Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Δρ. Φασουλάς Ιωάννης

jfasoulas@hmu.gr

Ρομποτική Ι

«Κινηματική στερεών σωμάτων –
Προσανατολισμός με πίνακες στροφής»

Εργαστήριο Συστημάτων Ελέγχου & Ρομποτικής
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών
Σχολή Μηχανικών
Ηράκλειο Κρήτης, Ελλάς

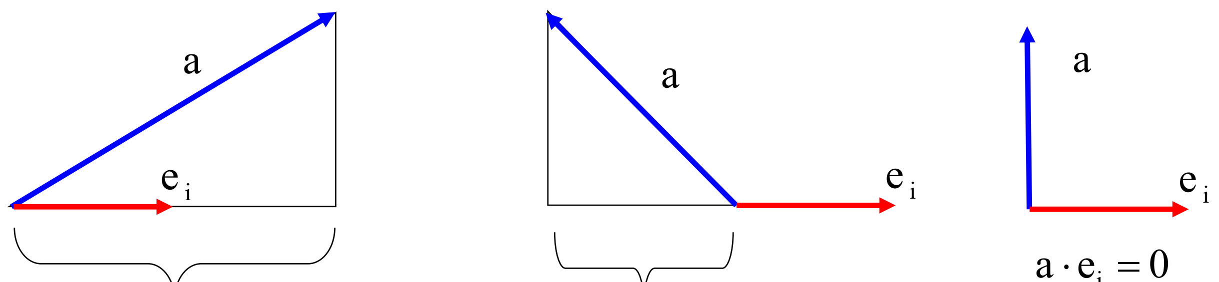
Απαραίτητες Βασικές έννοιες

Εσωτερικό γινόμενο ανύσματος με μοναδιαίο άνυσμα

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad e_i, \; i = x, y, z \qquad e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό γινόμενο $a \cdot e_i = e_i \cdot a$ **=?**

ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ
Εκφράζει την προβολή του **a** πάνω στο μοναδιαίο άνυσμα $\mathbf{e_i}$



$a \cdot e_i > 0$ $\qquad$ $a \cdot e_i < 0$ $\qquad$ $a \cdot e_i = 0$

Υπολογισμός εσωτερικού γινομένου $a \cdot e_i$

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad e_i,\ i = x, y, z \qquad e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a \cdot e_x = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} e_x = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_x$$

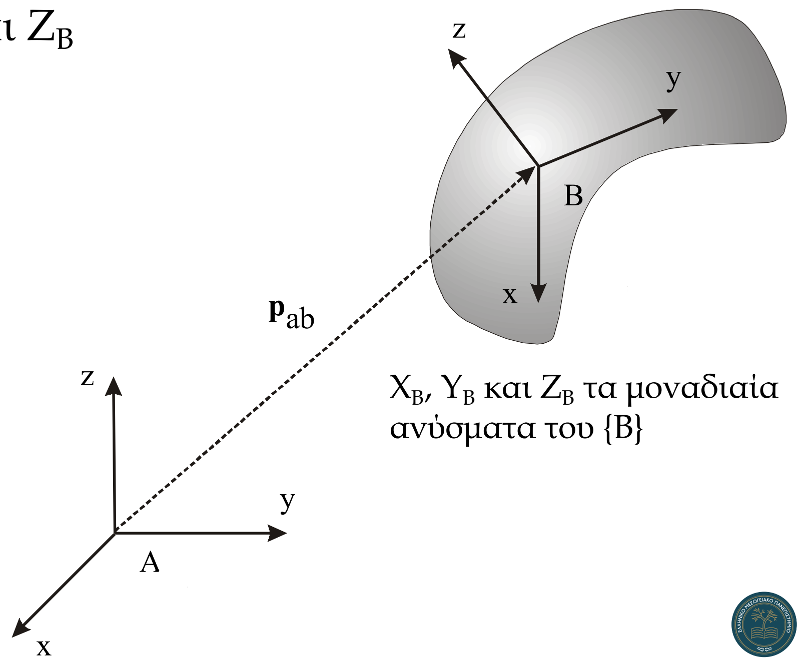
$$a \cdot e_z = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} e_z = a_z$$

$$a \cdot e_y = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} e_y = a_y$$

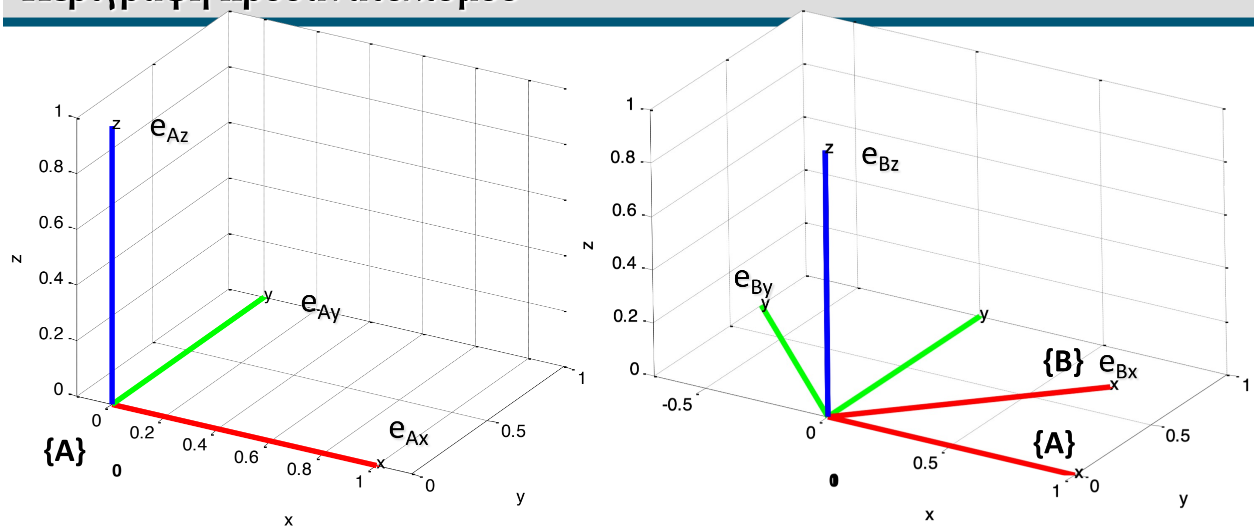
$$\boxed{a \cdot e_i = \|a\| \|e_i\| \cos(\widehat{a, e_i})}$$

Περιγραφή προσανατολισμού

- Πίνακας στροφής $R_{ab} \in \Re^{3\times3}$
  - Εκφράζει τις διευθύνσεις του {B}: X_B, Y_B και Z_B στο πλαίσιο {A}.



Περιγραφή προσανατολισμού

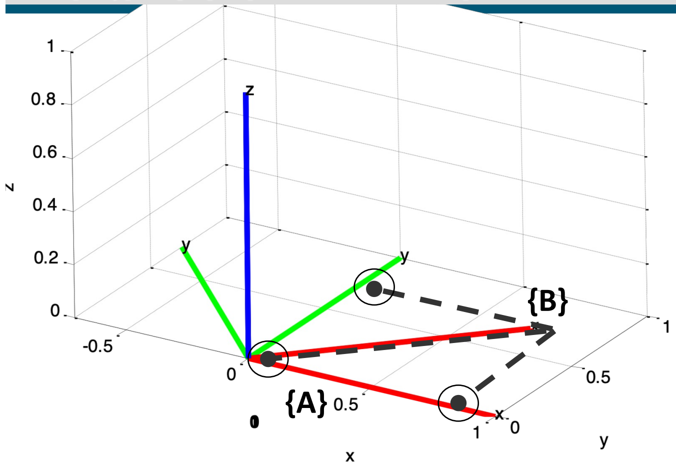


Για να περιγράψουμε τον προσανατολισμό του **{B}** ως προς το **{A}** πρέπει να βρούμε τον **πίνακα στροφής $\mathbf{R_{AB}}$**

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ</u>
Τα σημεία δεν έχουν προσανατολισμό

Περιγραφή προσανατολισμού



<u>Η πρώτη στήλη</u> του $\mathbf{R_{AB}}$ εκφράζει πως προβάλλεται το μοναδιαίο άνυσμα e_{Bx} του πλαισίου **{B}** στους μοναδιαίους άξονες e_{Ax}, e_{Ay}, e_{Az} του **{A}**

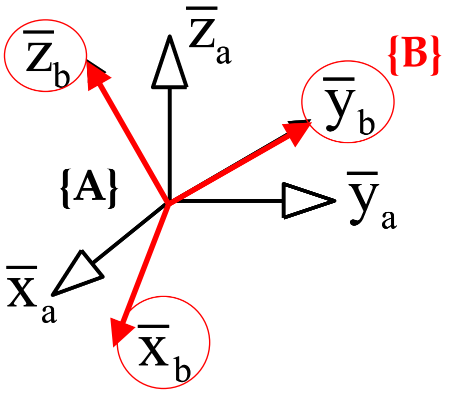
<u>Η δεύτερη στήλη</u> του $\mathbf{R_{AB}}$ εκφράζει πως προβάλλεται το μοναδιαίο άνυσμα e_{By} του πλαισίου **{B}** στους μοναδιαίους άξονες e_{Ax}, e_{Ay}, e_{Az} του **{A}**

<u>Η τρίτη στήλη</u> του $\mathbf{R_{AB}}$ εκφράζει πως προβάλλεται το μοναδιαίο άνυσμα e_{Bz} του πλαισίου **{B}** στους μοναδιαίους άξονες e_{Ax}, e_{Ay}, e_{Az} του **{A}**

Οι τρεις στήλες αποτελούν μοναδιαία ανύσματα και συνθέτουν έναν (3x3) πίνακα στροφής

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Τελικά ο πίνακα στροφής $\mathbf{R_{AB}}$ περιγράφει τον προσανατολισμό του **{B}** ως προς το **{A}**



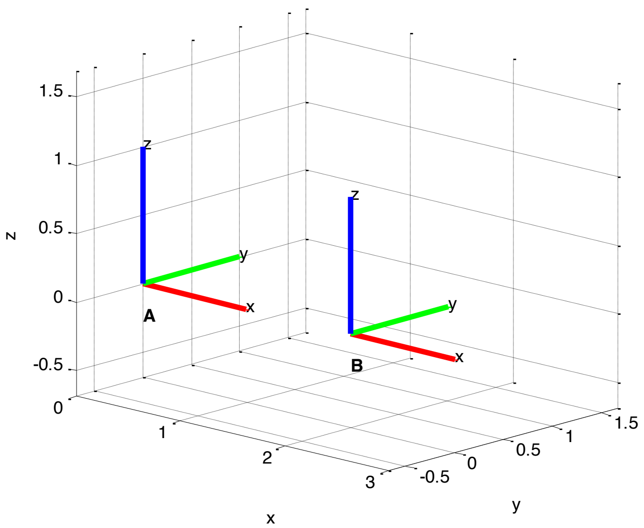
$$R_{ab} = \begin{bmatrix} x_{ab} & y_{ab} & z_{ab} \end{bmatrix}$$

$$x_{ab} = \begin{bmatrix} \bar{x}_a . \bar{x}_b \\ \bar{y}_a . \bar{x}_b \\ \bar{z}_a . \bar{x}_b \end{bmatrix} \quad y_{ab} = \begin{bmatrix} \bar{x}_a . \bar{y}_b \\ \bar{y}_a . \bar{y}_b \\ \bar{z}_a . \bar{y}_b \end{bmatrix} \quad z_{ab} = \begin{bmatrix} \bar{x}_a . \bar{z}_b \\ \bar{y}_a . \bar{z}_b \\ \bar{z}_a . \bar{z}_b \end{bmatrix}$$

Στήλες R_{ab} : μοναδιαία ανύσματα του {B} εκφρασμένα στο {A}

Γραμμές R_{ab} : μοναδιαία ανύσματα του {A} εκφρασμένα στο {B} $\quad R_{ab}^T = R_{ba}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι: Περιγραφή προσανατολισμού με πίνακα στροφής

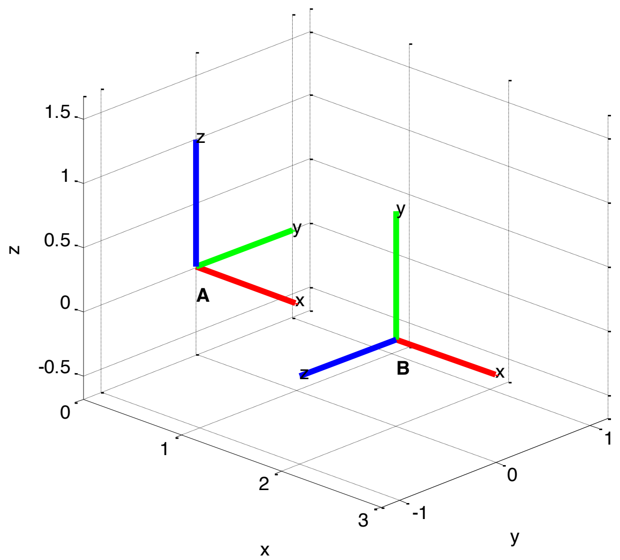


$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3x3}$$

Όταν ο πίνακας στροφής είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_{3x3} τότε τα πλαίσια συντεταγμένων που συσχετίζει έχουν τον ίδιο προσανατολισμό

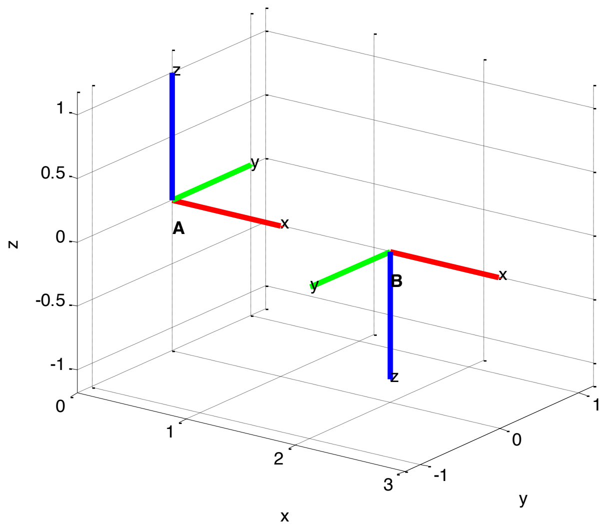
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ II: Περιγραφή προσανατολισμού με πίνακα στροφής



$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ III: Περιγραφή προσανατολισμού με πίνακα στροφής



$$R_{AB} = ?$$

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες του πίνακα στροφής

Στήλες = Ορθομοναδιαία Ανύσματα

$$R_{AB} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left\| {}^{A}e_{Bx} \right\| = \left\| {}^{A}e_{By} \right\| = \left\| {}^{A}e_{Bz} \right\| = 1$$

$$\left({}^{A}e_{Bx}\right)\cdot\left({}^{A}e_{By}\right) = 0$$

$$\left({}^{A}e_{Bx}\right)\cdot\left({}^{A}e_{Bz}\right) = 0$$

$$\left({}^{A}e_{By}\right)\cdot\left({}^{A}e_{Bz}\right) = 0$$

$$R_{AB} = \left[{}^{A}e_{Bx} \quad {}^{A}e_{By} \quad {}^{A}e_{Bz} \right]$$

Πίνακας στροφής Ορθογώνιος

$$R^{T}R = RR^{T} = I \quad R^{-1} = R^{T}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{AB}^{T} = R_{BA} = R_{AB}^{-1}}$$

Ορίζουσα πίνακα στροφής = +1

$$\Rightarrow \boxed{|R| = +1}$$

Ιδιότητες του πίνακα στροφής

ΕΡΩΤΗΣΗ

Ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα για τους πίνακες στροφής; Δηλαδή, $R_{AB}R_{CD} = R_{CD}R_{AB}$

Όπου R_{AB}, R_{CD} **αποτελούν πίνακες στροφής.**

Επιλέξτε απάντηση

A: Ναι

B: Όχι

Ιδιότητες του πίνακα στροφής

ΕΡΩΤΗΣΗ

Ποιος από τους παρακάτω πίνακες είναι ένας πίνακας στροφής;

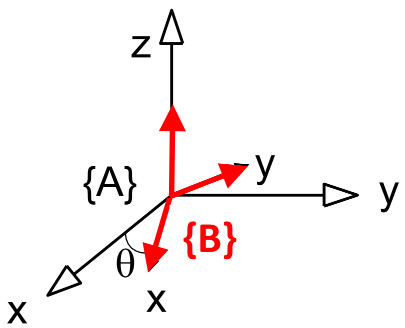
A: $R_{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

C: $R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

B: $R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1.2 & 0 \end{bmatrix}$

D: $R_{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Βασικοί Πίνακες Στροφής



$$Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix}$$

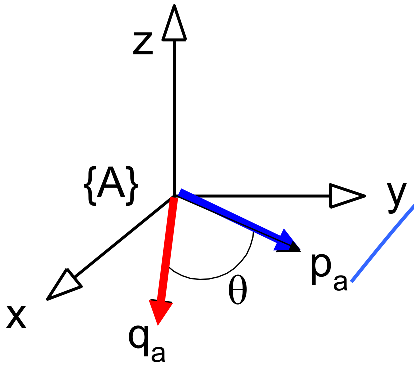
$$Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}$$

$$c\theta = \cos(\theta)$$
$$s\theta = \sin(\theta)$$

$$Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(i,\theta)^{-1} = Rot(i,-\theta) \quad i = x, y, z$$

Στροφή ανύσματος θέσης με τη βοήθεια του πίνακα στροφής



$$R = rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_a = \begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a \end{bmatrix}^T$$

$$\boxed{p_a = Rq_a}$$

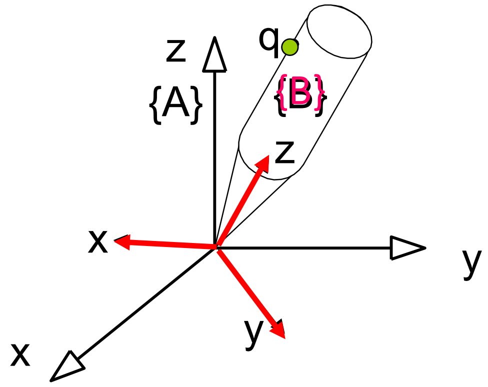
Παράδειγμα 1(Αλλαγή προσανατολισμού διανυσμάτων)

Έστω $\{A\}$ το πλαίσιο βάσης. Δίνεται το άνυσμα p με συντεταγμένες $(3,0,2)$ να βρεθούν οι νέες συντεταγμένες αυτού όταν στραφεί κατά γωνία $\frac{\pi}{4}$ γύρω από τον άξονα y του πλαισίου βάσης. Υπολογίστε το μέτρο του ανύσματος πριν και μετά την στροφή, τι πρέπει να ισχύει; Δίνονται οι βασικοί πίνακες στροφής:

$$Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακας στροφής για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων

- Ένας πίνακας στροφής χρησιμεύει στον μετασχηματισμό των συντεταγμένων ενός σημείου από ένα σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο. Εδώ τα δύο πλαίσια συντεταγμένων έχουν κοινή αρχή.



$$q_b = \begin{bmatrix} x_b & y_b & z_b \end{bmatrix}^T$$

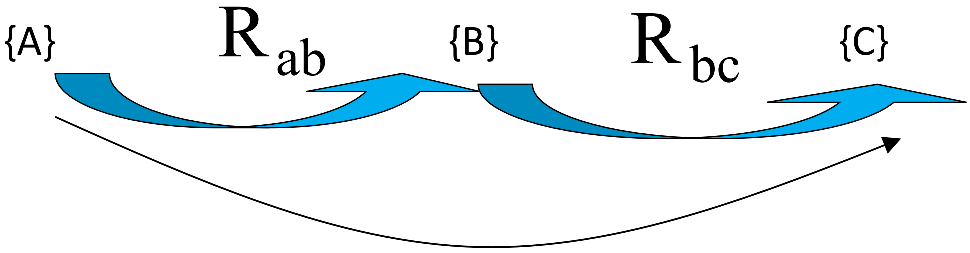
$$q_a = \begin{bmatrix} x_a & y_a & z_a \end{bmatrix}^T ?$$

$$q_a = R_{ab} q_b$$

Παράδειγμα 2 (Μετασχηματισμός συντεταγμένων ανάμεσα σε πλαίσια)

Έστω $\{A\}$ το πλαίσιο βάσης. Δίνεται πλαίσιο $\{B\}$ του οποίου ο προσανατολισμός σε σχέση με το πλαίσιο $\{A\}$ δίνεται από τον πίνακα στροφής $R_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Δίνεται το σημείο p με συντεταγμένες $(2,-2,-1)$ ως προς το πλαίσιο $\{B\}$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του p ως προς το πλαίσιο $\{A\}$; Έστω τώρα σημείο q με συντεταγμένες $(4,2,-2)$ ως προς το πλαίσιο $\{A\}$. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του q ως προς το πλαίσιο $\{B\}$; Σχεδιάστε τα παραπάνω πλαίσια με βάση τον πίνακα στροφής που δίνεται.

Σύνθεση πινάκων στροφής



$$R_{ac} = R_{a\cancel{b}} R_{\cancel{b}c}$$

Παράδειγμα 3 (Σύνθεση πινάκων στροφής)

Έστω τα πλαίσια συντεταγμένων {A}, {B}, {C} τα οποία συνδέονται με τους πίνακες στροφής $R_{\mathrm{AB}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $R_{AC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Να βρεθεί ο πίνακας στροφής R_{BC}.

Λύση

Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει ως εξής:

$$R_{BC} = R_{BA} R_{AC} = \left(R_{AB}\right)^T R_{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{bmatrix}$$

R1*R2 δεν είναι το ίδιο με R2*R1

Στροφή γύρω από το σταθερό πλαίσιο:
Πολλαπλασιασμός από αριστερά

Στροφή γύρω από το στρεφόμενο πλαίσιο
Πολλαπλασιασμός από δεξιά

Θεωρήστε την παρακάτω ακολουθία στροφών :

1. **Στροφή κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα-x του πλαισίου βάσης.**
2. **Στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον άξονα-z του πλαισίου βάσης.**
3. **Στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον τρέχον άξονα-x′.**

Ποιο γινόμενο πινάκων αντιστοιχεί στον τελικό πίνακα στροφής των παραπάνω διαδοχικών στροφών;

Επιλέξτε απάντηση

A: $\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)$

B: $\boxed{\mathrm{Rot}(z,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\theta)}$

C: $\mathrm{Rot}(z,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\theta)$

D: $\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)$

Ερώτηση 2 (Σύνθεση στροφών)

Θεωρήστε την παρακάτω ακολουθία στροφών :

1. Στροφή κατά γωνία φ γύρω από τον άξονα-x του πλαισίου βάσης.
2. Στροφή κατά γωνία θ γύρω από τον τρέχον άξονα-z.
3. Στροφή κατά γωνία ψ γύρω από τον τρέχον άξονα-x.
4. Στροφή κατά γωνία α γύρω από τον άξονα-z του πλαισίου βάσης.

Ποιο γινόμενο πινάκων αντιστοιχεί στον τελικό πίνακα στροφής των παραπάνω διαδοχικών στροφών;

Επιλέξτε απάντηση

A: $\mathrm{Rot}(z,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\alpha)\cdot\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)$

B: $\boxed{\mathrm{Rot}(z,\alpha)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)}$

C: $\mathrm{Rot}(z,\psi)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\alpha)$

D: $\mathrm{Rot}(z,\theta)\cdot\mathrm{Rot}(x,\varphi)\cdot\mathrm{Rot}(z,\alpha)\cdot\mathrm{Rot}(x,\psi)$