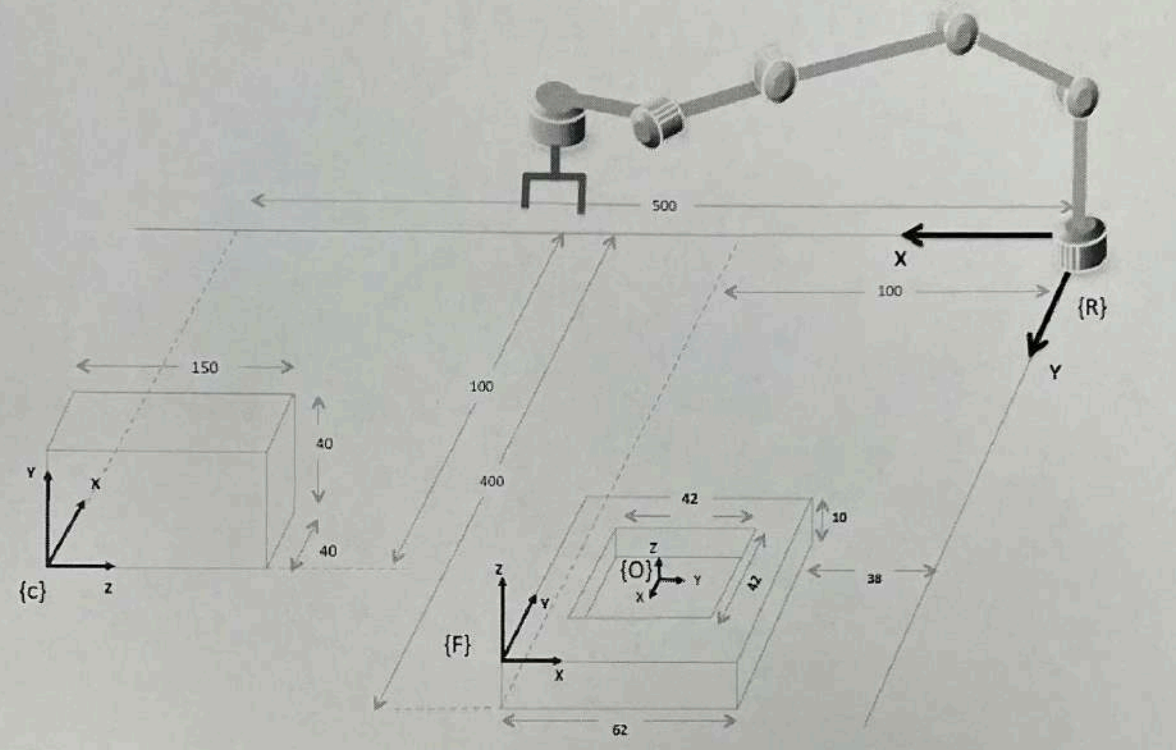
1 Εκφώνηση προβλήματος

Ένα ρομπότ 6 βαθμών ελευθερίας πρέπει να σηκώσει ένα αντικείμενο με τετραγωνική διατομή από μια συγκεκριμένη θέση και να το τοποθετήσει μέσα στο άνοιγμα μίας τετραγωνικής υποδοχής που βρίσκεται στην ίδια επιφάνεια σε σταθερή θέση. Οι διαστάσεις του αντικειμένου και της υποδοχής και τα πλαίσιά τους $\{C\}$ και $\{F\}$ καθώς και η αρχική κατάσταση του χώρου εργασίας φαίνονται στο σχήμα 1. Σαν αδρανειακό σύστημα αναφοράς θεωρείται το πλαίσιο της βάσης του βραχίονα $\{R\}$. Επίσης το πλαίσιο O βρίσκεται στο κέντρο του τετραγωνικού ανοίγματος της υποδοχής στην επάνω επιφάνειά της. Στο σχήμα 2 φαίνεται λεπτομέρεια από το σύστημα συντεταγμένων $\{E\}$ του άκρου της αρπάγης σε σχέση με το πλαίσιο $\{H\} \equiv \{6\}$ του καρπού του ρομπότ



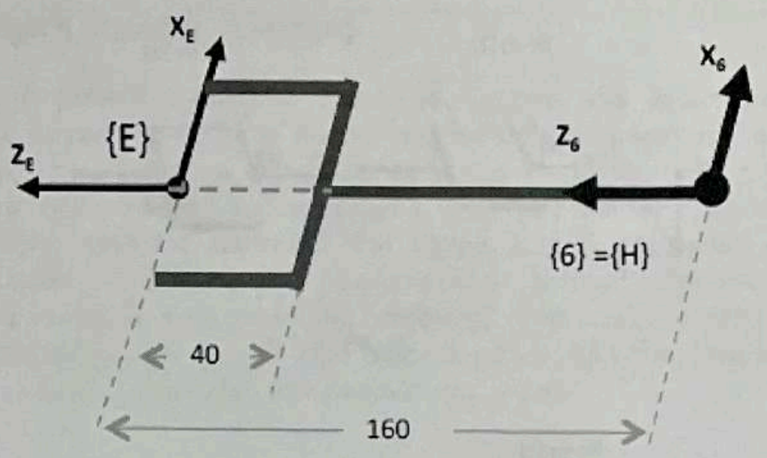
Σχήμα 1: Παρουσίαση προβλήματος

α) Βρείτε τους πίνακες ομογενούς μετασχηματισμού, $g_{6E}, g_{RC}, g_{FO}, g_{RF}$

β) Για να εκτελεστεί η παραπάνω εργασία πρέπει ο βραχίονας να περάσει από 4 βασικές θέσεις που παρουσιάζονται στο σχήμα 3:

1. Η θέση (1) όταν η αρπάγη είναι πλησίον του αντικειμένου.
2. Η θέση (2) όταν η αρπάγη έχει πιάσει το αντικείμενο.
3. Η θέση (3) όταν το αντικείμενο είναι πλησίον του πλαισίου υποδοχής.
4. Η τελική θέση (4) με το αντικείμενο τοποθετημένο στο άνοιγμα της υποδοχής.

Για να εκτελεστεί η επιθυμητή εργασία συναρμολόγησης θα δοθούν εντολές κίνησης στον βραχίονα με την μορφή των μετασχηματισμών $g_{RH}(i)$, για τις θέσεις i=1,2,3,4. Για κάθε μια από τις θέσεις αυτές διατυπώστε μία εξίσωση ομογενών μετασχηματισμών που να περιέχει σαν μοναδικό άγνωστο τον ομογενή μετασχηματισμό $g_{RH}(i)$ και υπολογίστε τον.



Σχήμα 2:

2 Επίλυση

2.1 Υπενθύμιση

Η σχέση μεταξύ ενός πίνακα ομογενούς μετασχηματισμού g και του αντίστροφου του g^{-1} είναι:

$$g = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Ερώτημα Α

Αρχικά βρίσκω τα σταθερά συστήματα g_{HE}, g_{RC}

3.1 Υπολογισμός g_{HE}

3.1.1 Προσανατολισμός

Τα συστήματα $\{H\}, \{E\}$ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, άρα

$$R_{HE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

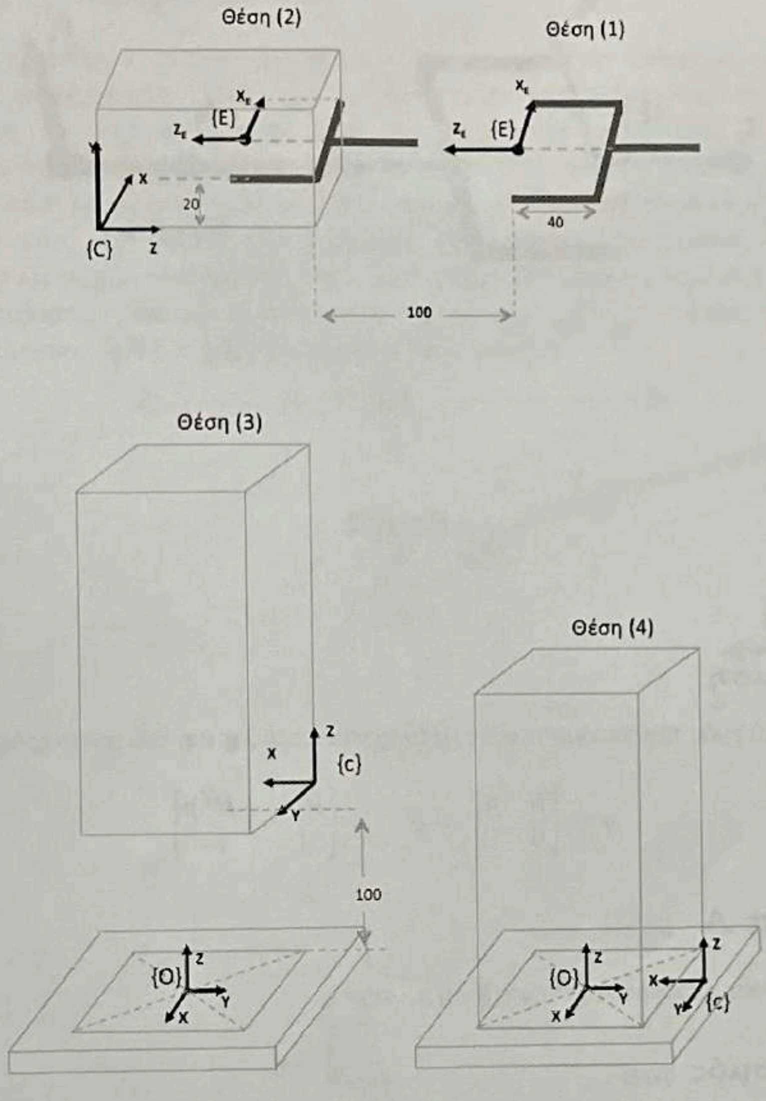
3.1.2 Διάνυσμα θέσης

Οι συντεταγμένες της αρχής του $\{E\}$ σε σχέση με το $\{H\}$ είναι (0,0, 160mm)

$$r_{E|H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 160 \end{bmatrix}$$

3.1.3 Ομογενής μετασχηματισμός

επομένως:



Σχήμα 3:

$$g_{HE} = \begin{bmatrix} R_{HE} & r_{E|H} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 160 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Υπολογισμός g_{RC}

3.2.1 Προσανατολισμός

Για να βρούμε τον προσανατολισμό (δηλαδή τον πίνακα στροφής), προβάλουμε τα μοναδιαία διανύσματα του $\{C\}$ στα μοναδιαία διανύσματα του $\{R\}$.

$$R_{HE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπενθυμίζεται ότι:

Η 1η στήλη $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι η προβολή του x_C στα x_R, y_R, z_R

Η 2η στήλη $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι η προβολή του y_C στα x_R, y_R, z_R

Η 3η στήλη $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ είναι η προβολή του z_C στα x_R, y_R, z_R

3.2.2 Διάνυσμα θέσης

$$r_{C|R} = \begin{bmatrix} 500 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2.3 Ομογενής μετασχηματισμός

επομένως:

$$g_{RC} = \begin{bmatrix} R_{RC} & r_{C|R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 500 \\ -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Υπολογισμός g_{FO}

3.3.1 Προσανατολισμός

Για να βρούμε τον προσανατολισμό (δηλαδή τον πίνακα στροφής), προβάλουμε τα μοναδιαία διανύσματα του $\{O\}$ στα μοναδιαία διανύσματα του $\{F\}$.

$$R_{FO} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Διάνυσμα θέσης

Υπενθυμίζεται ότι:

- τα F, O είναι συνεπίπεδα και βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο το οποίο είναι παράλληλο στο XY του $\{F\}$
- Το O βρίσκεται ακριβώς στο κέντρο συμμετρίας του πλαισίου 62[mm]x62[mm].

Εξαιτίας των παραπάνω προκύπτει ότι

$$r_{O|F} = \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3.3 Ομογενής μετασχηματισμός

επομένως:

$$g_{FO} = \begin{bmatrix} R_{FO} & r_{O|F} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 31 \\ -1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Υπολογισμός g_{RF}

3.4.1 Προσανατολισμός

Για να βρούμε τον προσανατολισμό (δηλαδή τον πίνακα στροφής), προβάλουμε τα μοναδιαία διανύσματα του $\{F\}$ στα μοναδιαία διανύσματα του $\{R\}$.

$$R_{RF} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Διάνυσμα θέσης

$$r_{F|R} = \begin{bmatrix} 100 \\ 400 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3.4.3 Ομογενής μετασχηματισμός

επομένως:

$$g_{RF} = \begin{bmatrix} R_{RF} & r_{F|R} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Ερώτημα Β

4.1 Γενικά

Σε κάθε περίπτωση η θέση του άκρου της ΑΡΠΑΓΗΣ g_{RE} μπορεί να βρεθεί με δύο τρόπους:

1. από τον σχηματισμό του ΡΟΜΠΟΤ (ΡΟΜΠΟΤ - ΑΡΠΑΓΗ) $g_{RH} \cdot g_{HE}$,
2. από την σχετική θέση του αντικειμένου και της αρπάγης (Αντιχ - Αρπάγη) $g_{RC} \cdot g_{CE}$

Οι παραπάνω δύο λύσεις θα πρέπει να δίνουν τον ίδιο ομογενή μετασχηματισμό για όλες τις πιθανές θέση. Δηλαδή:

$$g_{RH} \cdot g_{HE} = g_{RC} \cdot g_{CE} \Rightarrow$$

$$g_{RH} = g_{RC} \cdot g_{CE} \cdot g_{HE}^{-1}$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός ισχύει σε κάθε θέση και μας επιτρέπει να βρούμε τον ομογενή μετασχηματισμό g_{RH} της βάσης της αρπάγης (ή Καρπός της αρπάγης) σε σχέση με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

4.2 Θέση 1 - Προσέγγιση αντικειμένου

Ψάχνω το $g_{RH}(1)$: την θέση και τον προσανατολισμό της βάσης της αρπάγης για να φτάσει το άκρο της αρπάγης στην θέση 1.

Όταν το ρομπότ βρίσκεται στην θέση (1) ο g_{RH} θα έχει την μορφή :

$$g_{RH}(1) = g_{RC}(1) \cdot g_{CE}(1) \cdot g_{HE}^{-1}(1)$$

οπου:

- $g_{RC}(1)$ έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο μέρος
- $g_{CE}(1)$ μπορώ να το υπολογίσω από το σχήμα στην θέση (1)

$$R_{CE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad r_{E|C}(1) = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 250 \end{bmatrix}$$

άρα

$$g_{CE}(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{HE}^{-1}(1)$ ξέρω το $g_{HE}(1)$ άρα μπορώ να βρω τον αντίστροφο

$$g_{HE}(1) = \begin{bmatrix} R_{HE} & p_{HE} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow g_{HE}^{-1}(1) = \begin{bmatrix} R_{HE}^T & -R_{HE}^T p_{HE} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3 Θέση 2 - Λαβή αντικειμένου

Ψάχνω το $g_{RH}(2)$: την θέση και τον προσανατολισμό της βάσης της αρπάγης για να φτάσει το άκρο της αρπάγης στην θέση 2.

Όταν το ρομπότ βρίσκεται στην θέση (2), τότε θα πρέπει:

$$g_{RH}(2) = g_{RC}(2) \cdot g_{CE}(2) \cdot g_{HE}^{-1}(2)$$

όπου:

- $g_{RC}(2)$ Το ίδιο με προηγούμενο ερώτημα γιατί δεν έχει μετακινηθεί το αντικείμενο
- $g_{CE}(2)$ μπορώ να το υπολογίσω από το σχήμα στην θέση (2)

$$R_{CE}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad r_{E|C}(2) = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 110 \end{bmatrix}$$

άρα

$$g_{CE}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{HE}^{-1}(2)$: το ίδιο όπως το $g_{HE}^{-1}(1)$ γιατί δεν αλλάζει η σχετική θέση καρπού και αρπάγης

4.4 Θέση 3 - Πάνω από την βάση

Ψάχνω το $g_{RH}(3)$: την θέση και τον προσανατολισμό της βάσης της αρπάγης για να φτάσει το άκρο της αρπάγης στην θέση 3.

Πιο συγκεκριμένα όταν το ρομπότ βρίσκεται στην θέση (3), τότε θα πρέπει:

$$g_{RH}(3) = g_{RC}(3) \cdot g_{CE}(3) \cdot g_{HE}^{-1}(3)$$

όπου:

- $g_{RC}(3)$ ο νέος προσανατολισμός και θέση του αντικειμένου σε σχέση με το $\{R\}$

$$R_{RC}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r_{E|C} = \begin{bmatrix} 49 \\ 349 \\ 10 \end{bmatrix}$$

άρα

$$g_{RC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 49 \\ 0 & 1 & 0 & 349 \\ 0 & 0 & 1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Εναλλακτικά:</u>

$$g_{RC}(3) = g_{RF}(3) \cdot g_{FO}(3) \cdot g_{OC}(3)$$

όπου:

- $g_{RF}(3)$: έχει υπολογιστεί στο ερώτημα Α.4

$$g_{RF} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{FO}(3)$: έχει υπολογιστεί στο ερώτημα Α.3

$$g_{FO} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 31 \\ -1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{OC}(3)$: μπορεί να υπολογιστεί από το σχήμα 3 στην θέση 3

$$R_{OC}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r_{C|O} = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 100 \end{bmatrix}$$

άρα

$$g_{OC}(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -20 \\ -1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{CE}(3)$ είναι το ίδιο με το $g_{CE}(2)$, γιατί η αρπάγη και το αντικείμενο δεν άλλαξαν σχετική θέση

$$R_{CE}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad r_{E|C}(3) = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 110 \end{bmatrix}$$

άρα

$$g_{CE}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & -1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 110 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{HE}^{-1}(3)$: το ίδιο όπως το $g_{HE}^{-1}(1)$γιατί δεν αλλάζει η σχετική θέση καρπού και αρπάγης

4.5 Θέση 4 - Μέσα στην υποδοχή

Ψάχνω το $g_{RH}(4)$: την θέση και τον προσανατολισμό της βάσης της αρπάγης για να φτάσει το άκρο της αρπάγης στην θέση 4.

Όταν το ρομπότ βρίσκεται στην θέση (4), τότε θα πρέπει:

$$g_{RH}(4) = g_{RC}(4) \cdot g_{CE}(4) \cdot g_{HE}^{-1}(4)$$

όπου:

- $g_{RC}(4)$ ο νέος προσανατολισμός και θέση του αντικειμένου σε σχέση με το $\{R\}$

$$R_{RC}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r_{E|C} = \begin{bmatrix} 49 \\ 349 \\ 0 \end{bmatrix}$$

άρα

$$g_{RC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 49 \\ 0 & 1 & 0 & 349 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Εναλλακτικά:</u>

$$g_{RC}(4) = g_{RF}(4) \cdot g_{FO}(4) \cdot g_{OC}(4)$$

όπου:

- $g_{RF}(4)$: ίδιο $g_{RF}(3)$

$$g_{RF} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{FO}(4)$: ίδιο $g_{FO}(3)$

$$g_{FO} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 31 \\ -1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{OC}(4)$: μπορεί να υπολογιστεί από το σχήμα 3 στην θέση (4)

$$R_{OC}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r_{C|O} = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ -10 \end{bmatrix}$$

άρα

$$g_{OC}(4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -20 \\ -1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $g_{CE}(4)$ είναι το ίδιο με το $g_{CE}(2), g_{CE}(3)$, γιατί η αρπάγη και το αντικείμενο δεν άλλαξαν σχετική θέση
- $g_{HE}^{-1}(4)$: το ίδιο όπως το $g_{HE}^{-1}(1)$ γιατί δεν αλλάζει η σχετική θέση καρπού και αρπάγης