Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Δρ. Φασουλάς Ιωάννης

jfasoulas@hmu.gr

Ρομποτική Ι

«Κινηματική στερεών σωμάτων – Ομογενής Μετασχηματισμός (Ο.Μ)»

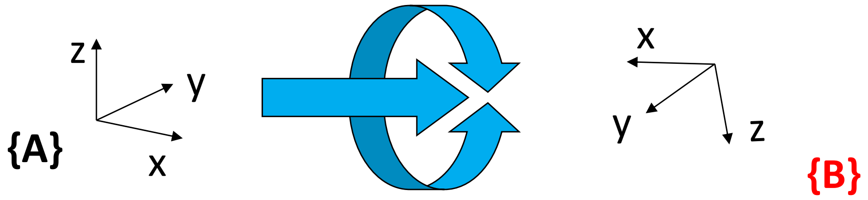
CSRL

Εργαστήριο Συστημάτων Ελέγχου & Ρομποτικής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών
Ηράκλειο Κρήτης, Ελλάς

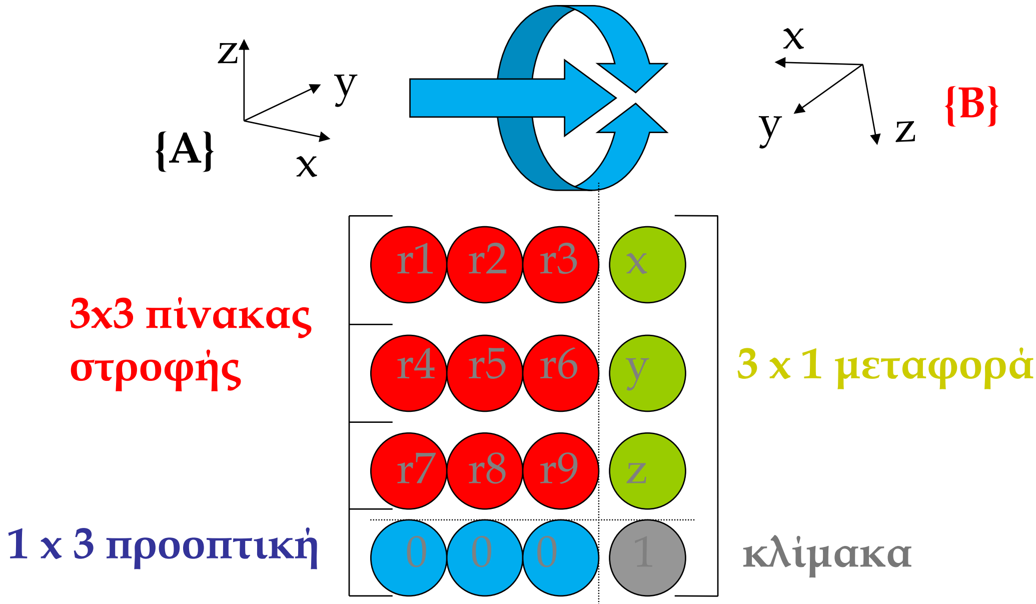
Ομογενής Μετασχηματισμός

- Συνδυάζει την πληροφορία της θέσης (διάνυσμα μετατόπισης) και του προσανατολισμού (πίνακας στροφής) σε μία ενιαία αναπαράσταση, εφόσον αυτά εκφράζονται ως προς κοινό σύστημα αναφοράς

$$\{B\} = (p_{ab}, R_{ab})$$



$$\{B\} = (p_{ab}, R_{ab})$$



Ομογενής μετασχηματισμός

ΕΡΩΤΗΣΗ

Ποιος από τους παρακάτω πίνακες είναι ένας ομογενής μετασχηματισμός

<u>Επιλέξτε απάντηση</u>

A: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 12.5 \\ 0 & 2 & 0 & 2.54 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

B: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 2.4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3.2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C: $\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 12.5 \\ 0 & 1 & 0 & 2.54 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

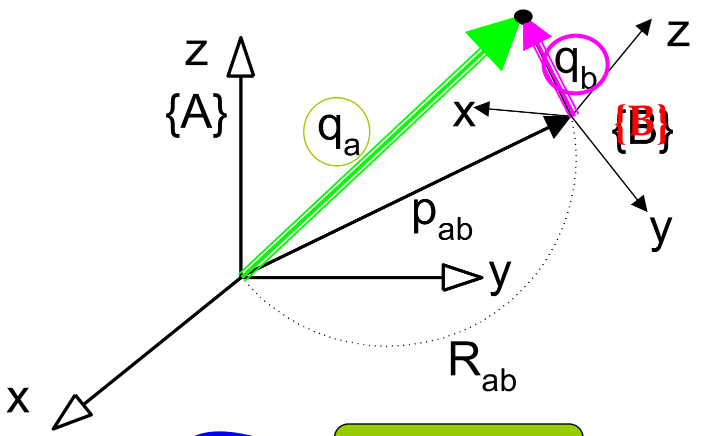
Ομογενής Μετασχηματισμός για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων

$q_b = [x_b \quad y_b \quad z_b]^T$

$q_a = [x_a \quad y_a \quad z_a]^T$

$$q_a = p_{ab} + R_{ab} q_b$$

Η πρόσθεση ανυσμάτων πρέπει να γίνεται στο ίδιο ΣΣ



Αντικαθίσταται από την περισσότερο παραστατική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} q_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & R_{ab} & & p_{ab} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

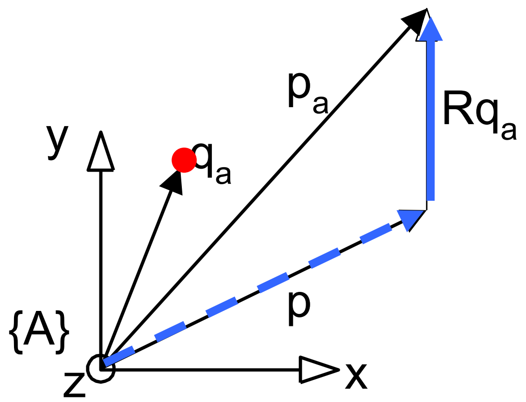
$$\boxed{\mathbf{q}_a = g_{ab} \mathbf{q}_b}$$

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} R_{ab} & p_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_b \in \Re^4$$

Ο Ομογενής Μετασχηματισμός ως τελεστής

$q_a = [x_a \quad y_a \quad z_a]^T$



Προκαλεί **πρώτα στροφή** του $\mathbf{q_a}$ όπως περιγράφει ο πίνακας στροφής **R και έπειτα μεταφορά** όπως περιγράφει το άνυσμα **p**

$$q_a = [\,x_a \quad y_a \quad z_a \quad 1\,]^T$$

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_a = g\mathbf{q}_a$$

Ομογενείς μετασχηματισμοί μετατόπισης και στροφής

Γενική μορφή ομογενούς μετασχηματισμού

$$g = \begin{bmatrix} R_{3x3} & p_{3x1} \\ \mathbf{0}_{1x3} & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{g = g_p g_r}$$

$$g_p = \begin{bmatrix} I_{3x3} & p_{3x1} \\ \mathbf{0}_{1x3} & 1 \end{bmatrix}$$

Ο.Μ. καθαρής μετατόπισης

$$g_r = \begin{bmatrix} R_{3x3} & 0_{3x1} \\ \mathbf{0}_{1x3} & 1 \end{bmatrix}$$

Ο.Μ. καθαρής στροφής

Ομογενείς μετασχηματισμοί καθαρής μετατόπισης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ένα σετ ομογενών μετασχηματισμών που εκφράζουν καθαρή μετατόπιση δίνεται από τους παρακάρτω πίνακες:

$$Trans_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Trans_{y,b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Trans_{z,c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ομογενείς μετασχηματισμοί καθαρής στροφής

Ένα σετ ομογενών μετασχηματισμών που εκφράζουν καθαρές περιστροφές δίνεται από τους παρακάτω πίνακες:

$$Rot_{x,\alpha}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&C\alpha&-S\alpha&0\\0&S\alpha&C\alpha&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Rot_{y,\phi}=\begin{bmatrix}C\phi&0&S\phi&0\\0&1&0&0\\-S\phi&0&C\phi&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad Rot_{z,\theta}=\begin{bmatrix}C\theta&-S\theta&0&0\\S\theta&C\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Αντίστροφος Ομογενής Μετασχηματισμός

Αν $g_{ab}=\begin{bmatrix}R&p\\\mathbf{0}&1\end{bmatrix}$ τότε $g_{ba}=\begin{bmatrix}R^T&-R^Tp\\\mathbf{0}&1\end{bmatrix}$

$$g_{ab}^{-1}=g_{ba}$$

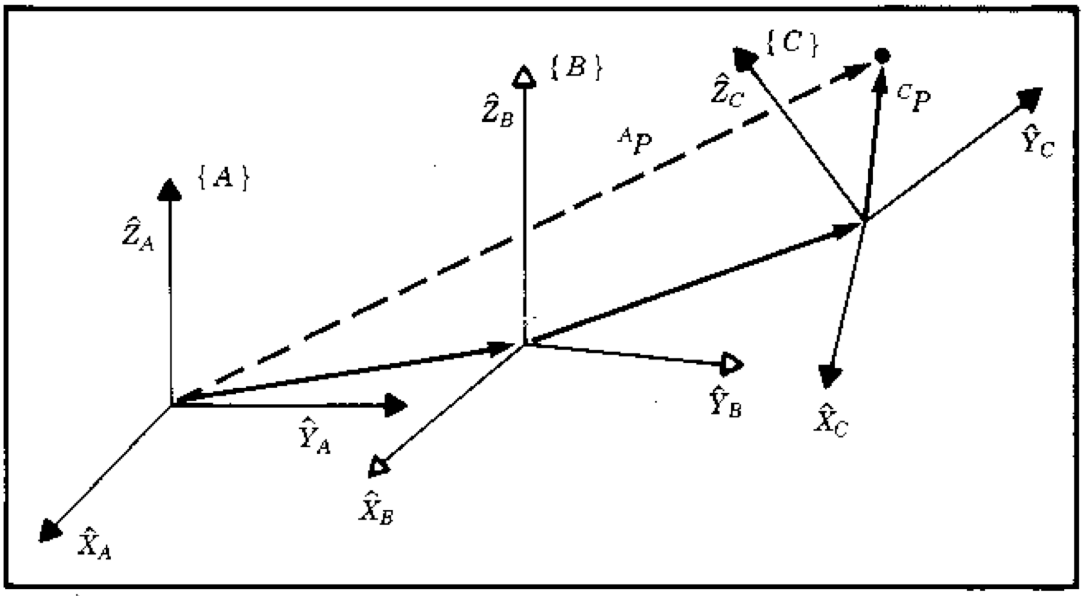
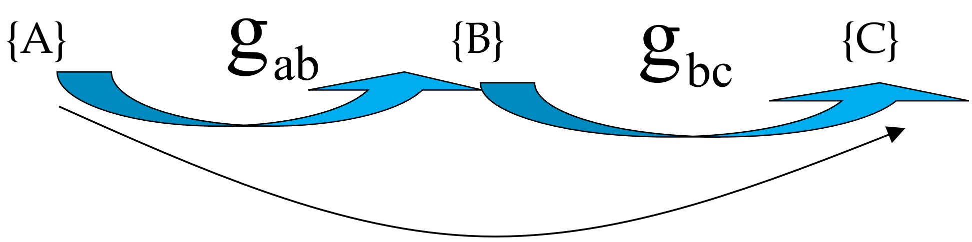


FIGURE 2.12 Compound frames: each is known relative to previous.

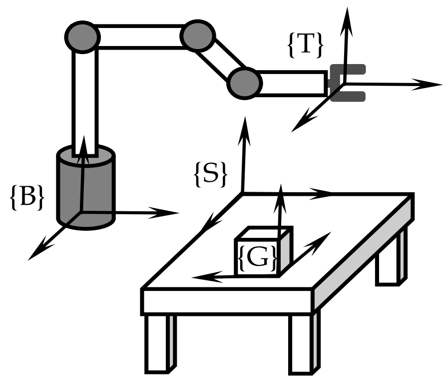


$$\boxed{g_{ac} = g_{ab} g_{bc}}$$

$$g_{ac} = g_{\cancel{ab}} g_{\cancel{bc}} = \begin{bmatrix} R_{ab} R_{bc} & R_{ab} p_{bc} + p_{ab} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Βασικό παράδειγμα σύνθεσης ομογενών μετασχηματισμών

ΑΣΚΗΣΗ
Στο σχήμα παρουσιάζεται ένα ρομπότ και ο πάγκος εργασίας πάνω στον οποίο υπάρχει ένας κύβος. Επίσης έχουν ορισθεί τα πλαίσια {B} στη βάση του ρομπότ, {T} στο άκρο της αρπάγης του ρομπότ, {S} στην άκρη από το πάγκο εργασίας και {G} του κύβου. Έστω ότι γνωρίζουμε την θέση και τον προσανατολισμό του άκρου της αρπάγης ως προς τη βάση του ρομπότ, δηλαδή τον $\mathbf{g_{bt}}$, του πάγκου εργασίας ως προς τη βάση του ρομπότ $\mathbf{g_{bs}}$, και του κύβου ως προς τον πάγκο εργασίας $\mathbf{g_{sg}}$. Να υπολογιστεί η θέση και ο προσανατολισμός του κύβου ως προς το εργαλείο του βραχίονα.



ΛΥΣΗ
Μπορούμε να εκφράσουμε την θέση και τον προσανατολισμό του κύβου ως προς τη βάση του ρομπότ από δύο δρόμους, μέσω του ρομπότ και μέσω τού πάγκου εργασίας. Έτσι δημιουργούμε μία εξίσωση ομογενών μετασχηματισμών την οποία λύνουμε για τον άγνωστο μετασχηματισμό:

$$g_{bt} g_{tg} = g_{bs} g_{sg} \Rightarrow \quad g_{tg} = g_{bt}^{-1} g_{bs} g_{sg}$$

Σύνθεση Ομογενών Μετασχηματισμών

g_1*g_2 δεν είναι το ίδιο με g_2*g_1

Στροφή ή μετακίνηση γύρω από το σταθερό πλαίσιο: => Πολλαπλασιασμός από αριστερά

Στροφή ή μετακίνηση γύρω από το κινούμενο πλαίσιο: => Πολλαπλασιασμός από δεξιά

Παράδειγμα υπολογισμού θέσης και προσανατολισμού ως προς κινούμενο πλαίσιο

Ο πίνακας ομογενούς μετασχηματισμού *H*, αναπαριστά μια περιστροφή γύρω από τον x-άξονα κατά α μοίρες, μια μετατόπιση κατά b μονάδες κατά μήκος του τρέχοντος x-άξονα, μια μετατόπιση κατά d μονάδες κατά μήκος του τρέχοντος z-άξονα και μια περιστροφή γύρω από τον τρέχων z-άξονα κατά θ μοίρες

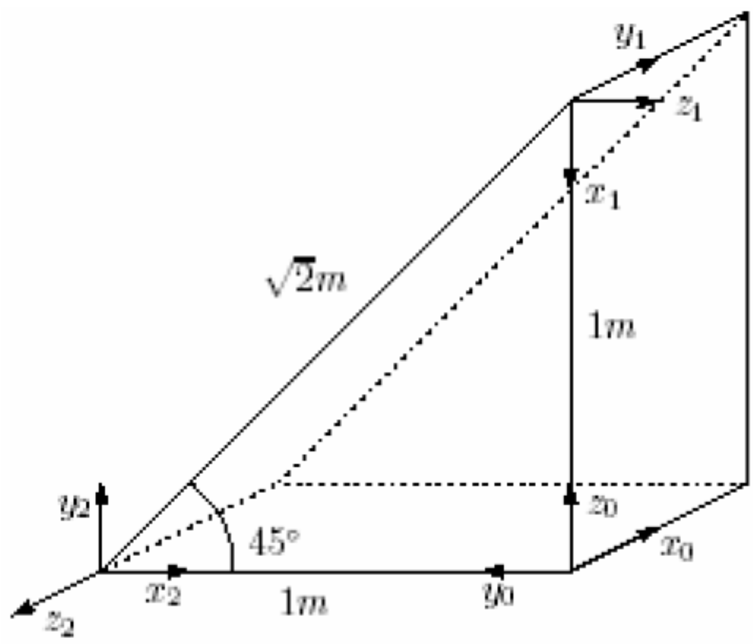
$$H = Rot_{x,\alpha} Trans_{x,b} Trans_{z,d} Rot_{z,\theta}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha & 0 \\ 0 & S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & b \\ C\alpha S\theta & C\alpha C\theta & -S\alpha & -S\alpha d \\ S\alpha S\theta & S\alpha C\theta & C\alpha & C\alpha d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα υπολογισμού Ομογενών Μετασχηματισμών

Να βρεθούν οι ομογενείς μετασχηματισμοί $\mathbf{g_{01}}$, $\mathbf{g_{02}}$, $\mathbf{g_{12}}$ ανάμεσα στα πλαίσια συντεταγμένων που δίνονται και αποδείξτε ότι $\mathbf{g_{02}=g_{01}g_{12}}$



Μετασχηματισμός βίδας: Μια ειδική περίπτωση

Έστω $g_p(k,a)$ ένας ομογενής μετασχηματισμός μεταφοράς σε απόσταση a κατά μήκος ενός μοναδιαίου άξονα k. Έστω $g_r(k,\theta)$ ένας ομογενής μετασχηματισμός στροφής γύρω από τον μοναδιαίο άξονα k κατά γωνία θ. Η σύνθεση των δύο αυτών μετασχηματισμών λέγεται **μετασχηματισμός βίδας**. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι στην περίπτωση του μετασχηματισμού βίδας **ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα** μεταξύ μεταφοράς και στροφής, δηλαδή $g_p(k,a)g_r(k,\theta)=g_r(k,\theta)g_p(k,a)$.

Η στροφή και η μεταφορά γύρω και κατά μήκος ενός μοναδιαίου άξονα λέγεται κίνηση βίδας και συμβολίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Screw}(k,a,\theta)=g_p(k,a)g_r(k,\theta)=g_r(k,\theta)g_p(k,a)\,.$$

Ο άξονας κ μπορεί να είναι ένας από τους x-y-z.

Ομογενείς μετασχηματισμοί μεταφοράς και στροφής

Γενική μορφή ομογενούς μετασχηματισμού

$$g=\begin{bmatrix} R & p \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boxed{g=g_p g_r}$$

$$g_p=\begin{bmatrix} I_3 & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **Μεταφορά**

$$g_r=\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ **Στροφή**