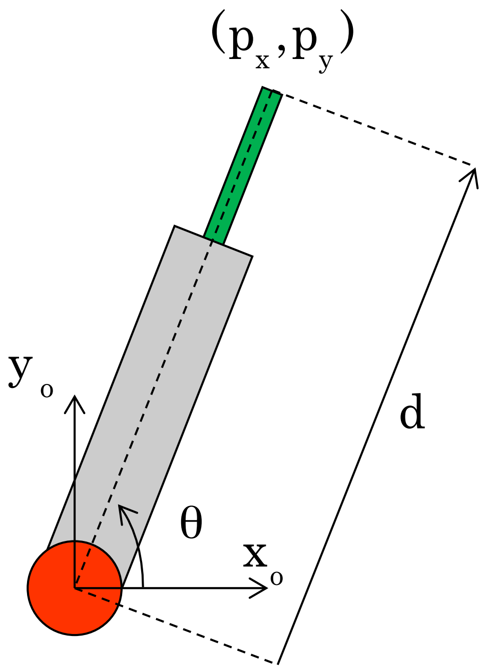
όπου :

c1 = $\cos(q_1)$
c12 = $\cos(q_1 + q_2)$
c123 = $\cos(q_1 + q_2 + q_3)$

s1 = $\sin(q_1)$
s12 = $\sin(q_1 + q_2)$
s123 = $\sin(q_1 + q_2 + q_3)$

Ευθύ κινηματικό πρόβλημα για επίπεδο πολικό βραχίονα 2 β.ε.

Παράδειγμα



Δεδομένα: (θ, d)

Ζητούμενα: (p_x, p_y)

Εξισώσεις για το ευθύ κινηματικό πρόβλημα:

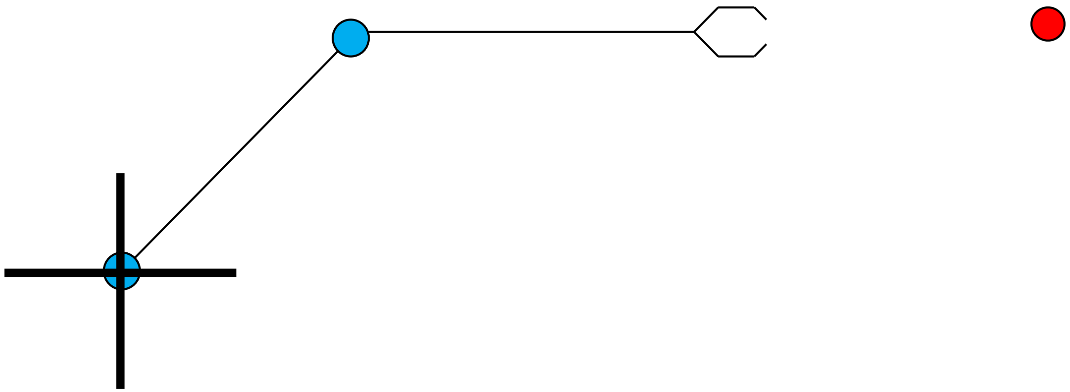
$$\left.\begin{aligned} p_x &= d\cos(\theta) \\ p_y &= d\sin(\theta) \end{aligned}\right\}$$

Ο προσανατολισμός αντιστοιχεί στην γωνία θ

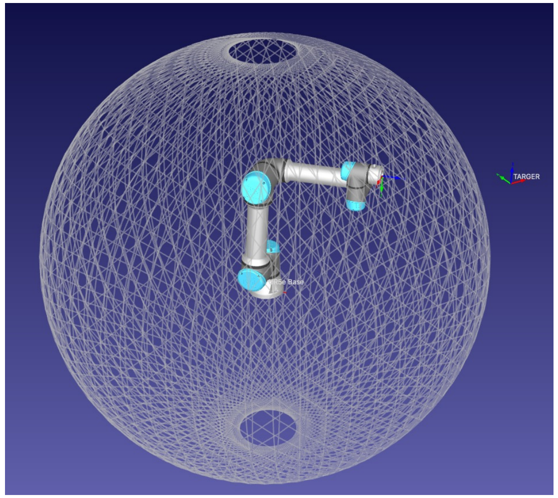
ές των αρθρώσεων συμβολίζονται μςε

Αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα και βασικά ερωτήματα

Βασικό ερώτημα 1: Υπάρχει λύση για το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα;



Στόχος

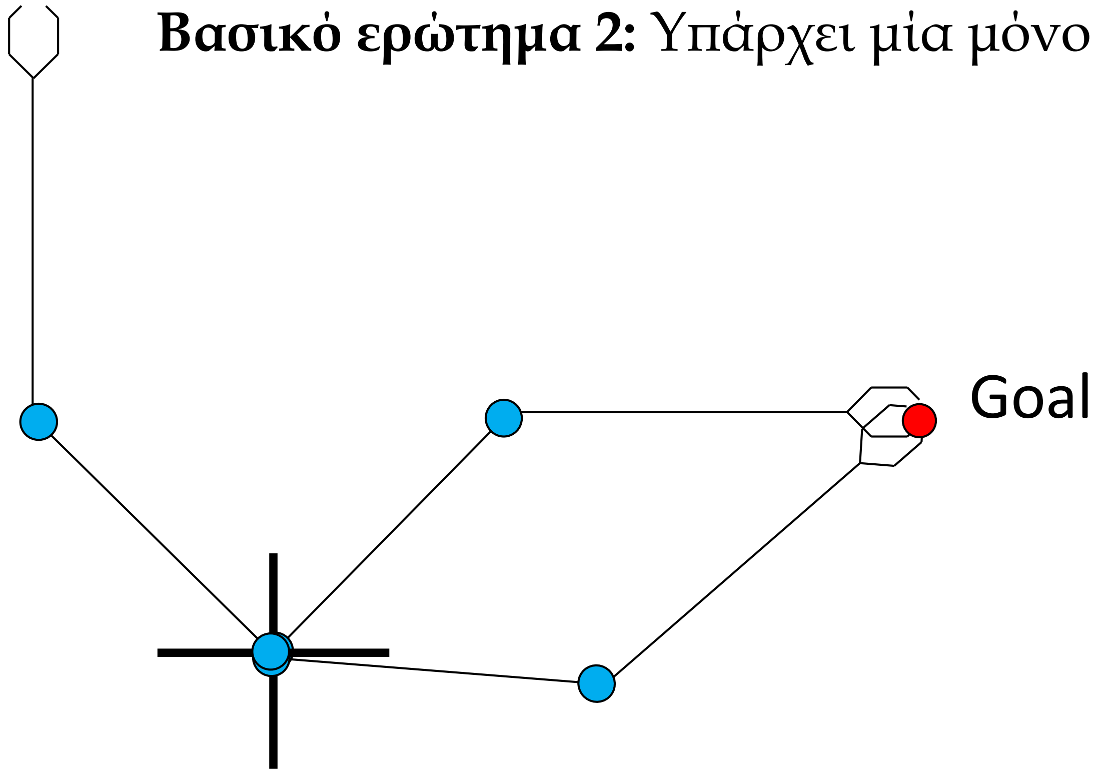


Για ένα στόχο έξω από τον χώρο εργασίας του ρομπότ δεν υπάρχει λύση

Αν υπάρχουν περιορισμοί στις μεταβλητές των αρθρώσεων, τότε οι πιθανές λύσεις να μην είναι όλες εφαρμόσιμες

Vrml [Inverse Kinematics - No solution]

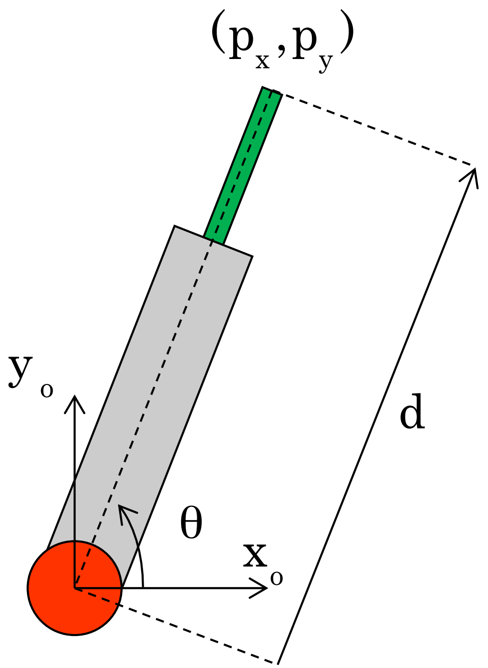
Βασικό ερώτημα 2: Υπάρχει μία μόνο λύση ;



Για ένα στόχο μέσα στον χώρο εργασίας του ρομπότ πιθανόν να υπάρχουν πάνω από μία λύσεις, ή ακόμα και να μην υπάρχουν λύσεις όπως π.χ. στην περίπτωση ύπαρξης ανυπέρβλητων εμποδίων

Κανόνες επιλογής λύσης

Παράδειγμα



Δεδομένα: (p_x, p_y)

Ζητούμενα: (θ, d)

Εξισώσεις από το ευθύ κινηματικό πρόβλημα

$$\left.\begin{aligned} p_x &= d\cos(\theta) \\ p_y &= d\sin(\theta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{p_y}{p_x}$$

$$\Rightarrow \theta = \operatorname{atan2}(p_y, p_x)$$

$$d = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Υλοποίηση στο MATLAB: Αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα για επίπεδο πολικό βραχίονα 2.β.3

Να υλοποιηθεί πρόγραμμα που να εκτελεί τα παρακάτω για τον προηγούμενο βραχίονα:

(1) Επιλύει το ευθύ κινηματικό πρόβλημα και απεικονίζει το ρομπότ σε ένα figure για θέσεις που έχει δώσει ο χρήστης

(2) Επιλύει το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα

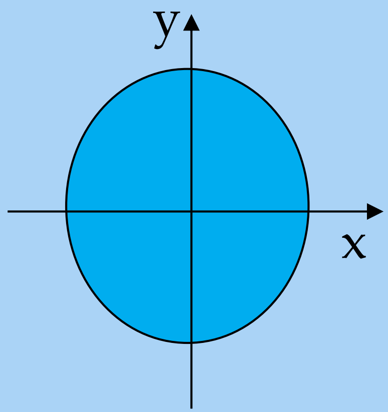
(3) Απεικονίζει σε ένα figure τον χώρο εργασίας του παρακάτω βραχίονα.

```
%LAB4_Askisi1
clc;  clear all; close all
 fprintf('Πολικος Επιπεδος Βραχιονας\n\n');

a=1;
while a==1

fprintf('(1)Επίλυση του ευθύ κινηματικού προβλήματος\n');
fprintf('(2)Επίλυση του αντιστροφου κινηματικού προβλήματος\n');
fprintf('(3)Απεικονιση του χωρου εργασιας\n');
fprintf('(4)Τελος προγραμματος\n\n');

select=input('Τι θελεις να γινει;\n');
switch select
    case 1
        fprintf('ΕΠΕΛΕΞΕΣ ΤΟ ΕΥΘΥ ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ\n');
            th=input('Δώσε τιμή για την περιστροφική άρθρωση (σε deg):');
        theta=th*pi/180;% Αναγωγη deg σε rad
              d=input('Δώσε  τιμή  για την πρισματική άρθρωση (σε cm):');

             px=d*cos(theta);
             py=d*sin(theta);
             fprintf('Οι συντεταγμενες του ακρου ειναι:\n');
             fprintf(' px=%6.2f cm\n py=%6.2f cm\n',px,py)

             line([0 px],[0 py],'linewidth',5)
             hold on
             plot(0,0,'ko','linewidth',15)
             grid on
 case 2
        fprintf('ΕΠΕΛΕΞΕΣ ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ
ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ\n');
        pxd=input('Δώσε τιμή για το px του ακρου
(σε cm):');
        pyd=input('Δώσε τιμή για το py του ακρου
(σε cm):');

        thetad=atan2(pyd,pxd);
             thd=thetad*180/pi;
               d=sqrt(pxd^2+pyd^2);
        fprintf(' theta=%6.2f deg\n d=%6.2f
cm\n',thd,d);

    case 3
      fprintf('ΕΠΕΛΕΞΕΣ ΤΗΝ ΠΡΟΒΟΛΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ
ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΤΟΥ ΒΡΑΧΙΟΝΑ\n');
        for k=0:.1:2*pi
            for d=10:1:20;
            px=d*cos(k);
            py=d*sin(k);
            plot(px,py,'.')
            hold on
            end
        end
         axis equal

    case 4
        a=0;
end

end
```

Η συνάρτηση **arctan2(y,x)** επιστρέφει την γωνία στο σωστό τεταρτημόριο

$$\theta = \arctan 2(y,x) = \begin{cases} 0 \le \theta \le 90 & \text{για} \quad +x \quad +y \\ 90 \le \theta \le 180 & \text{για} \quad -x \quad +y \\ -180 \le \theta \le -90 & \text{για} \quad -x \quad -y \\ -90 \le \theta \le 0 & \text{για} \quad +x \quad -y \end{cases}$$

θ: από –π μέχρι +π

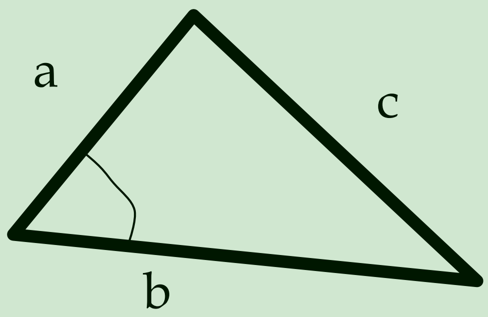


Αν θέλω να υπολογίσω μία άγνωστη γωνία **θ**, υπολογίζω το ημίτονο και το συνημίτονο αυτής και χρησιμοποιώ την **atan2(y,x)**

$$\sin(\theta) = \beta$$
$$\cos(\theta) = \alpha$$
$$\theta = a\tan 2(\beta, \alpha)$$

Νόμος των συνημητόνων

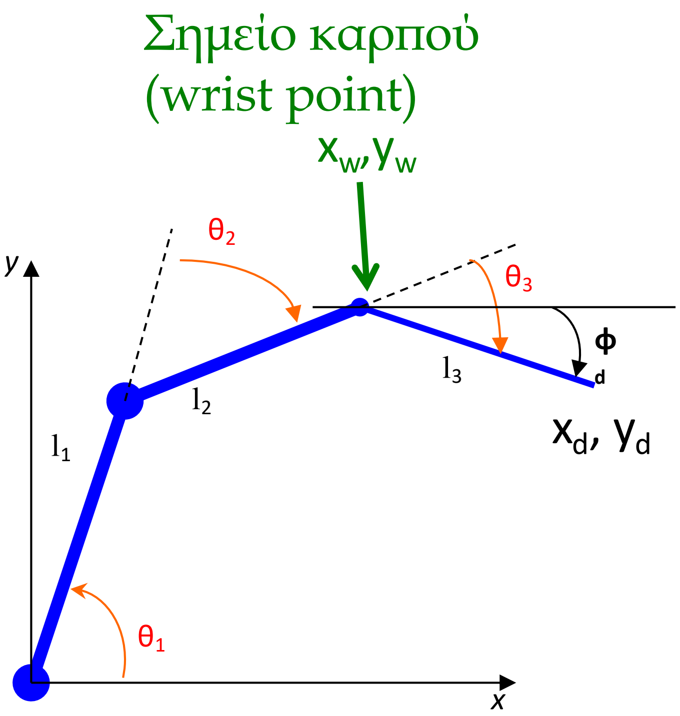
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{ab})$$



Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \sin(y)\cos(x)$$

Υπολογισμός της θέσης του καρπού όταν ξέρουμε την θέση και τον προσανατολισμό του άκρου



Δεδομένα: Θέλουμε το άκρο του ρομπότ να έχει συντεταγμένες $\mathbf{X_d}$, $\mathbf{Y_d}$ και να σχηματίζει γωνία $\boldsymbol{\varphi_d}$ ως προς τον άξονα x.

Ζητούμενο: οι γωνίες των αρθρώσεων q_1, q_2, q_3

Από τις γωνίες των αρθρώσεων και τον επιθυμητό προσανατολισμό μπορώ να γράψω ότι

$$\phi_d = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

Οι συντεταγμένες του καρπού $\mathbf{x_w}$, $\mathbf{y_w}$ μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_d - x_w = l_3 \cos(\phi_d) \Rightarrow \boxed{x_w = x_d - l_3 \cos(\phi_d)}$$

$$y_d - y_w = l_3 \sin(\phi_d) \Rightarrow \boxed{y_w = y_d - l_3 \sin(\phi_d)}$$

Επίσης, οι συντεταγμένες του καρπού $\mathbf{x_w}$, $\mathbf{y_w}$ μπορούν να υπολογιστούν εύκολα από το ευθύ κινηματικό πρόβλημα για την θέση του καρπού:

$$x_w = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$

$$y_w = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

Λύση:

Αν τετραγωνίσουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις και τις προσθέσουμε, έχουμε

$$x_w = l_1 c_1 + l_2 c_{12}$$
$$y_w = l_1 s_1 + l_2 s_{12}$$

$$x_w^2 + y_w^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 c_2$$

$$c_2 = \frac{x_w^2 + y_w^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

$$-1 \le c_2 \le 1$$

$$\phi_d = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

Αν αυτό δεν ισχύει τότε ο στόχος μας δεν μπορεί να επιτευχθεί.

Μπορούμε να γράψουμε $s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$

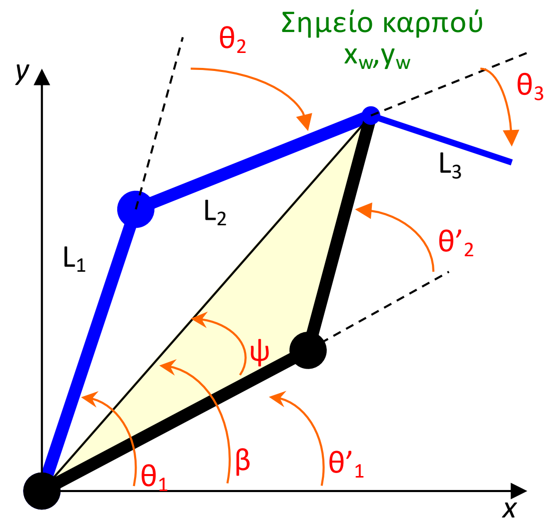
$$\theta_2 = \mathrm{Atan2}(s_2, c_2)$$

Το διπλό πρόσημο ± αντιστοιχεί στην πολλαπλή λύση με τον αγκώνα του βραχίονα πάνω ή κάτω.

λύση συνέχεια:

Επίσης $\beta = \mathrm{Atan2}(y_w, x_w)$

Παρατηρήστε ότι $\boxed{\theta_1 = \beta \pm \psi}$



Για τον υπολογισμό της **ψ** από το νόμο των συνημίτονων στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο

$$c_\psi = \frac{x_w^2 + y_w^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x_w^2 + y_w^2}} \qquad s_\psi = \pm\sqrt{1 - c_\psi^2} \qquad \psi = \mathrm{Atan2}(s_\psi, c_\psi)$$

όπου η λύση δίνεται για τιμές της ψ>0 δηλαδή από 0 έως 180 ώστε να διατηρηθεί η γεωμετρία του σχήματος

Επομένως $\boxed{\theta_3 = \phi_d - \theta_1 - \theta_2}$

Αλγόριθμος αντίστροφου κινηματικού για επίπεδο βραχίονα 3.β.ε.

y_d, x_d, ϕ_d

$$x_w = x_d - l_3 \cos(\phi_d)$$
$$y_w = y_d - l_3 \sin(\phi_d)$$

$$\theta_2 = \mathrm{Atan2}(s_2, c_2)$$

$$c_2 = \frac{x_w^2 + y_w^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$

$$-1 \le c_2 \le 1$$

$$s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}$$

$$\theta_1 = \beta \pm \psi$$

$$\beta = \mathrm{Atan2}(y_w, x_w)$$

$$\psi = \mathrm{Atan2}(s_\psi, c_\psi)$$

$$0 \le \psi \le \pi$$

$$c_\psi = \frac{x_w^2 + y_w^2 + l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 \sqrt{x_w^2 + y_w^2}}$$

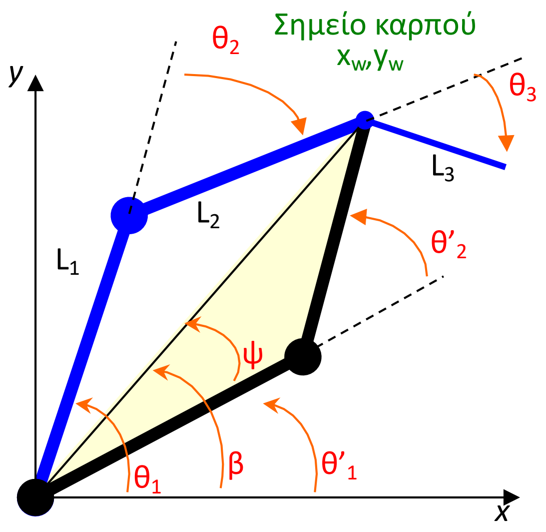
$$s_\psi = \pm\sqrt{1 - c_\psi^2}$$

$$\theta_3 = \phi_d - \theta_1 - \theta_2$$

Παρατηρήσεις

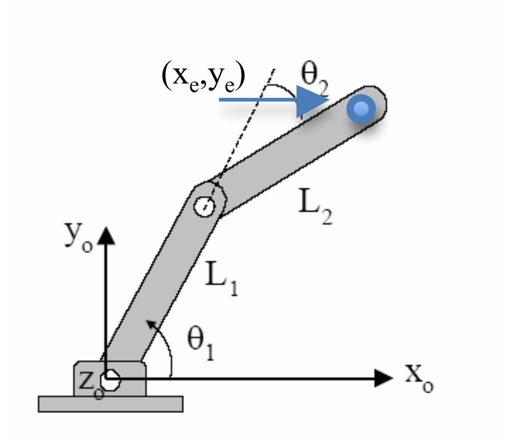
$\theta_2 < 0$ αγκώνας πάνω
$\theta_2 > 0$ αγκώνας κάτω

$\theta_1 = \beta + \psi$ αγκώνας πάνω $\quad \psi = \mathrm{abs}(\mathrm{atan2}(s\psi, c\psi))$
$\theta_1 = \beta - \psi$ αγκώνας κάτω $\quad \psi = \mathrm{abs}(\mathrm{atan2}(-s\psi, c\psi))$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ο παρακάτω επίπεδος βραχίονας δύο περιστροφικών αρθρώσεων θ_1, θ_2 με μήκη συνδέσμων $L_1 = L_2$ (δεν υπάρχουν περιορισμοί στις αρθρώσεις του ρομπότ δηλαδή, τα θ_1, θ_2 μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή).



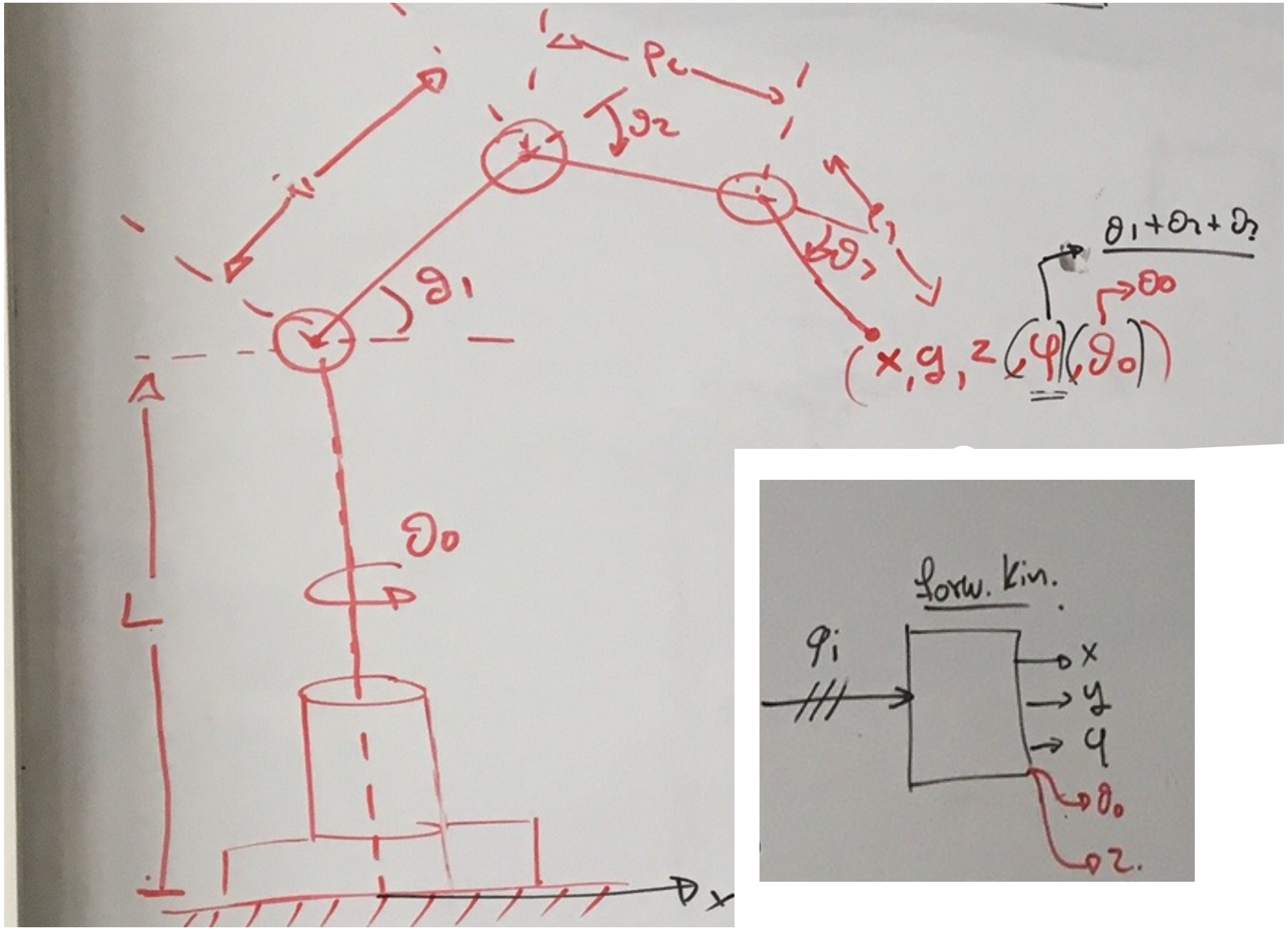
α) Πόσες λύσεις υπάρχουν για το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα για την δεδομένη θέση (x_e= 0, y_e= L_1);. Σχεδιάστε το βραχίονα σε αυτές τις λύσεις.

β) Υπάρχει κάποιο σημείο (x,y) του χώρου εργασίας για το οποίο υπάρχουν άπειρες λύσεις για το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα; Αν ναι, να υποδείξετε αυτή την θέση.

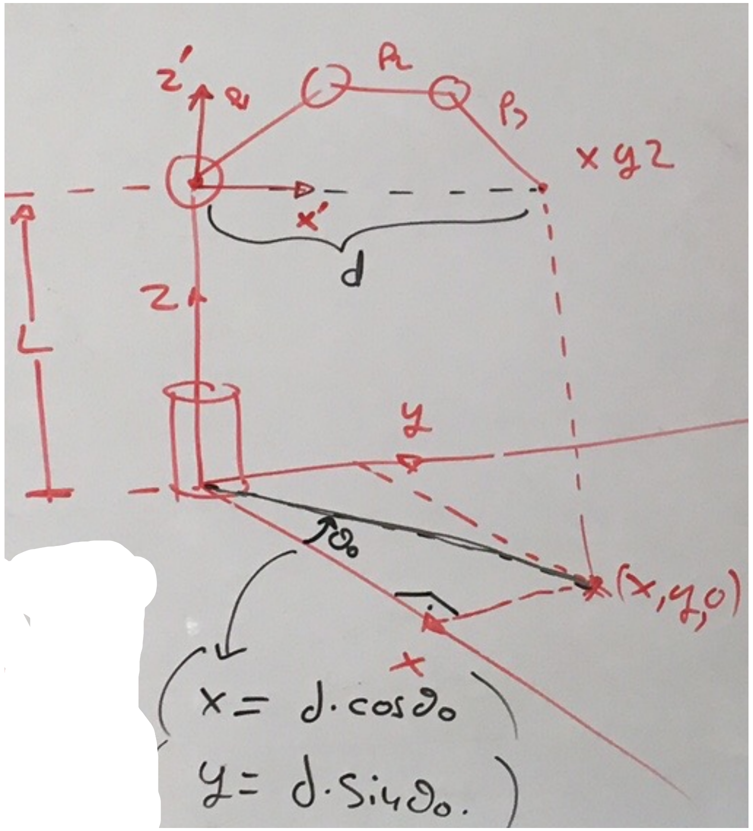
γ) Υπάρχει κάποιο σημείο (x,y) του χώρου εργασίας για το οποίο υπάρχει μοναδική λύση για το αντίστροφο κινηματικό πρόβλημα? Αν ναι, να υποδείξετε αυτή την θέση. Αν νομίζεται ότι υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία σχεδιάστε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων αυτών.

δ) Σχεδιάστε το χώρο εργασίας του βραχίονα στην περίπτωση που $L_2 = L_1/2$ και απαντήστε ξανά τα ερωτήματα β και γ.

Επέκταση στον τρισδιάστατο χώρο



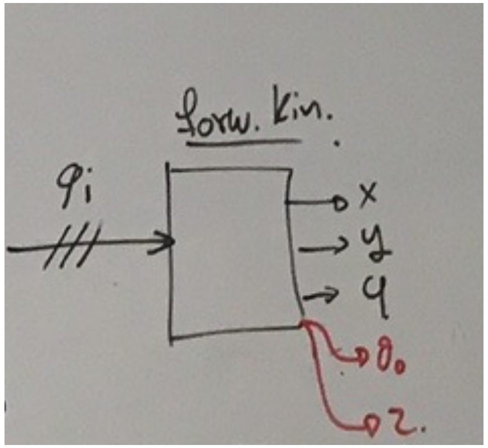
Ευθύ κινηματικό βραχίονα 4 β.ε. στον τρισδιάστατο χώρο



$$d = x' = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_{12} + \ell_3 c_{123}$$

$$z' = \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123}$$

$$z = L + \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123}$$



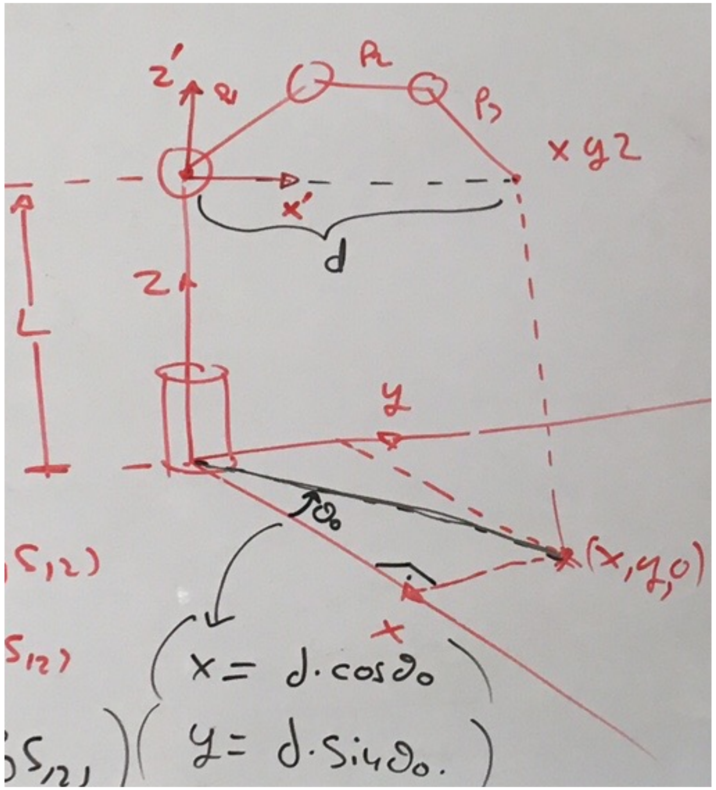
$$x = d\cos\theta_0$$

$$y = d\sin\theta_0$$

$$z = L + \ell_1 s_1 + \ell_2 s_{12} + \ell_3 s_{123}$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

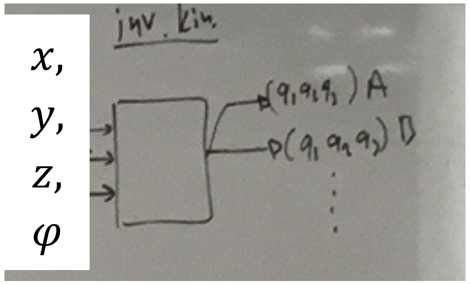
$$\theta_0$$

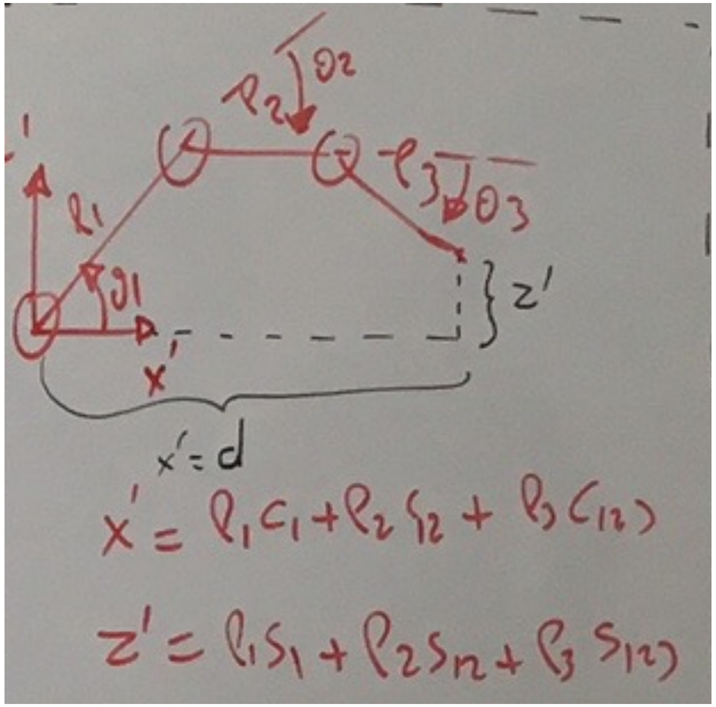


- Δεδομένα η θέση x,y,z και ο προσανατολισμός φ του βραχίονα.
- Αρχικά υπολογίζω το $\theta_o = atan2(y, x)$
- Ακολούθως ανάγω το πρόβλημα σε συντεταγμένες του πλαισίου {x′,y′,z′}:

$$z' = z - L \qquad x' = d = \sqrt{x + y^2}$$

- Επιλύω το αντίστροφο κινηματικό για τον επίπεδο βραχίονα 3.β.ε. για τις γωνίες $\theta_1, \theta_2, \theta_3$





Ευθύ και αντίστροφο κινηματικό βραχίονα 4 β.ε. στον τρισδιάστατο χώρο