

# Περισσότερα για τις στροφές και τον προσανατολισμό



## Περισσότερα για τις στροφές και τον προσανατολισμό

- Η στροφή ενός ΣΣ μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα πίνακα στροφής
- Ο πίνακας στροφής έχει 9 στοιχεία
- Ο πίνακας στροφής μπορεί να παραμετροποιηθεί με διάφορους τρόπους:
  - Γωνίες στροφής γύρω από σταθερό πλαίσιο συντεταγμένων
  - Γωνίες στροφής γύρω από κινούμενο πλαίσιο συντεταγμένων (γωνίες Euler)
  - Στροφή γύρω από ισοδύναμο άξονα
  - Με τετραδόνια (quaternions)



3 Ανεξάρτητοι παράμετροι  $\longleftrightarrow$   $R$

★ 3 Γωνίες στροφής γύρω από τους βασικούς άξονες του αδρανειακού πλαισίου



ΒΑΣΙΚΕΣ ΓΩΝΙΕΣ X-Y-Z

★ 3 Γωνίες στροφής γύρω από τους βασικούς άξονες του κινουμένου πλαισίου

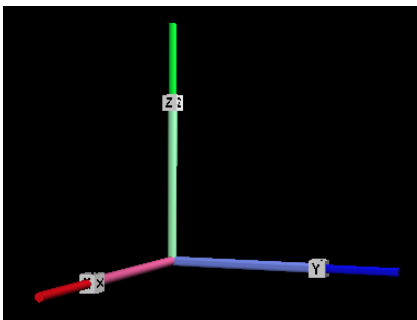


ΓΩΝΙΕΣ EULER Z-Y-X



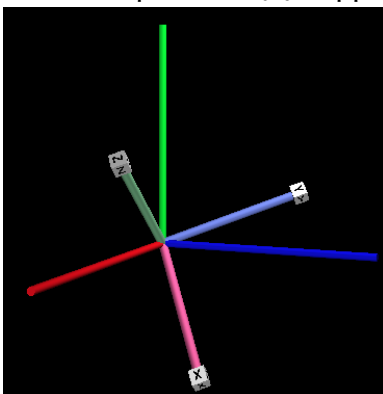
## Προσανατολισμός με 3 γωνίες στροφής

- Έστω δύο πλαίσια {A} και {B} τα οποία αρχικά ταυτίζονται



- Πλαίσιο {A}: το αδρανειακό πλαίσιο του κόσμου
- Πλαίσιο {B}: κινούμενο πλαίσιο

- Έστω τώρα ότι το {B} λαμβάνει τον παρακάτω προσανατολισμό



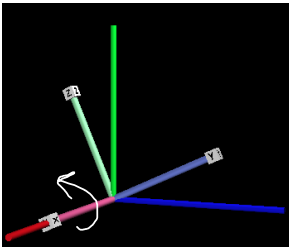
Αν και ο προσανατολισμός αυτός μπορεί να προκύψει με άπειρους τρόπους, μπορούμε να τον δημιουργήσουμε

- α) με **βασικές στροφές** γύρω από τους **ακίνητους άξονες** του {A}
- ή
- β) με **βασικές στροφές** γύρω από τους **κινούμενους άξονες** του {B}

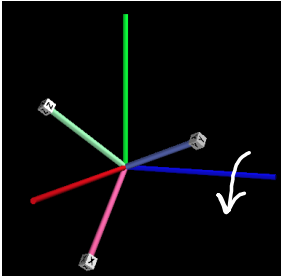
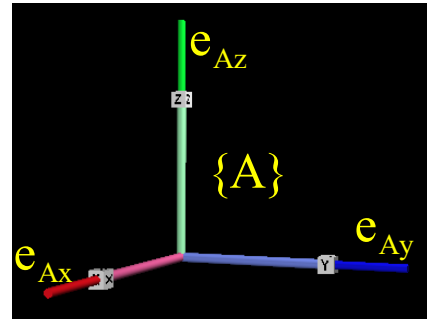


## Βασικές στροφές X-Y-Z γύρω από τους ακίνητους άξονες του {A}

$(\gamma, \beta, \alpha)$

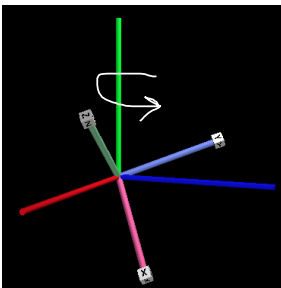


$$\{A\} \Rightarrow \text{rot}(x_A, \gamma)$$



$$\Rightarrow \text{rot}(y_A, \beta)$$

$$R_{ab}(\gamma, \beta, \alpha)_{XYZ} = \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(x, \gamma)$$



$$\Rightarrow \text{rot}(z_A, \alpha) \Rightarrow \{B\}$$

Αντί να περιγράψουμε τον προσανατολισμό με τον πίνακα στροφής Χρησιμοποιούμε μόνο τις γωνίες  $\gamma, \beta, \alpha$  που λέγονται **βασικές γωνίες X-Y-Z** γύρω από σταθερούς άξονες.

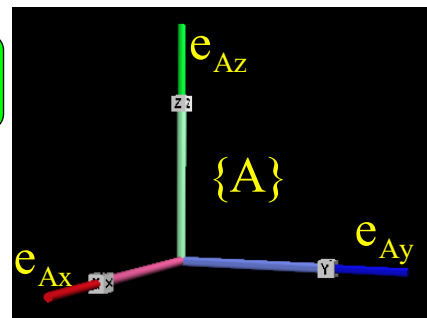


## Ερμηνεύοντας διαφορετικά τον πίνακα στροφής που προέκυψε πριν

$\{A\} \rightarrow \{B\}$

$$R_{ab}(\gamma, \beta, \alpha)_{XYZ} = \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(x, \gamma)$$

Διαφορετική ερμηνεία του παραπάνω πίνακα στροφής



$$\{A\} \Rightarrow \text{rot}(z_B, \alpha) \Rightarrow \text{rot}(y_B, \beta) \Rightarrow \text{rot}(x_B, \gamma) \Rightarrow \{B\}$$

$$\text{ZYX Γωνίες Euler} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Αντί να περιγράψουμε τον προσανατολισμό με τον πίνακα στροφής Χρησιμοποιούμε μόνο τις γωνίες  $\alpha, \beta, \gamma$ , που λέγονται **ZYX γωνίες Euler** (γύρω από τους κινούμενους άξονες).

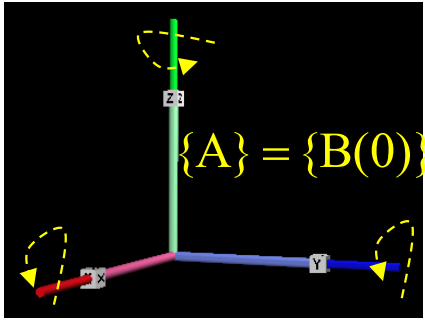


ZYX Γωνίες Euler  $\{A\} \equiv \{B(0)\}$   
 $\Rightarrow \text{rot}(z_B, \alpha) \Rightarrow \text{rot}(y_B, \beta) \Rightarrow \text{rot}(x_B, \gamma) \Rightarrow \{B\}$

$R_{ab}(\alpha, \beta, \gamma)_{ZYX} = \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(x, \gamma) =$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix} = R_{ab}(\gamma, \beta, \alpha)_{XYZ}$$



Προκύπτει ίδιος πίνακας στροφής με αυτόν που αντιστοιχεί στις βασικές στροφές X-Y-Z γύρω από τους ακίνητους άξονες του {A}



Σύνοψη

βασικές γωνίες στροφής  $X(\varphi_x)-Y(\varphi_y)-Z(\varphi_z)$   $\varphi_z = \alpha$   $\varphi_y = \beta$   $\varphi_x = \gamma$   
 γωνίες Euler  $Z(\varphi_z)-Y(\varphi_y)-X(\varphi_x)$

Δίνουν ίδιο πίνακα στροφής

$\text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(x, \gamma)$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & c_\alpha s_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma \\ s_\alpha c_\beta & s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta c_\gamma - c_\alpha s_\gamma \\ -s_\beta & c_\beta s_\gamma & c_\beta c_\gamma \end{bmatrix}$$



## Γωνία στροφής γύρω από ισοδύναμο άξονα (θεώρημα του EULER)

- Σύμφωνα με το θεώρημα του Euler κάθε προσανατολισμός μπορεί να εκφραστεί από μια στροφή γύρω από έναν κατάλληλο σταθερό άξονα κατά μια γωνία  $\theta$ .

$$R_{k,\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2 v_\theta + c_\theta & k_x k_y v_\theta - k_z s_\theta & k_x k_z v_\theta + k_y s_\theta \\ k_x k_y v_\theta + k_z s_\theta & k_y^2 v_\theta + c_\theta & k_y k_z v_\theta - k_x s_\theta \\ k_x k_z v_\theta - k_y s_\theta & k_y k_z v_\theta + k_x s_\theta & k_z^2 v_\theta + c_\theta \end{bmatrix}$$

$$v_\theta = 1 - c_\theta \quad k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

k: μοναδιαίο άνυσμα

$$\sin \beta = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \sin \alpha = \frac{k_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

$$\cos \beta = k_z \quad \cos \alpha = \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$$

- Η περιγραφή ενός προσανατολισμού με μια γωνία γύρω από ισοδύναμο άξονα δεν είναι μοναδική.



## Γωνία στροφής και ισοδύναμος άξονας περιστροφής από πίνακα στροφής

### Γωνία στροφής και ισοδύναμος άξονας

Έστω ένας πίνακας στροφής  $\mathbf{R}$  με στοιχεία  $r_{ij}$ , αποδεικνύεται ότι σε αυτόν τον πίνακα στροφής αντιστοιχεί ο άξονας περιστροφής  $\mathbf{k}$  και η γωνία περιστροφής  $\theta$ :

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right), \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Η αντιστοιχία «Πίνακας Στροφής» σε έκφραση «Άξονα-Γωνίας» δεν είναι μοναδική

π.χ. Αν επιλεγθεί σαν γωνία η  $2\pi - \theta$  τότε ο άξονας που βρίσκουμε είναι ο  $-\mathbf{k}$



Εστω πίνακας περιστροφής  $R$  ο οποίος αντιστοιχεί πρώτα σε περιστροφή  $90^\circ$  γύρω από τον  $z_0$  άξονα, μετά σε περιστροφή  $30^\circ$  γύρω από τον  $y_0$  άξονα και τέλος σε περιστροφή  $60^\circ$  γύρω από τον  $x_0$  άξονα του πλαισίου βάσης. **Να βρεθεί η γωνία στροφής  $\theta$  και ο ισοδύναμος άξονας  $k$  που αντιστοιχεί στον πίνακα  $R$ .**

$$R = R_{x,60}R_{y,30}R_{z,90} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \quad \theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

$$k = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ:

Για τον πίνακα στροφής έχουμε  $r_{11} + r_{22} + r_{33} = 0$ . Η γωνία υπολογίζεται ως  $\theta = \arccos(-\frac{1}{2}) = 120^\circ$

και ο αντίστοιχος άξονας περιστροφής είναι  $k = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2})^T$



Παράδειγμα 2: Γωνία στροφής και ισοδύναμος άξονας

Ένα πλαίσιο  $\{B\}$  έχει προέλθει από ένα πλαίσιο  $\{A\}$  με δύο στροφές. Η πρώτη στροφή γίνεται γύρω από ένα γενικευμένο άξονα  $k$  κατά γωνία  $\theta$  και η δεύτερη στροφή γύρω από τον άξονα  $z$  του κινούμενου πλαισίου κατά γωνία  $\phi$ . Ο γενικευμένος άξονας  $k$  προκύπτει από την στροφή του άξονα  $y$  του  $\{A\}$  γύρω από τον  $z$  κατά γωνία  $\psi$ . **Βρείτε τον προσανατολισμό  $\{A\} \rightarrow \{B\}$**

$R_{ab}$  **συναρτήσει των γωνιών  $\psi, \theta, \phi$ .**

$$R_{ab} = \text{Rot}(k, \theta)\text{Rot}(z, \phi)$$

$\text{Rot}(k, \theta)$

$\text{Rot}(z, \phi)$

άξονας  $k = \text{στροφή κατά } \text{Rot}(z, \psi) \text{ του άξονα } y \text{ του } \{A\}$

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_\psi \\ c_\psi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

$$R_{ab}(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} s_\psi^2 v_\theta + c_\theta & -s_\psi c_\psi v_\theta & c_\psi s_\theta & c_\phi & -s_\phi & 0 \\ -s_\psi c_\psi v_\theta & c_\psi^2 v_\theta + c_\theta & s_\psi s_\theta & s_\phi & c_\phi & 0 \\ -c_\psi s_\theta & -s_\psi s_\theta & c_\theta & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{k,\theta} & & & & & \\ & \text{Rot}(z, \phi) & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$





**Leonhard Euler (1707–1783)** was a Swiss mathematician and physicist who dominated eighteenth century mathematics. He was a student of Johann Bernoulli and applied new mathematical techniques such as calculus to many problems in mechanics and optics. He also developed the functional notation,  $y = F(x)$ , that we use today. In robotics we use his rotation theorem and his equations of motion in rotational dynamics.

He was prolific and his collected works fill 75 volumes. Almost half of this was produced during the last seventeen years of his life when he was completely blind.

It is common practice to refer to all 3-angle representations as Euler angles but this is underspecified since there are twelve different types to choose from. The particular angle sequence is often a convention within a particular technological field.

